Leccion 6.
Espacio tangente. Espacio cotangente.

Estudiar: 1–14,20–25.

6.1.– Introduccion

1. El objetivo de esta leccion es probar que los vectores tangentes a X en a hacen justicia a su nombre, ie., que el conjunto $T_a(X)$ de todos los vectores tangentes a X en x tiene la estructura de un $\mathbf{R}$-espacio vectorial.

6.2.– El espacio (vectorial) tangente $T_a(X) \cong \widetilde{\mathcal{F}}_0(a)/\widetilde{\mathcal{F}}_0(a)^2$

2. Cuando definimos $T_a(X)$ como *derivaciones lineales actuando sobre las funciones definidas en algun entorno de* a, *ie.,* $v : \mathcal{F}(a) \to \mathbf{R}$, o mas exactamente *sobre germenes de funciones,* $v : \widetilde{\mathcal{F}}(a) \to \mathbf{R}$, es sencillo dotar a $T_a(X)$ de la estructura de $\mathbf{R}$-espacio vectorial. Basta con definir,

$$(v + w)(\mathbf{f}) := v(\mathbf{f}) + w(\mathbf{f}),$$
$$(\lambda v)(\mathbf{f}) := \lambda(v(\mathbf{f}))$$

para $v, w \in T_a(X),\ \mathbf{f} \in \widetilde{\mathcal{F}}(a),\ \lambda \in \mathbf{R}$.

3. Sinembargo, en este caso la demsotracion de que $dim\ T_a(X) = n = dim\ X$ es tecnicamente complicada[1].

4. Veamos que ocurre en el caso en que $T_a(X)$ se define a traves de clases de equivalencia de curvas.

6.3.– El espacio (vectorial) tangente $T_a(X) \cong \widetilde{C}(X, a)$.

5. En esta subseccion analizamos la estructura algebraica de $T_a(X)$ desde el punto de vista de las clases de equivalencia de curvas tangentes en un punto.

6. (*Recordatorio*) Sea $T_a(X)$ definido como $\widetilde{C}(X, a)$, $p : C(X, a) \to \widetilde{C}(X, a) :$ $\alpha \mapsto p(\alpha)$ con $p(\alpha)(f) = (f \circ \alpha)'(0)$.

7. (**prop.**) *Sean* $v = p(\alpha),\ w = p(\beta) \in T_a(X)$ *y sean* $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$. *Entonces existe un vector tangente* $p(\gamma) \in T_a(X)$ *tal que para toda funcion* $f \in \mathcal{F}(a)$ *se tiene que* $p(\gamma)(f) = \lambda v(f) + \mu w(f)$.

[1] Vease *Warner*, pp.12-14.

8. (*Recordatorio*) Sea $\alpha \in C(X,a)$ una curva diferenciable. La *ecuacion de la curva en la carta coordenada* $(U;\xi)$, $a \in U$ viene dada por $\alpha^i = r^i \circ \xi \circ \alpha = \xi^i \circ \alpha$. Dadas las ecuaciones de la curva en el sistema de coordenadas, esta queda definida por

$$\alpha(t) = \xi^{-1}(r^1 \circ \xi \circ \alpha, \dots, r^n \circ \xi \circ \alpha) \equiv \xi^{-1}(\xi^1 \circ \alpha, \dots, \xi^n \circ \alpha).$$

9. (**demo.**) Sea X una variedad diferenciable n-dimensional. Sea $(U;\xi)$ un sistema de coordenadas de X centrado en a (ie., $a \in U$, $\xi(a) = 0 \in \mathbf{R}^n$), con coordenadas $\xi^i = r^i \circ \xi$. Construimos la curva $\gamma \in C(X,a)$ estableciendo en primer lugar sus ecuaciones $\gamma^i = r^i \circ \xi^i \circ \gamma$ como $\gamma^i = \lambda\alpha^i + \mu\beta^i$. Estas curvas son diferenciables y estan definidas en un entorno de $0 \in I \subset \mathbf{R}$. La curva γ queda entonces definida como $\gamma(t) = \xi^{-1}(\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t))$, que es diferenciable y satisface

$$\gamma(0) = \xi^{-1}(\lambda\alpha^1(0) + \mu\beta^1(0), \dots, \lambda\alpha^n(0) + \mu\beta^n(0 =)) = \xi^{-1}(0) = a$$

por lo que γ pertenece a $C(X,a)$.
Si $f \in \mathcal{F}(a)$, se tiene

$$\begin{aligned}
p(\gamma)(f) &= \left(\frac{d(f \circ \gamma)}{dt}\right)(0) = \left(\frac{\partial(f \circ \xi^{-1})}{\partial r^i}\right)(\xi(\gamma(0))) \left(\frac{d(r^i \circ \xi \circ (\lambda\alpha + \mu\beta))}{dt}\right)(0) \\
&= \lambda \left(\frac{\partial(f \circ \xi^{-1})}{dr^i}\right)(0) \left(\frac{d(r^i \circ \xi \circ \alpha)}{dt}\right)(0) + \mu \left(\frac{\partial(f \circ \xi^{-1})}{dr^i}\right)(0) \left(\frac{d(r^i \circ \xi \circ \beta)}{dt}\right)(0) \\
&= \lambda \left(\frac{d(f \circ \alpha}{dt}\right)(0) + \mu \left(\frac{d(f \circ \beta)}{dt}\right)(0) \\
&= \lambda v(f) + \mu w(f) = \lambda p(\alpha) + \mu p(\beta).
\end{aligned}$$

La suma de vectores tangente en $T_a(X) \cong \widetilde{C}(X,a)$ queda asi definida para $\lambda = \mu = 1$ tal que $p(\gamma) = p(\alpha) + p(\beta)$ y el producto por un escalar queda definido al tomar por ejemplo $\lambda = 0$. En consecuencia $T_a(X) \cong \widetilde{C}(X,a)$ tiene la estructura de espacio vectorial.

10. (**prop.**) *dim* $T_a(X) =$ *dim* $X = n$.

11. (**demo.**) Sea $(V;\eta)$ un sistema de coordenadas de X en a, y consideremos la familia de curvas $\tau_j \in C(X,a)$, $1 \le j \le n$, dadas por sus ecuaciones $(\tau_j)^i = \eta^i(a) + \delta^i_j t$ tal que

$$\begin{aligned}
\tau_1(t) &= (\eta^1(a) + t, \eta^2(a), \dots, \eta^n(a)), \\
\tau_2(t) &= (\eta^1(a), \eta^2(a) + t, \eta^3(a), \dots, \eta^n(a)), \\
\dots &\quad \dots \\
\tau_n(t) &= (\eta^1(a), \dots, \eta^{n-1}(a), \eta^n(a) + t).
\end{aligned}$$

Se trata por tanto de una familia de rectas afines paralelas a los ejes de coordenadas canonicos de $\mathbf{R}^n$ trasladadas al punto $\eta(a)$. Vamos a ver que

la familia $\{p(\tau_1), \ldots, p(\tau_n)\}$ es una base de $T_a(X)$.
Sea $f \in \mathcal{F}(a)$, entonces,

$$\begin{aligned}
p(\tau_j)(f) &= \left(\frac{d(f \circ \tau_j)}{dt}\right)(0) \\
&= \left(\frac{\partial f \circ \eta^{-1}}{\partial r^i}\right)(\eta(a)) \left(\frac{d(r^i \circ \eta \circ \tau_j)}{dt}\right)(0) \\
&= \left(\frac{\partial f \circ \eta^{-1}}{\partial r^i}\right)(\eta(a))\delta^i_j \\
&= \left(\frac{\partial f \circ \eta^{-1}}{\partial r^j}\right)(\eta(a))
\end{aligned}$$

donde hemos utilizado que

$$\left(\frac{d(r^i \circ \eta \circ \tau_j)}{dt}\right)(0) = \left(\frac{d(\eta^i(a) + \delta^i_j t)}{dt}\right)(0) = \delta^i_j.$$

Consideremos la combinacion lineal $\sum_{i=1}^n v(\eta^i)p(\tau_i)$, con $v = p(\alpha)$ para aglun $\alpha \in C(X, a)$,

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^n v(\eta^i)p(\tau_i)\right)(f) &= \sum_{i=1}^n v(\eta^i)p(\tau_i)(f) \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\frac{d(\eta^i \circ \alpha)}{dt}\right)(0) \left(\frac{\partial f \circ \eta^{-1}}{\partial r^i}\right)(\eta(a)) \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f \circ \eta^{-1}}{\partial r^i}\right)(\eta(a)) \left(\frac{d(\eta^i \circ \alpha)}{dt}\right)(0) \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f \circ \eta^{-1}}{\partial r^i}\right)(\eta(a)) \left(\frac{d(r^i \circ \eta \circ \alpha)}{dt}\right)(0) \\
&= \left(\frac{d(f \circ \alpha)}{dt}\right)(0) = v(f)
\end{aligned}$$

Tenemos pues que $v = \sum_{i=1}^n v(\eta^i)p(\tau_i)$, es decir, los vectores $p(\tau_i) \in T_a(X)$, $1 \leq i \leq n$ forman un sistema generador de $T_a(X)$. Veamos que son ademas linealmente independientes.
Si existe una combinacion lineal tal que $\lambda^i p(\tau_i) = 0$ se tien que para todo j, $1 \leq j \leq n$,

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=1}^n (\lambda^i p(\tau_i)(\eta^j) = \sum_{i=1}^n \lambda^i \left(\frac{d(\eta^j \circ \tau_i)}{dt}\right)(0) = \sum_{i=1}^n \lambda^i \left(\frac{d(\eta^j(a) + \delta^j_i t)}{dt}\right)(0) \\
&= \sum_{i=1}^n \lambda^i \delta^j_i = \lambda^j
\end{aligned}$$

implicando $\lambda^j = 0,\ \forall j,\ 1 \leq j \leq n$. Por tanto, $p(\tau_i)$ son linealmente independientes y la familia $(\tau_i)_{1\leq i\leq n}$ es una base de $T_a(X)$, y se tiene que $dim\ T_a(X) = n = dim\ X$.

12. Esta demostracion relaciona la definicion de $T_a(X)$ como $\widetilde{C}(X, a)$ y la notacion introducida en la leccion precedente al definir vectores tangente en sistemas de cooredenadas mediante el diccionario siguiente:

$$\begin{array}{rcl} \left(\dfrac{\partial}{\partial \eta^i}\right)_a & \equiv & p(\tau_i) \\ v = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} v^i \left(\dfrac{\partial}{\partial \eta^i}\right)_a & \equiv & v = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} v(\eta^i) p(\tau_i) \end{array}$$

6.4.– El espacio (vectorial) tangente $T_a(X) \cong \mathcal{A}_a \widetilde{\times} \mathbf{R}^n$

13. Denoto por $\mathcal{A}_a$ a las cartas de X en a.

14. Tal vez, la forma mas sencilla de ver que $T_a(X)$ es un espacio vectorial de dimension n es comprobar que, al definirlo como *el conjunto de clases de equivalencia de pares* (c, v) *donde* $c = (U, \varphi)$ *es una carta de* X *en* a*, ie.,* $c \in \mathcal{A}_a$ *y* v *es un vector de* $\mathbf{R}^n$*, con la relacion de equivalencia dada por* $(c, v) \sim (c', v')$ *si la Jacobiana* $D(\varphi' \circ \varphi^{-1})$ *en* $\varphi(a)$ *transforma* v *en* v', $T_a(X)$ hereda la estructura de espacio vectorial de $\mathbf{R}^n$.

15. En efecto sea $[c, v] \in T_a(X)$ el vector tangente a X en a, y (c, v) un representante de la clase de equivalencia en $\mathcal{A}_a \times \mathbf{R}^n$.

    (a) Definimos el producto por un escalar como $\lambda[c, v] := [c, \lambda v]$ para todo $\lambda \in \mathbf{R}$.

    (b) Para todo par de vectores tangente, $[c, v],\ [c', v'] \in T_a(X)$ tomemos los representantes $(c, v),\ (c', v') \in \mathcal{A}_a \times \mathbf{R}^n$. Esta claro que las cartas $c = (U, \varphi),\ c' = (U', \varphi') \in \mathcal{A}_a$ contienen el punto $a \in X$ por lo que su interseccion es no nula. Podemos tomar un segundo representante (c'', v'') de la clase de equivalencia $[c', v']$, donde la nueva carta en a es $c'' = c$ y
    $$v'' := D(\varphi \circ \varphi'^{-1})(\varphi'(a))v'.$$
    Es obvio que $(c', v') \sim (c, D(\varphi \circ \varphi'^{-1})(\varphi'(a))v')$ representan la misma clase de equivalencia $[c', v'] = [c, D(\varphi \circ \varphi'^{-1})(\varphi'(a))v']$, y podemos definir la suma en $T_a(X)$ como
    $$\begin{array}{rcl} [c, v] + [c', v'] & = & [c, v] + [c, D(\varphi \circ \varphi'^{-1})(\varphi'(a))v'] \\ & = & [c, v + D(\varphi \circ \varphi'^{-1})(\varphi'(a))v']. \end{array}$$

16. Dado que, para cartas dadas $c = (U, \varphi)$, $c' = (U', \varphi')$ en $a \in X$, la aplicacion $D(\varphi' \circ \varphi^{-1})(\varphi(a)) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ es lineal, por lo que las operaciones definidas en el epigrafe anterior no dependen de los representantes escogidos.

17. Veamos otro punto de vista. Sea $c = (U, \varphi)$ una carta de X en a. Definimos la aplicacion $\theta_c : \mathbf{R}^n \to T_a(X)$ como sigue.

$$\mathbf{R}^n \xrightarrow{(c \otimes id)} \{c\} \times \mathbf{R}^n \subset \mathcal{A}_a \times \mathbf{R}^n \xrightarrow{\mathcal{P}} T_a(X)$$

de tal modo que

$$\theta_c(v) := \mathcal{P} \circ (c \otimes id)(v) = \mathcal{P}(c, v) = [c, v]$$

18. (**prop.**) Sea $c = (U, \varphi)$ una carta de X en a. $\theta_c : \mathbf{R}^n \to T_a(X)$ *es un isomorfismo de espacios vectoriales.*

19. (**demo.**) La inyectividad de θ_c es obvia. Comprobemos la suprayectividad. Sea $[c', v'] \in T_a(X)$, entonces c' es una carta de X en a y por tanto $U \cap U' \neq \emptyset$. La aplicacion del cambio de carta entre c' y c viene dada por $(\varphi \circ \varphi'^{-1})$. Por tanto

$$\begin{aligned} [c', v'] &= \mathcal{P}(c', v') = \mathcal{P}(c, D(\varphi \circ \varphi'^{-1})(\varphi(a))v') \\ &= [c, D(\varphi \circ \varphi'^{-1})(\varphi(a))v'] = \theta_c(D(\varphi \circ \varphi'^{-1})(\varphi(a))v') \end{aligned}$$

La suprayectividad de θ_c queda demostrada, por lo que $\theta_c : \mathbf{R}^n \to T_a(X)$ es isomorfismo.
La linealidad de θ_c se desprende de la linealidad de $D(\varphi' \circ \varphi^{-1})(\varphi(a))$, y en consecuencia $T_a(X)$ hereda la estructura de espacio vectorial n-dimensional.

20. La identificacion de $[c, v] \in T_a(X)$ con la notacion introducida para vectores tangente en la leccion precedente se efectua como sigue. Sea $c = (U; \xi)$ un sistema de coordenadas $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$ de X en a, y sea $v = (v^1, \ldots, v^n)$ un vector de $\mathbf{R}^n$

$$\theta_c(v) = [c, v] \cong \sum_{1 \leq i \leq n} v^i \left(\frac{\partial}{\partial \xi^i} \right)_a$$

6.3.– Espacio cotangente

21. Llamamos **espacio cotangente a** X **en** a, $a \in X$, y lo denotamos por $T_a(X)^*$, (o tambien por $T_a^*(X)$) al espacio vectorial dual de $T_a(X)$, ie., $\mathrm{Hom}(T_a(X); \mathbf{R})$. Por tanto, *dim* $T_a(X)^* = n$. A los elementos de $T_a(X)^*$ se los denomina **1-formas en** a.

22. (*Recordatorio*) Denotaremos por $\langle\ ,\ \rangle$ el emparejamiento de un espacio vectorial V con su dual V^*, de tal modo que si $u \in V,\ \alpha \in V^*$, entonces escribiremos $\langle u, \alpha\rangle \equiv \langle \alpha, u\rangle := \alpha(u) \in \mathbf{R}$.

23. Sea $f \in \mathcal{F}(a),\ a \in X$, entonces f define un elemento de $T_a(X)^*$ usualmente denotada por $d_a f$ (o tambien por $(df)_a$), llamada **diferencial de** f **en** a, a traves de

$$\langle v, d_a f\rangle \equiv \langle d_a f, v\rangle = v(f), \quad v \in T_a(X).$$

24. (**prop**). *Sea* $(U;\xi)$ *un sistema de coordenadas de* X *en* a*, entonces las* 1*-formas,* $(d_a\xi^i)_{1\leq i\leq n}$ *forman una base de* $T_a(X)^*$*, la base dual de* $(\partial/\partial\xi^i)_a$.

25.

$$\begin{aligned}\left\langle d_a\xi^i, \left(\frac{\partial}{\partial\xi^j}\right)_a\right\rangle &= \left(\frac{\partial}{\partial\xi^j}\right)_a(\xi^i) = \frac{\partial\xi^i}{\partial\xi^j}(a) = \left(\frac{\partial(\xi^i\circ\xi^{-1})}{\partial r^j}\right)(\xi(a))\\ &= \left(\frac{\partial(r^i\circ\xi\circ\xi^{-1})}{r^j}\right)(\xi(a)) = \frac{\partial r^i}{\partial r^j}(\xi(a)) = \delta^i_j.\end{aligned}$$

por lo que, si $v = \sum_{1\leq i\leq n} v^i(\partial/\partial\xi^i)_a \in T_a(X)$,

$$\langle d_a\xi^j, v\rangle \equiv (d_a\xi^j)(v) = v^j$$