Leccion 5.
Vectores tangente

Estudiar: 1-3, 9-17, 20.

5.1.–Primera definicion.

1. Sea X una variedad diferenciable (ie., de clase C^∞) n-dimensional y x un punto de X. Consideremos el conjunto de todas las funciones C^∞ reales, cada una definida en algun entorno abierto de x, y denotemoslo por $\mathcal{F}(x)$.

2. Si $f, g \in \mathcal{F}(x)$, entonces $f + g$ y $f \cdot g$ estan definidas en la interseccion de los respectivos entornos donde f y g estan definidos; λf, $(\lambda \in \mathbf{R})$ esta bien definida en el entorno donde f esta definida.

3. (**def.1**) Si para todo $f \in \mathcal{F}(x)$, hay una correspondencia a un numero real $v(f) \in \mathbf{R}$ satisfaciendo

   (a) $v(\lambda f + \mu g) = \lambda v(f) + \mu v(g)$;

   (b) $v(f \cdot g) = v(f)g(x) + f(x)v(g)$

   $(\lambda, \mu \in \mathbf{R},\ f, g \in \mathcal{F}(x))$, entonces se dice que la aplicacion $v : \mathcal{F}(x) \to \mathbf{R}$ es un **vector tangente de X en x**.

   El valor de $v(f)$, $f \in \mathcal{F}(x)$ depende solo del comportamiento local de f.

4. (**prop.**) *Si $f, g \in \mathcal{F}(x)$, y f, g coinciden en algun entorno abierto U de x, entonces $v(f) = v(g)$.*

   En primer lugar, esto es equivalente a probar que $v(h) = 0$ para toda $h \in \mathcal{F}(x)$ que es 0 en U : Definamos $h = f - g$, entonces la presmisa $f, g \in \mathcal{F}(x)$, $f|_U = g|_U$ se transforma en $h|_U = 0$. Puesto que $v(h) = v(f) - v(g)$ por (a), la conclusion $v(f) = v(g)$ se traduce en $v(h) = 0$.
   Sea ahora $\phi \in \mathcal{F}(x)$ tal que $\phi = 1$ en $X - U$, y tal que $\phi(x) = 0$.[1] Tenemos entonces que $h = h \cdot \phi$. Aplicando (b) se tiene que $v(h) = v(h) \cdot \phi(x) + v(x) \cdot v(\phi) = 0$. *q.e.d.*

5. La ventaja de la (**def.1**) es que no involucra las cartas locales o los sistemas de coordenadas[2], si bien constructivamente no es muy util porque v no es inyectivo de $\mathcal{F}(x)$ en $\mathbf{R}$ (de ahi que el contenido de la proposicion sea relevante). Esto se evita modificando la (**def.1**) introduciendo *germenes de funciones.*

[1] La existencia de tal funcion se puede demostrar por argumentos topologicos mas tecnicos, por ejemplo, *Matsushima*, p.69.

[2] En realidad solapadamente si, pues son necesarias para demostrar la existencia de la funcion ϕ.

6. Sean $f, g \in \mathcal{F}(x)$. Se dice que f, g **tienen el mismo germen en** x si coinciden en algun entorno U de x. Esto introduce una relacion de equivalencia en $\mathcal{F}(x)$, tal que $f \sim g$ si tienen el mismo germen en x. Las clases de equivalencia son llamados **germenes** y el conjunto de los germenes se denota por $\widetilde{\mathcal{F}}(x)$. El germen de una funcion $f \in \mathcal{F}(x)$ se denota por $\widetilde{f} \in \widetilde{F}(x)$, y tiene un valor bien definido en x, el valor de cualquier representante de la clase en x.
Con la suma y la multiplicacion, $\widetilde{\mathcal{F}}(x)$ tiene la estructura de un algebra sobre $\mathbf{R}$.

   Con esto, la definicion anterior queda corregida,

7. (**def.1b**) Un *vector tangente de* X *en* x es una derivacion lineal del algebra $\widetilde{\mathcal{F}}(x)$. Esto es, para todo $\widetilde{f}, \widetilde{g} \in \widetilde{\mathcal{F}}(x),\ \lambda, \mu \in \mathbf{R}$,
   (a) $v(\lambda\widetilde{f} + \mu\widetilde{g}) = \lambda v(\widetilde{f}) + \mu v(\widetilde{g})$;
   (b) $v(\widetilde{f} \cdot \widetilde{g}) = v(\widetilde{f})\widetilde{g}(x) + \widetilde{f}(x)v(\widetilde{g})$.

8. La (**def.1**) se recupera entonces de la (**def.1b**) admitiendo la accion de v sobre funciones, escribiendo $v(f) := v(\widetilde{f})$. El *bonus* de esta definicion abstracta es que permite la generalizacion a objetos diferenciables de orden superior[3] pero tiene el inconveniente de que, desde el punto de vista operacional, no es muy conveniente. Veamos pues la siguiente definicion,

5.2.– Segunda definicion

9. (**def.2**) Sea $(U; \xi),\ \xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$ un sistema de coordenadas en U, y sean $x \in U \subset X,\ f \in \mathcal{F}(x)$. Consideremos la expresion de f en la carta $(U; \xi)$,

$$\begin{array}{ccc} U \subset X & \xrightarrow{f} & \mathbf{R} \\ {\scriptstyle \xi=(\xi^1,\ldots,\xi^n)}\downarrow & & \Big\| \\ \xi(U) \subset \mathbf{R}^n & \xrightarrow[f\circ\xi^{-1}]{} & \mathbf{R} \end{array}$$

   Definimos la siguiente notacion,

$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi^i}\right)_x f \equiv \frac{\partial f}{\partial \xi^i}(x) := \left(\frac{\partial (f \circ \xi^{-1})}{\partial r^i}\right)(\xi(x)), \qquad 1 \leq i \leq n.$$

   Entonces $(\partial/\partial\xi^i)_x$ es un *vector tangente a* X *en* x.

10. Existe una multiplicidad de notaciones para $(\partial/\partial\xi^i)_x$ atendiendo a los diferentes autores, como por ejemplo:$(\partial_{\xi^i})_x$, $(\partial^i_\xi)_x$ o incluso $(\partial^i)_x$ o $(\partial_i)_x$ cuando el sistema de coorenadas esta suficientemente claro.

[3]Vease *Warner*, p.20

11. La relacion de (**def.2**) con (**def.1**) se establece a traves del operador

$$v = \sum_{i=1}^{n} v^i \left(\frac{\partial}{\partial \xi^i}\right)_x$$

donde $v^i = v(\xi^i)$ con $(U;\xi)$ el sistema de coordenadas en U. El vector n-dimensional $(v^1, \dots, v^n)$ es llamado <u>**componentes de** v</u> respecto del sistema de coordenadas local $(U;\xi)$.

12. Esta definicion, muy practica desde el punto de vista operacional, tiene el inconveniente de ser muy dependiente del sistema de coordenadas $(U;\xi)$. Veamos una version de esta definicion en la que debilitamos esta dependencia.

13. (Recordatorio) Llamamos *curva diferenciable en* X a una aplicacion $\phi : I \subset \mathbf{R} \to X$, siendo $I =]a,b[$ un intervalo abierto. Denotamos por $C(X,x)$ el conjunto de curvas diferenciables en X tales que $0 \in I,\ \phi(0) = x$.

14. (**def.2b**) Sea X una variedad diferenciable n-dimensional. Sea $\mathcal{F}(x)$ el conjunto de todas las funciones diferenciables en algun entorno de x. Definimos en $C(X,x)$ una relacion de equivalencia como sigue: si $\alpha, \beta \in C(X,x)$ entonces $\alpha \sim \beta$ si para todoa $f \in \mathcal{F}(x)$

$$\frac{d(f \circ \alpha)}{dt}(0) = \frac{d(f \circ \beta)}{dt}(0)$$

Sea $\widetilde{C}(X,x)$ el conjunto de clases de equivalencia, a cada elemento se lo denomina *vector tangente a* X *en* x.

15. Relacion de (**def.2b**) con (**def.1**): Sea $p : C(X,x) \to \widetilde{C}(X,x)$ la proyeccion que a cada curva $\alpha \in C(X,x)$ asigna su clase de equivalencia $p(\alpha) \in \widetilde{C}(X,x)$, cada vector tangente define una aplicacion $v : \mathcal{F}(x) \to \mathbf{R}$ tal que

$$v(f) = p(\alpha)(f) = \frac{d(f \circ \alpha)}{dt}(0).$$

Esta aplicacion es obviamente lineal (**def.1**, (a)), la propiedad de derivacion del producto (b) se sigue de

$$\begin{aligned} v(fg) &= \frac{d((fg) \circ \alpha)}{dt}(0) = \frac{d\left((f \circ \alpha)(g \circ \alpha)\right)}{dt}(0) \\ &= \frac{d(f \circ \alpha)}{dt}(0) \cdot (g \circ \alpha)(0) + (f \circ \alpha)(0) \cdot \frac{d(g \circ \alpha)}{dt}(0) \\ &= v(f)g(x) + f(x)v(g). \end{aligned}$$

16. Relacion de (**def.2b**) con (**def.2**): Tomemos un sistema de cooredenadas en U, $(U;\xi)$, $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n)$, entonces, para todo $t \in]a,b[,\ \alpha(t) \in X$, con

$\alpha(0) = x$. Las coordenadas de $\alpha(t)$ vienen dadas por $(r^1 \circ \xi \circ \alpha(t), \ldots, r^n \circ \xi \circ \alpha(t))$ ie., $\xi(\alpha(t)$.

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{R} & \xrightarrow{\alpha} & X & \xrightarrow{f} & \mathbf{R} \\
\Vert & & \xi \downarrow & & \Vert \\
\mathbf{R} & \xrightarrow[\xi\circ\alpha]{} & \mathbf{R}^n & \xrightarrow[(f\circ\xi^{-1})]{} & \mathbf{R}
\end{array}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\frac{d(f \circ \alpha)}{dt}(0) &= \left(\frac{d\left((f \circ \xi^{-1}) \circ (\xi \circ \alpha)\right)}{dt} \right)(0) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial (f \circ \xi^{-1})}{\partial r^i} \right) (\xi(\alpha(0))) \left(\frac{d(r^i \circ \xi \circ \alpha)}{dt} \right)(0) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{d(r^i \circ \xi \circ \alpha)}{dt} \right)(0) \left(\frac{\partial (f \circ \xi^{-1})}{\partial r^i} \right) (\xi(\alpha(0))) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{d(r^i \circ \xi \circ \alpha)}{dt}(0) \left(\frac{\partial}{\partial \xi^i} \right)_x f
\end{aligned}$$

y podemos escribir el vector tangente a X en x como $v = \sum_i v^i \left(\frac{\partial}{\partial \xi^i} \right)_x$ con $v^i = \frac{d(r^i \circ \xi \circ \alpha)}{dt}(0)$.

5.3.– Cambio de sistema de coordenadas

17. Sea X una variedad diferenciable n-dimensional, y sean $(U;\xi)$, $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$ y $(V;\eta)$, $\eta = (\eta^1, \ldots, \eta^n)$ dos sistemas de coordenadas locales compatibles $x \in X$. Las funciones de transicion entre las cartas $(\eta \circ \xi^{-1}) : \xi(U \cap V) \subset \mathbf{R}^n \to \eta(U \cap V) \subset \mathbf{R}^n : (\xi^1(x), \ldots, \xi^n(x)) \mapsto (\eta^1(x), \ldots, \eta^n(x))$ establece una relacion entre las coordenadas del punto x en el sistema coordenado $(V;\eta)$ y el sistema coordenado $(U;\xi)$.

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{R}^n & \xrightarrow{f\circ\eta^{-1}} & \mathbf{R} \\
\eta \uparrow & & \Vert \\
X & \xrightarrow{f} & \mathbf{R} \\
\xi \downarrow & & \Vert \\
\mathbf{R}^n & \xrightarrow[f\circ\xi^{-1}]{} & \mathbf{R}
\end{array}$$

por lo que,

$$(f \circ \xi^{-1})(\xi(x)) = (f \circ \eta^{-1}) \circ (\eta \circ \xi^{-1})(\xi(x))$$

Sea w un vector tangente a X en x, dado en sistema de coordenadas locales $(U;\xi)$ por $w = \sum_i u^i(\partial_{\xi^i})_x$, y sea $f \in \mathcal{F}(x)$. Entonces,

$$\begin{aligned}
w(f) &= \sum_i u^i \left(\frac{\partial}{\partial \xi^i}\right)_x f = \sum_i u_i \frac{\partial(f\circ\xi^{-1})}{\partial r^i}(\xi(x)) \\
&= \sum_i \frac{\partial\left((f\circ\eta^{-1})\circ(\eta\circ\xi^{-1})\right)}{\partial r^i}(\xi(x)) \\
&= \sum_{i,j} u^i \left(\frac{\partial(f\circ\eta^{-1})}{\partial r^j}\right)(\eta(x)) \left(\frac{\partial(r^j\circ\eta\circ\xi^{-1})}{\partial r^i}\right)(\xi(x)) \\
&= \sum_{i,j} u^i \left(\frac{\partial(r^j\circ\eta\circ\xi^{-1})}{\partial r^i}\right)(\xi(x)) \left(\frac{\partial(f\circ\eta^{-1})}{\partial r^j}\right)(\eta(x)) \\
&= \sum_{i,j} u^i \left(\frac{\partial(r^j\circ\eta)}{\partial \xi^i}\right)(x) \left(\frac{\partial f}{\partial \eta^i}\right)(x) \\
&= \sum_{i,j} u^i \left(\frac{\partial \eta^j}{\partial \xi^i}\right)(x) \left(\frac{\partial}{\partial \eta^j}_x\right) f \\
&= \sum_j v^j \left(\frac{\partial}{\partial \eta^j}\right)_x f
\end{aligned}$$

donde, $v^j := \sum_i u^i \left(\frac{\partial \eta^j}{\partial \xi^i}\right)(x)$ son las componentes de w en el sistema de coordenadas $(V;\eta)$, y los terminos

$$a_{ji} = \left(\frac{\partial \eta^j}{\partial \xi^i}\right)(x) = \left(\frac{\partial(r^j\circ(\eta\circ\xi^{-1}))}{\partial r^i}\right)(\xi(x))$$

son las componentes de la matriz asociada a la derivada $D_i(\eta\circ\xi^{-1})^j$ de la aplicacion que describe el cambio de sistema coordenado evaluada en $\xi(x)$, ie., la matriz Jacobiana del cambio de coordenadas $\eta^j = \eta^j(\xi^1, \ldots, \xi^n)$.

5.4.– Tercera definicion

18. Esta es una definicion mas conceptual, no operacional, que ayuda a comprender que es un vector tangente y esta basada en la idea de cambio de carta visto en el epigrafe precedentes.

19. (**def.3**) Sea X una variedad diferenciable n-dimensional, $x \in X$. Consideremos las parejas (c, v) donde $c = (U, \varphi)$ es una carta, y v es un vector de $\mathbf{R}^n$. Dos parejas (c, v) y (c', v') se dice que son equivalentes si la derivada en $\varphi(x)$ de la aplicacion $\varphi' \circ \varphi^{-1}$ transforma v en v'. Se obtiene asi una relacion de equivalencia entre las parejas (c, v), y se llama *vector tangente a X en x* a una clase de pares (c, v) equivalentes.

20. El conjunto de todos los vectores tangentes a X en x se denota por $T_x(X)$.