

Primer Congreso Conjunto RSME-SCM-SEIO-SEMA
Valencia, del 31 de Enero al 4 de Febrero de 2005

Sesión de 9 horas
Álgebra no conmutativa

Organizadores:

Juan Cuadra Díaz. Universidad de Almería. jcdiaz@ual.es

José Gómez Torrecillas. Universidad de Granada. gomezj@ugr.es

Blas Torrecillas Jover. Universidad de Almería. btorrecci@ual.es

Conferenciantes:

Conferencias de 30 minutos:

Pere Ara Beltrán. Universidad Autnoma de Barcelona. para@mat.uab.es
Francisco Castro Jiménez. Universidad de Sevilla. castro@us.es
Pedro Guil Asensio. Universidad de Murcia. paguil@um.es
Dolors Herbera. Universidad Autónoma de Barcelona. dolors@mat.uab.es
Pascual Jara Martínez. Universidad de Granada. pjara@ugr.es
Antonio Martínez Cegarra. Universidad de Granada. acegarra@ugr.es
Luis Narváez Macarro. Universidad de Sevilla. narvaez@algebra.us.es
Manuel Saorín Castaño. Universidad de Murcia. msaorinc@um.es
Emilio Villanueva Novoa. Universidad de Santiago. alevilla@usc.es

Conferencias de 20 minutos:

José Ángel Anquela. Universidad de Oviedo. anque@pinon.ccu.uniovi.es
Gonzalo Aranda Pino. Universidad de Málaga. gonzalo@agt.cie.uma.es
Manuel Cortés Izurdiaga. Universidad de Almería. mizurdiaga@hotmail.com
Sergio Estrada Domínguez. Universidad de Granada. sestrada@ugr.es
Laiachi El Kaoutit. Universidad de Granada. kaoutit@ugr.es
Ramón González Rodríguez. Universidad de Vigo. rgon@dma.uvigo.es
Juan Antonio López Ramos. Universidad de Almería. jlopez@ual.es
Enrique Pardo Espino. Universidad de Cádiz. enrique.pardo@uca.es
Mercedes Siles Molina. Universidad de Málaga. mercedes@agt.cie.uma.es

Resúmenes:

Título: Problemas abiertos sobre graduaciones de Peirce de sistemas de Jordan.

Conferenciante: José Ángel Anquela.

Resumen: Las graduaciones de Peirce generalizan las descomposiciones de Peirce ligadas a idempotentes y constituyen una de las nociones naturales que aparecen en el desarrollo de la Teoría de Estructura de los Sistemas de Jordan.

En la charla describiremos problemas abiertos concernientes a este tema, así como algunos de los avances recientes y líneas de trabajo actuales, tanto en cuestiones que atañen incluso a las descomposiciones de Peirce ligadas a idempotentes como aquellas que surgen de la mayor generalidad de las graduaciones de Peirce.

Título: Descomposiciones de módulos en sumas directas, ideales casi-traza y pullbacks de monoides.

Conferenciante: Pere Ara Beltrán (trabajo conjunto con Alberto Facchini)

Resumen: El estudio de las descomposiciones en suma directa de un módulo M puede ser codificado fielmente en el monoide $V(R)$ de clases de isomorfía de módulos proyectivos finitamente generados sobre el anillo de endomorfismos R de M . El paso de módulos proyectivos sobre un anillo R al anillo cociente R/I es particularmente bueno para cierto tipo de ideales, que llamamos ideales casi-traza. Para un ideal casi-traza I de R , se demuestra que ciertos diagramas "pullback" aparecen de forma natural cuando estudiamos los grupos de Grothendieck pre-ordenados asociados a R y a R/I . Una variante del grupo de Grothendieck de I , introducida por Quillen, tiene una fácil descripción en términos de módulos proyectivos cuando I es un ideal casi-traza.

Título: Álgebras de caminos de Leavitt.

Conferenciante: Gonzalo Aranda Pino.

Resumen: Para cualquier grafo de filas finitas E y cualquier cuerpo K , construimos el álgebra de caminos de Leavitt $L(E)$ con coeficientes en K . Cuando K es el cuerpo de los números complejos, $L(E)$ es el análogo algebraico del álgebra de Cuntz-Krieger $C^*(E)$. Los anillos de matrices $M_n(K)$ y las álgebras de Leavitt $L(1, n)$ aparecen como álgebras de la forma $L(E)$ para ciertos grafos E . En nuestro resultado principal, damos condiciones necesarias y suficientes sobre el grafo E para que $L(E)$ sea simple.

Título: Algoritmos en anillos de operadores diferenciales y D -módulos^(*).

Conferenciante: Francisco J. Castro Jiménez.

Resumen: Se denota por $\mathbf{C}[x] := \mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]$ el anillo de los polinomios con coeficientes complejos en n variables (resp. $\mathbf{C}\{x\} := \mathbf{C}\{x_1, \dots, x_n\}$ el anillo de las series convergentes, resp. $\mathbf{C}[[x]] := \mathbf{C}[[x_1, \dots, x_n]]$ el anillo de las series formales). Para simplificar, la letra R denotará uno cualquiera de esos anillos.

El álgebra de Weyl A_n (o $A_n(\mathbf{C})$) es el anillo de los operadores diferenciales lineales con coeficientes en $\mathbf{C}[x]$. Se denota por $\mathcal{D}_n = \mathcal{D}_n(\mathbf{C})$ (resp. $\widehat{\mathcal{D}}_n = \widehat{\mathcal{D}}_n(\mathbf{C})$) el anillo de operadores diferenciales lineales con coeficientes en $\mathbf{C}\{x\}$ (resp. en $\mathbf{C}[[x]]$). Cualquiera de estos tres anillos de operadores diferenciales se denotará por $\mathcal{D}$.

El anillo $\mathcal{D}$ es no conmutativo y noetheriano. Si denotamos por ∂_i el operador de derivada parcial $\frac{\partial}{\partial x_i}$, un elemento de $\mathcal{D}$ (es decir, un operador diferencial) se escribe como una suma finita

$$P = \sum_{\beta \in \mathbf{N}^n} a_\beta(x) \partial^\beta$$

donde $a_\beta(x) \in R$ y $\partial^\beta = \partial_1^{\beta_1} \cdots \partial_n^{\beta_n}$.

La teoría de las bases de Gröbner, inventada por B. Buchberger y por H. Hironaka para el caso polinomial y el caso de series respectivamente, se extiende al caso de los anillos de operadores diferenciales. Además, cada sistema de ecuaciones en derivadas parciales lineales tiene asociado de forma

natural un $\mathcal{D}$ -módulo, a la izquierda, finitamente generado. Las bases de Gröbner en el anillo $\mathcal{D}$ permiten resolver de forma algorítmica cuestiones planteadas en la teoría de los $\mathcal{D}$ -módulos.

En esta charla se describirán diversos algoritmos útiles en el estudio algebraico de los sistemas de ecuaciones en derivadas parciales y en la teoría de singularidades. Se tratará también la extensión de algunos de los resultados anteriores al caso de otros anillos no conmutativos como son las álgebras de Poincaré-Birkhoff-Witt.

(*) Parcialmente financiado por BFM2001-3164 and FQM-333.

Título: Módulos localmente proyectivos.

Conferenciante: Manuel Cortés Izurdiaga.

Resumen: Un módulo (a izquierda) M sobre un anillo (no necesariamente conmutativo) se dice localmente proyectivo si todo epimorfismo $f : N \rightarrow M$ es localmente escindido, en el sentido de que para cualquier submódulo finitamente generado F de M existe $g : M \rightarrow N$ tal que fg es la identidad sobre F . El objetivo de la charla es mostrar nuevos resultados sobre módulos localmente proyectivos.

Título: Aproximaciones minimales de representaciones de quivers.

Conferenciante: Sergio Estrada Domínguez.

Resumen: En esta charla estudiaremos la existencia de cubiertas inyectivas y proyectivas en la categoría de representaciones por módulos de un quiver. Encontraremos caracterizaciones de la existencia de las mismas atendiendo a características geométricas del quiver. Finalmente estudiaremos ciertas descomposiciones de matrices infinitas que se aplicarán en la caracterización de las representaciones proyectivas e inyectivas de quivers lineales.

Título: Coanillos Semiperfectos y Coanillos con Funtor Racional Exacto.

Conferenciante: Laiachi El Kaoutit.

Resumen: Un coanillo semiperfecto por la derecha es un coanillo cuya categoría de comódulos por la derecha es una categoría de Grothendieck y cada comódulo por la derecha finitamente generado posee una cobertura proyectiva. Demostraremos que cualquier coanillo semiperfecto cuya categoría de comódulos por la derecha tiene un conjunto de generadores finitamente generados es isomorfo a un coanillo de comatrices infinitas.

De otra parte caracterizaremos los comódulos por la derecha de un coanillo que forma parte de un par racional con el funtor racional exacto, como comódulos por la derecha sobre un coanillo idempotente adecuado.

Finalmente deducimos que un coanillo semiperfecto por la derecha, localmente proyectivo como módulo por la izquierda y cuyo comódulo de Galois es principal, es un coanillo con el funtor racional exacto.

Trabajo realizado en colaboración con José Gómez-Torrecillas.

Título: Extensiones Cleft y objetos de Galois débiles^(*).

Conferenciante: Ramón González Rodríguez.

Resumen: En esta comunicación se introducirá la noción de extensión cleft débil para una estructura entrelazada débil, asociada a una coálgebra C y a un álgebra A , en una categoría monoidal trenzada con igualadores y coigualadores. Probaremos que, si A es una de tales extensiones, existe un isomorfismo de álgebras entre A y un producto cruzado de una subálgebra A_C de A y C . Como caso particular de esta situación obtendremos que es posible generalizar el teorema de Blattner, Cohen y Montgomery al contexto de álgebras de Hopf débiles, esto es, si $g : B \rightarrow H$ es un morfismo de álgebras de Hopf débiles para el cual existe un morfismo $f : H \rightarrow B$ de coálgebras tal que $g \circ f = id_H$ y $f \circ \eta_H = \eta_B$, entonces B es isomorfo como álgebra al producto cruzado $B_H \#_{\sigma} H$ donde σ es un cociclo y B_H es una subálgebra de B .

Finalmente, se formulará la definición de extensión Galois débil con base normal y se caracterizarán dichas extensiones usando la noción de extensión cleft introducida previamente. Este teorema de caracterización tiene como casos particulares los resultados clásicos obtenidos por Kreimer, Doi y Takeuchi

para álgebras de Hopf, así como las posteriores generalizaciones realizadas por Brzeziński para estructuras entrelazadas. Además, el nivel de generalidad alcanzado nos permitirá extender la teoría al contexto de álgebras de Hopf débiles.

Referencias

- Alonso Álvarez, J.N. y González Rodríguez, R., *Crossed products for weak Hopf algebras with coalgebra splitting*, Journal of Algebra, **2004** (en prensa).
- Alonso Álvarez, J. N.; Fernández Vilaboa, J.M.; González Rodríguez, R. y Rodríguez Raposo, A.B., *Weak C -cleft extensions, weak entwining structures and weak Hopf algebras*, sometido **2004**.
- Alonso Álvarez, J. N.; Fernández Vilaboa, J.M.; González Rodríguez, R. y Rodríguez Raposo, A.B., *Weak C -cleft extensions and weak Galois extensions*, sometido, **2004**.

Los anteriores artículos están disponibles en la dirección:

<http://www.dma.uvigo.es/rgon/Publicaciones.html>

(*) Trabajo financiado por el Ministerio de Ciencia y Tecnología, por Fondos FEDER y por la Xunta de Galicia. Proyectos BFM2003-07353-C02-01/02, PGIDITO4PXIC32202PN, PGIDITO4PXIC20703PN.

Título: Dimensión de Goldie de anillos hereditarios.

Conferenciante: Pedro A. Guil Asensio.

Resumen: Sea R un anillo hereditario por la derecha y sea E , la envoltura inyectiva de R_R . Demostramos que si E es numerablemente generada, entonces R es noetheriano por la derecha. Si, además, E es finitamente generada, el anillo R es artinianiano por la derecha. Este resultado da una respuesta positiva a un problema planteado a principios de los años noventa por D.V. Huynh y N.V. Dung. El resultado se basa en la obtención de una

cota para la dimension de Goldie de los módulos inyectivos sobre anillos hereditarios. (trabajo conjunto con Hai Dinh y S. Lopez-Permouth)

Título: Módulos divisibles y localización.

Conferenciante: Dolors Herbera.

Resumen: Sea R un anillo asociativo y con unidad. Sea S un subconjunto de no divisores de cero de R tal que podamos considerar el anillo de fracciones por la izquierda $S^{-1}R$ o, dicho de otra manera, S es un conjunto de Ore por la izquierda.

En esta charla presentaremos diversas caracterizaciones de los anillos tales que $S^{-1}R_R$ tiene dimensión proyectiva como mucho 1, extendiendo resultados e ideas desarrolladas por Kaplansky, Matlis, Hampsher, Lee, Fuchs y Salce para el caso de los dominios conmutativos.

Veremos que el hecho que la dimensión de $S^{-1}R$ sea a lo sumo 1 puede caracterizarse en términos de la categoría de módulos S -divisibles. En el caso en que R sea conmutativo estas propiedades son equivalentes a que $S^{-1}R/R$ sea suma directa de módulos numerablemente generados.

Una herramienta importante para demostrar estos resultados es la teoría de los módulos tilting. Como consecuencia de nuestras técnicas extendemos las construcciones conocidas de módulos tilting, en el caso de dominios conmutativos y de anillos de Gorenstein, a nuestro contexto.

Los resultados que presentaremos forman parte de un trabajo hecho en colaboración con Lidia Angeleri-Hügel y Jan Trlifaj.

Título: Módulos primos y coálgebras primas.

Conferenciante: Pascual Jara Martínez.

Resumen: Los módulos primos tienen una rica estructura que, para algunos tipos especiales de álgebras, refleja muchas de sus propiedades. En este trabajo nos vamos a centrar en el estudio de las condiciones de cadena y su relación con los módulos primos. Estudiaremos primero el caso de anillos y sus ideales, para después considerar el caso más general de módulos. Un

caso aparte de la teoría es el que aparece al considerar las coálgebras y sus comódulos, en donde vamos a estudiar un caso particularmente interesante: las coálgebras de caminos.

Título: Una generalización en el caso no conmutativo del último Teorema de Auslander.

Conferenciante: Juan Antonio López Ramos.

Resumen: En 1966, Auslander ([1]) introdujo una clase de módulos finitamente generados con una resolución completa de módulos proyectivos, a los que denominó módulos proyectivos de Gorenstein. En los últimos años se ha desarrollado una amplia teoría sobre los módulos de Gorenstein (proyectivos, injectivos y planos), véanse para ello, por ejemplo, [2], [3] y sus referencias.

Por otro lado, un módulo dualizante para un anillo es aquel cuya resolución injectiva (deleted) es un complejo dualizante. De este modo, un anillo local noetheriano R es Gorenstein si y sólo si R es un módulo dualizante para R . En este caso, Auslander anunció un resultado que decía que todo módulo finitamente generado sobre tales anillos tiene una cubierta proyectiva de Gorenstein o, equivalentemente, una aproximación minimal maximal Cohen-Macaulay. En [4] este resultado se extiende al caso en el que R es un anillo local Cohen-Macaulay con un módulo dualizante.

En este trabajo, se presenta el concepto de bimódulo dualizante asociado a una pareja de anillos noetherianos (no necesariamente conmutativos). Definiremos dos clases de módulos, la clase de Auslander y la clase de Bass, determinadas por dicho bimódulo y entre las cuales existe una equivalencia. El objetivo del mismo es probar que todo módulo finitamente generado que esté en la clase de Auslander definida para un anillo noetheriano con un bimódulo dualizante y con dualidad de tipo Matlis tiene una cubierta proyectiva de Gorenstein finitamente generada.

Referencias:

[1] M. AUSLANDER, *Anneaux de Gorenstein et torsion en algèbre commutative*, Séminaire d'algèbre commutative, École Normale Supérieure de Junes Filles, Paris, (1966-67).

[2] L.W. CHRISTENSEN, *Gorenstein dimensions*, Lecture Notes in Math. 1747, Springer-Verlag, (2000).

- [3] E.E. ENOCHS AND O.M.G. JENDA, *Relative Homological Algebra*, De Gruyter, Berlin - New York (2000).
- [4] E.E. ENOCHS, O.M.G. JENDA AND J. XU, *A generalization of Auslander's last theorem*, J. Algebras Representation Theory 2, (1999), 259-268.

Título: Categorías graduadas y álgebras de Azumaya con operadores.

Conferenciante: Antonio Martínez Cegarra.

Resumen: Siendo Γ un grupo arbitrario de operadores, la clasificación por invariantes homológicos de las Γ -categorías graduadas sobre Γ -grupos se manifiesta interesante por sus diferentes aplicaciones a problemas algebraicos (también topológicos) de naturaleza equivariante. Así, como ejemplo más elemental podemos referirnos al problema de la clasificación de las extensiones equivariantes de un Γ -grupo N por un Γ -grupo G ; esto es, de las sucesiones exactas cortas $N \rightarrowtail E \twoheadrightarrow G$ en las que E es un Γ -grupo y las aplicaciones inclusión y proyección son compatibles con la Γ -acción.

Situándonos en el contexto de una extensión de Galois de Γ -anillos conmutativos S/R , con Γ -grupo de Galois G , el análisis de las Γ -categorías graduadas sobre G cuya 1-componente es la categoría de S -módulos nos permite ver como, de forma natural, los resultados generales se pueden aplicar a la variedad de las S/R -álgebras de Azumaya equivariantes. El resultado directo es la existencia de una sucesión exacta de naturaleza cohomológica, de la que a su vez se deriva una otra (históricamente más elocuente) de la forma:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 \rightarrow H_{\Gamma}^1(G, U(S)) & \longrightarrow & P_{\Gamma}(R) & \longrightarrow & P_{\Gamma}(S, G) & \longrightarrow & H_{\Gamma}^2(G, U(S)) \\
 & & & & \swarrow & & \\
 & & & & B_{\Gamma}(S/R) & \twoheadrightarrow & H_{\Gamma}^1(G, P(S)) \rightarrow H_{\Gamma}^3(G, U(S)),
 \end{array}$$

donde los H 's son grupos de cohomología equivariante de grupos, los P 's son grupos equivariantes de Picard y $B_{\Gamma}(S/R) = \text{Ker}(B_{\Gamma}(R) \rightarrow B_{\Gamma}(S))$ es el grupo de Brauer equivariante de Fröhlich-Wall relativo a la extensión de Galois de Γ -anillos S/R .

Título: Dualidad y extensión de escalares para álgebras de Lie-Rinehart.

Conferenciante: Luis Narváez Macarro.

Resumen: Consideremos un homomorfismo de (k, A) -álgebras de Lie-Rinehart. Bajo hipótesis adecuadas de finitud, estudiamos el comportamiento de la dualidad respecto de la extensión de escalares correspondiente. Para ello utilizamos una fórmula de asociatividad mixta para productos tensoriales internos-externos respecto de las álgebras envolventes asociadas.

Título: Semirretículos de grupos y límites inductivos de álgebras de Cuntz^(*).

Conferenciante: Enrique Pardo Espingo (trabajo conjunto con K.R. Goodearl y F. Wehrung).

Resumen: Caracterizamos, en términos de propiedades elementales, los monoides abelianos que son límites directos de sumas directas finitas de monoides de la forma $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \sqcup \{0\}$ (donde 0 es un nuevo elemento neutro), para cualquier entero positivo n . Aplicado a los monoides $V(A)$ que aparecen en la Teoría K no estable de C^* -álgebras, nuestro resultado da una caracterización de los monoides $V(A)$ para C^* -límites inductivos A de sucesiones de productos directos finitos de álgebras de matrices sobre álgebras de Cuntz $\mathcal{O}_n$. En particular, esto resuelve completamente el problema de determinar el rango del invariante en el caso unital de la clasificación (dada por Rørdam) de límites inductivos del tipo anterior, proporcionando un análogo para límites de Cuntz de la descripción del rango del invariante para AF C^* -álgebras separables (concretamente, K_0 ordenado) dado por Elliott, y Effros, Handelman, y Shen.

(*) La investigación del primer autor está parcialmente financiada por el proyecto DGEIC BFM2001-3141 (España), por el proyecto FQM-298 PAI III (Junta de Andalucía), y por la ayuda de movilidad PR2001-0276 de la Secretaría de Estado de Educación y Universidades, M.E.C.D. (España). La investigación del segundo autor está parcialmente financiada por un proyecto de la NSF (USA). La investigación del tercer autor está parcialmente financiada por el proyecto INTAS 03-51-4110 (Comunidad Europea)

Título: Clases TTF escindidas por un lado.

Conferenciante: Manuel Saorín Castaño.

Resumen: Dado un anillo R , un clase $\mathcal{T}$ de R -módulos es llamada TTF (=torsion torsionfree) cuando es a la vez una clase de torsión y una clase libre de torsión. Equivalentemente, cuando $\mathcal{T}$ es cerrada para submódulos, cocientes, extensiones y productos directos. Si $(\mathcal{C}, \mathcal{T}, \mathcal{F})$ es la correspondiente 'terna TTF' (es decir, $(\mathcal{C}, \mathcal{T})$ y $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ son las correspondientes teorías de torsión), diremos que dicha terna es escindida por la izquierda (resp. derecha) cuando la teoría de torsión $(\mathcal{C}, \mathcal{T})$ (resp. $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$) sea escindida. Las ternas TTF que son escindidas a la vez por la izquierda y por la derecha son llamadas centralmente escindidas y es bien conocido que las mismas están en biyección con el conjunto de idempotentes centrales del anillo. Sin embargo no existía, hasta donde conocemos, una clasificación de las ternas TTF que son escindidas sólo por un lado. En esta charla presentaremos una clasificación completa de las ternas TTF escindidas por la izquierda. Aunque la clasificación de las escindidas por la derecha no está completa, daremos un teorema que nos permite derivar una clasificación completa cuando el anillo R tiene un buen comportamiento (p.ej. es perfecto ó noetheriano).

Título: Sistemas asociativos de cocientes.

Conferenciante: Mercedes Siles Molina.

Resumen: En este trabajo se construye el sistema de cocientes maximal, por la izquierda, de un par de módulos en ciertos anillos generalizados de matrices. Estos anillos pueden verse como álgebras 3-graduadas, o como superálgebras. Estudiamos la relación que existe entre las tres diferentes nociones de cocientes, así como la interrelación de las nociones de fidelidad y no singularidad.

Título: Manipulación algebraica de la banda de Möbius.

Conferenciante: Emilio Villanueva Novoa.

Resumen: (Según el artículo [1] – *Twist and orientability in braided monoidal categories*, *J. Pure Appl. Algebra* 188 (2004), 7-32, escrito en colaboración con J.N. Alonso Álvarez, J.M. Fernández Vilaboa, R. González Rodríguez, y M^a.P. López López)

Ya que la teoría clásica de nudos en relación con los movimientos locales de Reidemeister (evolución isotópica) puede ser interpretada en categorías monoidales trenzadas de 1-cobordismos, y así puede ser estudiada muy fácilmente utilizando cálculo bidimensional basado en el formalismo 2-categorico de Bénabou (dichos movimientos locales aparecen como consecuencias triviales de las ecuaciones triangulares de una adjunción y de la naturalidad del "braiding"), parece razonable intentar un tratamiento similar, en un contexto apropiado, para el estudio de los "framed-links" y "framed-knots", en donde los "retorcimientos" (Π – *twist*) deberían ser tenidos en cuenta. Esto es lo que se lleva a cabo en el artículo citado y constituirá el núcleo central de la charla. Los retorcimientos aparecen como consecuencia del bien conocido resultado de que dos adjuntos por el mismo lado a un functor están determinados salvo un isomorfismo natural, y es posible definir, entonces, una banda de Möbius de tal modo que las usuales manipulaciones con la misma (utilizando unas tijeras) pueden ser interpretadas como transformaciones algebraicas de los objetos matemáticos implicados.

Aunque, como es bien conocido, la banda de Möbius no es una superficie orientada, la expresión algebraica con la que aquí se define en una categoría monoidal trenzada C necesita de una formulación ad-hoc de la orientabilidad en ese contexto. Se obtiene así la categoría "ribbon" C^{or} de los objetos orientados de C , que puede ser considerada como categoría base para desarrollar teorías de álgebras orientadas, álgebras de Frobenius, o (T)QFT's en contexto algebraico abstracto.