Sesión Especial Geometría de Riemann global

Organizadores: Olga Gil Medrano (U. Valencia), Vicente Miquel Molina (U. Valencia) y Agustí Reventós Tarrida (U. A. Barcelona)

PONENCIAS:

Autor: Teresa Arias. Univ. Valencia

Título: Variedades Riemannianas de dimensión 4 cuyo tensor de Ricci es cíclico paralelo.

Resumen:
Se trata de un pequeño estudio sobre un proyecto en curso cuyo objetivo es revisar los resultados previos obtenidos por Podesta-Spiro y Bueken-Vanhecke concernientes a la completa clasificación de las variedades Riemannianas homogéneas de dimensión 4 que satisfacen la ecuación $(\nabla_X Ric)(X,X) = 0$ para cada campo vectorial X. Algunos de los nuevos resultados que se presentarán justificarán la necesidad de dicha revisión.

Autor: Pablo Miguel Chacón. Univ. Salamanca

Título: Energía de referenciales

Resumen:
La energía de un campo unitario sobre una variedad compacta se define como la energía de la sección del fibrado tangente que determina. Para esferas de dimensión impar, el funcional energía tiene un ínfimo salvo para S^3 donde los campos de Hopf son mínimos absolutos. En esta charla presentaremos algunos resultados preliminares hasta llegar a discutir el siguiente teorema: la suma de las energías de un refencial ortonormal es siempre mayor o igual que la integral de la curvatura escalar de la variedad (con ciertas constantes multiplicativas y aditivas). La aplicación de este teorema a la esfera menos un número finito de puntos recupera los campos unitarios paralelos a lo largo de las geodésicas que ya habían sido considerados para el problema de minimización de la energía de campos.

Autor: M. Carmen Domingo Juan. Univ. Valencia

Título: Volúmenes de tubos de sección no esférica

Resumen:
Haré una exposición de los resultados obtenidos en los últimos años en esta línea por A. Gray, X. Gual-Arnau, V. Miquel y yo misma. Trataré de mostrar como la visión de un tubo como el resultado del movimiento de un cuerpo o hipersuperficie en el normal a una subvariedad a lo largo de una subvariedad permite entender las razones

últimas de algunas sorprendentes propiedades que presenta la fórmula de Weyl para el volumen de un tubo. Esta manera de ver tiene su origen en la clásica fórmula de Pappus-Guldin. En particular mostraré las diferencias de comportamiento entre los tubos y las hipersuperficies tubulares, la interpretación de los movimientos a lo largo de una subvariedad como aplicaciones de la subvariedad en el grupo de las rotaciones y su influencia en el volumen de una hipersuperficie tubular (de sección no esférica), y algunas propiedades peculiares que poseen los volúmenes de tubos (de sección no esférica) alrededor de curvas complejas.

Autor: Eduardo Gallego. Univ. Autonòma de Barcelona

Título: Geometría Integral y desigualdades geométricas en el espacio hiperbólico

Resumen:
Usando resultados de geometría integral, se muestran algunas desigualdades que involucran las integrales de curvatura de hipersuperfícies convexas. Estas desigualdades generalizan las fórmulas de Minkoswki para convexos en espacios euclídeos.

Autor: Eduardo Garcia Rio. Univ. Santiago de Compostela

Título: On the warped product structure of locally conformally flat manifolds

Resumen:
Any locally conformally flat manifold has a natural Codazzi tensordefined by the Schouten tensor $C = \frac{1}{n-2}\left(Ric - \frac{Sc}{2(n-1)}g\right) \odot g$, and therefore itsunderlying structure correspond to a warped or multiply warped product in many cases (depending on the eigenvalue structure of the Schouten tensor). Since warped products are a powerful technique to construct examples of complete manifolds of nonpositive curvature, the purpose of this lecture is to show the usefulness of warped and multiply warped metrics to obtain new examples of complete locally conformally flat manifolds with nonpositive sectional curvature or nonpositive Ricci curvature.

Autor: Olga Gil Medrano. Univ. de València

Título: Un radio crítico para los campos de Hopf en las esferas.

Resumen:
Se define el volumen de un campo de vectores como el de la subvariedad que determina su imagen en la variedad tangente. Los campos de Hopf de las esferas son puntos críticos para el volumen de campos de vectores unitarios. Gluck y Ziller demostraron que para las esferas de dimensión 3, son de hecho los únicos minimizantes absolutos de este funcional y plantearon el problema de si este resultado seguiría siendo cierto para las dimensiones superiores. Poco después se demostró la existencia de campos de

vectores diferenciables unitarios en las esferas de radio 1 y de dimensión impar mayor que cinco, con un volumen menor que el de los campos de Hopf. Recientemente, la autora junto con E. Llinares demostraron que, para toda dimensión impar distinta de 3, existe un radio a partir del cual los campos de Hopf son inestables y por tanto no pueden ser ni siquiera minimizantes locales. En este trabajo, realizado en colaboración con V. Borrelli (U. Lyon1), se demuestra que para valores más pequeños del radio los campos de Hopf son estables, comprobando así que para cada dimensión impar, existe un radio crítico con respecto a la estabilidad de los campos de Hopf. De hecho cuando el radio de la esfera es suficientemente pequeño, demostramos que los campos de Hopf tienen menor volumen que todos los campos unitarios diferenciables estudiados hasta el momento.

Autor: Joan Girbau. Univ. Autònoma de Barcelona

Título: Espais de Sobolev i laplacians a l'espai hiperbòlic

Resumen:
Sigui (M, g) una varietat de Riemann. En certs problemes de Relativitat General apareix l'operador $F : X \to \text{div } \mathrm{L_X g}$ que a cada camp vectorial X assigna la 1-forma div $L_X g$, on $L_X g$ indica la derivada de Lie de la mètrica g respecte al camp X. En els models cosmològics de Robertson-Walker es particularment interessant aquest operador sobre l'espai hiperbòlic de dimensiò 3, $\mathbb{H}_3$. En aquest cas, si s'identifiquen els camps vectorials amb les 1-formes travès de la mètrica, l'operador F s'escriu $F = \Delta_R + d\delta + 2I$, on Δ_R és el laplacià groller (rough Laplacian) i I es la identitat. Sigui $H_1^s(\mathbb{H}_3)$ l'espai de Sobolev de les 1-formes de grau de regularitat s sobre $\mathbb{H}_3$. En la nostra comunicació demostrarem que F dóna un isomorfisme $F : H_1^{s+1}(\mathbb{H}_3) \to H_1^s(\mathbb{H}_3)$. Si bé J. Bruna i J. Girbau van demostrar en una situació més general que Δ_R i que $\Delta_r + 2I$ donaven isomorfismes (**Annals of Global Analysis and Geometry** 25, 2004, 151-176), el fet d'afegir aquí el terme $d\delta$, que es un operador diferencial d'ordre 2, complica les coses i fa que el resultat que presentarem no es dedueixi del treball esmentat.

Autor: José Carmelo González-Dávila. U. La Laguna

Título: Jacobi fields on homogeneous Riemannian manifolds

Resumen:
As it is well-known, restrictions of Killing vector fields togeodesics on a Riemannian manifold are Jacobi fields. Inparticular, on a homogeneous Riemannian manifold $(M = G/G_o, g)$ with adapted reductive decomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{g}_o$, a vector field along a geodesic $\gamma = \gamma(t)$ starting at the origin of M which is the restrictionto γ of a fundamental vector field X^* of $X \in \mathfrak{g}$ is a Jacobi field induced by the geodesic variation $\phi(t, s) = (\exp sX)\gamma(t)$. $V = X^* \circ \gamma$ is called a *G-fundamental Jacobi field* and, when

$X \in \mathfrak{g}_o$, the geodesic variation ϕ is called the *isotropic variation* of γ induced by X and the corresponding Jacobi field V is said to be G-*isotropic*. They are characterized as those G- fundamental Jacobi fields along γ which vanish at the origin. Every G-fundamental Jacobi field V can be uniquely decomposed in a sum of a G-isotropic Jacobi field and a G-fundamental Jacobi field coming from an element in $\mathfrak{m}$. Moreover, if G is the identity component $I_o(M, g)$ of the isometry group $I(M, g)$ of (M, g), the set of all G-fundamental Jacobi fields along γ -we shall say simply *fundamental* Jacobi fields- coincides with that of the restrictions of all Killing vector fields to γ. It is worthwhile to note that in some texts, the term "isotropic" is also used to designate any fundamental Jacobi fields. The main purpose of this talk is to study the existence and properties of fundamental Jacobi fields on homogeneous Riemannian manifolds, in particular, on symmetric spaces, on normal homogeneous spaces and on naturally reductive spaces. Using homogeneous structures and the consideration of Jacobi fields by means of infinitesimal models, we can also obtain different results for other classes of homogeneous Riemannian manifolds. Finally, we examine and prove with some restrictions the Ziller conjecture: "All naturally reductive spaces with the property that all Jacobi fields vanishing at two points are isotropic are locally symmetric."

Autor: Luis Guijarro. Univ. Complutense Madrid

Título:Métricas de curvatura no negativa en fibrados estables sobre espacios proyectivos

Resumen:
Una de las cuestiones pendientes en Geometría Riemanniana es qué fibrados vectoriales sobre variedades compactas y simplemente conexas admiten métricas completas de curvatura seccional no negativa. La elección de fibrados vectoriales no es arbitraria: sólo ellos pueden ser candidatos debido al Teorema del Alma de Cheeger y Gromoll. En esta charla, demostraremos que para cualquier fibrado vectorial E sobre un proyectivo se pueden obtener tales métricas sobre $E \oplus \mathbb{R}^k$ para algún k. La demostración pasa por recoger la construcción de esferas totalmente geodésicas en espacios clasificadores debida a Wong, Wolf, Rigas y Wang, y estudiar su equivariancia bajo la acción de Hopf.

Autor: Steen Markvorsen. Technical Univ. of Denmark, Lyngby. Dinamarca

Título: Metric Graphs in Riemannian Manifolds

Resumen:
For a given graph G the geometrizations (G, g) of the graph are obtained by considering each edge as a 1-dimensional manifold with an associated metric. In this talk we consider vertex-minimal isometric immersions of geometrized graphs (G, g) into Riemannian manifolds. Such immersions admit a natural 'geometric' extension of the

intrinsic combinatorial Laplacian. This extension enjoys standard properties such as the maximum principle and the divergence theorems, which are of instrumental importance for the applications. We apply these properties to show that graphs in ambient Riemannian spacesshare several analytic and geometric properties with their smooth (submanifold) counterparts in such spaces.

Autores: A. M. Naviera. U. Valencia y A. Tarrío, U. A Coruña.

Título: Un método para la resolución de la ecuación de Jacobi en la variedad $M_7 = SO(5)/SU(2)$.

Resumen:
Es bien conocida en la bibliografía matemática la resolución de la ecuación de Jacobi en los espacios simétricos. En 1967 Chavel resuelve la ecuación de Jacobi en las variedades $SO(5)/SU(2)$ y $SU(5)/SO(5)T$, pero únicamente en alguna dirección particular. Para los espacios homogéneos, no conocemos en la bibliografía ninguna otra referencia a esta cuestión. Utilizando el concepto de rango osculador constante de una curva euclidea, en esta nota exponemos un método para la resolución de la ecuación de Jacobi en M_7 a lo largo de una geodésica arbitraria. Esta variedad, que es Einstein, fue clasificada por Berger en 1961 y aparece en el libro de A. L. Besse "Einstein manifolds" como un espacio homogéneo naturalmente reductivo excepcional. En un futuro esperamos aplicar este método a otros ejemplos de espacios homogéneos naturalmente reductivos no-simetricos.

Autor: Marcel Nicolau, Univ. Autònoma de Barcelona

Título: Deformaciones de variedades de Sasaki

Resumen:
La geometría de Sasaki se ha revelado como una útil herramienta para construir y probar la existencia de métricas de Riemann especiales, tales como métricas de Einstein o métricas con curvatura de Ricci positiva, para una amplia clase de variedades de dimensión impar. Recientemente se han dedicado muchos esfuerzos a la construcción de ejemplos concretos de variedades de Sasaki, especialmente en dimensiones bajas dada su relevancia en diversos modelos de la física, así como a la descripción de sus deformaciones. En 1999 Pedersen y Poon probaron que las variedades 3-Sasakianas son rígidas, en claro contraste con las variedades de Sasaki, que sí admiten deformaciones. Estas deformaciones han sido estudiadas en determinados casos particulares; por ejemplo Boyer, Galicki y Nakayame, en un trabajo publicado en 2003, describen las deformaciones de variedades de Sasaki-Einstein de dimensión 5. En esta charla presentamos un trabajo realizado en colaboración con G. Guasp en el que se prueba la existencia de un espacio de módulos local para las deformaciones de variedades de Sasaki compactas arbitrarias. Este espacio de módulos resulta ser un conjunto

analítico de dimensión finita y permite expresar la eventual rigidez de la estructura en términos cohomológicos computables.

Autor: Vicente Palmer Andreu. Univ. Jaume I, Castellón

Título: Transitoriedad del movimiento Browniano en subvariedades de una variedad Riemanniana.

Resumen:
El movimiento Browniano de una partícula que parte de un punto dado en una variedad Riemanniana es recurrente si la partícula vuelve a las cercanías del punto de partida al cabo de un tiempo, lo que es equivalente a decir que todo abierto de la variedad será visitado por ella, en su vagar errático, cuando el tiempo sea suficientemente grande. La variedad es entonces llamada también recurrente porque esta propiedad es independiente del punto de partida. Cuando esta condición no se verifica, lo que, en términos probabilísticos, es equivalente a decir que la partícula volverá al origen del movimiento únicamente un número finito de veces, con probabilidad 1, (o bien que la partícula escapará para siempre de cualquier región acotada al cabo de un tiempo determinado), se dice que la variedad, (y también el movimiento Browniano definido sobre ella), es transitoria, (resp. transitorio). Existen varias caracterizaciones de la transitoriedad de una variedad, bajo el punto de vista de la Teoría del Potencial. Una de ellas afirma que la transitoriedad es equivalente a la existencia de una función de Green positiva y finita definida sobre la variedad, es decir, la transitoriedad de la variedad es equivalente a su hiperbolicidad. Otra, que es la que se va a utilizar en este trabajo, es la que caracteriza la transitoriedad mediante la existencia de compactoscon capacidad positiva en el infinito. Haciendo uso de esta última caracterización, hemos estudiado la transitoriedad de una variedad Riemanniana P bajo el punto de vista de la la teoría de subvariedades, es decir, considerando a la variedad en cuestión inmersa en otra variedad Riemanniana ambiente M, y buscando entonces las condiciones geométricas intrínsecas, (sobre M) y extrínsecas, (sobre P), más generales en lo posible, que juntas garanticen que P posee esta propiedad. Una herramienta fundamental en este estudio son las bolas extrínsecas D_r definidas en la subvariedad mediante la distancia, (extrínseca), en lavariedad ambiente. Trabajo en colaboración con S. Markvorsen.

Autor: Santiago Simanca. SUNY at Stony Brook, Estados Unidos.

Título: Metricas extremales en superficies compleja con primera clase de Chern positiva.

Resumen:
Describimos el flujo extremal, una versión no-lineal de una ecuación de calor pseudodiferencial para métricas Kahlerianas, cuyos puntos críticos son las métricas que

hacen estacionaria la norma L^2 de la curvatura escalar (cuando se le define sobre el espacio de métricas Kahlerianas que representan un clase de cohomología fija). Adaptando técnicas empleadas en el estudio del movimiento de cuerpos elastodinámicos incompresibles, demostramos que el problema de Cauchy para esta ecuación se puede resolver con continuidad localmente en el tiempo. Usando desigualdades de Harnack, adaptaciones a nuestro flujo pseudo-diferencial de esas introducidas por Hamilton en el estudio del flujo de Ricci, estudiamos la existencia de soluciones definidas globamente en el tiempo para superficies complejas con primera clase de Chern positiva, así como también su convergencia cuando t crece arbitrariamente.

Autor: Gil Solanes, Université de Bourgogne, Dijon, Francia

Título: Curvatura total absoluta en el espacio hiperbólico

Resumen:
Para inmersiones en el espacio euclídeo, la desigualdad de Chern-Lashof establece que la curvatura total absoluta es mayor o igual que la suma de los números de Betti. En caso de igualdad, se habla de inmersiones tensas. Trataremos la generalización de estos resultados al espacio hiperbólico. En particular, se construirán contraejemplos a la desigualdad anterior, se definirá la noción de inmersión tensa en geometría hiperbólica y se darán fórmulas para la curvatura total de dichas inmersiones.

MINI-SEMINARIO:
Sobre las novedades relativas al método de Perelman para la resolución de las conjeturas de Poincaré y Thurston
dirigido por Vicente Miquel y Esther Cabezas, Univ. Valencia

Programa:

Durante la primera hora, el seminario será conducido por Vicente Miquel que, con la ayuda de otros profesores asistentes a esta sesión especial, dará una visión global del problema, de las técnicas de Hamilton para abordarlo y de la contribución final de Perelman. Los apartados de esta exposición serán: La conjetura de geometrización. La idea de usar una ecuación tipo la del calor que viene de las aplicaciones armónicas. Las etapas fundamentales en la demostración de Hamilton-Perelman. Los principios de máximo y las desigualdades de Harnack. Solitones y singularidades. Algunos tipos de convergencia.

Durante la segunda hora, Esther Cabezas expondrá, con todo el detalle que permita el tiempo, los resultados del primer preprint de Perelman. La exposición seguirá, aproximadamente, el orden de este preprint de Perelman: El flujo de Ricci como un flujo gradiente. Breathers y solitones. Teorema del no colapso local. Formalismo Riemanniano. Flujo de Ricci y geometría de comparación. Desigualdades de Harnack diferenciales. Teorema de pseudolocalidad. Soluciones antiguas. Curvatura casi no negativa. Imagen global del flujo de Ricci en dimensión 3.