SESIÓN ESPECIAL DE TEORÍA DE SINGULARIDADES

Listado de títulos y resúmenes de las conferencias*

María Alberich Carramiñana
Universidad Politécnica de Cataluña

Factorization of plane Cremona maps

Given a plane Cremona map $\Phi : \mathbb{P}^2_1 \dashrightarrow \mathbb{P}^2_2$, the two-dimensional linear system in $\mathbb{P}^2_1$ (homaloidal net) $\mathcal{H} = \Phi^*(|\mathcal{L}|)$ which is the pullback of the net of lines $|\mathcal{L}|$ of $\mathbb{P}^2_2$ determines Φ modulus projectivity. To $\mathcal{H}$ we associate the weighted cluster (K, μ), where K are the base points (proper or infinitely near) of $\mathcal{H}$ and μ assigns to each $p \in K$ the multiplicity μ_p at p of generic curves in $\mathcal{H}$. From the study of the geometry of the singularities of the base points of the plane Cremona map, we will give a proof of a refined version of the well-known Noether's factorization theorem saying that every plane Cremona map is composed of ordinary quadratic transformations, and we will show some of its applications.

Francisco Calderón
Universidad de Sevilla

$\mathcal{D}$-módulos logarítmicos

Dado un divisor D en una variedad analítica compleja lisa, se puede desarrollar una *Teoría de $\mathcal{D}$-módulos logarítmicos* a lo largo de D (ó $\mathcal{D}(\log D)$-módulos), especialmente en el caso de que D sea libre [6]. Este desarrollo está motivado en la teoría clásica de $\mathcal{D}$-módulos y en el trabajo original de K. Saito , así como en algunos resultados recientes procedentes de diferentes áreas: *Arreglos de hiperplanos, Teoremas de comparación y de anulación y complejos de De Rham logarítmicos, Teoría de Hodge, Topología de discriminantes, Polinomio de Bernstein-Sato y V-filtración de Malgrange-Kashiwara.* De especial interés son las aplicaciones de la *Teoría de $\mathcal{D}$-módulos logarítmicos* en *Teoría de Singularidades.*

Comentaremos algunas de las aportaciones recientes más relevantes en el desarrollo de esta Teoría en el caso de los divisores libres. Algunos de estos resultados, en los que seguimos profundizando, creemos que se podrían generalizar al caso de otros divisores no necesariamente libres, como los divisores con singularidad aislada o los arreglos de hiperplanos.

References

[1] F.J. Calderón-Moreno. Logarithmic Differential Operators and Logarithmic De Rham Complexes Relative to a Free Divisor. *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.*, 4[e] série, 1999, vol. 32, p. 701-714.

(*) Todas las conferencias tendrán una duración de 40 minutos.

[2] F.J. Calderón-Moreno, F.J. Castro-Jiménez, D. Mond and L. Narváez-Macarro. Logarithmic Cohomology of the Complement of a Plane Curve. *Comentarii Mathematici Helvetici*, 2002, vol. 77, p. 34-48.
[3] F.J. Calderón-Moreno and L. Narváez-Macarro. The module $\mathcal{D}f^s$ for locally quasi-homogeneous free Divisor. *Compositio Mathematica*, 2002, vol. 134(1), p.59-74.
[4] F.J. Calderón-Moreno and L. Narváez-Macarro. Dualité et comparison sur les complexes de de Rham logarithmiques par rapport aux diviseurs libres. To appear in *Ann. Inst. Fourier.*
[5] F.J. Castro-Jiménez, D. Mond, and L. Narváez-Macarro. Cohomology of the complement of a free divisor. *Transactions of the American Mathemathical Society*, 1996, vol. 348, nº 8, 3037-3049.
[6] K. Saito. Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, 1980, 27:265–291.

Pierrette Cassou-Noguès
Universidad de Burdeos

ν-quasi-ordinary and quasi-ordinary power series

This is a joint work with E. Artal Bartolo, I. Luengo and A. Melle

Let K be a field of characteristic 0. In this talk we will define, in an algebraic way, graphs in terms of which we can decide if the resultant of two Weierstraß polynomials in $K[[x]][z]$ is a monomial times a unit, and compute this monomial. We call these graphs Newton trees in the case of a quasi-ordinary power series. If f is a z-quasi-ordinary power series, we can compare its Newton tree to the graph of $f\partial f/\partial z$ (in all cases) and compute the discriminant of f with respect to z from its Newton tree.

In the case of curves, the Newton trees are an algebraic version of splice diagrams introduced by Eisenbud and Neumann. We compare the Newton tree of quasi-ordinary surfaces to the Newton trees of the curve sections. We apply this to the computation of the topological Zeta function for surfaces.

Julio Castellanos
Universidad Complutense de Madrid

Semigrupo de singularidades de curvas

El semigrupo de valores de una singularidad de curva alabeada es un invariante de la singularidad. Analizamos la complejidad de este invariante, para describir los invariantes geométricos de la sucesión de puntos infinitamente próximos de la curva necesarios para determinar los generadores de su semigrupo. Consideraremos varias aproximaciones al problema y diversos ejemplos usando matrices de Hamburger-Noether de las curvas.

José Ignacio Cogolludo
Universidad de Zaragoza

Haces de curvas y cubiertas dihédricas infinitas de $\mathbb{P}^2$

Consideremos C una curva en el plano proyectivo complejo $\mathbb{P}^2$. En este trabajo veremos cómo la existencia de ciertas cubiertas dihédricas de $\mathbb{P}^2$ ramificadas a lo largo de C permiten asegurar que C está contenida en un haz de curvas, es decir, que está contenida en un número finito de miembros del haz. También veremos que una propiedad algebraica como la pertenencia de una curva a un haz produce información sobre la estructura de un invariante topológico como es el grupo fundamental del complementario $\mathbb{P}^2 \setminus C$.

Santiago Encinas
Universidad de Valladolid

Equirresolución algorítmica

Dado un algoritmo de resolución de singularidades que satisfaga ciertas "buenas" propiedades, se puede hablar de la noción de resolución algorítmica simultánea. Hay dos nociones naturales de equirresolución algorítmica que son equivalentes para una familia parametrizada por un esquema reducido T. Como consecuencia se obtiene que, dada una familia de subesquemas inmersos sobre T, se puede expresar T como una unión disjunta de conjuntos localmente cerrados T_j de tal forma que la familia de singularidades sobre cada T_j es equirresoluble. En particular esto se puede aplicar al esquema de Hilbert de una variedad projectiva lisa.

Mario Escario
Universidad de La Rioja

Monodromía homológica y discriminante de la aplicación polar

Se muestra un método algorítmico efectivo para el cómputo de la monodromía homológica de polinomios complejos en dos variables que son moderados. Como aplicación se computa la matriz de intersección de singularidades de superficie de tipo Iomdine en bases distinguidas de ciclos evanescentes y se prueba la existencia de polinomios conjugados en un cuerpo de números que no son topológicamente equivalentes.

Javier Fernández de Bobadilla
Universidad Nacional de Educación a Distancia

Singularidades no aisladas

Estudiamos trivialidad topoógica de singularidades no aisladas. Un problema cásico en este área (propuesto por D. Massey) es decidir si la constancia de los números de Lê implica trivialidad topológica para una familia de singularidades no aisladas. Respondemos negativamente a esta pregunta mediante contraejemplos. Sin embargo demostramos que, en el rango de dimensiones adecuado, la constancia de los numeros de Lê implica la constancia del tipo de homotopía del "enlace abstracto" de la singularidad.

Modificaciones de estos contraejemplos dan lugar a una familia Whitney-trivial de singularidades aisladas cuyo cono tangente proyectivizado no es topologicamente constate. Esto da una respuesta negativa a una pregunta de O. Zariski. A partir de este ejemplo construimos una familia de hipersuperficies proyectivas reducidas e irreducibles con tipo topológico constante y tipo de homotopía no constante.

Finalmente observamos que no hemos encontrado familias de ejemplos con lugar crítico de dimension 1. Esto no es casualidad: presentaré un resultado que dice que una familia de singularidades con lugar critico 1-dimensional y números de Lê constantes tiene tipo topológico constante.

Pedro González
Universidad Complutense de Madrid

Deformaciones de Harnack de una rama real y sus amebas asociadas
(trabajo en colaboración con J.J. Risler)

Nos interesamos por las deformaciones locales de singularidades de curvas planas reales, en particular en el caso de lisificaciones de la singularidad de una rama plana real. En este caso se sabe que el número máximo de óvalos locales de una tal deformación es igual a la mitad del número de Milnor de la singularidad. Este número es un invariante topológico de la singularidad de rama compleja asociada. Estudiamos las deformaciones de Harnack de una rama plana real en términos de la resolución de singularidades. Estas deformaciones además de maximizar el número de ovalos locales verifican condiciones de buena oscilación con respecto a ejes de coordenadas bien elegidos. Probamos que el tipo topológico de una deformación de Harnack de una rama plana real dada está determinado por el tipo topológico de la rama compleja asociada. Para ello estudiamos las deformaciones de Harnack por medio de sus amebas asociadas siguiendo técnicas introducidas por Mikhalkin en el caso afín. La ameba de una curva plana compleja en una superficie tórica puede definirse como la imagen de la curva mediante la clásica aplicación de momento asociada a la superficie tórica.

Joaquim Roé
Universidad Autónoma de Barcelona

Differential methods and singular curves of low degree

The subject of the talk is the problem of determining the existence of plane curves with given (low) degree and singularity types. The best general method known for the construction of such curves (due to Shustin and others) relies in the computation of dimensions of suitable linear systems, and provides curves whose singularities are in general position. For the computation of the required linear systems several methods have been proposed; we shall discuss the latest results obtained applying modified versions of the so-called "differential Horace" method of Alexander-Hirschowitz and Évain.

María del Carmen Romero Fuster
Universidad de Valencia

Global invariants of stable maps from surfaces to the plane

A well known Whitney result asserts that the stable singularities of maps from a surface to the plane are folds and cusps ([2]). Moreover, from the global viewpoint, we have that the singular set Σf of any stable map f from any closed surface M to the plane consists of a finite collection of closed regular simple curves in M, whereas its branch set $f(\Sigma f)$ is a collection of plane closed curves with transversal intersections and isolated singularities corresponding to the cusp points of f. Simple as this is from the local viewpoint, the question of determining the classes of stable maps defined by the joint action of the groups of diffeomorphisms in the source M and in the target $\mathbb{R}^2$ (group $\mathcal{A}$) involves the analysis of all the possible combinations of classes of collections of closed regular curves in M and isotopy classes of closed curves in the plane with finite numbers of transversal intersections and cusps. We introduced in [3] weighted graphs associated to stable maps from closed oriented surfaces to the plane with the aim of describing all the possible classes of their singular sets. Such a graph is determined by the $\mathcal{A}$-equivalence class in the surface M of the collection of disjoint closed curves defined by the singular set Σf of the stable map $f : M \to \mathbb{R}^2$ and was defined as follows: The subset Σf decomposes M into a finite collection of compact surfaces with boundary. We construct the graph $\mathcal{G}_f$ in such a way that each vertex corresponds to one of these surfaces and each edge to a curve in Σf. An edge is then incident to a vertex if and only if the corresponding curve is in the boundary of the surface represented by this vertex. Moreover, the genus of this surface determines the weight of the vertex.

Clearly, $\mathcal{G}_f$ is an invariant of the $\mathcal{A}$-class of the map f in $C^\infty(M, \mathbb{R}^2)$. With the aim of studying the problem of $\mathcal{A}$-classification of stable maps from a closed surface M to the plane from the global viewpoint, we pose first the following questions:

1) *Which are the properties that a weighted graph must present in order to be the graph associated to a stable map?*

2) *Which of these graphs can be associated to stable maps without cusps?*

Once solved these, one naturally asks:

3) *Given a realizable graph, how can we distinguish among the different $\mathcal{A}$-classes of stable maps that share it?*

This leads to

4) *Given a realizable graph, $\mathcal{G}$, with n edges, which are all the possible $\mathcal{A}$-classes of closed plane curves with n connected components that may be the branch set of some stable map with graph $\mathcal{G}$?*

In the case of stable maps without cusps, this is connected to the following

5) *Which closed plane curves with n components can be the image of the boundary of some immersed disc with (n-1) holes into the plane?*

This problem has been studied by several authors ([1], [4], [5], [6]). We use the corresponding results in order to obtain a list of realizable pairs (graph, branch set) that represents a first step towards the $\mathcal{A}$-classification of stable maps without cusps from a closed surface M to the plane from the global viewpoint.

References

[1] G.K. Francis and S.F. Troyer, *Excellent maps with given folds and cusps*, Houston J. Math. 3 (1977), 165-194.

[2] M. Golubitsky and V. Guillemin, *Stable Mappings and Their Singularities*, Springer Verlag, Berlin (1976).

[3] D. Hacon, C. Mendes de Jesús and M.C. Romero Fuster, *Topological invariants of stable maps from a surface to the plane from a global viewpoint*, to appear in Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, proceedings of the 6th Workshop on Real and Complex Singularities, 2001.

[4] I.P. Malta, N.C. Saldanha and C. Tomei, *Geometria e Análise Numérica de Funções do Plano no Plano.* 19 Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA (1993).

[5] V. Poénaru, *Seminaire Bourbaki* Vol. 1967/1968. Exposé 342. Benjamin, New York.

[6] C. J. Titus, *Lectures on functions of a complex variable.* Univ. of Michigan Press, Ann Arbor, Mich. 1955.

Ricardo Uribe Vargas
Collège de France

Evolución de superficies, ecuaciones diferenciales implícitas y fibraciones Legendrianas.

El origen de los resultados que se presentarán (y de la teoría que condujo a ellos) es un problema fundamental de la geometría diferencial de superficies (también importante para las "ciencias de la visión por computadora") que David Mumford propuso a V.I. Arnold, despues de los trabajos de Landis, Platonova y Thom.

Problema de Mumford: Encontrar todas la metamorfosis locales de la configuración formada por las curvas parabólica y flecnodal que pueden ocurrir en familias genéricas de superficies lisas que dependen de un parámetro (por ejemplo del tiempo).

Se presentara la lista completa de dichas metamorfosis (13 en total) y se presentarán los *puntos especiales* de la superficie en que estas metamorfosis pueden ocurrir. Se verá la relacion entre las metamorfosis "más interesantes" y el paraguas de Whitney.

Adrian Varley
Universidad de Valladolid

A note on the singularities of vector bundle morphisms

Let A and B be (real) vector bundles defined over a manifold M. Given a vector bundle morphism $u : A \to B$, it is natural to consider the subset S of points where u has non-maximal rank. The associated (co)homology class [Scl] in $H^*(M)$ is an obstruction to u being homotopic to a morphism of maximal rank. Furthermore, it was shown in Porteous [1] that this class can be expressed in terms of the standard characteristic classes of A, B and TM.

The structural information carried by S can be used to define a stronger invariant that lies in a normal bordism group. In Koschorke [2], sufficiency results were obtained for this invariant and techniques developed to aid calculations within these bordism groups.

In this talk we consider certain vector bundle morphisms that permit the definition of higher order invariants corresponding to different local types of singularities. For example, take u to be the derivative of a C^∞ map with kernel rank at most one.

A key question is how to express these higher order invariants in terms of more familiar objects in algebraic topology (in analogy with the result of Porteous). In particular, we shall discuss the problems that arise when applying the techniques of Koschorke to these more intricate bordism groups.

References

[1] I. Porteous, Simple Singularities of maps. Springer Lect. Notes Math 192, 1971.

[2] U. Koschorke, Vector Fields and other vector bundle morphisms - a singularity approach. Springer Lect. Notes Math. 847, 1981.