MAT.ES 2005

Sesión especial número 7:

Estructuras no asociativas y sus aplicaciones

Lie algebras related to simple Jordan algebras in characteristic two

Pablo Alberca Bjerregaard
Ottmar Loos
and
Cándido Martín González

Dpto. Álgebra, Geometría y Topología
Facultad de Ciencias, Universidad de Málaga
Campus de Teatinos s/n 29080, Málaga
candido@apncs.cie.uma.es

Let J be a unital Jordan algebra over a field F of characteristic two. If $x \mapsto U_x$ denotes its quadratic operator with $U_{x,y}$ its polar form, then the product $x \circ y := U_{x,y}(1)$ together with the squaring operation in J, endow the vector space underlying J with a 2-Lie algebra structure denoted by $L(J)$. Suppose additionally that the ground field is algebraically closed and J simple. In this setting we investigate the structure of the 2-Lie algebra $L(J)$.

Charla de 40 minutos

(Co)homología de n-álgebras de Leibniz

José Manuel Casas Mirás

Dpto. Matemática Aplicada I
E. U. Ingeniería Técnica Forestal, Universidad de Vigo
Campus Universitario A Xunqueira, 36005 Pontevedra
jmcasas@uvigo.es

Una n-álgebra de Leibniz [1] es un K-espacio vectorial $\mathcal{L}$ dotado de una operación n-lineal $[-,\dots,-] : \mathcal{L}\otimes \overset{n}{\cdots} \otimes\mathcal{L} \to \mathcal{L}$ satisfaciendo la siguiente identidad fundamental

$$[[x_1,\dots,x_n],y_2,\dots,y_n] = \sum_{i=1}^{n}[x_1,\dots,x_{i-1},[x_i,y_2,\dots,y_n],x_{i+1},\dots,y_n]$$

En el caso $n = 2$ se recupera la definición de álgebra de Leibniz [3].

Una teoría de cohomología y una teoría de homología con coeficientes triviales para las n-álgebras de Leibniz han sido desarrolladas en [1] y [2] basándose en la teoría de (co)homología de algebras de Leibniz desarrollada en [4] y haciendo uso del funtor Daletskii que asocia a una (n+1)-álgebra de Leibniz $\mathcal{L}$ el álgebra de Leibniz $\mathcal{L}^{\otimes(n)}$ con corchete dado por $[a_1\otimes\cdots\otimes a_n, b_1\otimes\cdots\otimes b_n] = \sum_{i=1}^{n} a_1\otimes\cdots\otimes [a_i,b_1,\dots,b_n]\otimes\cdots\otimes a_n$

Sucesiones exactas en (co)homología asociadas a sucesiones exactas cortas de n-álgebras de Leibniz son obtenidas y aplicadas al estudio del centro y extensiones centrales de n-álgebras de Leibniz, de n-álgebras de Leibniz perfectas y de n-álgebras de Leibniz solubles y nilpotentes.

Referencias

[1] J. M. Casas, J.-L. Loday and T. Pirashvili. *Leibniz n-alebras.* Forum Math. **14** (2002), 189-207.

[2] J. M. Casas. *Homology with trivial coefficients of Leibniz n-alebras.* Comm. in Algebra Vol. **31**, No. 3, pp. 1377-1386, 2003.

[3] J.-L. Loday. *Cyclic homology.* Grundl. Math. Wiss **301**, Springer 1992.

[4] J.-L. Loday and T. Pirashvili. *Universal enveloping algebras of Leibniz algebras and (co)homology.* Math. Ann. **296** (1993), 139-158.

Idempotentes y Graduaciones de Peirce en Álgebras de Jordan

Teresa Cortés Gracia

Departamento de Matemáticas
Universidad de Oviedo
C/ Calvo Sotelo, s/n, 33007-Oviedo
cortes@pinon.ccu.uniovi.es

Ligadas a las graduaciones involutivas en los sistemas de Jordan, las graduaciones de Peirce son abstracciones de las descomposiciones de Peirce inducidas por idempotentes mediante axiomatización de sus propiedades de multiplicación.

Ejemplos de graduaciones de Peirce que no proceden de idempotentes pueden darse eligiendo, en un sistema con una descomposición asociada al idempotente e, un ideal que no contenga a e. El propósito de esta charla es establecer hasta que punto toda graduación de Peirce de un álgebra de Jordan proviene de tal situación, i.e., analizar las condiciones necesarias y suficientes sobre una graduación de Peirce $J = J_0 \oplus J_1 \oplus J_2$ para que J se sumerja como ideal de un álgebra $\tilde{J}$ con un idempotente e que induzca en J la graduación dada.

Charla de 40 minutos

Álgebras de composición con ciertas condiciones sobre las potencias

José Antonio Cuenca Mira

Dpto. de Álgebra, Geometría y Topología
Facultad de Ciencias, Universidad de Málaga
Campus Universitario de Teatinos
cuenra@agt.cie.uma.es

Se estudian álgebras de composición en las que se satisfacen ciertas condiciones sobre las potencias de cada uno de sus elementos. Las citadas condiciones generalizan la de asociatividad de potencias .

Charla de 20 minutos

Nuevas superálgebras de Lie simples en característica 3

ALBERTO ELDUQUE

Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, Universidad de Zaragoza
50009 Zaragoza
elduque@unizar.es

Los sistemas triples simplécticos (respectivamente ortogonales) proporcionan construcciones de álgebras (resp. superálgebras) de Lie. Sin embargo, en característica 3, se prueba que esto se puede intercambiar. Así, con una construcción diferente, los sistemas triples simplécticos (resp. ortogonales) dan origen a superálgebras (resp. álgebras) de Lie. Como consecuencia, se obtienen nuevas superálgebras de Lie simples de dimensión finita en característica 3, así como nuevos modelos de algunas álgebras de Lie simples, tanto clásicas como no.

Códigos Kerdock Generalizados basados en *spreads* simplécticas

Ignacio Fernández Rúa

Dpto. Matemáticas
Facultad de Ciencias, Universidad de Oviedo
C/ Calvo Sotelo s/n, 33007-Oviedo
irua@orion.ciencias.uniovi.es

Los códigos Kerdock son una conocida familia de códigos binarios no lineales con buenos parámetros que pueden representarse de forma lineal mediante códigos sobre el anillo $\mathbb{Z}_4$. En la literatura pueden encontrarse diversas generalizaciones de estos códigos. Así, en [1], se presenta una construcción de códigos binarios no lineales no necesariamente equivalentes con los mismos parámetros que los Kerdock. Por otro lado, en [3], se introduce una familia de códigos no lineales sobre el cuerpo finito F de $q = 2^l$ elementos que poseen una representación lineal sobre el Anillo de Galois R de cardinal q^2 y característica 2^2. En este trabajo consideramos nuevas familias de códigos no lineales sobre F que se presentan como códigos lineales sobre R y que se construyen con la ayuda de *spreads* simplécticas. Esta construcción está relacionada con algunas estructuras no asociativas, como semicuerpos finitos y Anillos de Galois Generalizados [2].

Referencias

[1] A.R. Calderbank, P.J. Cameron, W.M. Kantor and J.J. Seidel, $\mathbb{Z}_4$-Kerdock codes, orthogonal spreads, and extremal Euclidean line-sets, *Proc. London Math. Soc.* **75** (1997) 436-480.

[2] S. González, V.T. Markov, C. Martínez, A.A. Nechaev and I.F. Rúa, Nonassociative Galois Rings, *Discrete Math. Appl.* **12** (2002) 591-606.

[3] A.S. Kuzmin and A.A. Nechaev, Linearly presented codes and Kerdock code over an arbitrary Galois field of the characteristic 2, *Russian Math. Surveys* **49 (5)** (1994).

Charla de 20 minutos

Un zócalo para álgebras de Lie II

Esther García González

Dpto. de Álgebra
Facultad de Ciencias Matemáticas, U.C.M.
Ciudad Universitaria, 28040-Madrid
egarciag@mat.ucm.es

Continuando con la charla anterior, en este caso relacionaremos la noción de zócalo en álgebras de Lie con los zócalos de otras estructuras: pares de Jordan, anillos asociativos, álgebras de Lie reales...

Recordamos que el zócalo de un álgebra de Lie L, definido como la suma de todos los ideales internos minimales, es suma directa de componentes 3-graduadas, 5-graduadas y otras componentes que no tienen ninguna graduación. En primer lugar, veremos que las componentes 3-graduadas corresponden con lo que anteriormente se había definido como el zócalo Jordan.

Más aún, la noción de zócalo generaliza la noción de zócalo Jordan y permite incluir las álgebras de Lie clásicas simples G_2, F_4 y E_8 como álgebras que coinciden con su zócalo. De hecho, estas álgebras son 5-graduadas, por lo que su zócalo está formado por una única componente 5-graduada, suma de ideales internos minimales abelianos. Además, con esta nueva noción de zócalo, todas las álgebras finitarias sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero coinciden con su zócalo.

Las componentes no graduadas aparecen genereradas por ideales internos minimales que son ideales del total y que no poseen ningún ideal interno propio. Un ejemplo de este caso es el conmutador de un anillo de división Δ cociente $[\Delta, \Delta]$ intersección su centro. El hecho de admitir este tipo de componentes simples nos da que toda álgebra finito-dimensional no degenerada tiene zócalo esencial. En particular, todas las álgebras de Lie simples reales finito-dimensionales coinciden con su zócalo: o bien son compactas, con lo que están formadas por una única componente que no posee ideales internos propios, o bien tienen ideales minimales abelianos, con lo que son suma de ideales internos minimales abelianos.

Por último, relacionamos el zócalo de un álgebra de Lie de tipo $R^{(-)}$ para R un anillo asociativo, con la noción clásica de zócalo asociativo de R. De hecho, si R es un anillo simple con zócalo asociativo, $[R, R]/[R, R] \cap Z(R)$ coincide con su zócalo Lie. Más aún, si R no tiene centro, $R^{(-)}$ posee ideales internos minimales abelianos si y sólo si R coincide con su zócalo asociativo (en este caso el zócalo Lie de $[R, R]$ es igual al conmutador $[R, R]$ de R).

Charla de 20 minutos

Un zócalo para álgebras de Lie

Miguel Ángel Gómez Lozano

Dpto. de Álgebra, Geometría y Topología
Facultad de Ciencias, Universidad de Málaga
Campus de Teatinos, 29071-Málaga
magomez@agt.cie.uma.es

Este trabajo forma parte de un proyecto encaminado a dar la noción de zócalo para un álgebra de Lie no degeneradas L. Definimos el zócalo de L, $\mathrm{Soc}(L)$, como la suma de todos los ideales internos minimales de L.

Tenemos entonces que $\mathrm{Soc}(L)$ es un ideal de L que es suma directa de ideales simples, naturalmente cada uno de los cuales coincide con su zócalo. Hay tres tipos diferentes de álgebras de Lie simples no degeneradas que coinciden con su zócalo: las 3-graduadas que son precisamente las TKK-álgebras de pares de Jordan simples que coinciden con su zócalo, las 5-graduadas que son aquéllas que poseen ideales internos minimales abelianos no nulos y las que no poseen ninguna $\mathbb{Z}$-graduación no trivial, que corresponden con las que no poseen elementos ad-nilpotentes no nulos.

Sobre cuerpos de característica cero, las álgebras de Lie no degeneradas que coinciden con su zócalo generalizan a las álgebras de Lie Artinianas, álgebras estudiadas por G. Benkart en 1977, por lo que como caso particular, generalizan a las álgberas de Lie de dimensión finita. Es más, un álgebra de Lie de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero es clásica si y sólo si es no degenerada y coincide con su zócalo. Otro ejemplo interesante lo tenemos en la clase de las álgebras de Lie finitarias, ya que sobre un cuerpo de característica cero toda álgebra de Lie simple y finitaria coincide con su zócalo.

Charla de 40 minutos

Módulos cruzados en álgebras de Lie-Rinehart

MANUEL LADRA

Departamento de Álgebra
Facultad de Matemáticas
Campus Universitario Sur, 15782 Santiago de Compostela
ladra@usc.es

Sea K un cuerpo y A un álgebra conmutativa sobre K. Un álgebra de Lie-Rinehart sobre A consiste de una K-álgebra de Lie $\mathcal{L}$ junto con una estructura de A-módulo sobre $\mathcal{L}$ y una aplicación

$$\alpha : \mathcal{L} \to Der(A)$$

que es simultáneamente morfismo de álgebras de Lie y de A-módulos y que verifica

$$[X, aY] = a[X, Y] + X(a)Y$$

donde $X(a) = \alpha(X)(a)$.

Si $\alpha = 0$ obtenemos las A-álgebras de Lie.

Se introduce el concepto de módulo cruzado en álgebras de Lie-Rinehart y se prueba que el tercer grupo de cohomología de Rinehart [2] de un álgebra de Lie-Rinehart A-proyectivo se identifica con las clases de equivalencia de módulos cruzados.

En el caso particular de considerar A-álgebras de Lie se obtienen los resultados obtenidos por C. Kassel y J.-L. Loday [1].

Referencias

[1] C. Kassel y J.-L. Loday. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **32** (4) (1982), 119-142.

[2] G. S. Rinehart *Trans. Amer. Math. Soc.* **108** (1963), 195–222.

Charla de 20 minutos

Subálgebras de superĺgebras de Jordan matriciales que son maximales

Jess Laliena Clemente

Departamento de Matemáticas y Computación
Facultad de Ciencias, Estudios Agroalimentarios e Informática.
C/ Luis de Ulloa s/n. Edificio Vives. 26004, Logroño (La Rioja)
jesus.laliena@dmc.unirioja.es

Entre las superálgebras de Jordan simples finito dimensionales sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero se encuentran dos tipos de superálgebras de matrices y otros dos de superálgebras de matrices de elementos simétricos. En esta nota se determinan condiciones necesarias y suficientes para que una subálgebra de dichas superálgebras sea maximal.

Charla de 20 minutos

Superálgebras alternativas con condición de cadena descendente para ideales a ambos lados

M. Concepción López Díaz

Dpto. Matemáticas
Universidad de Oviedo
C/Calvo Sotelo s/n, 33007-Oviedo
cld@pinon.ccu.uniovi.es

En este trabajo se estudia la estructura de las superálgebras alternativas que satisfacen la condición de cadena descendente (DCC) para ideales a ambos lados. En característica arbitraria, se estudian las superálgebras alternativas semiprimas con tal condición. En característica distinta de dos y tres, se obtiene que el radical de Baer en una superálgebra alternativa con DCC para ideales a ambos lados es resoluble.

Charla de 40 minutos

ALGEBRAS DE LIE PRIMAS Z-GRADUADAS

Consuelo Martínez López

Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, Universidad de Oviedo
C/ Calvo Sotelo s/n, 33007 - Oviedo
chelo@pinon.ccu.uniovi.es

Oliver Mathieu estudió y clasificó las álgebras de Lie, simples graduadas con crecimiento polinomial de las dimensiones $\dim L_i$. Provó que un álgebra de este tipo es o bien un álgebra loop (twisted ó no) o bien es un álgebra de tipo Cartan o es el álgebra de Virasoro.

El problema de la clasificación de superálgebras de Lie Z-graduadas con las dimensiones $dimL_i$ uniformemente acotadas está abierto y es de particular interés en el caso de que la parte par de L contenga el álgebra de Virasoro, es decir, si L es un álgebra superconformal.

El objetivo del presente trabajo es modificar el resultado de O. Mathieu, obteniendo una clasificación de álgebras de Lie primas Z-graduadas, con el fin de que se pueda aplicar posteriormente al estudio de la parte par de un álgebra superconformal.

Charla de 40 minutos

Una caracterización geométrica de los tripotentes en JB*-triples.

JUAN MARTÍNEZ MORENO

Dpto. Análisis Matemático
Facultad de Ciencias. Universidad de Granada
Fuente Nueva, 18071-Granada
jmmoreno@ugr.es

Damos una caracterización geométrica de los elementos tripotentes en el caso de JB*-triples reales y complejos, en términos de la estructura del espacio de Banach real subyacente. Entre sus consecuencias obtenemos una prueba simple del Teorema de Banach-Stone para JB*-triples.

Charla de 40 minutos

Álgebras de Jordan de cocientes

Fernando Montaner Frutos

Dpto. de Matemáticas
Facultad de Ciencias, Universidad de Zaragoza
50009-Zaragoza
fmontane@unizar.es

La teoría de localización es un aspecto importante y bien desarrollado de la teoría de álgebras asociativas, cuya extensión a la teoría de Jordan ha sido objeto de atención por varios autores. La construcción de álgebras de cocientes ha sido abordada principalmente desde dos puntos de vista. Por un lado, desde un enfoque combinatorio, sin recurrir a la teoría de estructura, cuya herramienta principal ha sido recientemente la construcción de Kantor-Koecher-Tits (y su generalización debida a Faulkner) y que ha conducido a análogos del teorema de Ore para álgebras de Jordan. Por otro, utilizando la teoría de estructura, se han obtenido versiones de los Teoremas de Goldie para álgebras de Jordan.

En esta charla revisaremos dichos resultados y nos centraremos en este segundo enfoque, introduciendo, en particular, una noción de ideal interno denso que permite la construcción de un álgebra maximal de cocientes para álgebras de Jordan fuertemente primas análoga al álgebra maximal de cocientes de Findlay-Lambek y Utumi para álgebras asociativas.

Charla de 20 minutos

On absolute valued algebras satisfying $(x, x, x) = 0$

Antonio Morales Campoy and Maribel Ramírez Álvarez

Dpto. Álgebra y Análisis Matemático
Universidad de Almería
04071-Almería
amorales@ual.es; mramirez@ual.es

Let A be an absolute-valued algebra satisfying $(x, x, x) = 0$. We prove that A is finite-dimensional whenever the identity $(x, x^3, x) = 0$ is satisfied, or the set of its idempotents verifies certain properties. Moreover, we prove the finite dimensionality of a absolute valued algebra satisfying $(x, x^2, x) = 0$ under some additional conditions.

Charla de 20 minutos

Localización en álgebras de Lie

Irene Paniello Alastruey

Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, Universidad de Zaragoza
50009 Zaragoza
paniello@unizar.es

Diversas variantes de álgebras de cocientes para álgebras de Lie 3-graduadas serán presentadas. En particular, se centrará la atención en las que usan recientes resultados sobre álgebras maximales de cocientes de álgebras de Jordan.

Charla de 40 minutos

New advances on the Grothendieck's inequality problem for bilinear forms on JB*-triples

Antonio M. Peralta Pereira

Dpto. Análisis Matemático
Facultad de Ciencias, Universidad de Granada
Avd. Fuente Nueva, 18071-Granada
aperalta@ugr.es

We give a positive answer to the Barton-Friedman's conjecture on Grothendieck inequalities for JB*-triples in the case of an atomic JB*-triple by showing that this conjecture is true for every Cartan factor.

Charla de 20 minutos

La superálgebra de Jordan de Kac: automorfismos y subálgebras

SARA SACRISTÁN TOBÍAS

Departamento de Matemáticas y Computación
Facultad de Ciencias, Estudios Agroalimentarios e Informática.
C/ Luis de Ulloa s/n. Edificio Vives. 26004, Logroño (La Rioja)
ssacris@barpimo.com

Entre las superálgebras de Jordan simples se encuentra la superálgebra de Kac. En esta nota se determina el grupo de automorfismos de esta superálgebra y también la forma y estructura de las subálgebras maximales.