Leccion 7.
Fibrado tangente.

Estudiar: 1–8

7.1.– Construccion del fibrado tangente

1. Sea X una variedad diferenciable n-dimensional. Consideremos el conjunto $T(X) := \bigcup_{a\in X} T_a(X)$.

2. (**prop.**) *Es posible dotar a $T(X)$ de la estructura de variedad diferenciable $2n$-dimensional.*

3. (**demo.**) Sea $\pi : T(X) \to X$ la aplicacion suprayectiva tal que $\pi(v) = a$, para todo $v \in T_a(X)$, es decir, π aplica a cada vector tangente a X en a el punto a en el cual es tangente. Sea $(U_i, \xi_i)_{i\in I}$ el atlas de X. Construimos un atlas $\{(\widetilde{U}_i, \zeta_i\}$ de $T(X)$ como sigue:

   (a) $\widetilde{U}_i := \pi^{-1}(U_i)$; es evidente que $\bigcup_{i\in I} \widetilde{U}_i = T(X)$.

   (b) La aplicacion $\zeta_i : \widetilde{U}_i \to \mathbf{R}^{2n}$ se define como

   $$\begin{array}{rcl} \zeta_i : \widetilde{U}_i & \longrightarrow & \xi_i(U_i) \times \mathbf{R}^n \subset \mathbf{R}^{2n} \\ v & \longmapsto & (\xi_i^1(a), \ldots, \xi_i^n(a); \langle d_a\xi_i^1, v\rangle, \ldots, \langle d_a\xi_i^n, v\rangle) \end{array}$$

   es decir, las n primeras coordenadas de $\zeta_i(v) \in \mathbf{R}^{2n}$ vienen dadas por las coordenadas del punto $a \in X$ dadas por la carta (U_i, ξ_i) ie., $\{\xi_i^j(a)\}_{1\le j\le n}$; mientras que las siguientes n coordenadas son las componentes de v en la base $\{(\partial/\partial\xi_i^j)_x\}_{1\le j\le n}$, es decir, las n cantidades $\{\langle d_a\xi_i^j, v\rangle\}_{1\le j\le n}$.

4. Probemos que ζ_i es inyectiva. Sean $u, v \in \widetilde{U}_i$. Si se tiene que $\zeta_i(u) = \zeta_i(v)$, la igualdad de las primeras n coordenadas de esas imagenes nos indica que $\xi_i(\pi(u)) = \xi_i(\pi(v))$, por lo que $\pi(u) = \pi(v)$ y los vectores pertenecen al mismo espacio tangente a X, digamos $T_a(X)$. La igualdad de las ultimas n coordenadas indica que tienen las mismas componentes en la base $\{(\partial/\partial\xi_i^j)_x\}_{1\le j\le n}$, de donde concluimos que $u = v$, ie., ζ_i es inyectiva.

5. Probemos que ζ_i es suprayectiva. Sean $(a^1, \ldots, a^n; b^1, \ldots, b^n) \in \xi_i(U_i) \times \mathbf{R}^n$, y sea $a = \xi_i^{-1}(a^1, \ldots, a^n)$. Para obtener un elemento cuya imagen por ζ_i sea $(a^1, \ldots, a^n; b^1, \ldots, b^n)$ nos basta tomar el vector en $T_a(X)$ cuyas coordenadas en la base $\{(\partial/\partial\xi_i^j)_{1\le j\le n}\}$ son las $(b^1, \ldots, b^n)$, es decir,

$$\zeta_i^{-1}(a^1, \ldots, a^n; b^1, \ldots, b^n) = \sum_{1\le j\le n} b^j \left(\frac{\partial}{\partial\xi_i^j}\right)_{a=\xi_i^{-1}(a^1,\ldots,a^n)}.$$

6. Sean $i, j \in I$. $\zeta_i(\widetilde{U}_i \cap \widetilde{U}_j)$ es abierto. Las aplicaciones de transicion entre las cartas seran

$$(\zeta_j \circ \zeta_i^{-1}) : \zeta_i(\widetilde{U}_i \cap \widetilde{U}_j) \to \zeta_j(\widetilde{U}_i \cap \widetilde{U}_j)$$

$$(\zeta_j \circ \zeta_i^{-1})(a^1, \ldots, a^n; b^1, \ldots, b^n) = \zeta_j \left(\sum_{1 \leq k \leq n} b^k \left(\frac{\partial}{\partial \xi_i^k} \right)_{\xi_i^{-1}(a^1, \ldots, a^n)} \right)$$

$$= \left(\xi_j \circ \xi_i^{-1}(a^1, \ldots, a^n); \sum_{1 \leq k \leq n} b^k \left(\frac{\partial \xi_j^1}{\partial \xi_i^k} \right)(a), \ldots, \sum_{1 \leq k \leq n} b^k \left(\frac{\partial \xi_j^1}{\partial \xi_i^k} \right)(a) \right)$$

Esta aplicacion es diferenciable.

7. En consecuencia, la familia de cartas $(\widetilde{U}_i, \zeta_i)_{1 \leq i \leq n}$ forman un atlas sobre $T(X)$, que adquiere la estructura de una variedad diferenciable de dimension $2n$. *qed*

8. $(T(X), (\widetilde{U}_i, \zeta_i)_{1 \leq i \leq n})$ es denominada **variedad tangente** o, mucho mas usualmente, **fibrado tangente**, por tratarse de un caso especial de la construccion mas general de *fibrado vectorial*.

7.2.– Una notacion compacta basada en θ_c

9. En la leccion anterior introdujimos, dado un sistema de coordenadas $c = (U; \xi)$ de X en a, el isomorfismo de espacios vectoriales $\theta_c : \mathbf{R}^n \cong T_a(X)$, tal que, si $v = (v^1, \ldots, v^n) \in \mathbf{R}^n$ entonces $\theta_c(v)$ era la clase de equivalencia de (c, v) identificada con $\sum_{1 \leq i \leq n} v^i (\partial / \partial \xi^i)_a$.

10. Sea $T(X)$ el conjunto union de los espacios tangente $T_a(X)$, $a \in X$ y sea π la proyecceccion canonica de $T(X)$ en X. Sea $c = (U, \varphi)$ una carta de la variedad X en a, entonces para todo $a \in X$, $v \in T_a(X)$ escribimos

$$\zeta_c(v) = (\varphi(\pi(v)); \theta_c^{-1}(v))$$

Entonces $c' = (\pi^{-1}(U), \zeta_c)$ es una carta de $T(X)$ en v que coincide con la descrita en la proposicion anterior.