Geometría Lineal y no Lineal de los Espacios de Banach

Introducción. La teoría de los Espacios de Banach es un campo de investigación muy activo y su estudio y relación con la Topología y el Análisis Funcional son actividades realizadas en España por varias escuelas cuya investigación está orientada en esta dirección.

Se tratarán los siguientes temas:

- Geometría de espacios de Banach.
- Operadores en espacios de Banach.
- Diferenciabilidad.
- Análisis Geométrico Convexo.
- Polinomios y aplicaciones multilineales.
- Teoría Local.
- Renormamiento.
- Espacios de Banach, Análisis Real y Complejo.
- Teoría Isomórfica.
- Teoría Isométrica.
- Espacios de Funciones Continuas.
- Topología en espacios de Banach de dimensión infinita.

El comité organizador de la sesión:

Fernando Bombal (Universidad Complutense)
Tomás Domínguez (Universidad de Sevilla)
Vicente Montesinos (Universidad Politécnica de Valencia)
José Orihuela (Universidad de Murcia)
Rafael Payá (Universidad de Granada)
Pilar Rueda (Universidad de Valencia)

Resúmenes

Se listan las comunicaciones en orden de intervención

High order smoothness and asymptotic structure in Banach spaces

Raquel Gonzalo, Jesús A. Jaramillo y Stanimir Troyanski

Abstract: We study the connection between the modulus of asymptotic smoothness of a Banach space and the existence of high order differentiable bump functions and norms on the space. On the other hand, we relate the modulus of asymptotic convexity with the existence of high order rough norms on the space. Finally, we apply these results to study the smoothness of Nakano sequence spaces.

Extensión de un teorema de Lindenstrauss a aplicaciones multilineales

Manuel Maestre

Abstract: Pendiente de envío.

Distancia a la intersección de dos conjuntos

Antonio Martinón

Abstract: Se dan condiciones suficientes para que la distancia de un punto a la intersección de dos conjuntos coincida con el máximo de las distancias a cada uno de ellos. Los resultados se establecen en diferentes ambientes: espacios métricos completos, espacios de Banach y espacios de subconjuntos de espacios de Banach.

El prototipo de teorema que se obtiene es el siguiente:

Teorema. Sea X un espacio de Banach. Si R y S son subconjuntos cerrados no vacíos de X tales que $R \cup S$ es un conjunto convexo, entonces $R \cap S \neq \emptyset$ y

$$d(z, R \cap S) = \max\{d(z,R), d(z,S)\},$$

para todo $z \in X$.

Productos de espacios de conjuntos finitos y otros compactos de Eberlein uniformes

Antonio Avilés

Abstract: Un espacio compacto se dice de Eberlein uniforme si es homeomorfo a un débil compacto de un espacio de Hilbert $\ell_2(\Gamma)$. Algunos ejemplos los constituyen la propia bola de este espacio $B(\Gamma)$, el espacio $\sigma_n(\Gamma) \subset \{0,1\}^\Gamma$ de los subconjuntos de Γ de cardinalidad menor o igual que n ($n \in \mathbb{N}$) y los productos numerables de ellos. El siguiente es un resultado de Benyamini, Rudin y Wage:

Theorem 1. *Cada compacto de Eberlein uniforme de peso κ es una imagen continua de un subespacio cerrado de $\sigma_1(\kappa)^\mathbb{N}$.*

Bell ha construido un ejemplo de un compacto de Eberlein uniforme que no es imagen continua de ningún $\sigma_1(\kappa)^\mathbb{N}$. Mostramos que sin embargo, el propio $B(\Gamma)$ sí es una imagen continua de $\sigma_1(\Gamma)^\mathbb{N}$, lo que combinado con resultados de Bell, implica que la topología de $B(\Gamma)$ tiene propiedades combinatorias muy particulares, que de hecho no comparten las bolas de otras normas equivalentes en $\ell_2(\Gamma)$.

Así mismo, mostramos que la suprayección del Teorema 1 admite un operador regular de promedio, lo que permite por una parte mejorar un resultado de Argyros y Arvanitakis y de otra, usando el metodo de descomposición de Pełczyński, que todos los espacios de Banach de tipo $C(\prod_1^\infty \sigma_{n_i}(\Gamma))$ son isomorfos. La clasificación topológica de los $\prod_1^\infty \sigma_{n_i}(\Gamma)$ es sin embargo más compleja.

Operadores absolutamente sumantes e integración vectorial

José Rodríguez

Abstract: Un operador entre espacios de Banach se dice absolutamente sumante si transforma series incondicionalmente convergentes en series absolutamente convergentes. Así, dichos operadores mejoran las propiedades de sumabilidad de las sucesiones. Dentro del contexto de la integración de funciones con valores en espacios de Banach, ante la existencia de diferentes extensiones de la integral de Lebesgue (integral de Bochner, de Pettis, etc.), es natural preguntarse en qué medida la composición con un operador absolutamente sumante puede "mejorar" las propiedades de integrabilidad de una función. Aparentemente, el primero en considerar estas cuestiones fue Diestel [2]. Otros trabajos en esta línea son [1, 3, 4].

En esta charla presentaremos algunas de nuestras contribuciones dentro de este contexto, que involucran tanto clases especiales de espacios de Banach no separables como nociones de integrabilidad, intermedias entre las de Bochner y Pettis, que recientemente han sido ampliamente estudiadas (integrabilidad Birkhoff, Talagrand y McShane). A continuación hacemos un breve resumen de nuestros resultados. Sean (Ω, Σ, μ) un espacio de probabilidad completo y $u : X \longrightarrow Y$ un operador absolutamente sumante entre espacios de Banach. Probamos que para cada función integrable Dunford (i.e. escalarmente integrable) $f : \Omega \longrightarrow X$ la composición $u \circ f$ es escalarmente equivalente a una función integrable Bochner. Dicha composición es integrable Bochner en diversos casos, por ejemplo cuando:

- la familia $\{x^* \circ f : \ x^* \in X^*, \ \|x^*\| \leq 1\}$ es estable en el sentido de Talagrand (e.g. f es integrable Birkhoff);
- f es integrable McShane;
- X es un subespacio de un espacio débilmente Lindelöf de la forma $C(K)$ (e.g. X es débilmente compactamente generado);
- X es un subespacio de un espacio Asplund generado (e.g. X es de Asplund).

Mostramos ejemplos que ponen de manifiesto que $u \circ f$ no es, en general, integrable Bochner. Finalmente, también estudiamos la continuidad de la aplicación $f \mapsto u \circ f$.

References

[1] A. Belanger and P. N. Dowling, *Two remarks on absolutely summing operators*, Math. Nachr. **136** (1988), 229–232.

[2] J. Diestel, *An elementary characterization of absolutely summing operators*, Math. Ann. **196** (1972), 101–105.

[3] M. Heiliö, *Weakly summable measures in Banach spaces*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. Dissertationes (1988), no. 66, 49.

[4] V. Marraffa, *A characterization of absolutely summing operators by means of McShane integrable functions*, J. Math. Anal. Appl. **293** (2004), no. 1, 71–78.

The Aron-Berner Extension for Polynomials Defined in the Dual of a Banach Space

José Luis González Llavona

Abstract: Let $E = F'$ where F is a complex Banach space and let $\pi_1 : E'' = E \oplus F^\perp \ \rightarrow E$ be the canonical projection. Let $P(^nE)$ be the space of the complex valued continuous n-homogeneous polynomials defined in E. We characterize the elements $P \in P(^nE)$ whose Aron Berner extension coincides with $P \circ \pi_1$. The case of weakly continuous polynomials is considered. Finally we also study the same problem for holomorphic functions of bounded type.

Órdenes límite y aplicaciones multilineales en espacios ℓ_p

P. Sevilla (trabajo conjunto con D. Carando y V. Dimant)

Abstract: Como el concepto de orden límite es una herramienta útil para el estudio de ideales de operadores, proponemos una definición análoga para ideales de aplicaciones multilineales. Calculando los órdenes límite de algunos ideales (de aplicaciones multilineales nucleares, integrales, r-dominadas y extensibles) obtenemos algunas propiedades de estos ideales y mostramos que el caso bilineal, estudiado en [1, 2], y el multilineal (para $n \geq 3$) presentan diferencias sustanciales.

References

[1] Daniel Carando, Extendible polynomials on Banach spaces, J. Math. Anal. Appl. **233** (1999), 359–372.
[2] Daniel Carando, Extendibility of polynomials and analytic functions on ℓ_p, Stud. Math. **145** (2001), no. 1, 63–73.

Aplicaciones lineales y biyectivas que conservan el diámetro

Antonio Aizpuru, Fernando Rambla

Abstract: We study linear bijections from $\mathcal{C}(X,V)$ onto $\mathcal{C}(Y,Z)$ which preserve the diameter of the range of the functions, where X, Y are compact Hausdorff spaces and V, Z are Banach spaces. In particular, assuming that there is a diameter-preserving linear bijection T from $\mathcal{C}(X,V)$ onto $\mathcal{C}(Y,Z)$ we prove that

(1) If Z is linearly isometric to V then X is homeomorphic to Y.
(2) If Z and V are $\mathcal{C}_0(L)$ spaces then Z is linearly isometric to V.

If, in addition, T is what we call an H-dplb then

(3) X is homeomorphic to Y.
(4) If Z or V is strictly convex then Z is linearly isometric to V.
(5) If Z^* and V^* have the Bade property then Z^* is linearly isometric to V^*.

Posiciones extremales de cuerpos convexos

J. Bastero

Abstract: En los últimos años se han venido caracterizando numerosas posiciones relevantes de cuerpos convexos como solución de ciertos problemas extremales. Dichas situaciones provienen tanto de la Geometría Convexa como de la Teoría Local de los espacios de Banach e incluyen, por ejemplo, la ℓ-posición, la MM^*-posición, la posición de John, de anchura media mínima... y muchas otras. En esta charla se estudia dicha problemática a través de ejemplos recientemente resueltos por el autor con J. Bernués y M. Romance.

Isotropía de medidas log-cóncavas

Miguel Romance

Abstract: El estudio de la constante de isotropía de cuerpos convexos constituye uno de los tópicos centrales del Análisis Geométrico Convexo y la conjetura de Bourgain sobre la acotación superior de la misma es uno de los principales problemas abiertos. En esta charla se considera la isotropía en el contexto de medidas de Borel log-cóncavas de soporte compacto, obteniéndose, entre otras, estimaciones superiores tipo Bourgain pero empleando el M-elipsoide de Milman.

Some geometrical properties in Banach spaces with modulus of convexity of power type 2

Stanimir Troyanski

Abstract: There exists quotients of linear functions $q = q(c) > 1$ such that a Banach space X is $q-$uniformly smooth renormable if $\delta_X(\epsilon) \geq c\,\epsilon^2$ for small $\epsilon > 0$.

Fronteras de James y selectores

José Orihuela

Abstract: Pendiente de envío.

A note on dentability, quasi-dentability and LUR renorming

F. García

Abstract: The notions of denting point, quasi-denting point and dentability index (δ_F) are related with the renorming theory, [2]. The notion of denting point was used by S. Troyanski in 1985, [5], to show that a Banach space X admits an equivalent locally uniformly rotund norm when all the points in its unit sphere S_X are denting points for the unit ball. For quasi-denting points, refining his probabilistic methods, S. Troyanski showed in 1994, [6], that a Banach space X also admits an equivalent LUR norm provided all points in the unit sphere S_X are quasi-denting points for B_X. An approach for the last result without probabilistic methods has been recently obtained in [1].

In our proof we used the result: *If $\delta_F(S_X, B_X) < \omega_1$ the normed space X admits an equivalent $\sigma(X, F)$-lower semi-continuous LUR norm*. In this talk we begin recalling a result of our previous work that generalizes Troyanski's theorem on quasi-denting points and we show how to obtain from it the fact that a Banach space is LUR renormable whenever we have compact and denting faces in the unit sphere. In the second part of the talk we introduce the quasi-dentability index ($\alpha\delta_F$), and we study its "good" relationship respect to the dentability index (δ_F). We obtain this "good" relationship showing a universal map between these two indices. We find a precedent of this kind of maps in the work of G. Lancien in 1996, [4], showing a universal map ψ between the Szlenk index (S_Z) and the w^*-dentability index (δ^*) with several applications showed, for instance, in [3]. A difference between Lancien's universal map and our case is that we give a direct computation for it without any use of descriptive set theory. On the other hand our map gives us the proof of the fact that *if $\alpha\delta_F(S_X, B_X) < \omega_1$ then there exists also an equivalent $\sigma(X, F)-$lower semicontinuous LUR norm*, connecting with the result we began with.

References

[1] F. García, L. Oncina, J. Orihuela and S. Troyanski, *Kuratowski's index of non-compactness and renorming in Banach spaces*, J. Convex Anal. **11**, (2004), no 2, 477-494.

[2] G. Godefroy, *Renormings of Banach spaces*, Handbook of the geometry of Banach spaces, 781-836, W. B. Johnson J. Lindenstrauss, Elseviers (2001).

[3] ———, *The Szlenk index and its applications*, General topology and its applications, 71-79, Nova Sci. Publ., Huntington, NY, (2001).

[4] G. Lancien, *On the Szlenk index and weak*-dentability index*, Quart. J. Math. Oxford (2), **47** (1996), 59-71.

[5] S. Troyanski, *On a property of the norm which is close to local uniform rotundity*, Math. Ann. **271** (1985), no.2, 3005-313.

[6] ———, *On some generalizations of denting points*, Israel J. Math **88** (1994), 175-188.

Strictly convex renormings

Aníbal Moltó

Abstract: This talk is based in a joint work with J. Orihuela, S. Troyanski and V. Zizler. Our aim is to study those normed spaces which admit an equivalent strictly convex norm. They are characterized in linear topological terms. This is applied to deduce some reasonably necessary and some reasonably sufficient conditions on a scattered compact K for admitting a dual strictly convex renorming in $C^*(K)$. Moreover we consider the class of all solid Banach lattices made up with bounded real functions on some set Γ. This class contains the Mercourakis space $c_1(M \times K)$, and the family of all X^* where X is a Banach space with unconditional uncountable bases. We study the existence of pointwise strictly convex renormings in these spaces.

Extreme operators in Banach spaces

Juan F. Mena Jurado

Abstract: We characterize a special type of extreme operators called nice operators, introduced by Blumenthal, Lindenstrauss and Phelps, in a class of Banach spaces, which includes spaces $\mathcal{C}(K)$ and $L_1(\mu)$, as those operators that preserve extreme points.
