SOLUCION GENERAL DE ECUACIONES EN DIFERENCIAS

Ecuaciones en diferencias de Primer Orden:

1.- $x_{n+1} = f(n)\, x_n$ Solución: $x_n = f(n-1)\, f(n-2) \dots f(2)\, f(1)\, f(0)\, x_o$

2.- $x_{n+1} = f(n)\, x_n + g(n)$ Solución:
$$x_n = f(n-1)\, f(n-2) \dots f(2)\, f(1)\, f(0)\, x_o + \\ + f(n-1)\, f(n-2) \dots f(2)\, f(1)\, g(0) + \\ + f(n-1)\, f(n-2) \dots f(2)\, g(1) + \dots + \\ + f(n-1)\, g(n-2) + g(n-1)$$

Ecuaciones en diferencias de Segundo Orden: (con coeficientes constantes)

1.- $a\, x_{n+2} + b\, x_{n+1} + c\, x_n = 0$, con a, b, c constantes, $a \neq 0$

Ecuación auxiliar: $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, con raíces λ_1, λ_2.

Solución:

1.1) Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, reales: $x_n = k_1 (\lambda_1)^n + k_2 (\lambda_2)^n$.

1.2) Si $\lambda_1 = \lambda_2$: $x_n = k_1 (\lambda_1)^n + k_2\, n\, (\lambda_1)^{n-1}$.

1.3) Si λ_1, λ_2 complejas: $x_n = k_1 (\frac{c}{a})^{n/2} \cos(n\theta) + k_2 (\frac{c}{a})^{n/2} \operatorname{sen}(n\theta)$.

$$\text{siendo } \operatorname{tg}\theta = \frac{-\sqrt{4ac - b^2}}{b}$$

2.- $a\, x_{n+2} + b\, x_{n+1} + c\, x_n = f(n)$, con a, b, c constantes, $a \neq 0$

Ecuación auxiliar: $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, con raíces $\lambda_1 \neq \lambda_2$ reales.

Solución: $x_n = k_n (\lambda_1)^n + h_n (\lambda_2)^n$.

en donde

$$k_n = k_o + \frac{1}{a\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2)} \left[f(0) + \frac{f(1)}{\lambda_1} + \frac{f(2)}{\lambda_1^2} + \dots + \frac{f(n-1)}{\lambda_1^{n-1}} \right]$$

$$h_n = h_o + \frac{1}{a\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)} \left[f(0) + \frac{f(1)}{\lambda_2} + \frac{f(2)}{\lambda_2^2} + \dots + \frac{f(n-1)}{\lambda_2^{n-1}} \right]$$

SOLUCION GENERAL DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Ecuaciones diferenciales lineales de Primer Orden:

1.- $x'(t) + a(t)\,x(t) = 0$ (homogénea) Solución: $x(t) = C\,e^{-\int a(t)\,dt}$

2.- $x'(t) + a(t)\,x(t) = f(t)$ (no homogénea) Solución: $x(t) = v(t)\,u(t)$,
en donde

$v(t)$ es una solución de la ecuación homogénea: $x'(t) + a(t)\,x(t) = 0$, y

$$u(t) = \int \frac{f(t)}{v(t)}\,dt + C$$

Ecuaciones diferenciales no lineales de Primer Orden:

1.- $\frac{dx}{dt} = h(x)\,k(t)$ (variables separables) Solución: $\int \frac{1}{h(x)}\,dx = \int k(t)\,dt + C.$

2.- $\frac{1}{x(t)}\frac{d\,x(t)}{dt} = \beta - \delta\,x(t)$ (crecimiento logístico) Solución: $x(t) = \dfrac{x(0)\,\beta\,e^{\beta t}}{\beta + (e^{\beta t} - 1)\,\delta\,x(0)}$

Ecuaciones diferenciales lineales de Segundo Orden: (con coeficientes constantes)

1.- $a\,x''(t) + b\,x'(t) + c\,x(t) = 0$, con a, b, c constantes , $a \neq 0$ (homogénea)

Ecuación auxiliar: $a\,\lambda^2 + b\,\lambda + c = 0$, con raíces λ_1, λ_2.

Solución:

1.1) Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, reales: $x(t) = k_1\,e^{\lambda_1 t} + k_2\,e^{\lambda_2 t}$.

1.2) Si $\lambda_1 = \lambda_2$: $x(t) = k_1\,e^{\lambda_1 t} + k_2\,t\,e^{\lambda_1 t}$.

1.3) Si $\lambda_1 = \alpha + \beta\,i$, $\lambda_2 = \alpha - \beta\,i$: $x(t) = k_1\,e^{\alpha t}\cos(\beta t) + k_2\,e^{\alpha t}\,\mathrm{sen}\,(\beta t)$.

2.- $a\,x''(t) + b\,x'(t) + c\,x(t) = f(t)$, con a, b, c constantes , $a \neq 0$ (no homogénea)

Solución: $x(t) = k_1(t)\,g_1(t) + k_2(t)\,g_2(t)$,

en donde $g_1(t)$ y $g_2(t)$ son dos soluciones independientes de la ecuación homogénea y

$$k_1'(t) = \frac{-\,f(t)\,g_2(t)}{a\,[\,g_1(t)\,g_2'(t) - g_2(t)\,g_1'(t)]} \quad \text{y} \quad k_2'(t) = \frac{f(t)\,g_1(t)}{a\,[\,g_1(t)\,g_2'(t) - g_2(t)\,g_1'(t)]}$$

si $g_1(t)\,g_2'(t) - g_2(t)\,g_1'(t) \neq 0$.

SOLUCION GENERAL DE SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

1.- $X'(t) = A\,X(t)$ (homogénea)

* Calcular los valores propios de la matriz A: $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$

* Calcular los vectores propios asociados: $P^1, P^2, ..., P^n$

* La solución general es

$$X(t) = c_1 P^1 e^{\lambda_1 t} + c_2 P^2 e^{\lambda_2 t} + ... + c_n P^n e^{\lambda_n t}$$

2.- $X'(t) = A\,X(t) + F(t)$ (caso general)

La solución es de la forma:

$$X(t) = G(t)\,C(t)$$

donde

* $G(t)$ es una matriz de orden n x n formada por n soluciones independentes de la ecuación homogenea, escritos en columna, es decir: $P^1 e^{\lambda_1 t}, P^2 e^{\lambda_2 t}, ..., P^n e^{\lambda_n t}$, donde $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ son los valores propios de la matriz A y $P^1, P^2, ..., P^n$ los vectores propios asociados.

* $C(t) = K + \int G^{-1}(t)\,F(t)\,dt$