TEMA 1

INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

1. Funciones.
2. Incrementos y razones de cambio.
3. Derivadas
4. Derivadas de orden superior.
5. Primitivas
6. Integral definida.

1.- FUNCIONES.

La idea de función es uno de los conceptos más básicos en matemáticas. Una función expresa la idea de una cantidad que depende de otra o viene determinada por otra. Por ejemplo:

a. El área de un cuadrado depende de la longitud de su lado; si conocemos la longitud c del lado de un cuadrado, su área es: $A = c^2$.
b. El volumen de una esfera depende de su radio r: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.
c. El crecimiento medio de ciertas especies de plantas depende de la edad de la planta.
d. La respuesta de un nervio depende de la magnitud de los estímulos aplicados.

Vamos a dar una definición formal de una función.

Definición: Una función real de variable real es una aplicación definida en un subconjunto de valores reales, $D \subseteq R$, que asigna a cada elemento de D un único valor en R. La denotaremos:

$$\begin{aligned} f:\ D &\rightarrow R \\ x &\quad f(x) \end{aligned}$$

Notemos que $x \in D \subseteq R$ (variable o argumento) y $f(x) \in R$.

Denotemos por f una función dada. El conjunto D (normalmente es el máximo subconjunto de R para el que f(x) está bien definida, i. e., $f(x) \in R$) se denomina el **dominio** de la función f y se denota por D_f.

Generalmente nos encontraremos con funciones que se expresan estableciendo el valor de la función por medio de una fórmula algebraica en términos de la variable independiente. Por ejemplo:

$$f(x) = x^2 + 3x + 7,$$

$$g(t) = 2t^3 + \frac{3}{t-2}\text{ , etc.}$$

En la mayoría de lo casos la función se puede representar por su **gráfica**. La gráfica de una función se obtiene dibujando todos los puntos (x,y) donde x pertenece al dominio de f e y = f(x), tratando x e y como coordenadas cartesianas.

Cualquier curva dada (o conjunto de puntos) en el plano xy es la gráfica de alguna función, suponiendo que cualquier línea vertical corta la gráfica en, como máximo, un punto. Por ejemplo, las gráficas en la Figura 1.1 representan todas a funciones. (Notar que en la Figura 1.1c el dominio de la función es el conjunto de enteros {1,2,3,4,5} por ello la gráfica consiste nada más en 5 puntos).

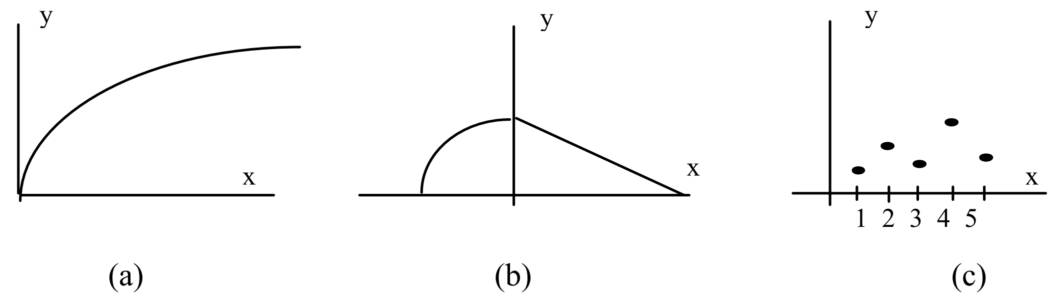


Figura 1.1

Por otra parte, las gráficas en la Figura 1.2 no representan funciones. La razón es que hay líneas verticales que cortan las gráficas en más de un punto. Así, correspondiendo al valor $x = x_o$ en la primera gráfica hay dos valores y_1 e y_2 para y. En este caso, el valor de x no determina un único valor de y.

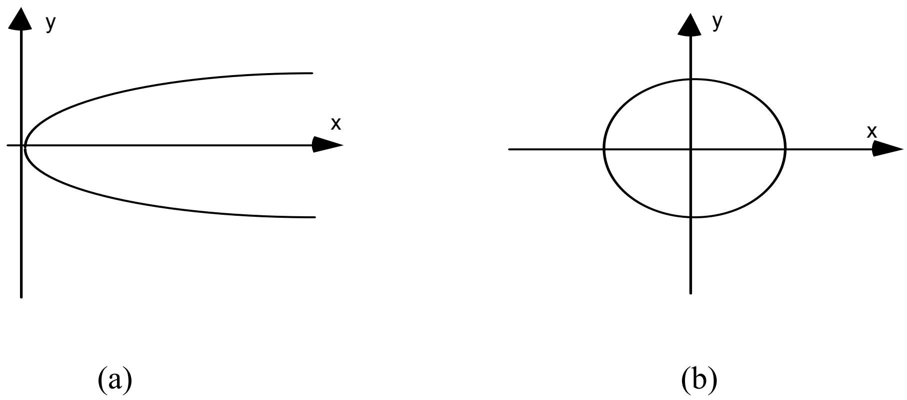


Figura 1.2

En general, cuando buscamos el dominio de una función hemos de tener las siguientes condiciones en cuenta: cualquier expresión bajo de el signo de la raíz cuadrada , o dentro del logaritmo, no puede ser negativa, y el denominador de cualquier fracción no puede ser cero.

En los ejemplos anteriores las funciones que aparecen estaban definidas mediante una única expresión algebraica para todos los valores de la variable independiente a lo largo del dominio de la función. A veces necesitamos usar funciones que están definidas por más de una expresión.

Ejemplo:

Sea x la distancia en Km. a lo largo de cierta ruta de migración de pájaros. A lo largo de la ruta hay fuentes de alimentos al principio ($x = 0$), en $x = 400$ y al final, en $x = 1000$. La función f(x) es la distancia del punto x a la fuente de alimento más próxima. Dibujar f(x). ¿Cual es la mayor distancia de cualquier punto de la ruta a una fuente de alimento?

- Solución:

A lo largo de la ruta, x varía de 0 a 1000. La distancia del punto x a la fuente de alimento en $x = 0$ es x, y su distancia a la fuente de alimento en $x = 1000$ es igual a $(1000 - x)$. La distancia a la fuente de alimento en $x = 400$ es igual a $| x - 400 |$. La función f(x) es igual a la más pequeña de estas tres distancias. Las gráficas de estas tres funciones se muestran en la Figura 1.3. La gráfica de f(x) aparece como una línea más gruesa en la figura. Podemos ver que f(x) viene dada por

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x \le 200 \\ |x - 400| \quad \text{si} & 200 \le x \le 700 \\ 1000 - x & 700 \le x \le 1000 \end{cases}$$

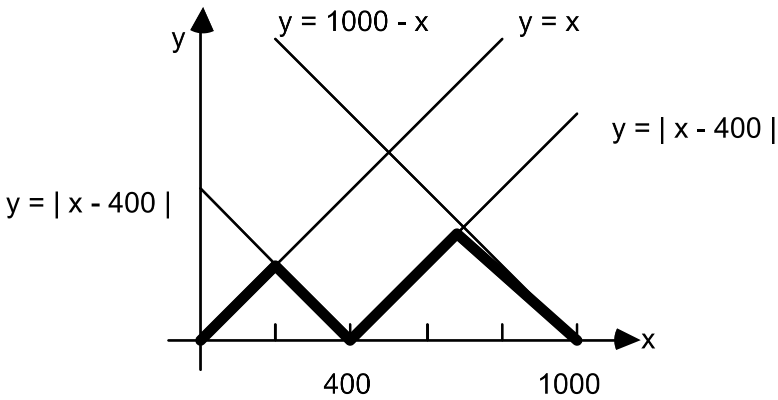


Figura 1.3

El valor máximo de f(x) ocurre en x = 700, para el que f(x) = 300. Por tanto, la distancia máxima a una fuente de alimentación es 300 Km.

<u>Operaciones con funciones</u>:

Dadas dos funciones f y g con dominios D_f y D_g respectivamente, definimos las siguientes funciones:

Suma:	$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$	$D_{f+g} = D_f \cap D_g$.
Resta:	$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$	$D_{f-g} = D_f \cap D_g$.
Producto:	$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$	$D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$.
Cociente:	$\dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$D_{f/g} = [\, D_f \cap D_g \,] - \{ x : g(x) = 0 \}$
Composición:	$(f \circ g)(x) = f[\, g(x) \,]$	$D_{f \circ g} = \{ x : x \in D_g \text{ y } g(x) \in D_f \}$

Definición. Sea y = f(x) una función definida en un intervalo]a,b[y sea $x_0 \in$]a,b[, se dice que f(x) es contínua en el punto x_0 si $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

2.- INCREMENTOS Y RAZONES DE CAMBIO

Sea una variable x de la cual consideramos dos valores x_1, x_2. A la cantidad $\Delta x = x_2 - x_1$ la denominaremos **incremento** de x.

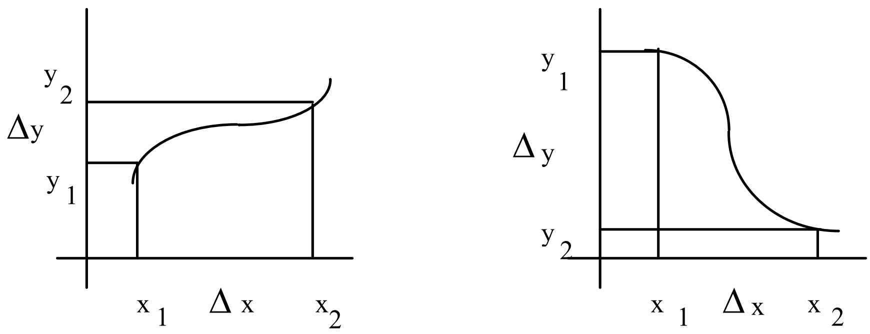
Dada $y = f(x)$, tenemos que si $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$, el **incremento** de y es

$$\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1).$$

A la cantidad **Δy** también se le llama **cambio** o **variación** en el valor de la función.

Como $x_2 = x_1 + \Delta x$, tenemos que

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1) = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) \quad \text{luego} \quad \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$



(a) $\Delta y > 0$ (b) $\Delta y < 0$.

Figura 2.1.

Ejemplo:

El tamaño de una población de insectos en el instante t (medido en días) es $f(t) = 5000 - \dfrac{3000}{1+t}$. Determinar el cambio de la población para t = 2 y Δt = 3, i. e., la diferencia de población entre los días 2 y 5.

- Solución:

$$\Delta y = f(2 + 3) - f(2) = f(5) - f(2) = \left(5000 - \frac{3000}{1+5}\right) - \left(5000 - \frac{3000}{1+2}\right) =$$

$$= - \frac{3000}{6} + \frac{3000}{3} = 500$$

La población ha aumentado en 500 insectos en 3 días.

La **razón de cambio** o **razón de crecimiento** de una función f(x) en un intervalo [x, x + Δx] viene definida por:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{(media de cambio de y respecto de x)}$$

Notemos que es necesario que $[\, x, x + \Delta x \,] \subseteq D_f$

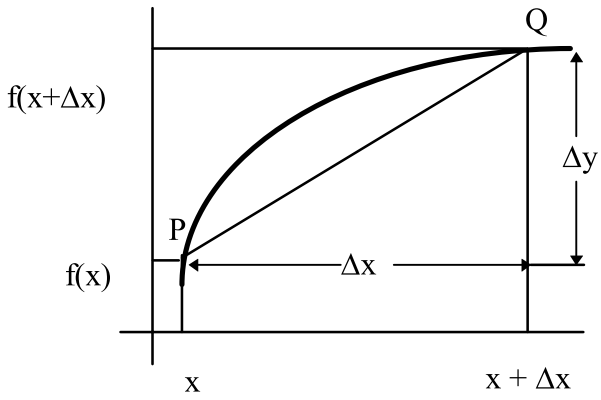


Figura 4.2

Notemos que $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ = pendiente de la recta que une P y Q. (Figura 4.2).

Ejemplo:

Se introduce una población de bacterias en un medio nutriente. Supongamos que el peso de la población cambia según la fórmula:

$$P(t) = 50 + \frac{100t}{21+t^2} \quad \text{mg.}$$

donde t está medido en horas. Determinar la razón de crecimiento en un periodo de cinco horas, comenzando en t = 2 horas.

- Solución:

$t = 2$ y $\Delta t = 5$. Por tanto,

$$\Delta P = P(t + \Delta t) - P(t) = P(2+5) - P(2) = P(7) - P(2) = 60 - 58 = 2 \text{ mg.}$$

Así, $\frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{2}{5}$ mg/h.

3.- DERIVADAS

Si una persona viajando en un automóvil choca con una pared, no es su velocidad media desde la salida hasta el punto donde choca con la pared la que determina si sobrevivirá al accidente, sino la velocidad en el instante de la colisión

¿Qué queremos decir con velocidad de un objeto en un instante de tiempo (o **velocidad instantánea** como se conoce usualmente)?. La velocidad se define como la distancia recorrida en un cierto intervalo de tiempo dividida por la longitud del tiempo. Pero si nos referimos a la velocidad en un instante particular de tiempo, deberíamos de considerar un intervalo de tiempo de duración cero. No obstante, durante ese intervalo, la distancia recorrida sería cero, y para la velocidad, distancia dividida por tiempo, obtendríamos $\frac{0}{0}$, una cantidad que no quiere decir nada.

Para definir la velocidad instantánea de un objeto en movimiento en un cierto tiempo t, hacemos: durante cualquier intervalo de tiempo desde t hasta t + Δt, se recorre un incremento de distancia Δs. La velocidad media es $\frac{\Delta s}{\Delta t}$. Si el incremento Δt se toma más y más pequeño, el correspondiente intervalo de tiempo es muy corto. En consecuencia es razonable suponer que la velocidad media $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ en ese intervalo tan corto estará muy próxima a la velocidad instantánea en el tiempo t. Además, cuanto más corto sea el intervalo, mejor se aproximará la velocidad media a la velocidad instantánea.

Ejemplo:

El tamaño (peso) de una población de bacterias en un tiempo t (en minutos) viene dado por:

$$w(t) = 2t^3 \text{ mg}$$

Encontrar la razón de crecimiento instantáneo de w en t = 2 min.

- Solución:

Crecimiento de w entre t = 2 y t = 2 +Δt :

$$\Delta w = w(2 + \Delta t) - w(2) = 2(2+\Delta t)^3 - 2\bullet 2^3 = 2\left[8 + 12\Delta t + 6(\Delta t)^2 + (\Delta t)^3 \right] - 16 =$$
$$= 2(\Delta t)^3 + 12 (\Delta t)^2 + 24\Delta t$$

La razón de crecimiento en el tiempo Δt a partir de t = 2 es:

$$\frac{\Delta w}{\Delta t} = 2(\Delta t)^2 + 12\Delta t + 24$$

Por tanto, el crecimiento instantáneo en t = 2:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta t} = 24$$

Así, la población a los 2 minutos, crece con una velocidad de 24 mg/min.

Definición: Dada y = f(x), la **derivada** de la función f en el punto x es la razón de crecimiento instantáneo en x. Es decir:

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Si este límite no existe, se dice que la función f no es derivable en el punto x.

Interpretación geométrica:

La derivada de una función en un punto se puede interpretar como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en dicho punto.

$$\text{pendiente de la tangente} = m_{tag} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} .$$

Ejemplo:

Encontrar la pendiente de la tangente a $f(x) = x^2$ en el punto (2,4).

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = 2x$$

Por tanto, $f'(x) = 2x$ y $f'(2) = 4 = m_{tg}$.

La recta tangente es:

$y - y_1 = m(x - x_1)$ luego $y - 4 = 4(x - 2)$, luego $y = 4x - 4$.

Propiedades:

a) Sean f(x) y g(x) dos funciones derivables en x. Entonces:

1.- Si c es una constante, $\dfrac{d(cf)}{dx} = c\,\dfrac{df}{dx}$.

2.- $\dfrac{d(f \pm g)}{dx} = \dfrac{df}{dx} \pm \dfrac{dg}{dx}$.

3.- $\dfrac{d(f \bullet g)}{dx} = f \bullet \dfrac{dg}{dx} + g \bullet \dfrac{df}{dx}$.

4.- $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{g \bullet \dfrac{df}{dx} - f \bullet \dfrac{dg}{dx}}{g^2}$

b) Si y = f(u) es una función de u y u = g(x) es una función de x, entonces:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \bullet \frac{du}{dx}$$

Derivadas de funciones elementales:

1.- Función constante $f(x) = c$: $f'(x) = 0$

2.- Función potencia $f(x) = x^p$, $p \in R$: $f'(x) = p \bullet x^{p-1}$

3.- Función logarítmica $f(x) = \log_a(x)$, $a > 0$: $f'(x) = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$

Si $g(x) = \ln f(x)$, con $f(x) > 0$: $g'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$

4.- Función exponencial $f(x) = a^x$ $a>0$: $f'(x) = a^x \bullet \ln a$

Si $g(x) = e^x$: $g'(x) = e^x$

5.- Funciones trigonométricas:

Si $f(x) = \text{sen } x$ $f'(x) = \cos x$.

Si $f(x) = \cos x$ $f'(x) = -\text{sen } x$.

Si $f(x) = \text{tg } x$ $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

Si $f(x) = \text{arcsen } x$ $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ $(|x| < 1)$

Si f(x) = arccos x $f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. (| x | < 1)

Si f(x) = arctg x $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

6.- Derivada logarítmica:

Sea $y = [\,f(x)\,]^{g(x)}$ donde f(x) y g(x) son continuas y f(x) > 0. Entonces:

$\ln y = g(x) \cdot \ln f(x)$ luego $\dfrac{y'}{y} = g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \dfrac{f'(x)}{f(x)}$, luego

$$y' = [\,f(x)\,]^{g(x)} \cdot \left[g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \right]$$

<u>Ejemplos</u>:

1.- $y = x^x$ (x > 0)

$$\ln y = x \cdot \ln x \ \Rightarrow \ \frac{y'}{y} = \ln x + 1 \ \Rightarrow \ y' = x^x \cdot (\ln x + 1)$$

2.- $y = (\operatorname{sen} x)^{\cos x}$ con $0 < x < \pi$.

$$\ln y = \cos x \cdot \ln(\operatorname{sen} x) \ \Rightarrow \ \frac{y'}{y} = (-\operatorname{sen} x) \cdot \ln(\operatorname{sen} x) + \cos x \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} x} \cdot \cos x \ \Rightarrow$$

$$y' = (\operatorname{sen} x)^{\cos x} \cdot \left[-\operatorname{sen} x \cdot \ln(\operatorname{sen} x) + \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x} \right]$$

4.- DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

Si y = f(t) es una función del tiempo t, entonces como hemos visto, la derivada $\frac{dy}{dt} = f'(t)$ representa la razón en la cual cambia. Por ejemplo, si s = f(t) es la distancia recorrida por un objeto en movimiento, entonces $\frac{ds}{dt} = f'(t)$ da la razón del cambio de la distancia o, en otras palabras, la velocidad instantánea del objeto. Denotemos esta velocidad por v. Entonces v es también una función de t, y puede ser derivada para obtener $\frac{dv}{dt}$. Esta cantidad representa la razón en la cual la velocidad cambia, es decir, la aceleración del objeto en movimiento.

Para calcular la aceleración, hemos de derivar s y después derivar el resultado una vez más. Tenemos:

$$\text{Aceleración} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt} \right) .$$

Aceleración se llama a la segunda derivada de s respecto a t y usualmente se denota por f''(x) o, también por $\frac{d^2s}{dt^2}$.

Vamos a examinar las derivadas de orden superior en general. Sea y = f(x) una función dada de x con derivada $\frac{dy}{dx} = f'(x)$. Técnicamente, ésta se denomina la *primera derivada de y respecto a x*. Si f ' (x) es una función derivable de x, su derivada se denomina *segunda derivada de y respecto a x*. Si la segunda derivada es una función derivable de x, su derivada es la *tercera derivada de y respecto de x*, etc.

Las derivadas de orden superior de y respecto de x se denotan por:

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}, \text{ o } y', y'', y''', \ldots, y^{(n)}, \text{ o } f'(x), f''(x), f'''(x), \ldots, f^{(n)}(x).$$

De la definición de derivadas de orden superior, tenemos que

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) \quad , \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) \quad \text{, etc.}$$

Ejemplos:

Encontrar las derivadas primera, segunda y tercera de:

1.- $y = a^x$.

$y' = a^x \cdot \ln a$, $y'' = a^x \cdot (\ln a)^2$, $y''' = a^x \cdot (\ln a)^3$

2.- y = sen x.

y ' = cos x , y'' = - sen x , y''' = - cos x

5- PRIMITIVAS.

Hemos visto que si s(t) es la distancia recorrida en el tiempo t por un objeto en movimiento, entonces la velocidad instantánea es v(t) = s'(t), la derivada de s(t). Para calcular v, simplemente derivamos s(t). No obstante, puede ocurrir que ya conociéramos la función velocidad v(t) y quisiéramos calcular la distancia s recorrida. En tal situación, conocemos la derivada s'(t) y necesitamos encontrar la función s(t), la operación inversa a la derivación.

Definición: El proceso de encontrar la función cuando se da su derivada se denomina **integración**, y la función se denomina la **integral o primitiva** de la derivada dada. Si f(x) es la derivada de F(x), esto es $\frac{dF}{dx} = f(x)$, entonces F(x) es una primitiva de f(x). Escribimos esto en la forma:

$$\int f(x)dx = F(x),$$

La función f(x) que ha de integrarse se denomina **integrando**.

Para calcular $\int f(x)dx$, hemos de pensar en una función F(x) cuya derivada es f(x). Por ejemplo, para calcular $\int 2xdx$, buscaremos una función cuya derivada sea 2x. Dado que $\frac{d}{dx}x^2 = 2x$, concluimos que $\int 2xdx = x^2$.

No obstante, hemos de observar que esta respuesta no es la única ya que la función $(C + x^2)$, para cualquier constante C, es una primitiva de 2x. Escribimos

$$\int 2xdx = x^2 + C.$$

La constante C, que puede tomar cualquier valor arbitrario, se denomina **constante de integración**.

En general podemos decir que si F'(x) = f(x), entonces el conjunto de todas las primitivas de f(x) viene dado por

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \qquad \text{donde C es una constante arbitraria.}$$

Ya que la constante es arbitraria, la integral así obtenida es conocida como **integral indefinida**.

De la definición de integral, tenemos que

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right] = f(x),$$

es decir, el proceso de integración y diferenciación se neutralizan mutuamente.

Tabla de integrales inmediatas:

1. $\int x^p dx = \dfrac{x^{p+1}}{p+1} + C \quad (p \neq -1).$

2. $\int \dfrac{1}{x}\, dx = \ln|x| + C.$

3. $\int e^x\, dx = e^x + C.$

4. $\int \text{sen } x\, dx = -\cos x + C.$

5. $\int \cos x\, dx = \text{sen } x + C.$

6. $\int \sec^2 x\, dx = \text{tg } x + C.$

7. $\int \text{cosec}^2 x\, dx = -\text{cotg } x + C.$

8. $\int \sec x \cdot \text{tg } x\, dx = \sec x + C.$

9. $\int \text{cosec } x \cdot \text{cotg } x\, dx = -\text{cosec } x + C.$

10. $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \text{arc sen } x + C.$

11. $\int \dfrac{1}{1+x^2}\, dx = \text{arc tg } x + C.$

La fórmula 2 requiere algún comentario:

Para x > 0, como | x | = x, tenemos que $\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$

Para x < 0, como | x | = - x, tenemos que $\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{d}{dx}\ln(-x) = \frac{1}{(-x)} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$

Propiedades:

1. $\int a \cdot f(x)\,dx = a \cdot \int f(x)\,dx$, donde a es una constante.

2. $\int [\, f(x) + g(x)\,]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$.

3. Si F(x) y G(x) son primitivas de la misma función f(x) en un intervalo [a,b], entonces, para alguna constante c, F = G + c en ese intervalo.

Ejemplos:

1.- La razón de crecimiento instantáneo (o velocidad de crecimiento) de una colonia de moscas de la fruta en el instante t ($t \geq 1$) es igual a $\dfrac{10(t+2)}{t}$. Cuando t = 1, hay 20 moscas en la colonia. Calcular el número de moscas para un valor cualquiera de t ($t > 1$).

- Solución:

Sea p(t) el tamaño de la colonia en el instante t. Sabemos que $p'(t) = \dfrac{10(t+2)}{t}$. Como p(t) es la primitiva de p'(t), tenemos que

$$p(t) = \int \frac{10(t+2)}{t}\,dt = 10 \cdot \int (1+\frac{2}{t})dt = 10 \cdot [\, t + 2 \cdot \ln|t| + C\,],$$

donde C es la constante de integración. Sabemos también que cuando t = 1, p(1) = 20. Por tanto, haciendo t = 1, obtenemos:

$$p(1) = 20 = 10 \cdot [\, 1 + 2 \cdot \ln|1| + C\,] = 10 \cdot (\, 1 + C\,).$$

Por tanto, 1 + C = 2, ó C = 1. Consecuentemente podemos sustituir este valor de C dentro de la expresión de p(t), obteniendo que:

$$p(t) = 10 \cdot [\, t + 2 \cdot \ln|t| + 1\,].$$

2.- Durante las horas de luz del día la velocidad de migración de la oca viene dada por $v = 20 - \dfrac{t}{3}$ (millas por hora), donde t es el tiempo medido en horas empezando con t = 0 al alba. ¿Cuántas millas ha recorrido la oca hasta el instante t?. ¿Hasta dónde llegará la oca volando en 12 horas?

- Solución:

Sea s(t) la distancia recorrida entre el alba (t = 0) y el instante t. Entonces, s(0) = 0. También, la derivada s'(t) es igual a la velocidad, así que

$$s'(t) = 20 - \frac{t}{3}.$$

Integrando, encontramos s(t):

$$s(t) = \int \left(20 - \frac{t}{3}\right) dt = 20t - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}t^2\right) + C.$$

Para determinar el valor de C, hacemos t = 0, ya que sabemos que s(0) = 0. Encontramos que:

$$s(0) = 0 = 20 \cdot 0 - \frac{1}{6}(0)^2 + C,$$

de lo que deducimos que C = 0. Por tanto,

$$s(t) = 20t - \frac{t^2}{6},$$

que nos da la distancia recorrida hasta el instante t.

Para encontrar la distancia volada en 12 horas, hacemos t = 12. Obtenemos

$$s(12) = 20 \cdot 12 - \frac{1}{6}(12)^2 = 240 - 24 = 216.$$

5.1. - MÉTODO DE SUSTITUCIÓN.

No todas las integrales pueden resolverse directamente usando las integrales inmediatas anteriores. A menudo la integral dada puede reducirse a una integral inmediata ya conocida mediante un cambio de variable de integración. Tal método se denomina **método de sustitución** y corresponde a la regla de la cadena en derivabilidad.

Teorema:

Si F'(x) = f(x), entonces

$$\int f[g(x)] \cdot g'(x)\, dx = F[g(x)] + C$$

para cualquier función diferenciable g(x) que no sea una función constante.

Ejemplos:

1.- $\int (x^2 + 3x - 7)^5 \cdot (2x + 3)\, dx.$

- Solución:

Observemos que la derivada de $(x^2 + 3x - 7)$ es igual a $(2x + 3)\, dx$, que aparece en la integral. Por tanto, tenemos que:

$$\int (x^2 + 3x - 7)^5 \cdot (2x + 3)\, dx = \begin{vmatrix} u = x^2 + 3x - 7, \\ du = (2x+3)dx \end{vmatrix} = \int u^5\, du =$$

$$= \frac{u^6}{6} + C = \frac{1}{6} \cdot (x^2 + 3x - 7)^6 + C.$$

2.- $\int \frac{1}{x \cdot \ln x}\, dx.$

- Solución:

$$\int \frac{1}{x \cdot \ln x}\, dx = \int \frac{1}{\ln x} \frac{1}{x} dx = \begin{vmatrix} u = \ln x \\ du = \frac{1}{x} dx \end{vmatrix} = \int \frac{1}{u}\, du =$$

$$= \ln|u| + C = \ln|\ln x| + C.$$

3.- $\int (x+1) \cdot \sqrt{x^2+2x+7}\ dx.$

- <u>Solución</u>:

Observemos que la derivada de $(x^2 + 2x + 7)$ es igual a $(2x + 2)$ dx, pero en la integral nada más aparece $(x + 1)$ dx. Por tanto, multiplicando y dividiendo el integrando por 2, tenemos que:

$$\int (x+1) \cdot \sqrt{x^2+2x+7}\ dx = \frac{1}{2} \cdot \int \sqrt{x^2+2x+7} \cdot (2x+2)\ dx =$$

$$= \left| u = x^2 + 2x + 7, du = (2x+2)\ dx \right| = \frac{1}{2} \cdot \int u^{1/2}\ du = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{\left(1/2+1\right)}}{\left(1/2+1\right)} + C =$$

$$= \frac{1}{3} u^{3/2} + C = \frac{1}{3} \cdot (x^2+2x+7)^{3/2} + C.$$

4.- $\int e^{(3+2\cdot \mathrm{tg}\, y)} \cdot \sec^2 y\ dy.$

- <u>Solución</u>:

$$\int e^{(3+2\cdot \mathrm{tg}\, y)} \cdot \sec^2 y\ dy = \left| \begin{matrix} u = 3 + 2tgy, \\ du = 2\sec^2 ydy \end{matrix} \right| = \int e^u \cdot \frac{1}{2}\ du =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int e^u\ du = \frac{1}{2} e^u + C = \frac{1}{2} \cdot e^{(3+2\cdot \mathrm{tg}\, y)} + C.$$

5.2.- INTEGRACIÓN POR PARTES.

El método de integración por partes puede usarse a menudo para evaluar una integral cuyo integrando consista en un producto de dos funciones. Es análogo a la fórmula de la derivada del producto y es, de hecho, obtenida de ella.

Sabemos que:

$$\frac{d}{dx}[\ u(x) \cdot v(x)\ ] = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x), \text{ ó}$$

$$u(x) \cdot v'(x) = \frac{d}{dx}[\ u(x) \cdot v(x)\ ] - u'(x) \cdot v(x).$$

Integrando los dos lados respecto a x, obtenemos:

$$\int u(x) \cdot v'(x)\ dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\ dx.$$

Si hacemos $u(x) = f(x)$ y $v'(x) = g(x)$. Entonces podemos escribir $v(x) = G(x)$, donde $G(x)$ denota la integral de $g(x)$, y tenemos que:

$$\boxed{\int f(x)\cdot g(x)\ dx = f(x)\cdot G(x) - \int f'(x)\cdot G(x)\ dx}$$

Esta fórmula expresa la integral del producto f(x) • g(x) en términos de la integral del producto f'(x) • G(x). Es útil porque en muchos casos la integral de f ' (x) •G(x) es más fácil de evaluar que la integral del producto original f(x) • g(x).

Ejemplo:
Calcular $\int x \cdot \text{sen } x \, dx$.

- Solución:
Elegimos f(x) = x y g(x) = sen x, así que la integral dada es igual a $\int f(x) \cdot g(x) \, dx$. Entonces f '(x) = 1 y G(x) = - cos x + C_1, donde C_1 es la constante de integración. Sustituyendo estos valores en la fórmula de integración por partes obtenemos que:

$$\int f(x) \cdot g(x) \, dx = f(x) \cdot G(x) - \int f'(x) \cdot G(x) \, dx,$$

$$\int x \cdot \text{sen } x \, dx = x \cdot (- \cos x + C_1) - \int (1) \cdot (- \cos x + C_1) \, dx =$$

$$= - x \cdot \cos x + x \cdot C_1 + \int (\cos x - C_1) \, dx =$$

$$= - x \cdot \cos x + x \cdot C_1 + \text{sen } x - C_1 \cdot x + C = - x \cdot \cos x + \text{sen } x + C,$$

donde C es de nuevo, una constante de integración.

Nota: Hemos de observar que la primera constante de integración C_1 en el ejemplo anterior, que aparece al integrar g(x) para obtener G(x), se cancela de la respuesta final. Este es siempre el caso cuando integramos por partes. Por tanto, en la práctica, nunca nos molestaremos en incluir una constante de integración en G(x), sino que simplemente tomaremos como G(x) cualquier primitiva de g(x).

Los siguientes comentarios pueden servir de orientación para decidir la elección de f y g:

a. Si el integrando es el producto de una potencia entera positiva de x (x, x^2, x^3, etc.) y una función exponencial o trigonométrica, a veces es útil tomar f(x) como esa potencia de x.
b. Si el integrando contiene un factor que sea, o bien una función logarítmica, o bien la inversa de una trigonométrica, es a menudo útil escoger esta función como f(x). Si el integrando consiste nada más de una función logarítmica o la inversa de una trigonométrica podemos tomar g(x) = 1.

Ejemplos:
1. Calcular $\int x \cdot \ln | x + 1 | \, dx$.

- Solución:
Escogemos f(x) = ln | x + 1 | y g(x) = x. Entonces

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} \quad , \quad G(x) = \frac{1}{2} x^2.$$

Sustituyendo en la fórmula de integración por partes, obtenemos

$$\int \ln|x+1| \cdot x\,dx = \ln|x+1| \cdot \frac{1}{2} x^2 - \int \frac{1}{x+1} \cdot \frac{1}{2} x^2\,dx =$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \ln|x+1| - \frac{1}{2} \cdot \int \left(x - 1 + \frac{1}{x+1} \right) dx .$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \ln|x+1| - \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{2} x^2 - x + \ln|x+1| \right] + C =$$

$$= \frac{1}{2} (x^2 - 1) \ln|x+1| - \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{2} x + C.$$

2. Calcular $\int$ arc sen x dx.

- <u>Solución</u>:

En este caso podemos expresar el integrando como un producto escribiendo $f(x) = \text{arcsen } x$ y $g(x) = 1$. Entonces:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad , \quad G(x) = x.$$

Integrando por partes, obtenemos

$$\int \text{arc sen } x\,dx = x \cdot \text{arc sen } x - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot x\,dx .$$

Para evaluar la integral de la derecha, hacemos el cambio $u = 1 - x^2$, así que $du = -2x\,dx$. Entonces:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{u^{1/2}} \left(-\frac{1}{2} du \right) = -\frac{1}{2} \cdot \int u^{-1/2}\,du = -u^{1/2} + C =$$

$$= -\sqrt{1-x^2} + C.$$

Por tanto, $\int \text{arc sen } x\,dx = x \cdot \text{arc sen } x + \sqrt{1-x^2} + C.$

3. Calcular $\int x^2 \cdot \text{sen } x\,dx.$

- <u>Solución</u>:

Utilizando integración por partes con $f(x) = x^2$ y $g(x) = \text{sen } x$, obtenemos:

$$\int x^2 \cdot \text{sen } x\,dx = -x^2 \cdot \cos x + \int 2x \cdot \cos x\,dx .$$

Integramos por partes de nuevo, esta vez con $f(x) = x$ y $g(x) = \cos x$:

$$\int x \cdot \cos x\,dx = x \cdot \text{sen } x - \int \text{sen } x\,dx = x \cdot \text{sen } x + \cos x.$$

Por tanto, $\int x^2 \cdot \text{sen } x\,dx = -x^2 \cdot \cos x + 2 \cdot (x \cdot \text{sen } x + \cos x) + C.$

6. - INTEGRAL DEFINIDA.

El cálculo de las áreas de rectángulos y triángulos es muy simple: el área de un rectángulo se obtiene multiplicando su base por su altura y el área de un triángulo es la mitad de la base por la altura. El área de cualquier figura plana que está encerrada por segmentos rectilineos puede también calcularse fácilmente subdividiendo la figura en triángulos y rectángulos. El área se obtiene como suma de las áreas de los triángulos y rectángulos en que hemos dividido la figura.

Cuando la figura no está encerrada por lineas rectas, entonces el área puede calcularse mediante sucesivas aproximaciones. Los matemáticos griegos fueron los primeros en usar este método para calcular el área del círculo. Primero aproximemos el área del círculo inscribiendo un rectángulo, luego mejoramos la aproximación inscribiendo un octágono, un polígono de 16 lados, etc. Obviamente, cada polígono nuevo con más lados proporciona una mejor aproximación al área del círculo que el anterior. Las áreas de los polígonos inscritos son siempre menores que el área del círculo, pero cuando el número de lados aumenta, el área se aproxima a la del círculo.

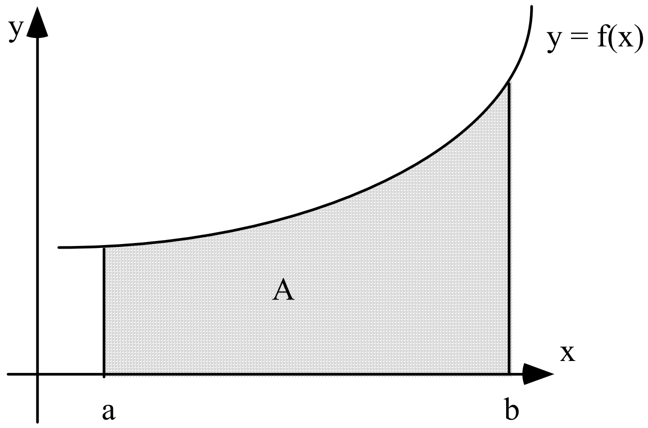


Figura 1.1

Hemos de usar una técnica similar para definir y calcular el área A, la cual está encerrada por un lado por la gráfica de una cierta función y = f(x) y por otro por las rectas verticales x = a, x = b, y el eje x (Figura 1.1). Para simplificar, hemos de asumir que $f(x) \geqslant 0$ para $a \leqslant x \leqslant b$. Sea $n > 1$ un entero positivo, y dividimos el intervalo $a \leqslant x \leqslant b$ en n subintervalos iguales, cada uno de longitud $h = \dfrac{b - a}{n}$. Los puntos de división son $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ con $b = x_n$. Entonces, $x_1 = a + h$, $x_2 = a + 2h$, $x_3 = a + 3h$, ... , etc. En general, el k-ésimo punto de división es $x_k = a + kh$, y el último es

$$x_n = a + nh = a + (b - a) = b.$$

En el k-ésimo subintervalo, $x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k$, construimos un rectángulo de altura igual al valor de f(x) en el extremo de la derecha, es decir, $f(x_k)$. El área de este rectángulo es igual a

$f(x_k) \cdot h$. Un rectángulo similar se construye en cada uno de los n intervalos, y tomamos la suma de las áreas de los n rectángulos como una aproximación al área verdadera A bajo la curva. Por tanto, denotando la suma de las áreas de los rectángulos mediante A_n, tenemos

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot h = \sum_{k=1}^{n} f(a + kh) \cdot h.$$

En general, cuando n crece, la suma A_n de las áreas del rectángulo se aproxima al área A verdadera cada vez más. De hecho, tomando n suficientemente grande, podemos hacer A_n tan próximo a A como queramos; por tanto, podemos escribir el área A como el límite de A_n cuando

$n \to \infty$ (o $h \to 0$), es decir,

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \bullet h, \quad \text{ó} \quad \boxed{A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(a+kh)h}$$

donde $h = \dfrac{b - a}{n}$.

Ejemplo:

a) Aproximar el área bajo la curva $y = x^2$ entre $x = 0$ y $x = 4$ dividiendo el área en 4, 5 y 6 rectángulos.

b) Calcular el área verdadera.

Solución:

a) Tenemos $a = 0$, $b = 4$, $f(x) = x^2$ y $n = 4$ (Figura 1.2). Por tanto,

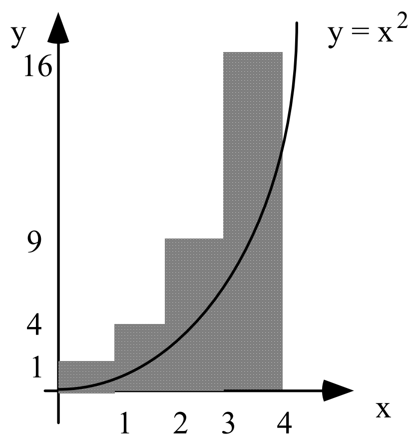


Figura 1.2

$h = \dfrac{b - a}{4} = \dfrac{4 - 0}{4} = 1$, $x_k = a + kh = k$ para $k = 1, 2, 3$ y 4. Además $f(x_k) = x_k^2 = k^2$. Así,

$$A_4 = \sum_{k=1}^{4} f(x_k) \cdot h = 1 \cdot (1 + 4 + 9 + 16) = 30$$

Notemos que el área verdadera es menor que este valor.

Si n = 5, $h = \frac{4}{5}$, $x_k = \frac{4}{5}\, k$, $f(x_k) = \frac{16}{25}\, k^2$ y

$$A_5 = \sum_{k=1}^{5} f(x_k) \cdot h = \frac{4}{5} \cdot \frac{16}{25} (1 + 4 + 9 + 16 + 25) = \frac{704}{25} = 28.16$$

Si n = 6, $h = \frac{4}{6}$, $x_k = \frac{4}{6}\, k$, $f(x_k) = \frac{16}{36}\, k^2$ y

$$A_6 = \sum_{k=1}^{6} f(x_k) \cdot h = \frac{4}{6} \cdot \frac{16}{36} (1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36) = \frac{728}{27} = 26.963$$

b) $h = \frac{4}{n}$, $x_k = \frac{4}{n}\, k$, $f(x_k) = \frac{16}{n^2}\, k^2$ y

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot h = \sum_{k=1}^{n} \frac{16}{n^2}\, k^2\, \frac{4}{n} = \frac{64}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 =$$

$$= \frac{64}{n^3}\, \frac{n (n + 1) (2n + 1)}{6} = \frac{32 (2n^2 + 3n + 1)}{3\, n^2}$$

Así, $A = \lim_{n\to\infty} A_n = \frac{64}{3} = 21.333$.

Definición: sea f(x) una función continua definida en el intervalo cerrado $a \leqslant x \leqslant b$. Entonces la **integral definida** de f(x) entre x = a y x = b, denotada por $\int_a^b f(x)dx$, se define como

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(a+kh)\cdot h}$$

donde $h = \frac{b - a}{n}$. Los números reales a y b se conocen como los **límites de integración**.

De la anterior definición, **si f(x) $\geqslant$ 0 en a $\leqslant$ x $\leqslant$ b, la integral definida** $\int_a^b f(x)dx$ **representa el área** encerrada por la curva y = f(x), el eje x, y las rectas x = a, x = b.

El siguiente teorema establece una relación muy simple entre la integral definida de una función f(x) y la primitiva de ésta:

Teorema: (Teorema Fundamental del Cálculo Integral).

Si f(x) es una función continua de x en $a \leqslant x \leqslant b$, y F(x) es cualquier primitiva de f(x), entonces

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

En la evaluación de integrales definidas eliminamos la constante de integración de la primitiva de f(x) ya que ésta se cancela en la respuesta final. Sea F(x) + C cualquier primitiva de f(x), donde C es una constante de integración. Entonces, por el teorema anterior,

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x) + C]_a^b = F(b) + C - F(a) - C = F(b) - F(a),$$

y C ha desaparecido de la respuesta.

<u>Ejemplo</u>: Evaluar el área encerrada por la curva $y = x^2$, el eje x, y las líneas x = 0 y x = 4.

Claramente la función $f(x) = x^2$ es no negativa para todo x, y en particular, si 0 = x = 4. Por tanto, el área requerida viene dada por:

$$\int_0^4 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^4 = \frac{64}{3} \text{ unidades cuadradas.}$$

<u>Ejemplo</u>: Calcular $\int_a^b x^4\,dx$.

Como $\int x^4\,dx = \frac{x^5}{5}$ tenemos

$$\int_a^b x^4 dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_a^b = \frac{b^5}{5} - \frac{a^5}{5} = \frac{1}{5}(b^5 - a^5)$$

<u>Propiedad</u>: Cuando calculemos integrales definidas donde encontramos la primitiva por el método de sustitución, es importante notar que los límites de integración también cambian cuando cambia la variable de integración. Es decir:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(y))g'(y)\,dy \qquad x=g(y),\ \alpha=g^{-1}(a),\ \beta=g^{-1}(b).$$

<u>Ejemplo</u>: Calcular $\int_1^2 x \cdot e^{x^2}\,dx$.

Sea $I = \int_1^2 x \cdot e^{x^2}\,dx$. Para encontrar la primitiva de $x \cdot e^{x^2}$ hemos de hacer uso del método de sustitución. Escribimos la integral anterior como

$$I = \frac{1}{2}\int_1^2 e^{x^2} \cdot 2x\,dx.$$

Ya que 2x dx, la diferencial de x^2, aparece en la integral, hacemos $x^2 = u$, y así $2x\,dx = du$. Cuando $x = 1$, $u = 1^2 = 1$, y cuando $x = 2$, $u = 2^2 = 4$. En consecuencia:

$$I = \frac{1}{2}\int_1^4 e^u\,du.$$

Notemos que en términos de la nueva variable u los límites de integración son 1 y 4. Entonces:

$$I = \frac{1}{2}\left[e^u \right]_1^4 = \frac{1}{2}\left(e^4 - e^1 \right) = \frac{1}{2}\; e\left(e^3 - 1 \right).$$

Propiedades:

(i) $\int_a^a f(x)\,dx = 0.$

(ii) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$

(iii) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$, donde c es cualquier otro número.

(iv) Si f(t) es continua en $a \leqslant t \leqslant x$, entonces

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = \frac{d}{dx}\left(F(x)-F(a)\right) = f(x).$$

Ejemplos:

1.- $\frac{d}{dx}\left(\int_1^x t \cdot \cos t\,dt\right)$.

Por el teorema anterior tenemos que $\frac{d}{dx}\left(\int_1^x t \cdot \cos t\,dt\right) = x \cdot \cos x$.

No ha hecho falta evaluar primero la integral y entonces derivar.

2.- $\frac{d}{dx}\left(\int_1^3 t \cdot \mathrm{sen}^7\, t\,dt\right)$

En este caso es importante notar que la integral definida $\int_1^3 t \cdot \mathrm{sen}^7\, t\,dt$ tiene un valor constante y no es una función de x. Por tanto,

$$\frac{d}{dx}\left(\int_1^3 t \cdot \mathrm{sen}^7\, t\; dt\right) \;=\; 0.$$

3.- $\displaystyle\int_0^1 \frac{d}{dx}(x^3 \cdot \mathrm{arc\ sen}\ x)\;\; dx$.

De la definición de primitiva, si F'(x) = f(x), integrando ambos términos:

$$\int\; f(x)\; dx = \int\;\; F'(x)\; dx = F(x) + C.$$

Por tanto,

$$\int \frac{d}{dx}(x^3 \cdot \mathrm{arc\ sen}\ x)\;\; dx = \;(x^3 \cdot \mathrm{arc\ sen}\ x) + C,$$

y así

$$\int_0^1 \frac{d}{dx}(x^3 \cdot \mathrm{arc\ sen}\ x)\;\; dx = \;\left[\, x^3 \cdot \mathrm{arc\ sen}\ x \,\right]_0^1 \;\; = \frac{\pi}{2}$$

TEMA 2

ECUACIONES DIFERENCIALES
EN EL CONTEXTO DE LA BIOLOGÍA

1.- INTRODUCCIÓN.

En estos temas desarrollaremos las técnicas matemáticas capaces de describir las dinámicas de los procesos biológicos. Estamos interesados en variables biológicas que pueden ser funciones de variables como el tiempo, la temperatura, la abundancia de comida, etc. Salvo cuando se especifique otra cosa, la variable biológica que aquí consideraremos será el tamaño de la población de una cierta especie en un ambiente determinado como una función del tiempo. En los modelos discretos la variable biológica se mide en intervalos de tiempo discretos; sin embargo, a menudo esta variable es una función continua del tiempo. Un modelo continuo es más apropiado para describir el comportamiento de poblaciones muy grandes, como las poblaciones de bacterias.

En un modelo continuo, $x(t)$ representará el tamaño de una cierta población en el tiempo t. La población inicial es $x(0)$.

Ejemplo:

La función $x(t) = 1000 + 500\,(1 - 2^{-t})$ describe el crecimiento continuo de una población de tamaño inicial $x(0) = 1000$ hasta un tamaño límite o de equilibrio : $\lim_{t\to\infty} x(t) = 1500$.

Cuando estudiamos $x(t)$, puede ser que tengamos información sobre el **índice** (ritmo, tasa o velocidad) **de crecimiento** (instantáneo) $\frac{d(x(t))}{dt}$, lo cual sugiere la siguiente definición:

Definición: Una **ecuación diferencial** para la función $x(t)$ es una ecuación que contiene derivadas de $x(t)$ respecto de t. El **orden** de una ecuación diferencial es el orden de la derivada más alta que en ella aparece.

Ejemplo:

1) $\frac{dx}{dt} = 2x$ (1^er^ orden)

2) $\frac{dx}{dt} + 2tx = e^{-t^2}$ (1^er^ orden)

3) $\frac{d^2x}{dt^2} + 4\left(\frac{dx}{dt}\right)^3 + 4x = 0$ (2º orden)

4) $\frac{d^3x}{dt^3} + x^2 \cdot (1 + t^4) = 0$ (3^er^ orden)

Ejemplo:

Una población de bacterias crece de forma que su índice de crecimiento en el instante t es igual a su población dividida por 10. Describir su proceso mediante una ecuación diferencial.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{10} \cdot x(t) \qquad 1^{er} \text{ orden.}$$

2.- ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE PRIMER ORDEN.

Si los recursos disponibles para una población son muy abundantes, es razonable suponer que el índice de crecimiento será proporcional al tamaño de la población. Matemáticamente:

$$\frac{dx(t)}{dt} = a \cdot x(t), \quad \text{donde } \mathbf{a} \text{ es una constante.}$$

La suposición que lleva a esta ecuación es que el índice de crecimiento por individuo de la población (el índice medio de crecimiento) es constante.

$$\frac{1}{x(t)} \cdot \frac{dx(t)}{dt} = a$$

Vamos a resolverla: $\frac{1}{x(t)} \cdot \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt} [\ \ln x(t)\ ] = a$

Integrando los dos lados de la ecuación: $\ln x(t) = a \cdot t + K \Rightarrow x(t) = e^{at+K} = e^K \cdot e^{at} = C \cdot e^{at}$

Si conocemos la población x(t) para cierto instante $t = t_o$ podemos determinar el valor de C:

Como $x(t) = C \cdot e^{at}$, $x(t_o) = C \cdot e^{at_o} \Rightarrow C = \frac{x(t_o)}{e^{at_o}} = x(t_o) \cdot e^{-at_o}$

Por tanto: $x(t) = x(t_o) \cdot e^{a(t-t_o)}$

En particular, si conocemos la población en el instante inicial $t_o = 0$:

$x(t) = x(0) \cdot e^{at}$ **ecuación de crecimiento exponencial**

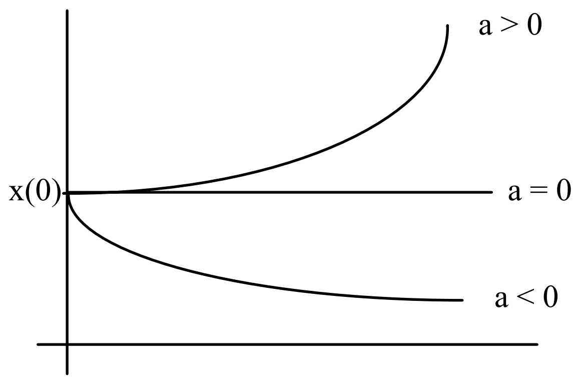


Figura 2.1

Entonces, si $a > 0$, la población crece con el tiempo, si $a = 0$ la población permanece constante $x(t) = x(0)$, y si $a < 0$, la población decrece hasta extinguirse.

Ejemplo:

Determinar la solución de la ecuación diferencial $\frac{dx}{dt} = 0.1 \cdot x$ que satisface la condición inicial $x(0) = 1000$. Si $x(t)$ representa el tamaño de una población de bacterias después de t horas. ¿Cual es la población después de 10 horas?.

En este ejemplo $a = 0.1$ y, por tanto, la solución general es $x(t) = x(0) \cdot e^{0.1t}$.

La solución que satisface la condición inicial $x(0) = 1000$ es $x(t) = 1000 \cdot e^{0.1t}$.

Después de 10 horas, la población es $x(10) = 1000 \cdot e \approx 2718$.

La ecuación $\frac{dx}{dt} = a \cdot x$ es un ejemplo de ecuación diferencial lineal.

Una **ecuación diferencial de primer orden** es **lineal** si los términos involucrados con x(t) y sus derivadas contienen a x(t) ó una derivada de primer grado únicamente, y no hay términos con productos como $x \cdot \frac{dx}{dt}$. Por ejemplo, términos como x^2, $x^3 \cdot \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)$, sen x, etc. no aparecen.

Ejemplos: Son lineales:

1) $\frac{d^2x}{dt^2} = 8x$ (lineal, 2º orden)

2) $\frac{dx}{dt} + 2\,t\,x = e^{-t^2}$ (lineal, 1er orden)

3) $\frac{dx}{dt} - t^2 x = 0$ (lineal, 1er orden)

4) $\frac{d^3x}{dt^3} + 3\frac{d^2x}{dt^2} = 1 + \cos t$ (lineal, 3er orden)

Las siguientes ecuaciones no son lineales:

1) $\frac{dx}{dt} = x^2$

2) $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + x \cdot e^x = 1 + t$

3) $x \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = t^3$

4) $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{1 + x^2} = x.$

La ecuación diferencial lineal de primer orden más general es:

$$\boxed{\frac{dx}{dt} + a(t) \cdot x = f(t)}$$

Si $f(t) = 0$ se llama **homogénea**. Si a(t) es constante se llama **ecuación diferencial lineal de primer orden con coeficientes constantes**.

Resolveremos primero la ecuación homogénea: $\frac{dx}{dt} + a(t) \cdot x = 0$

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{dt} = -\,a(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\,[\,\ln x\,] = -\,a(t) \quad \Rightarrow \quad \ln x = -\int a(t)\,dt + K \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = e^{-\int a(t)dt} \cdot e^{K} = C \cdot e^{-\int a(t)dt}$$

C puede determinarse cuando nos dan una condición inicial.

Ejemplo:

Resolver $\frac{dx}{dt} + \frac{x}{1+t} = 0$

- Solución:

En este caso, $a(t) = \frac{1}{1+t}$ y $\int \frac{1}{1+t}\,dt = \ln(1+t)$. Por tanto,

$$x(t) = C \cdot e^{-\ln(1+t)} = C \cdot e^{\ln(1+t)^{-1}} = \frac{C}{1+t}$$

Si $x(0) = 10$ tendríamos que $10 = \frac{C}{1+0} \Rightarrow C = 10$.

Por tanto, la solución que satisface la condición inicial es $x(t) = \frac{10}{1+t}$.

Ejemplo:

Una población de bacterias crece de forma que el índice medio de crecimiento en el instante t (medido en horas) es $\frac{1}{1+2t}$. Si la población inicial es de 1000 bacterias, ¿cuál es la población después de 4 horas?, ¿y después de 12 horas?

- Solución:

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+2t} \Rightarrow \frac{d}{dt}\,[\,\ln x\,] = \frac{1}{1+2t} \Rightarrow \ln x = \int \frac{1}{1+2t}\,dt = \frac{1}{2}\ln(1+2t) + K$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = C \cdot e^{\ln(1+2t)^{1/2}} = C \cdot (1+2t)^{1/2}$$

$x(0) = 1000 \quad \Rightarrow \quad 1000 = C \quad \Rightarrow \quad x(t) = 1000\sqrt{1+2t}$

Después de 4 horas la población es $x(4) = 1000\sqrt{1+8} = 3000$

Después de 12 horas la población es $x(12) = 1000\sqrt{1+24} = 5000$

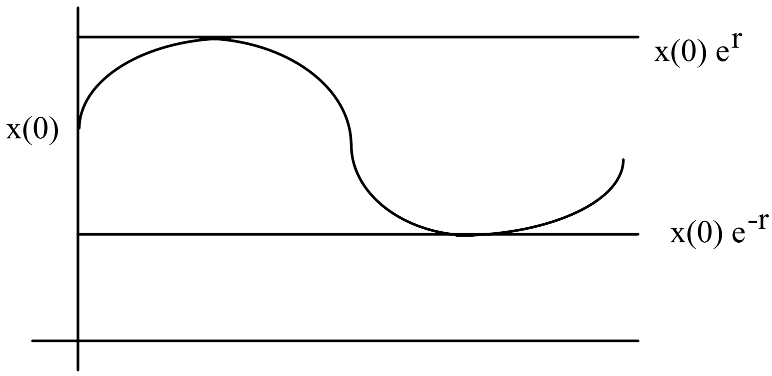
Ejemplo: Un modelo de crecimiento "estacional"

La ecuación diferencial de primer orden $\frac{dx}{dt} = r \cdot x(t) \cdot \cos t$, donde r es una constante, puede verse como un modelo de crecimiento por estaciones. Cuando t aumenta, el índice de crecimiento $\frac{dx}{dt}$ de la población x(t) es alternativamente positivo y negativo y, por tanto, la población crece y decrece alternativamente. Esto puede ser causado por factores "estacionales" como la disponibilidad de alimento.

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{dt} = r \cdot \cos t \quad \Rightarrow \quad \ln x = \int r \cdot \cos t \, dt = r \cdot \operatorname{sen} t + K \quad \Rightarrow \quad x(t) = C \cdot e^{r \cdot \operatorname{sen} t}$$

Así, $x(0) = C \cdot e^0 = C \quad \Rightarrow \quad x(t) = x(0) \cdot e^{r \cdot \operatorname{sen} t}$.

El tamaño máximo de la población $x(0) \cdot e^{r}$ se produce en $t = \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots$, donde sen t = 1 y el tamaño mínimo $x(0) \cdot e^{-r}$ se produce en $t = \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \ldots$, donde sen t = -1. En este modelo, la población oscila entre $x(0) \cdot e^{-r}$ y $x(0) \cdot e^{r}$ con periodo 2π. Los instantes $t = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots$ pueden interpretarse como los puntos medios de las estaciones de mayor disponibilidad de comida, y $t = \pi, 3\pi, 5\pi, \ldots$ corresponderían a los puntos medios de estaciones de mayor escasez de comida. La longitud de 1 año es 2π unidades de tiempo.



Resolución de la ecuación general:

Vamos ahora a resolver la ecuación general: $\frac{dx}{dt} + a(t) \cdot x = f(t)$

Consideramos una función: $x(t) = v(t) \cdot u(t)$, donde $v(t)$ es una solución de la correspondiente ecuación homogénea $\frac{dx}{dt} + a(t) \cdot x = 0$, y $u(t) = \int \frac{f(t)}{v(t)} \, dt + C$.

Vamos a comprobar que la función $x(t) = v(t) \cdot u(t)$ es solución de la ecuación general:

$$\frac{dx}{dt} + a(t) \cdot x = \left(\frac{dv}{dt} \cdot u(t) + v(t) \cdot \frac{du}{dt} \right) + a(t) \cdot v(t) \cdot u(t) =$$

$$= \left(\frac{dv}{dt} + a(t) \cdot v(t) \right) \cdot u(t) + v(t) \cdot \frac{du}{dt} = 0 \cdot u(t) + v(t) \cdot \frac{du}{dt} =$$

$$= v(t) \cdot \frac{f(t)}{v(t)} = f(t)$$

Ejemplo:

Determinar la solución general de $\frac{dx}{dt} + x = e^{-t}$.

¿Cual es la solución que satisface x(0)=1000?.

- Solución:

En primer lugar resolveremos la ecuación homogénea: $\frac{dx}{dt} + x = 0$.

Una solución v(t) de esta ecuación viene dada por

$$\ln v = -t \quad \Rightarrow \quad v(t) = e^{-t}$$

Como $f(t) = e^{-t}$

$$u(t) = \int \frac{f(t)}{v(t)}\, dt + C = t + C$$

Por tanto, $x(t) = t \cdot e^{-t} + C \cdot e^{-t}$ es la solución general de la ecuación.

Como $x(0) = 1000 \Rightarrow C = 1000$. La solución particular es: $x(t) = 1000 \cdot e^{-t} + t \cdot e^{-t}$.

Ejemplo:

Determinar la solución de $\frac{dx}{dt} + 2\,t\,x = t\,e^{-t^2}$ que satisface la condición inicial $x(0) = 1$.

- Solución:

En primer lugar resolveremos la ecuación homogénea $\frac{dx}{dt} + 2\,t\,x = 0$.

Una solución v(t) de esta ecuación viene dada por

$$\ln v = -t^2 \quad \Rightarrow \quad v(t) = e^{-t^2}$$

Como $f(t) = t\,e^{-t^2}$

$$u(t) = \int \frac{f(t)}{v(t)}\, dt + C = \frac{t^2}{2} + C$$

Por tanto, $x(t) = \frac{t^2}{2} \cdot e^{-t^2} + C \cdot e^{-t^2}$ es la solución general de la ecuación.

$x(0) = 1 \Rightarrow C = 1$. Por tanto, la solución particular es:

$$x(t) = \frac{t^2}{2} \cdot e^{-t^2} + e^{-t^2} = e^{-t^2} \cdot \left(\frac{t^2}{2} + 1\right)$$

Ejemplo:

Determinar la solución de $\frac{dx}{dt} + \frac{1}{t}\, x = t$ que satisface la condición inicial $x(6) = 20$.

- <u>Solución</u>:

En primer lugar resolveremos la ecuación homogénea: $\frac{dx}{dt} + \frac{1}{t}\, x = 0.$

Una solución v(t) de esta ecuación viene dada por

$$\ln v = -\ln t \quad \Rightarrow \quad v(t) = \frac{1}{t}$$

Como f(t) = t

$$u(t) = \int \frac{f(t)}{v(t)}\, dt + C = \frac{t^3}{3} + C$$

Por tanto, $x(t) = \frac{t^3}{3} \cdot \frac{1}{t} + C \cdot \frac{1}{t} = \frac{t^2}{3} + C \cdot \frac{1}{t}$ es la solución general de la ecuación.

$x(6) = 20 \quad \Rightarrow \quad \frac{36}{3} + C \cdot \frac{1}{6} = 20 \quad \Rightarrow \quad C = 48.$

Por tanto, la solución particular es: $x(t) = \frac{t^2}{3} + \frac{48}{t}$

<u>Ejemplo</u>:

Una técnica médica consiste en introducir glucosa en el flujo sanguíneo del paciente. Para estudiar este proceso llamamos G(t) a la cantidad de glucosa en la sangre del paciente en el instante t. Supongamos que la glucosa se introduce en la sangre a una velocidad constante de c gramos/minuto. Al mismo tiempo, la glucosa es transformada y eliminada de la sangre a una velocidad proporcional a la cantidad de glucosa presente en ese instante.

- <u>Solución</u>:

La ecuación a resolver es: $\frac{dG(t)}{dt} = c - a\, G(t)$, donde **a** es una constante positiva.

En primer lugar resolvemos la ecuación homogénea: $\frac{dG(t)}{dt} + a\, G(t) = 0.$

Una solución v(t) de esta ecuación viene dada por

$$\ln v = -a\, t \quad \Rightarrow \quad v(t) = e^{-at}$$

Cómo f(t) = c

$$u(t) = \int \frac{f(t)}{v(t)}\, dt + K = \int c\, e^{at}\, dt + K = \frac{c}{a}\, e^{at} + K$$

Por tanto, $G(t) = \frac{c}{a}\, e^{at} \cdot e^{-at} + K \cdot e^{-at} = \frac{c}{a} + K \cdot e^{-at}$ es la solución general de la ecuación.

Para t = 0 $\Rightarrow K = G(0) - \frac{c}{a}$ y, así, la solución particular es:

$$G(t) = \frac{c}{a} + \left(G(0) - \frac{c}{a} \right) \cdot e^{-at}.$$

Notemos que cuando t se hace muy grande $\lim_{t\to\infty} G(t) = \frac{c}{a}$. Esta será la cantidad de equilibrio de glucosa en la sangre.

3.- ECUACIONES DIFERENCIALES NO LINEALES SEPARABLES.

Consideramos la ecuación $\frac{dx}{dt} = g(x,t)$, donde g es una función dada de las variables x y t (se supone continua).

La interpretación biológica de esta ecuación puede ser que el índice de crecimiento es una función del tiempo y del tamaño de la población.

Esta ecuación es lineal cuando puede expresarse como $g(x,t) = - a(t) \cdot x + f(t)$ para algunas funciones a(t) y f(t).

Nosotros vamos a resolver un caso particular de esta ecuación.

Diremos que **x** y **t** son **separables** si $g(x,t) = h(x) \cdot k(t)$, donde h(x) es una función que sólo depende de x y k(t) es una función que sólo depende de t.

$$\frac{dx}{dt} = g(x,t) = h(x) \cdot k(t) \;\Rightarrow\; \frac{1}{h(x)}\frac{dx}{dt} = k(t)$$

Integrando respecto de t ambos miembros obtendremos la solución general. De forma informal, es como si tuviéramos:

$$\frac{dx}{dt} = g(x,t) = h(x) \cdot k(t) \;\Rightarrow\; \frac{dx}{h(x)} = k(t)\, dt.$$

Itegrando el primer miembro respecto de x y el segundo respecto de t :

$$\int \frac{1}{h(x)}\, dx = \int k(t)\, dt + C$$

Esta es la forma de la solución general. Si h(x) y k(t) son suficientemente simples, estas integrales pueden evaluarse para determinar explícitamente x(t).

Ejemplo: Resolver $\frac{dx}{dt} = (1 + x^2) \cdot (1 + 2t)$, $x(0) = 0$.

- Solución:

$$\frac{dx}{1+x^2} = (1 + 2t)\, dt \;\Rightarrow\; \int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \int (1 + 2t)\, dt \;\Rightarrow\; \text{arc tg } x = t + t^2 + C$$

$$\Rightarrow\; x(t) = \text{tg}\, (t + t^2 + C)$$

Como $x(0) = 0 \Rightarrow \text{tg } C = 0 \Rightarrow C = 0$. Por tanto, la solución particular es: $x(t) = \text{tg}\, (t + t^2)$

Ejemplo: Resolver $\frac{dx}{dt} = (1 + x) \cdot e^{-t}$, $x(0) = 1$.

- Solución:

$$\frac{dx}{1+x} = e^{-t}\, dt \;\Rightarrow\; \int \frac{1}{1+x}\, dx = \int e^{-t}\, dt + C \;\Rightarrow\; \ln (1 + x) = - e^{-t} + C$$

Como $x(0) = 1 \;\Rightarrow\; \ln 2 = - 1 + C \;\Rightarrow\; C = 1 + \ln 2$

Por tanto, la solución particular es: $\ln (1 + x) = 1 + \ln 2 - e^{-t}$

4.- CRECIMIENTO LOGÍSTICO.

El índice de crecimiento por individuo en una población es la diferencia entre el índice medio de natalidad y el índice medio de mortalidad.

Supondremos que el índice medio de natalidad en una población es una constante positiva β independiente del tiempo t y del tamaño de la población y que el índice medio de mortalidad es proporcional al tamaño de la población y es, por tanto, $\delta\, x(t)$, donde δ es una constante positiva.

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{dx(t)}{dt} = \beta - \delta\, x(t) \;\Rightarrow\; \frac{dx}{dt} = x \cdot (\beta - \delta x) \;\Rightarrow\; \frac{dx}{x \cdot (\beta - \delta x)} = dt$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{dx}{x \cdot (\beta - \delta x)} = t + C \;\Rightarrow\; \frac{1}{\beta} \ln \frac{x}{\beta - \delta x} = t + C$$

$$\Rightarrow \quad \ln \frac{x}{\beta - \delta x} = \beta t + \beta C \;\Rightarrow\; \ln \frac{x}{\beta - \delta x} = \beta t + K$$

Si al principio, la población tenía x(0) individuos:

$$\ln \frac{x(0)}{\beta - \delta\, x(0)} = K$$

Por tanto,

$$\ln \frac{x}{\beta - \delta x} = \beta t + \ln \frac{x(0)}{\beta - \delta\, x(0)} \;\Rightarrow\; \ln \frac{x}{\beta - \delta x} - \ln \frac{x(0)}{\beta - \delta\, x(0)} = \beta t \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \ln \frac{x \cdot (\beta - \delta\, x(0))}{x(0) \cdot (\beta - \delta\, x(t))} = \beta t \;\Rightarrow\; \frac{x \cdot (\beta - \delta\, x(0))}{x(0) \cdot (\beta - \delta\, x(t))} = e^{\beta t} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x(t) \cdot (\beta - \delta\, x(0)) = x(0) \cdot (\beta - \delta\, x(t)) \cdot e^{\beta t}$$

$$\Rightarrow \quad x(t) \cdot (\beta - \delta\, x(0) + x(0)\, \delta\, e^{\beta t}) = x(0)\, \beta\, e^{\beta t}$$

Por tanto, $x(t) = \dfrac{x(0)\, \beta\, e^{\beta t}}{\beta + (e^{\beta t} - 1)\, \delta\, x(0)}$ (crecimiento logístico)

Así, si tomamos límites:

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \lim_{t \to \infty} \frac{x(0)\beta}{(\beta - \delta x(0)) \cdot e^{-\beta t} + x(0)\delta} = \frac{\beta}{\delta} \quad \text{si } \beta > 0$$

<u>Ejemplo</u>:

Determinar la solución de $\dfrac{dx}{dt} = x \cdot \left(\dfrac{1}{10} - \dfrac{x}{1000} \right)$, que satisface la condición inicial $x(0) = 10$. ¿Cual es la población de equilibrio?

- Solución:

Se trata de la ecuación logística cuando $\beta = 0.1$, $\delta = 0.001$ y $x(0) = 10$:

$$x(t) = \frac{10 \cdot 0.1 \cdot e^{0.1\,t}}{0.1 + (e^{0.1\,t} - 1) \cdot 0.001 \cdot 10} = \frac{e^{0.1\,t}}{0.1 + (e^{0.1\,t} - 1) \cdot 0.01} =$$

$$= \frac{100 \cdot e^{0.1\,t}}{10 + e^{0.1\,t} - 1} = \frac{100 \cdot e^{0.1\,t}}{9 + e^{0.1\,t}}$$

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \frac{0.1}{0.001} = 100$$

Representa el tamaño de la población para el cual la tasa de natalidad equilibra exactamente a la de mortalidad.

TEMA 3

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE SEGUNDO ORDEN

1. Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden.
2. Resolución de la ecuación diferencial lineal de segundo orden homogénea con coeficientes constantes.
3. Resolución del caso "no homogéneo": Método de variación de las constantes.

1.- ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE SEGUNDO ORDEN.

La forma más general de esta ecuación es:

$$a(t)\, x''(t) + b(t)\, x'(t) + c(t)\, x(t) = f(t) \qquad (1.1)$$

donde a(t), b(t), c(t), f(t) son funciones dadas de t y $a(t) \neq 0 \ \forall t$.

Por simplificar la notación, utilizaremos x''(t) en lugar de $\frac{d^2x}{dt^2}$ y x'(t) en lugar de $\frac{dx}{dt}$.

- Casos particulares:

Si a(t), b(t) y c(t) son constantes, a la ecuación (1.1) se le llama ecuación lineal de segundo orden **con coeficientes constantes**. Si $f(t) = 0 \ \forall t$, se llama **homogénea**.

2.- RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL DE SEGUNDO ORDEN HOMOGÉNEA CON COEFICIENTES CONSTANTES.

Vamos a resolver la siguiente ecuación:

$$a\, x''(t) + b\, x'(t) + c\, x(t) = 0, \quad \text{donde } a, b, c \text{ son constantes y } a \neq 0.$$

La solución general de esta ecuación se obtiene a partir de las raíces λ_1, λ_2 de la **ecuación auxiliar**: $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$

Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$ (λ_1, λ_2 reales y distintas)

La solución general es: $x(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 e^{\lambda_2 t}$, donde k_1 y k_2 son constantes. Cuando tengamos dos condiciones iniciales de x(t) (por ejemplo el valor de x(0) y x'(0)), podremos calcular el valor de dichas constantes.

Ejemplo:

Hallar la solución general de $x''(t) + x'(t) - 6\, x(t) = 0$. ¿Cuál es la solución particular que satisface las condiciones iniciales $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$?.

- Solución:

La ecuación auxiliar es: $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$, que tiene por raíces:

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -3, \lambda_2 = 2$$

Por tanto, $x(t) = k_1 e^{-3t} + k_2 e^{2t} \quad \Rightarrow \quad x'(t) = -3 k_1 e^{-3t} + 2 k_2 e^{2t}$.

De las condiciones iniciales $\left.\begin{array}{r} x(0) = 1 = k_1 + k_2 \\ x'(0) = 0 = -3\, k_1 + 2\, k_2 \end{array}\right\} \Rightarrow k_1 = \dfrac{2}{5}\ , k_2 = \dfrac{3}{5}$.

Así, la solución particular será : $x(t) = \dfrac{2}{5}\ e^{-3t} + \dfrac{3}{5}\ e^{2t}$

<u>Caso 2</u>: $b^2 - 4ac = 0$ ($\lambda_1 = \lambda_2$ reales)

La solución general es : $x(t) = k_1\, e^{\lambda_1 t} + k_2\, t\, e^{\lambda_2 t}$, donde, al igual que en el caso anterior, k_1 y k_2 son constantes.

<u>Ejemplo</u>:

Hallar la solución general de $x''(t) - 4\, x'(t) + 4\, x(t) = 0$. ¿Cuál es la solución particular que satisface las condiciones iniciales $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$?.

- <u>Solución</u>:

De la ecuación auxiliar tenemos que:

$$\lambda^2 - 4\,\lambda + 4 = 0 \ \Rightarrow\ \lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = 2$$

Por tanto : $x(t) = k_1\, e^{2t} + k_2\, t\, e^{2t} \ \Rightarrow\ x'(t) = 2\, k_1\, e^{2t} + k_2\, e^{2t} + 2\, t\, k_2\, e^{2t}$.

De las condiciones iniciales : $\left.\begin{array}{r} x(0) = 1 = k_1 \\ x'(0) = 0 = 2\, k_1 + k_2 \end{array}\right\} \Rightarrow k_1 = 1\ , k_2 = -2$.

Así, $x(t) = e^{2t} - 2\, t\, e^{2t}$

<u>Caso 3</u>: $b^2 - 4ac < 0$ ($\lambda_1 = \alpha + \beta\, i, \lambda_2 = \alpha - \beta\, i$)

La solución general es : $x(t) = k_1\, e^{\alpha t} \cos(\beta\, t) + k_2\, e^{\alpha t}\, \mathrm{sen}(\beta\, t)$, donde, al igual que en los casos anteriores, k_1 y k_2 son constantes del modelo.

La solución $x(t) = k_1\, e^{\alpha t} \cos(\beta\, t) + k_2\, e^{\alpha t}\, \mathrm{sen}(\beta\, t)$ representa un movimiento oscilatorio donde la magnitud de las oscilaciones aumenta si $\alpha > 0$, se queda constante si $\alpha = 0$, y decrece si $\alpha < 0$.

<u>Ejemplo</u>:

Hallar la solución general de $\dfrac{1}{2}\ x''(t) + 3\, x'(t) + 17\, x(t) = 0$. ¿Cuál es la solución particular que satisface las condiciones iniciales $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.?

- Solución:

$$\frac{1}{2}\lambda^2 + 3\lambda + 17 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda^2 + 6\lambda + 34 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 136}}{2} = \frac{-6 \pm 10\,i}{2}$$

$\Rightarrow\; \lambda_1 = -3 + 5\,i,\; \lambda_2 = -3 - 5\,i$

Por tanto,

$$x(t) = k_1\, e^{-3t} \cos(5t) + k_2\, e^{-3t}\, \mathrm{sen}(5t)$$

Así, $x'(t) = -3\,k_1\, e^{-3t} \cos(5t) - 5\,k_1\, e^{-3t}\, \mathrm{sen}(5t) - 3\,k_2\, e^{-3t}\, \mathrm{sen}(5t) + 5\,k_2\, e^{-3t} \cos(5t)$.

De las condiciones iniciales : $\left.\begin{array}{r} x(0) = 1 = k_1 \\ x'(0) = 0 = -3\,k_1 + 5\,k_2 \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; k_1 = 1,\; k_2 = \frac{3}{5}$

y $$x(t) = e^{-3t} \cos(5t) + \frac{3}{5}\, e^{-3t}\, \mathrm{sen}(5t).$$

Esta solución oscila pero tiende a 0 cuando t aumenta:

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{\cos(5t)}{e^{3t}} + \frac{3}{5}\frac{sen(5t)}{e^{3t}}\right) = 0.$$

Ejemplo:

Hallar la solución general de $x''(t) - 2\,x'(t) + 5\,x(t) = 0$. ¿Cuál es la solución general que satisface las condiciones iniciales $x(0) = 2$, $x'(0) = 10$?.

- Solución:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = \frac{2 \pm 4\,i}{2} \;\Rightarrow\; \lambda_1 = 1 + 2\,i,\; \lambda_2 = 1 - 2\,i$$

Por tanto, $x(t) = k_1\, e^t \cos(2t) + k_2\, e^t\, \mathrm{sen}(2t) = e^t\,(k_1 \cos(2t) + k_2\, \mathrm{sen}(2t))$

Así, $x'(t) = e^t\,(k_1 \cos(2t) + k_2\, \mathrm{sen}(2t) - 2\,k_1\, \mathrm{sen}(2t) + 2\,k_2 \cos(2t))$.

De las condiciones iniciales : $\left.\begin{array}{r} x(0) = 2 = k_1 \\ x'(0) = 10 = k_1 + 2\,k_2 \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; k_1 = 2,\; k_2 = 4$

y $$x(t) = 2\, e^t\,(\cos(2t) + 2\, \mathrm{sen}(2t)).$$

Esta solución oscila pero aumenta de magnitud cuando t crece.

Ejemplo: (El oscilador armónico)

La ecuación $x''(t) + w^2\, x(t) = 0$, con $w > 0$ y constante, es la ecuación del movimiento armónico simple. Aparece frecuentemente en problemas biológicos relacionados con fenómenos periódicos u oscilatorios.

- Solución:

$\lambda^2 + w^2 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = \pm\, w\, i \;\Rightarrow\; \alpha = 0,\; \beta = w.$

Por tanto, $x(t) = k_1 \cos(wt) + k_2 \operatorname{sen}(wt) \quad \Rightarrow \quad x'(t) = - w\, k_1 \operatorname{sen}(wt) + w\, k_2 \cos(wt)$

Supongamos que conocemos x(0) y x'(0) : $\left(\begin{array}{l} x(0) = k_1 \\ x'(0) = w\, k_2 \end{array} \right)$

$\Rightarrow \quad k_1 = x(0)\, ,\ k_2 = \dfrac{x'(0)}{w}$, y $x(t) = x(0) \cos(wt) + \dfrac{x'(0)}{w} \operatorname{sen}(wt)$.

Esta solución representa un movimiento periódico con periodo $\dfrac{2\pi}{w}$.

3.- RESOLUCION DEL CASO NO HOMOGÉNEO : MÉTODO DE VARIACION DE LAS CONSTANTES.

Vamos a resolver la ecuación $a\, x''(t) + b\, x'(t) + c\, x(t) = f(t)$, donde a, b, c son constantes y $a \neq 0$. La siguiente expresión proporcional la solución:

$$\mathbf{x(t) = k_1(t)\, g_1(t) + k_2(t)\, g_2(t)}, \quad \text{donde :}$$

- $g_1(t)$ y $g_2(t)$ son dos soluciones independientes de la ecuación homogénea (en el sentido de que una no es la otra por una constante), y
- $k_1(t)$ y $k_2(t)$ se obtienen integrando las siguientes expresiones:

$$k_1'(t) = \frac{- f(t)\, g_2(t)}{a\, [\, g_1(t)\, g_2'(t) - g_2(t)\, g_1'(t)\,]} \qquad (3.1)$$

$$k_2'(t) = \frac{f(t)\, g_1(t)}{a\, [\, g_1(t)\, g_2'(t) - g_2(t)\, g_1'(t)\,]} \qquad (3.2)$$

si $D(t) = g_1(t)\, g_2'(t) - g_2(t)\, g_1'(t) \neq 0$.

Notar que al calcular las integrales para obtener $k_1(t)$ y $k_2(t)$ obtendremos las constantes de integración . Dichas constantes se pueden calcular a partir de las condiciones iniciales.

Ejemplo:

Determinar la solución de $x''(t) - x(t) = e^t$ que satisface $x(0) = 1$ y $x'(0) = 0$.

- Solución: $\lambda^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad g_1(t) = e^t\, ,\ g_2(t) = e^{-t}$.

Como $D(t) = - e^t e^{-t} - e^{-t} e^t = - 2\, e^t e^{-t} \neq 0$, entonces, podemos hallar $k_1(t)$ y $k_2(t)$ a partir de (3.1) y (3.2):

$$k_1'(t) = \frac{- f(t)\, g_2(t)}{a\, [\, g_1(t)\, g_2'(t) - g_2(t)\, g_1'(t)\,]} = \frac{- e^t e^{-t}}{- 2\, e^t e^{-t}} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad k_1(t) = \frac{t}{2} + C_1$$

$$k_2'(t) = \frac{f(t)\, g_1(t)}{a\,[\, g_1(t)\, g_2'(t) - g_2(t)\, g_1'(t)\,]} = \frac{e^t\, e^t}{-2\, e^t\, e^{-t}} = \frac{-e^{2t}}{2} \quad \Rightarrow \quad k_2(t) = -\frac{e^{2t}}{4} + C_2$$

Por tanto,

$$x(t) = k_1(t)\, g_1(t) + k_2(t)\, g_2(t) = \left[\frac{t}{2} + C_1\right] e^t + \left[-\frac{e^{2t}}{4} + C_2\right] e^{-t} = \left[\frac{t}{2} - \frac{1}{4} + C_1\right] e^t + C_2\, e^{-t}$$

$$\text{Así,} \quad x'(t) = \left[\frac{t}{2} - \frac{1}{4} + C_1\right] e^t + \frac{1}{2}\, e^t - C_2\, e^{-t} = \left[\frac{t}{2} + \frac{1}{4} + C_1\right] e^t - C_2\, e^{-t}$$

De las condiciones iniciales:

$$\left.\begin{array}{l} x(0) = 1 = -\frac{1}{4} + C_1 + C_2 \\ \\ x'(0) = 0 = \frac{1}{4} + C_1 - C_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad C_1 = \frac{1}{2}\,,\ C_2 = \frac{3}{4}\ .$$

$$x(t) = \left[\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\right] e^t + \frac{3}{4}\, e^{-t}$$

Ejemplo:

Determinar la solución particular de $x''(t) - 6\, x'(t) + 9\, x(t) = e^{3t}$ que satisface las condiciones iniciales $x(0) = 0$ y $x'(0) = 1$.

- Solución: $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 3 \quad \Rightarrow \quad g_1(t) = e^{3t}\,,\ g_2(t) = t\, e^{3t}$.

Como $D(t) = g_1(t)\, g_2'(t) - g_2(t)\, g_1'(t) = e^{3t}\,(\, e^{3t} + 3\, t\, e^{3t}\,) - t\, e^{3t}\, 3\, e^{3t} = e^{6t} + 3\, t\, e^{6t} - 3\, t\, e^{6t} = e^{6t} \neq 0$, entonces podemos hallar $k_1(t)$ y $k_2(t)$ a partir de (3.1) y (3.2):

$$k_1'(t) = \frac{-f(t)\, g_2(t)}{a\,[\, g_1(t)\, g_2'(t) - g_2(t)\, g_1'(t)\,]} = \frac{-e^{3t}\, t\, e^{3t}}{e^{6t}} = -t \quad \Rightarrow \quad k_1(t) = -\frac{t^2}{2} + C_1$$

$$k_2'(t) = \frac{f(t)\, g_1(t)}{a\,[\, g_1(t)\, g_2'(t) - g_2(t)\, g_1'(t)\,]} = \frac{e^{3t}\, e^{3t}}{e^{6t}} = 1 \quad \Rightarrow \quad k_2(t) = t + C_2$$

Por tanto, la solución general es:

$$x(t) = \left(-\frac{t^2}{2} + C_1\right) e^{3t} + (\, t + C_2\,)\ t\, e^{3t} = e^{3t}\left(-\frac{t^2}{2} + C_1 + t^2 + t\, C_2\right) =$$

$$= e^{3t}\left(C_1 + \frac{t^2}{2} + t\, C_2\right)$$

$$\text{Así,} \quad x'(t) = e^{3t}\left(t + C_2 + 3\, C_1 + \frac{3}{2} t^2 + 3\, t\, C_2\right)$$

De las condiciones iniciales:

$$\left.\begin{array}{l} x(0) = 0 = C_1 \\ \\ x'(0) = 1 = C_2 + 3\, C_1 \end{array}\right\} \Rightarrow C_1 = 0,\ C_2 = 1, \text{ y así} \quad x(t) = e^{3t}\left(\frac{t^2}{2} + t\right).$$

Ejemplo:

Determinar la solución de $x''(t) + x(t) = 2 \cos t$ que satisface $x(0) = 5$ y $x'(0) = 2$.

- Solución: $\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i \Rightarrow g_1(t) = \cos t$, $g_2(t) = \operatorname{sen} t$.

$D(t) = g_1(t)\, g_2'(t) - g_2(t)\, g_1'(t) = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1 \neq 0.$

Entonces, podemos hallar $k_1(t)$ y $k_2(t)$ a partir de (3.1) y (3.2):

$$k_1'(t) = \frac{-f(t)\, g_2(t)}{a\,[\, g_1(t)\, g_2'(t) - g_2(t)\, g_1'(t)\,]} = -2 \cos t \operatorname{sen} t \quad \Rightarrow \quad k_1(t) = -\operatorname{sen}^2 t + C_1$$

$$k_2'(t) = \frac{f(t)\, g_1(t)}{a\,[\, g_1(t)\, g_2'(t) - g_2(t)\, g_1'(t)\,]} = 2 \cos^2 t \quad \Rightarrow \quad k_2(t) = t + \operatorname{sen} t \cos t + C_2$$

(ya que $\int 2 \cos^2 t\, dt = \int (1 + \cos 2t)\, dt = t + \dfrac{\operatorname{sen} 2t}{2} + C_2 = t + \operatorname{sen} t \cos t + C_2$).

Por tanto, la solución general es:

$x(t) = (-\operatorname{sen}^2 t + C_1) \cos t + (t + \operatorname{sen} t \cos t + C_2) \operatorname{sen} t = C_1 \cos t + t \operatorname{sen} t + C_2 \operatorname{sen} t$

Así, $x'(t) = -C_1 \operatorname{sen} t + \operatorname{sen} t + t \cos t + C_2 \cos t$ y de las condiciones iniciales:

$$\left.\begin{array}{l} x(0) = 5 = C_1 \\ x'(0) = 2 = C_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad C_1 = 5,\ C_2 = 2 \quad \text{y} \quad x(t) = 5 \cos t + (t + 2) \operatorname{sen} t \cdot$$

Ejemplo:

a) La altura $x(t)$, en el instante t, de un objeto que cae libremente debido a la gravedad satisface la ecuación $x''(t) = -g$, donde g es la aceleración constante debida a la gravedad. Determinar $x(t)$ en términos de $x(0)$ y $x'(0)$.

b) Un objeto cae de una altura h con una velocidad inicial 0. ¿ A qué velocidad llega a tierra?

- Solución:

a) $x''(t) = -g$ ecuación diferencial de segundo orden no homogénea.

$$\lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow g_1(t) = 1,\ g_2(t) = t.$$

$D(t) = g_1(t)\, g_2'(t) - g_2(t)\, g_1'(t) = 1 \neq 0$. Entonces, podemos hallar $k_1(t)$ y $k_2(t)$:

$$k_1'(t) = \frac{-f(t)\, g_2(t)}{a\,[\, g_1(t)\, g_2'(t) - g_2(t)\, g_1'(t)\,]} = g\, t \quad \Rightarrow \quad k_1(t) = \frac{1}{2}\, g\, t^2 + C_1$$

$$k_2'(t) = \frac{f(t)\, g_1(t)}{a\,[\, g_1(t)\, g_2'(t) - g_2(t)\, g_1'(t)\,]} = -g \quad \Rightarrow \quad k_2(t) = -g\,t + C_2$$

Por tanto, la solución general es:

$$x(t) = (\frac{1}{2}\ g\,t^2 + C_1\,) + (\,-g\,t + C_2\,)\,t = -\frac{1}{2}\ g\,t^2 + C_1 + C_2\,t$$

Así, $x'(t) = C_2 - g\,t$, $x(0) = C_1$, $x'(0) = C_2$ y $x(t) = x(0) + x'(0)\,t - \frac{1}{2}\ g\,t^2$

b) Como $x(0) = h$ y $x'(0) = 0$, $x(t) = h + 0\,t - \frac{1}{2}\ g\,t^2$. Así, $x(t) = 0 \Rightarrow h = \frac{1}{2}\ g\,t^2 \Rightarrow$ $t_o = \sqrt{\frac{2\,h}{g}}$ y $x'(t_o) = -g\sqrt{\frac{2\,h}{g}} = -\sqrt{2gh}$.

TEMA 4

EL MODELO DE LAS DOS ESPECIES.

1. Sistemas de dos ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.

1.- SISTEMAS DE DOS ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE PRIMER ORDEN.

Supongamos por ejemplo que 2 especies coexisten en el mismo medio y compiten por los mismos recursos. Entonces, hemos de tener en cuenta el efecto que produce en el crecimiento de cada una de ellas la presencia de la otra. Es razonable suponer que la tasa de crecimiento de cada especie dependerá de la población de la otra, además de la suya propia. Necesitamos más de una ecuación diferencial para describir este tipo de interacción.

Los sistemas de dos ecuaciones diferenciales que estudiaremos en este tema son de la forma:

$$x'(t) = a_{11}\, x(t) + a_{12}\, y(t) + f(t)$$
$$y'(t) = a_{21}\, x(t) + a_{22}\, y(t) + g(t)$$

donde a_{11}, a_{12}, a_{21} y a_{22} son constantes.

El sitema anterio se llama **sistema lineal** ya que todas las ecuaciones son lineales. El método de resolución consiste en obtener una única ecuación diferencial lineal de segundo orden para una de las funciones x(t) ó y(t). Al resolver esta ecuación obtendremos la solución de la función involucrada (x(t) o y(t)), y, a partir de ésta, hallaremos la de la otra.

Podemos encontrarnos con tres tipos de sistemas de dos ecuaciones dependiendo de la relación entre la dos especies que describe el sitema. El modelo de competición, el de cooperación y el de depredador-presa. En el primero, las dos especies compiten por los mismos recursos, por lo que el crecimiento de cada una se ve limitado por la presencia de la otra. Esto se traduce en que los coeficientes a_{12} y a_{21} son negativos. En el modelo de cooperación, ambas especies se ven favorecidas de la presencia de la otra, por lo que los coeficientes a_{12} y a_{21} son positivos. Por último, en el modelo depredador-presa, el crecimiento de la especie de la presa se ve afectado negativamente por la cantidad de depredadores, por lo que el coeficiente a_{ij} correspondiente será negativo: mientras que el crecimiento de la especie de depredadores se ve afectado positivamente de la existencia de las presas, por lo que el coeficiente a_{ij} correspondiente será positivo.

1.1 Modelo de competición de especies

Consideremos el siguiente sistema lineal homogéneo:

$$\left.\begin{aligned} x'(t) &= 2\, x(t) - y(t) \\ y'(t) &= -\, x(t) + 2\, y(t) \end{aligned}\right\}$$

El procedimiento de resolución consiste en los siguientes pasos:

1) Derivamos la primera ecuación : $x''(t) = 2\, x'(t) - y'(t)$

2) Sustituimos el valor de $y'(t)$ en función de $x(t)$, $y(t)$ que nos da la segunda ecuación y obtenemos : $x''(t) = 2\,x'(t) - (-x(t) + 2\,y(t)) = 2\,x'(t) + x(t) - 2\,y(t)$

3) Despejamos $y(t)$ de la primera ecuación, $y(t) = 2\,x(t) - x'(t)$, y la sustituimos :

$$x''(t) = 2\,x'(t) + x(t) - 2\,(2\,x(t) - x'(t)) = 4\,x'(t) - 3\,x(t)$$

Nos queda pues la ecuación de segundo orden : $x''(t) - 4\,x'(t) + 3\,x(t) = 0$, que pasamos a resolver :

la ecuación auxiliar es $\lambda^2 - 4\,\lambda + 3 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \dfrac{4 \pm 2}{2} \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow \qquad \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1 \;\Rightarrow\; x(t) = k_1\,e^{3t} + k_2\,e^{t}$$

Entonces $y(t) = 2\,x(t) - x'(t) = 2\,(k_1\,e^{3t} + k_2\,e^{t}) - (3\,k_1\,e^{3t} + k_2\,e^{t}) = -k_1\,e^{3t} + k_2\,e^{t}$

Supongamos que este sistema que hemos resuelto describiera la influencia de las poblaciones de dos especies en competición sobre sus índices de crecimiento, y que $x(0) = 100$ e $y(0) = 200$. Para calcular las constantes procedemos según:

$$\left.\begin{array}{l} x(0) = 100 = k_1 + k_2 \\ y(0) = 200 = -k_1 + k_2 \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; k_1 = -50,\ k_2 = 150.$$

Por tanto, $x(t) = -50\,e^{3t} + 150\,e^{t}$ e $y(t) = 50\,e^{3t} + 150\,e^{t}$

La primera población se extinguirá cuando $x(t) = 0 \;\Leftrightarrow\; 50\,e^{3t} = 150\,e^{t} \;\Leftrightarrow\; e^{2t} = 3 \;\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\; 2t = \ln 3 \;\Leftrightarrow\; t = \dfrac{1}{2}\ln 3 \;\Leftrightarrow\; t \approx 0.552$ unidades de tiempo.

La segunda población continua creciendo de acuerdo con la ecuación $y'(t) = 2\,y(t)$

$y'(t) = 2\,y(t) \;\Rightarrow\; \dfrac{d}{dt}\ln y = 2 \;\Rightarrow\; \ln y = 2\,t + C \;\Rightarrow\; y(t) = K\,e^{2t}$

$y(t_o) = K\,e^{2t_o} \;\Rightarrow\; K = y(t_o)\,e^{-2t_o} \;\Rightarrow\; y(t) = y(t_o)\,e^{2(t-t_o)}$ con $t_o = \dfrac{1}{2}\ln 3$

$$y(t_o) = 150\,e^{t_o} + 50\,e^{3t_o} \approx 300\sqrt{3}$$

Esto nos da el desarrollo de la segunda especie después de la extinción de la primera.

1.2 Modelo depredador-presa

Consideramos que $x(t)$ es la población de depredadores en el instante t y que $y(t)$ es la población de presas en ese mismo instante. Supongamos que sus índices de crecimiento vienen dados por el sistema lineal del siguiente ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} x'(t) = x(t) + y(t) \\ y'(t) = -x(t) + y(t) \end{array}\right\}$$

Si $x(0) = 1000 = y(0)$, vamos a determinar las poblaciones en el futuro y cuando se extinguen las presas.

Repitiendo el mismo proceso que en el apartado anterior tenemos:

$x''(t) = x'(t) + y'(t) = x'(t) - x(t) + y(t) = x'(t) - x(t) + (x'(t) - x(t)) = 2\, x'(t) - 2\, x(t)$

$x''(t) - 2\, x'(t) + 2\, x(t) = 0 \;\Rightarrow\; \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = \dfrac{2 \pm 2i}{2} \;\Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha = 1, \beta = 1 \;\Rightarrow\; x(t) = k_1\, e^t \cos t + k_2\, e^t \,\text{sen}\, t$

Entonces:

$y(t) = x'(t) - x(t) = e^t (- k_1 \,\text{sen}\, t + k_2 \cos t + k_1 \cos t + k_2 \,\text{sen}\, t) - e^t (k_1 \cos t + k_2 \,\text{sen}\, t)$.

Por tanto,

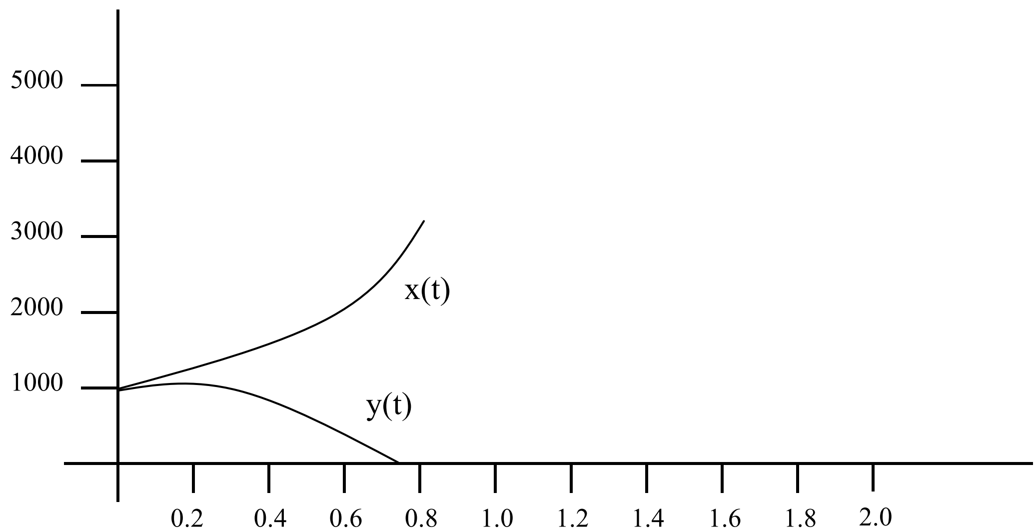
$$x(t) = e^t (k_1 \cos t + k_2 \,\text{sen}\, t)$$
$$y(t) = e^t (- k_1 \,\text{sen}\, t + k_2 \cos t)$$

$$\left.\begin{array}{l} x(0) = 1000 = k_1 \\ y(0) = 1000 = k_2 \end{array}\right\} \Rightarrow k_1 = 1000 = k_2.$$

Por tanto, $x(t) = 1000\, e^t (\cos t + \text{sen}\, t)$ e $y(t) = 1000\, e^t (\cos t - \text{sen}\, t)$

La población de presas se extinguirá cuando $y(t) = 0 \;\Leftrightarrow\; \cos t = \text{sen}\, t \;\Leftrightarrow\; t = \dfrac{\pi}{4}$ unidades de tiempo.

La población de depredadores puede seguir creciendo utilizando otros recursos de acuerdo con la ecuación $x'(t) = x(t)$, si siguiese siendo válida. No obstante, suele pasar que las suposiciones que se hacen para desarrollar un modelo de interacción de especies son menos exactas cuando una de ellas se extingue. El desarrollo de las 2 poblaciones hasta la extinción de una :



1.3 Modelo de cooperación de especies

Supongamos que dos especies coexisten en relación simbiótica, es decir, la población de cada una aumenta proporcionalmente a la población de la otra y decrece proporcionalmente a su propia población:

$$\left.\begin{aligned} x'(t) &= -2\,x(t) + 4\,y(t) \\ y'(t) &= x(t) - 2\,y(t) \end{aligned}\right\}$$

Si x(0) = 100, y(0) = 300, determinar las poblaciones en el futuro.

- <u>Solución</u>:

$x''(t) = -2\,x'(t) + 4\,y'(t) = -2\,x'(t) + 4\,(\,x(t) - 2\,y(t)\,) = -2\,x'(t) + 4\,x(t) - 2\,x'(t) - 4\,x(t)$

$x''(t) + 4\,x'(t) = 0 \quad\Rightarrow\quad \lambda^2 + 4\,\lambda = 0 \quad\Rightarrow\quad \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -4 \quad\Rightarrow\quad x(t) = k_1 + k_2\,e^{-4t}$

Entonces $y(t) = \frac{1}{4}\,(\,-4\,k_2\,e^{-4t} + 2\,k_1 + 2\,k_2\,e^{-4t}\,) = \frac{1}{2}\,k_1 - \frac{1}{2}\,k_2\,e^{-4t}$.

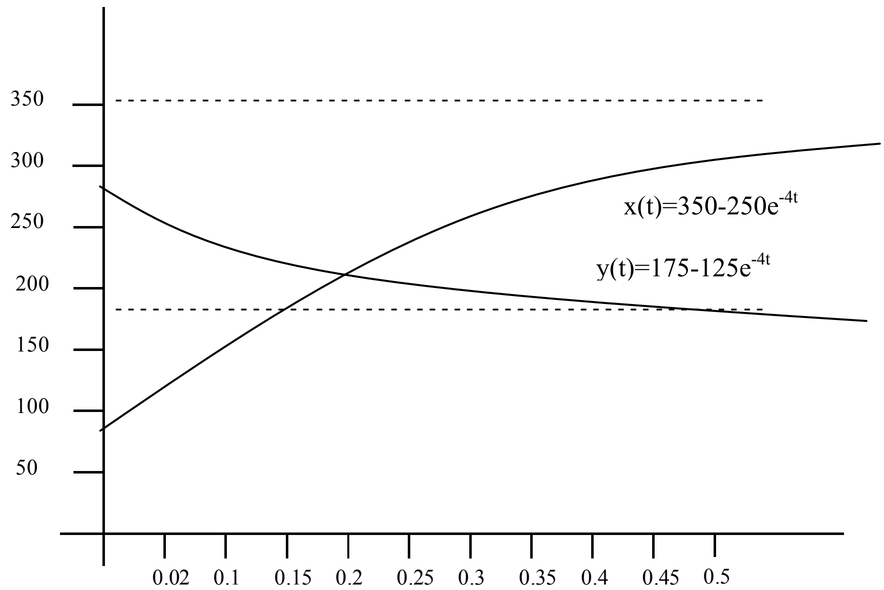
Por tanto,

$$x(t) = k_1 + k_2\,e^{-4t}$$
$$y(t) = \frac{1}{2}\,k_1 - \frac{1}{2}\,k_2\,e^{-4t}$$

$$\left.\begin{aligned} x(0) = 100 &= k_1 + k_2 \\ y(0) = 300 &= \frac{1}{2}k_1 - \frac{1}{2}k_2 \end{aligned}\right\} \quad\Rightarrow\quad k_1 = 350,\ k_2 = -250. \quad \text{Por tanto:}$$

$x(t) = 350 - 250\,e^{-4t}$ e $y(t) = 175 + 125\,e^{-4t}$ y tenemos $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 350$ y $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 175$

La siguiente gráfica ilustra la evolución de ambas especies en el tiempo.



TEMA 5

MATRICES

1. Valores propios y vectores propios.
2. Diagonalización de matrices.
3. Matrices funcionales.
4. Derivada e Integral de una matriz funcional.

1.- VALORES PROPIOS Y VECTORES PROPIOS

En el Apéndice 1 hay una descripción de los conceptos básicos en matrices que son necesarios para entender los contenidos de este tema. Se recomienda que el estudiante lea dicho Apéndice antes de abordar este capítulo.

Llamaremos vector **a** a una matriz que consta sólo de una fila o de una columna **.** Notar que las componentes del vector fila pueden estar separadas por comas:

$u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ es un **vector fila** y $s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$ es un **vector columna**.

Dada una matriz A, vamos a considerar la cuestión de si existe un vector x y un escalar λ satisfaciendo la expresión:

$$A\,x = \lambda\,x. \qquad (1)$$

Cualquier λ que cumpla la ecuación anterior se llama **valor propio** de A y el correspondiente vector x (distinto del vector 0), **vector propio** de A. Los vectores y valores propios también se definen como los autovectores y autovalores, respectivamente, de la matriz A. Como se verá más adelante, la ecuación (1) tiene interés en diversas aplicaciones fuera de las puramente matemnáticas y geométricas.

Vamos a resolver la ecuación (1) para el caso de una matriz 3x3 (n=3):

$$\text{dadas} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

La ecuación (1) conduce al sistema

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33}-\lambda)x_3 = 0 \end{cases}$$

Este es un sistema homogéneo de 3 ecuaciones lineales con 3 incógnitas. Por tanto, existe una solución no trivial sólo si el determinante de los coeficientes se anula, es decir, si

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Esta ecuación equivale a $|A-\lambda I| = 0$ y se llama **ecuación característica.**

El desarrollo del determinante conduce a un polinomio de grado tres. Por tanto, la expresión anterior es una ecuación cúbica que puede escribirse en la forma

$$\lambda^3 + p\lambda^2 + q\lambda + r = 0$$

Esta ecuación tiene como máximo tres raíces distintas λ_1, λ_2, λ_3, que son los valores propios del problema.

Ejemplo:

Dada una matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, resolver la ecuación (1) es resolver el sistema

$$3x_1 - 2x_2 = \lambda x_1$$
$$2x_1 - 2x_2 = \lambda x_2$$

Para ello agrupamos todos los términos con x_1 y x_2 en el lado izquierdo:

$$\begin{aligned}(3-\lambda)x_1 - 2x_2 &= 0 \\ 2x_1 - (2+\lambda)x_2 &= 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

Estas dos ecuaciones en x_1 y x_2 son **homogéneas,** por lo que hay una solución trivial $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. No obstante, una solución no trivial sólo puede existir si el determinante de los coeficientes se anula. Por tanto, se debe satisfacer

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 2 & -(2+\lambda) \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

que se llama **ecuación característica** del problema. Las soluciones, o valores propios son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 2$.

Sustituyendo $\lambda_1 = -1$ en el sistema (2) tenemos:

$$4x_1 - 2x_2 = 0$$
$$2x_1 - x_2 = 0$$

Una de las ecuaciones se puede eliminar pues ambas son proporcionales. Una solución correspondiente a λ_1 sería

$$x_1 = 1, x_2 = 2 \;\Rightarrow\; x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Así $x^{(1)}$ es un **vector propio**. Notar que cualquier múltiplo de $x^{(1)}$ también serviría como vector propio correspondiente a λ_1.

Igualmente, para $\lambda_2 = 2$ tenemos que satisfacer la ecuación $x_1 - 2x_2 = 0$ que es posible mediante el **vector propio** $x^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ o cualquier múltiplo del mismo.

Ejemplo: Calcular los valores y vectores propios de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & 10 & -3 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}$.

Primero, de cada elemento de la diagonal tenemos que restar λ (como en ejemplos anteriores). Esta operación puede hacerse utilizando la matriz identidad I:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & 10 & -3 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 & 8 \\ 0 & 10-\lambda & -3 \\ 0 & 7 & -\lambda \end{pmatrix}$$

Segundo, tenemos que igualar a cero el determinante de la nueva matriz:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 8 \\ 0 & 10-\lambda & -3 \\ 0 & 7 & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Desarrollando el determinante por la primera columna: $(1-\lambda)\begin{vmatrix} 10-\lambda & -3 \\ 7 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$, de donde: $(1-\lambda)(\lambda^2-10\lambda+21) = 0$. Las tres raíces o valores propios son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 7$.

Para calcular el vector propio correspondiente a $\lambda_1 = 1$ hemos de resolver:

$$\begin{cases} (1-\lambda_1)x_1 - 2x_2 + 8x_3 = 0 \\ 0x_1 + (10-\lambda_1)x_2 - 3x_3 = 0 \\ 0x_1 + 7x_2 + (0-\lambda_1)x_3 = 0 \end{cases}$$

es decir:

$$\begin{cases} -2x_2 + 8x_3 = 0 \\ 9x_2 - 3x_3 = 0 \\ 7x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Notar que los únicos valores para x_2 y x_3 que satisfacen **las tres** ecuaciones del sistema anterior son 0 y 0, mientras que x_1 (que no aparece en el sistema) puede tomar cualquier valor (por ejemplo el valor 1). Así, una solución posible es $x_1=1$, $x_2=0$ y $x_3=0$ que nos da el vector propio:

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para calcular el vector propio correspondiente a $\lambda_2 = 3$ hemos de resolver:

$$\begin{cases} (1-\lambda_2)x_1 - 2x_2 + 8x_3 = 0 \\ 0x_1 + (10-\lambda_2)x_2 - 3x_3 = 0 \\ 0x_1 + 7x_2 + (0-\lambda_2)x_3 = 0 \end{cases}$$

es decir:

$$\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 + 8x_3 = 0 \\ 0x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 0 \\ 0x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Las soluciones de este sistema serían de la forma (en función, por ejemplo, de x_3) :

$$x_2 = \frac{3}{7}\, x_3 \qquad x_1 = \frac{25}{7}\, x_3$$

Así, haciendo $x_3 = \alpha$ tenemos las soluciones: $x_1 = \frac{25}{7}\,\alpha \quad x_2 = \frac{3}{7}\,\alpha \quad x_3 = \alpha$

y una solución posible, haciendo por ejemplo $\alpha = 7$, sería $x_1=25$, $x_2=3$ y $x_3= 7$, que nos da el vector propio:

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 25 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Ahora, para calcular el vector propio correspondiente a $\lambda_3 = 7$ hemos de resolver:

$$\begin{cases} (1-\lambda_3)x_1 - \quad 2x_2 + \quad 8x_3 = 0 \\ 0x_1 + (10-\lambda_3)x_2 - \quad 3x_3 = 0 \\ 0x_1 + \quad 7x_2 + (0-\lambda_3)x_3 = 0 \end{cases}$$

es decir:

$$\begin{cases} -6x_1 - 2x_2 + 8x_3 = 0 \\ 0x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 0 \\ 0x_1 + 7x_2 - 7x_3 = 0 \end{cases}$$

De forma análoga al caso anterior, las soluciones de este sistema serían de la forma

$$x_1 = \alpha \quad x_2 = \alpha \quad x_3 = \alpha$$

y, haciendo por ejemplo $\alpha=1$, una solución posible es $x_1=1$, $x_2=1$ y $x_3= 1$ que nos da el vector propio: $x^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ejemplo: **Modelo de Leslie: Dinámica de poblaciones con estructuras de edad**. (Una aplicación de los valores y vectores propios).

Salvo en los organismos más sencillos, los nacimientos y las muertes en una población de seres vivos dependen de la edad. Si queremos describir razonablemente la evolución en el tiempo del tamaño de esa población, deberemos para ello tener en cuenta la estructura de edad de dicha población.

Supongamos que los individuos que tratamos tienen una reproducción estacional. En tal caso, podemos calcular la evolución de la población de año en año; es decir, podemos describirla mediante un modelo con tiempo discreto. En cualquier año, nacerá un número determinado de jóvenes (número que depende de la cantidad de animales más viejos que haya en la población ese año) . Consideramos que un 85% de los jóvenes sobrevive a su primer año de vida (durante el que tienen edad cero); el 98% sobrevive a su segundo año, y así sucesivamente, el porcentaje de supervivencia depende de la edad.

En la evolución de la poblacion también vamos a considerar la reproducción. Nuestros animales no se reproducen mientras tienen 0 años. En los animales que cuentan con 1 año de vida hay un cierto porcentaje de reproducción que es 0.05 jóvenes por individuo. Cuando tienen 2 años, la fertilidad es 0.65 (jóvenes por individuo), etc.

Para simplificar asumimos que los animales no viven muchos años; todos los animales mueren al final de su tercer año de vida, y por tanto, tenemos sólo animales de 0, 1, 2, y 3 años. Para estas edades, los coeficientes de supervivencia son 0.85, 0.98, 0.97 y 0 , y los coeficientes de fertilidad son 0, 0.05, 0.65 y 0.9. Notar que, aunque los coeficientes de supervivencia están necesariamente entre 0 y 1, los coeficientes de fertilidad pueden tomar cualquier valor positivo.

Podemos ahora escribir las ecuaciones del modelo. Sean $n_o(t)$, $n_1(t)$ etc., el numero de animales de edad 0,1, etc. en el año t. Entonces:

$$n_o(t+1) = 0.05\ n_1(t) + 0.65\ n_2(t) + 0.9\ n_3(t)$$
$$n_1(t+1) = 0.85\ n_o(t)$$
$$n_2(t+1) = 0.98\ n_1(t)$$
$$n_3(t+1) = 0.97\ n_2(t)$$

Estas son las ecuaciones de estado de un sistema dinámico con 4 variables de estado. Es lineal. Las ecuaciones pueden escribirse en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} n_o(t+1) \\ n_1(t+1) \\ n_2(t+1) \\ n_3(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.05 & 0.65 & 0.9 \\ 0.85 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.98 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.97 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_o(t) \\ n_1(t) \\ n_2(t) \\ n_3(t) \end{pmatrix}$$

o, de manera equivalente, N(t+1) = A N(t), donde el vector N(t)= ($n_o(t),...,n_3(t)$) denota el estado del sistema en el instante t. La matriz **A**, de dimensiones 4 x 4, contiene los coeficientes que especifican el comportamiento del sistema.

Si la población comienza en el estado N(0) = (10, 10, 10, 10) (es decir, con 10 animales de cada edad), entonces la aplicación de A a N(0) conduce a N(1) = (16, 8.5, 9.8, 9.7). La población después de otro año puede obtenerse calculando N(2) = A N(1) , etc.

¿Puede darse el caso de que las cuatro se ajusten a proporciones constantes?

Si es así, entonces a partir de alguna edad t en adelante, el tamaño de la población en los siguientes años será un múltiplo de la de ese año t. Si consideramos por ejemplo que 1.3 es ese múltiplo, tendríamos: $n_o(t+1) = 1.3\ n_o(t)$, $n_1(t+1) = 1.3\ n_1(t)$, etc..... Este modelo se llama **composición de edad estacionaria** y buscamos N(t+1) = λ N(t), o, de manera equivalente, A N(t) = λ N(t).

Así pues, dada una matriz A, queremos hallar un vector **N** y ún numero λ tal que aplicando la matriz a **N** obtengamos un vector que sea igual a **λ·N**. En los términos que ya conocemos, queremos hallar los valores y vectores propios de la matriz **A**. La teoría dice que una matriz n x n tiene n valores propios, cada uno con su vector propio asociado. En términos de nuestro modelo, eso quiere decir que hay 4 composiciones de edad que continúan inalteradas durante el subsiguiente crecimiento de las poblaciones. Esto es un resultado inesperado; cabria esperar que, si hay una composición de edad estacionaria, hubiera sólo una. Esta intuición es correcta tal y como prueba el resultado para matrices con elementos positivos en la primera fila y en la subdiagonal, y ceros en el resto, que demuestra que solo uno de los valores propios es positivo; los otros son o bien negativos o complejos, y además, no son nunca mayores en valor absoluto. Este único valor propio positivo recibe el nombre de **valor propio dominante**. En conclusión, sólo el valor propio dominante y su vector propio asociado son relevantes para nuestro problema. En nuestro ejemplo, A tiene un valor propio positivo, uno negativo y dos complejos, que son:

$\lambda_1 = 1.08$, $\lambda_2 = -0.763$, $\lambda_3 = -0.158 + 0.926i$, $\lambda_4 = -0.158 - 0.926i$

Una vez hemos hallado los valores propios, aplicamos la ecuación A N(t) = 1.08 N(t) para determinar el vector propio dominante $E = (e_o, e_1, e_2, e_3)$, que debe ser tal que aplicando **A** a él obtengamos como resultado 1.08 E. Es decir:

$$1.08e_o = 0.05e_1 + 0.65e_2 + 0.9e_3$$
$$1.08e_1 = 0.85e_o$$
$$1.08e_2 = 0.98e_1$$
$$1.08e_3 = 0.97e_2$$

Comenzando con la ultima ecuación, podemos expresar e_2 en función de e_3; después e_1 en función de e_2, y e_o en función de e_1. Así, $E = (1.56\ e_3,\ 1.23\ e_3,\ 1.13\ e_3,\ e_3)$, donde e_3 es arbitrario. Notad que la primera ecuación, que es redundante, no se ha utilizado. Si damos el valor 1 a e_3, tenemos que E = (1.56, 1.23, 1.13, 1). Así, una población que comience con esa composición de edad conserva esa composición, y la población del año siguiente será mayor en un factor global de 1.08.

La forma de E con su e_3 arbitrario también confirma la idea intuitiva de que dos veces el vector propio (de hecho, cualquier vector múltiplo) es también vector propio.

2.- DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES

Dada una matriz cuadrada A de orden n, de la cual conocemos los valores propios $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ y sus vectores propios $P^{(1)} = \begin{pmatrix} p_{11} \\ \cdot \\ \cdot \\ p_{1n} \end{pmatrix}$,..., $P^{(n)} = \begin{pmatrix} p_{n1} \\ \cdot \\ \cdot \\ p_{nn} \end{pmatrix}$, podemos escribir los vectores en forma de matriz como:

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{1n} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

Supondremos que los vectores $P^{(1)}$,..., $P^{(n)}$ son linealmente independientes (lo que se puede demostrar que se satisface si $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ son distintos). Como los vectores $P^{(1)}$,..., $P^{(n)}$ son soluciónes de la ecuación $A\ x = \lambda\ x$, es decir : $A\ P^{(1)} = \lambda_1\ P^{(1)}$, ..., $A\ P^{(n)} = \lambda_n\ P^{(n)}$, tenemos que:

$$A\ P = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Así pues, multiplicando por la izquierda por P^{-1} (que existe, pues estamos suponiendo que los n vectores propios son l.i.) tendremos :

$$P^{-1}\,A\,P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Equivalentemente, podemos escribir la matriz A como: $A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}$

y tenemos lo que se conoce como descomposición de la matriz en forma diagonal.

Esta propiedad será útil en la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales (tal y como realizaremos en el tema siguiente). Para ilustrar su utilizaciòn, supongamos que deseamos resolver cierto sistema de ecuaciones lineales Ax=b (1), donde A es una matriz de orden n, x es un vector de n incógnitas y b es un vector conocido de n componentes. Calculamos la matriz P y llamamos :

$$y = P^{-1}\,x \quad (\ x = P\,y\ )$$
$$b' = P^{-1}\,b \quad (\ b = P\,b')$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en (1) tenemos A P y = P b', y multiplicando por P^{-1} obtenemos $P^{-1}\,A\,P\,y = P^{-1}\,P\,b' = b'$, es decir:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} y = b' \qquad (2)$$

Fijémonos que hemos transformado el sistema (1) en otro, (2), que puede escribirse como:

$$\begin{array}{llll} \lambda_1 y_1 & & & = b'_1 \\ & \lambda_2 y_2 & & = b'_2 \\ & & \dots\dots\dots & \\ & & \lambda_n y_n & = b'_n \end{array}$$

y cuya solución es trivial. Una vez obtenidas las y's, podemos calcular x como x = P y.

<u>Ejemplo</u>: Hemos visto que los valores propios de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & 10 & -3 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}$ son $\lambda_1=1$, $\lambda_2=3$ y $\lambda_3=7$.

Ademas los vectores propios son $P^{(1)} = (1,0,0)$, $P^{(2)} = (25,3,7)$ y $P^{(3)} = (1,1,1)$.

De esta forma podemos escribir la matriz como:

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} P^{-1} \qquad \text{con} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 25 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Recordemos que en el proceso de diagonalizacion descrito se ha considerado una matriz A de orden n con n valores propios diferentes.

Si la matriz tiene $m < n$ valores propios diferentes, pueden darse dos casos:

a) Asociado a cada valor propio podemos obtener un número de vectores propios linealmente independientes igual a su grado de multiplicidad.

Ejemplo: Consideramos la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Sus valores propios asociados son:

$\lambda_1 = 2$ con multiplicidad 2 (raíz doble).

$\lambda_2 = 3$.

$P^1 = (0,0,1)$, $P^2 = (1,0,0)$ son los vectores propios asociados a λ_1 , y son linealmente independientes.

$P^3 = (0,1,-1)$ es el vector propio asociado a λ_3.

Así pues:

$$A = P\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} P^1 \qquad \text{con} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Si existe algún valor propio de modo que no existen tantos vectores propios libres como su grado de multiplicidad, entonces no se puede construir P.

En este caso se dice que **A** no es diagonalizable.

3.- MATRICES FUNCIONALES

En el estudio de los sistemas de ecuaciones diferenciales aparecerán matrices con elementos que serán funciones de una variable t , y por tanto, las llamaremos matrices funcionales.

Definiremos matriz funcional de una variable a una matriz cuyos elementos son funciones de una misma variable, es decir:

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \ldots\ldots & a_{1n}(t) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1}(t) & \ldots\ldots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

Por ejemplo:

$$A(t) = \begin{pmatrix} 2t & 3t^2 \\ \text{sen}\, t & \dfrac{1}{t} \end{pmatrix}$$

4.- DERIVADA E INTEGRAL DE UNA MATRIZ FUNCIONAL

Definiremos derivada de una matriz funcional a una matriz cuyos elementos se obtienen derivando cada uno de los elementos de la matriz funcional, es decir:

$$A'(t) = \frac{dA(t)}{dt} = \left(\frac{da_{ij}(t)}{dt} \right)$$

Así pues, en el ejemplo de antes tenemos que la derivada de la matriz A(t) es la matriz :

$$A'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 6t \\ \cos t & \frac{-1}{t^2} \end{pmatrix}$$

Análogamente definiremos la integral de una matriz funcional como una matriz cuyos elementos son las integrales de los elementos de la matriz funcional.

$$\int A(t)\ dt = \left(\int a_{ij}(t)\ dt \right)$$

En nuestro ejemplo tenemos:

$$\int A(t)\ dt = \begin{pmatrix} t^2 & t^3 \\ -\cos t & \ln \end{pmatrix} t$$

En el próximo tema utilizaremos estos elementos para modelizar sistemas de varias poblaciones.

TEMA 6

SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

1. Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.
2. Resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. Caso homogéneo.
3. Método de variación de las constantes para la resolución del caso no homogéneo.

1.- SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES.

En temas anteriores hemos estudiado sistemas de ecuaciones diferenciales de la forma:

$$x'(t) = a_{11}\, x(t) + a_{12}\, y(t) + f(t)$$
$$y'(t) = a_{21}\, x(t) + a_{22}\, x(t) + g(t)$$

donde a_{11}, a_{12}, a_{21} y a_{22} son constantes.

La forma más general de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden es un conjunto de n ecuaciones diferenciales lineales de la forma:

$$\begin{aligned} x'_1(t) &= a_{11}(t)\, x_1(t) + a_{12}(t)\, x_2(t) + \dots + a_{1n}(t)\, x_n(t) + f_1(t) \\ x'_2(t) &= a_{21}(t)\, x_1(t) + a_{22}(t)\, x_2(t) + \dots + a_{2n}(t)\, x_n(t) + f_2(t) \\ &\dots\dots \qquad\qquad \dots\dots \\ x'_n(t) &= a_{n1}(t)\, x_1(t) + a_{n2}(t)\, x_2(t) + \dots + a_{nn}(t)\, x_n(t) + f_n(t) \end{aligned} \qquad (1.1)$$

donde todos los $a_{ij}(t)$ son funciones dadas de t.

Si todos los $a_{ij}(t)$ son constantes, el sistema (1.1) se denomina lineal **con coeficientes constantes**. Si todas las $f_i(t) = 0$, se denomina **homogéneo.**

Podemos escribir el sistema en forma matricial:

$$X'(t) = A\, X(t) + F(t)$$

donde $X'(t) = \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ \dots \\ x'_n(t) \end{pmatrix}$; $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$; $F(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \dots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$ y A es la matriz de coeficientes.

2.- RESOLUCIÓN DE SISTEMAS HOMOGÉNEOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES CON COEFICIENTES CONSTANTES

Vamos a resolver el siguiente sistema:

$$X'(t) = A\, X(t) \qquad (2.1)$$

Calculamos los n valores y vectores propios de la matriz A : $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ y $P^1, P^2, \dots, P^n$. Supongamos que los n vectores propios son linealmente independientes. Esto implica que existe P^{-1} , donde $P = (P^1, P^2, \dots, P^n)$.

Llamamos $Y(t) = P^{-1} X(t)$ (equivalentemente $X(t) = P\, Y(t)$) y

$Y'(t) = P^{-1} X'(t)$ (equivalentemente $X'(t) = P\, Y'(t)$), tenemos , sustituyendo en (2.1) : $P\,Y'(t) = A\,P\,Y(t)$ y multiplicando por P^{-1} tenemos :

$$P^{-1}\,P\,Y'(t) = P^{-1}\,A\,P\,Y(t)$$

y, así : $$Y'(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} Y(t)\,,$$ o de otra forma :

$$\begin{aligned} y'_1(t) &= \lambda_1\, y_1(t) \\ y'_2(t) &= \lambda_2\, y_2(t) \\ &\dots\dots\dots \\ y'_n(t) &= \lambda_n\, y_n(t) \end{aligned}$$

cuya solución es trivial : $$\begin{aligned} y_1(t) &= c_1\, e^{\lambda_1 t} \\ &\dots\dots\dots \\ y_n(t) &= c_n\, e^{\lambda_n t} \end{aligned}$$

o, en forma matricial, $$Y(t) = \begin{pmatrix} c_1\, e^{\lambda_1 t} \\ .. \\ .. \\ c_n\, e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

La solución del sistema expresada en función de las variables originales será :

$$X(t) = P\,Y(t) = (P^1 , P^2 ,..., P^n) \begin{pmatrix} c_1\, e^{\lambda_1 t} \\ .. \\ .. \\ c_n\, e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} = c_1\, P^1\, e^{\lambda_1 t} + c_2\, P^2\, e^{\lambda_2 t} + ... + c_n\, P^n\, e^{\lambda_n t}$$

En resumen, la solución de este sistema se obtiene realizando los siguientes pasos:

1.- Cálculo de los valores propios de la matriz A: $\lambda_1 , \lambda_2 ,..., \lambda_n$

2.-Cálculo de los vectores propios asociados: $P^1 , P^2 ,..., P^n$ (que supondremos son linealmente independientes)

3.- La solución general es $X(t) = c_1\, P^1\, e^{\lambda_1 t} + c_2\, P^2\, e^{\lambda_2 t} + ... + c_n\, P^n\, e^{\lambda_n t}$,

donde $c_1 , c_2 ,...$ y c_n son constantes que podemos determinar cuando nos dan n condiciones que haya de satisfacer X(t), generalmente X(0).

<u>Ejemplo</u>: Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} x'_1(t) &= x_1(t) \qquad + 2\,x_3(t) + 2\,x_4(t) \\ x'_2(t) &= \qquad x_2(t) - 2\,x_3(t) - 4\,x_4(t) \end{aligned}$$

$$x'_3(t) = \qquad - x_3(t) - 4\, x_4(t)$$
$$x'_4(t) = \qquad 3\, x_4(t)$$

dadas las condiciones iniciales $X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

- <u>Solución</u>: El sistema se puede escribir como: $X'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} X(t)$.

La matriz A de coeficientes es: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

que tiene por valores propios: $\lambda_1 = 1$ (doble), $\lambda_2 = -1$ y $\lambda_3 = 3$.

Calculemos ahora los vectores propios asociados:

para $\lambda_1 = 1$ tenemos los vectores (1,0,0,0) y (0,1,0,0)
para $\lambda_2 = -1$ tenemos el vector (-1,1,1,0)
para $\lambda_3 = 3$ tenemos el vector (0,-1,-1,1)

Por tanto, la solución general de este problema es:

$$X(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + c_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}$$

Podemos escribirla como:

$$X(t) = \begin{pmatrix} c_1\, e^t - c_3\, e^{-t} \\ c_2\, e^t + c_3\, e^{-t} - c_4\, e^{3t} \\ c_3\, e^{-t} - c_4\, e^{3t} \\ c_4\, e^{3t} \end{pmatrix}$$

De las condiciones iniciales:

$$\left.\begin{array}{l} x_1(0) = 0 = c_1 - c_3 \\ x_2(0) = 1 = c_2 + c_3 - c_4 \\ x_3(0) = 1 = c_3 - c_4 \\ x_4(0) = 0 = + c_4 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad c_1 = 1,\ c_2 = 0,\ c_3 = 1,\ c_4 = 0.$$

Por tanto $X(t) = \begin{pmatrix} e^t - e^{-t} \\ e^{-t} \\ e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}$. Así : $x_1(t) = e^t - e^{-t}$, $x_2(t) = e^{-t}$, $x_3(t) = e^{-t}$ y $x_4(t)=0$.

3.- MÉTODO DE VARIACIÓN DE LAS CONSTANTES PARA LA RESOLUCIÓN DEL CASO NO HOMOGENEO.

Vamos ahora a resolver el caso no homogéneo, el sistema $X'(t) = A\,X(t) + F(t)$

Resolvemos primero el sistema homogéneo asociado y representamos su solución por :

$c_1\,G^1(t) + c_2\,G^2(t) + ... + c_n\,G^n(t)$

donde $G^i(t)$ denota $P^i e^{\lambda_i t}$, para i=1, ..., n.

Para resolver el caso no homogéneo, buscaremos una solución del tipo :

$$c_1(t)\,G^1(t) + c_2(t)\,G^2(t) + ... + c_n(t)\,G^n(t)$$

que puede expresarse en forma matricial como $G(t)\,C(t)$, con $G(t)=(G^1(t), G^2(t),..., G^n(t))$ y con $C(t)=\begin{pmatrix} c_1(t) \\ .. \\ .. \\ c_n(t) \end{pmatrix}$.

Para que G(t) C(t) sea solución del sistema no homogéneo, debe satisfacerlo, es decir, debe cumplir :

$(G(t)\,C(t))' = G'(t)\,C(t) + G(t)\,C'(t) = A\,(G(t)\,C(t)) + F(t)$

pero, por ser G(t) solución del sistema homogéneo, $G'(t) = A\,G(t)$, y así se debe cumplir que:

$G(t)\,C'(t) = F(t)$, o lo que es lo mismo, $C'(t) = G^{-1}(t)\,F(t)$. Por lo tanto, C(t) debe ser

$C(t) = K + \int G^{-1}(t)\,F(t)\,dt$

Resumiendo, la solución del sistema no homogéneo es de la forma

$$X(t) = G(t)\,C(t)$$

donde,

*G(t) es una matriz de orden n x n formada por n soluciones independientes de la ecuación homogénea (en el sentido de que una no es una combinación de las otras por una constante) escritos en columna, es decir; $P^1 e^{\lambda_1 t}$, $P^2 e^{\lambda_2 t}$, ... , $P^n e^{\lambda_n t}$, donde λ_1 , λ_2 ,..., λ_n son los valores propios de la matriz A y P^1 , P^2 ,..., P^n los vectores propios asociados.

*C(t) se obtiene a partir de:

$$C(t) = K + \int G^{-1}(t)\, F(t)\, dt$$

donde $G^{-1}(t)$ es la matriz inversa de G(t), F(t) es el vector de términos independentes y K un vector columna de constantes de integración.

Ejemplo:

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales lineales: $X'(t) = A\,X(t) + F(t)$

donde $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ y $F(t) = \begin{pmatrix} 3t \\ e^{-t} \end{pmatrix}$

- Solución:

1) Cálculo de G(t). Para ello resolvemos el sistema homogéneo $X'(t) = A\,X(t)$

$$\left|\begin{pmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 2 & -4-\lambda \end{pmatrix}\right| = 0 \rightarrow \lambda_1=-2;\ \lambda_2=-5.$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{array}{l} -3x_1 + x_2 = -2x_1 \\ 2x_1 - 4x_2 = -2x_2 \end{array}\right\} \rightarrow x_1 = x_2, \text{ de donde: } P^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -5\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{array}{l} -3x_1 + x_2 = -5x_1 \\ 2x_1 - 4x_2 = -5x_2 \end{array}\right\} \rightarrow x_2 = -2x_1, \text{ de donde: } P^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Solución del sistema homogéneo = $C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-5t}$

así pues $G(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix}$

2) Cálculo de C(t)

$C(t) = K + \int G^{-1}(t)\, F(t)\, dt$, donde $F(t) = \begin{pmatrix} 3t \\ e^{-t} \end{pmatrix}$. Calculamos primero $G^{-1}(t)$:

$$G^{-1}(t) = 1/(-3\, e^{-7t}) \begin{pmatrix} -2e^{-5t} & -e^{-5t} \\ -e^{-2t} & e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3e^{2t} & 1/3e^{2t} \\ 1/3e^{5t} & -1/3e^{5t} \end{pmatrix}$$. Así :

$$C(t) = K+\int \begin{pmatrix} 2/3e^{2t} & 1/3e^{2t} \\ 1/3e^{5t} & -1/3e^{5t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3t \\ e^{-t} \end{pmatrix} dt = K+\int \begin{pmatrix} 2t\, e^{2t}+1/3\, e^{t} \\ t\, e^{5t} - 1/3\, e^{4t} \end{pmatrix} dt =$$

$$K + \begin{pmatrix} t\, e^{2t}+1/3\, e^{t} -1/2\, e^{2t} \\ 1/5\, e^{5t} - 1/25\, e^{5t} -1/12e^{4t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t\, e^{2t}+1/3\, e^{t} -1/2\, e^{2t} + K_1 \\ 1/5\, e^{5t} - 1/25\, e^{5t} -1/12\, e^{4t}+K_2 \end{pmatrix}$$

pues $\int 2t\, e^{2t}\, dt = 2(1/2\, t\, e^{2t} - 1/4\, e^{2t})$ y $\int t\, e^{5t}\, dt = 1/5\, t\, e^{5t} - 1/25\, e^{5t}$

Finalmente, hacemos G(t) C(t), obteniendo

$$G(t)\, C(t)= K_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + K_2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-5t} + \begin{pmatrix} 6/5\, t -27/50+1/4\, e^{-t} \\ 3/5\, t - 21/50 +1/2\, e^{-t} \end{pmatrix}$$

<u>Ejemplo</u>: Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$x'_1(t) = x_1(t) + \text{sen } t$$
$$x'_2(t) = x_1(t) + 2x_2(t)$$
$$x'_3(t) = x_1(t) - x_3(t)$$

dadas las condiciones iniciales $X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

En este caso, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $F(t) = \begin{pmatrix} \text{sen}(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. El sistema puede escribirse en forma matricial como $X'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} \text{sen}(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

1) Cálculo de G(t). Primero calcularemos los valores propios de A:

$$|A-\lambda I| = \left| \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} \right| = 0 \rightarrow \lambda_1=1;\ \lambda_2=-1;\ \lambda_3=2.$$

Ahora sus vectores propios:

asociado a $\lambda=1$, $\left.\begin{array}{ll} x_1 & = x_1 \\ x_1 + 2x_2 & = x_2 \\ x_1 - \quad x_3 & = x_3 \end{array}\right\} \rightarrow x_1= \alpha,\ x_2= - \alpha,\ x_3= \alpha/2.$ Así, $P^1= \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

asociado a $\lambda= - 1$, $\left.\begin{array}{l} x_1 = -x_1 \\ x_1 + 2x_2 = -x_2 \\ x_1 - x_3 = -x_3 \end{array}\right\} \to x_1= 0,\ x_2= 0,\ x_3= \alpha$. Así, $P^2=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

asociado a $\lambda=2$, $\left.\begin{array}{l} x_1 = 2x_1 \\ x_1 + 2x_2 = 2x_2 \\ x_1 - x_3 = 2x_3 \end{array}\right\} \to x_1= 0,\ x_2= \alpha,\ x_3= 0$. Así, $P^3=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Tenemos pues: $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} \to G(t)=\begin{pmatrix} 2e^t & 0 & 0 \\ -2e^t & 0 & e^{2t} \\ e^t & e^{-t} & 0 \end{pmatrix}$

2) Cálculo de C(t). Primero obtenemos $G^{-1}(t)$, que resulta ser:

$$G^{-1}(t) = 1/2 \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ -e^t & 0 & 2e^t \\ 2e^{-2t} & 2e^{-2t} & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora realizamos $G^{-1}(t)\,F(t) = 1/2 \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ -e^t & 0 & 2e^t \\ 2e^{-2t} & 2e^{-2t} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{sen}(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1/2 \begin{pmatrix} e^{-t}\,\mathrm{sen}(t) \\ -e^t\,\mathrm{sen}(t) \\ 2\,e^{-2t}\,\mathrm{sen}(t) \end{pmatrix}$

y calculamos $C(t) = K + \int G^{-1}(t)\,F(t)\,dt = K + 1/2 \int \begin{pmatrix} e^{-t}\,\mathrm{sen}(t) \\ -e^t\,\mathrm{sen}(t) \\ 2e^{-2t}\,\mathrm{sen}(t) \end{pmatrix} dt =$

$= K + 1/2 \begin{pmatrix} -1/2\, e^{-t}\,(\cos(t)+\mathrm{sen}(t)) \\ 1/2\, e^t\,(\cos(t)-\mathrm{sen}(t)) \\ -2/5\, e^{-2t}\,(\cos(t)+2\mathrm{sen}(t)) \end{pmatrix}$, donde las integrales que hemos realizado son :

- $I = \int e^{-t}\,\mathrm{sen}(t)\,dt = -\cos(t)\,e^{-t} - \int e^{-t}\cos(t)\,dt = -\cos(t)\,e^{-t} - \mathrm{sen}(t)\,e^{-t} - \int \mathrm{sen}(t)\,e^{-t}\,dt$

$u=e^{-t} \to du=-e^{-t}\,dt$ $\quad$ $u=e^{-t} \to du=-e^{-t}\,dt$

$dv=\mathrm{sen}(t)\,dt \to v=-\cos(t)$ $\quad$ $dv=\cos(t)\,dt \to v=\mathrm{sen}(t)$

pasando la integral al primer miembro y despejando : $I= 1/2\,(-e^{-t})\,(\cos(t) + \mathrm{sen}(t))$

- $I = \int e^t\,\mathrm{sen}(t)\,dt = -e^t\cos(t) + \int e^t\cos(t)\,dt = -e^t\cos(t) + e^t\,\mathrm{sen}(t) - \int \mathrm{sen}(t)\,e^t\,dt$

$u= e^t \to du=e^t\,dt$ $\quad$ $u= e^t \to du=e^t\,dt$

$dv=\mathrm{sen}(t)\,dt \to v= -\cos(t)$ $\quad$ $dv=\cos(t)\,dt \to v=\mathrm{sen}(t)$

pasando la integral al primer miembro y despejando : $I = 1/2\ (e^{t})\ (\ \text{sen}(t) - \cos(t))$

- $I = \int e^{-2t}\,\text{sen}(t)\,dt = -e^{-2t}\cos(t) - 2\int e^{-2t}\cos(t)\,dt =$

  $- e^{-2t}\cos(t) - 2\,e^{-2t}\,\text{sen}(t) - 4\int \text{sen}(t)\,e^{-2t}\,dt$

$u= e^{-2t} \rightarrow du= -2\,e^{-2t}\,dt$ $\qquad$ $u=e^{-2t}d \rightarrow u= -2e^{-2t}\,dt$

$dv=\text{sen}(t)dt \rightarrow v= -\cos(t)$ $\qquad$ $dv= \cos(t)dt \rightarrow v=\text{sen}(t)$

pasando la integral al primer miembro y despejando $5I= -\ (e^{-2t})\ (\ \cos(t) + 2\ \text{sen}(t)\ )$

Finalmente, la solución general del sistema no homogéneo vendrá dada por

$$X(t) = G(t)\,C(t) = \begin{pmatrix} 2e^{t} & 0 & 0 \\ -2e^{t} & 0 & e^{2t} \\ e^{t} & e^{-t} & 0 \end{pmatrix} \left[K + 1/2 \begin{pmatrix} -1/2\ e^{-t}\ (\cos(t)+\text{sen}(t)) \\ -1/2\ e^{t}\ (\cos(t)-\text{sen}(t)) \\ -2/5\ e^{-2t}\ (\cos(t)+2\text{sen}(t)) \end{pmatrix} \right] = K_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t}$$

$$+ K_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + K_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} + 1/2 \begin{pmatrix} -(\cos(t) + \text{sen}(t)) \\ \cos(t) + \text{sen}(t) - 2/5\ (\cos(t) + 2\ \text{sen}(t)) \\ -\ \text{sen}(t) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2e^{t} & 0 & 0 \\ -2e^{t} & 0 & e^{2t} \\ e^{t} & e^{-t} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2\ (\ \cos(t) + \text{sen}(t)) \\ 3/10\ \cos(t) + 1/10\ \text{sen}(t) \\ -1/2\ \text{sen}(t) \end{pmatrix}$$

A partir de las condiciones iniciales

$$\left.\begin{array}{c} 0= 2\ K_1 - 1/2 \\ 1=-2K_1 + K_3 + 3/10 \\ 1= K_1+K_2 \end{array}\right\} \rightarrow K_1= 1/4\ ;\ K_2= 3/4\ ;\ K_3= 5/4$$

obtenemos la solución particular del sistema :

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1/2\ e^{t} - 1/2\ (\ \cos(t) + \text{sen}(t)\ ) \\ -1/2\ e^{t} + 5/4\ e^{2t} + 3/10\ \cos(t) + 1/10\ \text{sen}(t) \\ 1/4\ e^{t} + 3/4\ e^{-t} - 1/2\ \text{sen}(t) \end{pmatrix}$$

TEMA 7

ECUACIONES EN DIFERENCIAS LINEALES

1. Introducción.
2. Ecuaciones en diferencias lineales de primer orden.
3. Ecuaciones en diferencias lineales de segundo orden. El caso homogéneo.
4. Método de variación de las constantes para la resolución del caso no homogéneo.

1.- INTRODUCCIÓN.

Hasta ahora hemos discutido modelos continuos para describir la dinámica de una población. Recordemos que en un modelo continuo el tiempo es una variable continua y se considera que la población cambia también de forma continua con el tiempo. En este tema y en el siguiente estudiaremos los modelos discretos. En estos modelos el tiempo se considera como una variable discreta y se hacen observaciones únicamente cada cierto intervalo fijo de tiempo, por ejemplo cada hora, día o año.

En todo el tema, y mientras no se diga otra cosa, $\mathbf{x_n}$ representará el **tamaño de una población al final del periodo de tiempo n-ésimo**. Así, el desarrollo de la población viene descrito por la sucesión de números $x_0, x_1, x_2, ..., x_n, ...$ El crecimiento, o variación, del tamaño de la población en un periodo de tiempo general, n, estará representado por $\mathbf{x_n - x_{n-1}}$.

Ejemplo:

Supongamos que una población evoluciona según la fórmula $x_n = 1000 + 500(1 - 2^{-n})$. Cuando n= 0 la población inicial es $x_o = 1000 + 500 (1 - 1) = 1000$ y después de 2 periodos de tiempo es $x_2 = 1000 + 500 \left(1 - \frac{1}{4} \right) = 1000 + 500 \frac{3}{4} = 1375$.

Cuando n se hace muy grande, $x_n = 1000 + 500 \left(1 - \frac{1}{2^n} \right)$ se aproxima a $1000 + 500 (1 - 0) = 1500$, población límite o de equilibrio.

El crecimiento de la población en el n-ésimo periodo de tiempo es $x_n - x_{n-1} = 500 (1 - 2^{-n} - 1 + 2^{-n+1}) = 500\ 2^{-n}$. Cuando n se hace muy grande, el crecimiento tiende a 0.

En el ejemplo anterior, la fórmula para encontrar x_n es conocida, pero normalmente sólo conoceremos la población inicial y alguna información sobre el crecimiento de la población en diversos periodos de tiempo.

Definición: Una **ecuación en diferencias** es una ecuación que relaciona los valores de x_n para diferentes valores de n. Si N_1, N_2 son el menor y el mayor valor de n que aparece en la ecuación, el **orden** de la ecuación en diferencias es $N_2 - N_1$.

Ejemplos:

1) $x_n - x_{n-1} = 2^{-n}$ $N_1 = n-1, N_2 = n$ primer orden.

2) $x_{n+1} = 2^{-n} x_n + (x_{n-1})^2$ segundo orden.

3) $2 x_{n+2} + 3 x_{n+1} = \mathrm{sen}(x_{n+1})$ primer orden.

Ejemplo:

Una población de insectos crece de manera que el crecimiento en el n-ésimo periodo de tiempo es el doble que el crecimiento en el periodo anterior. Describir el proceso en términos de una ecuación en diferencias. ¿Cuál es su orden?.

$$x_n - x_{n-1} = 2 (x_{n-1} - x_{n-2}) \qquad \text{segundo orden}$$

Ejemplo:

El crecimiento de un cultivo de bacterias en un medio es observado cada 2 horas. En cada medida se observa que el tamaño de la población de las bacterias es un 25% mayor que en la medida anterior. Encontrar el tamaño en el segundo y cuarto periodo si $x_o = 1600$.

$$x_{n+1} = 1.25\, x_n \qquad \text{primer orden}$$

$x_2 = 1.25\, x_1 = 1.25 (1.25\, x_o) = (1.25)^2 x_o = 2500$

$x_4 = 1.25\, x_3 = 1.25 (1.25\, x_2) = (1.25)^2 x_2 \approx 3906$

Ejemplo:

Comprobar que $x_n = c\, a^n$ es una solución de la ecuación en diferencias $x_{n+1} = a\, x_n$ para cada valor de la constante c. Si se sabe que $x_2 = 3$ y $x_3 = 5$, encontrar a y c.

Si $x_n = c\, a^n \Rightarrow x_{n+1} = c\, a^{n+1}$

Como $a\, x_n = a (c\, a^n) = c\, a^{n+1} = x_{n+1}$, efectivamente es solución.

$$\left.\begin{array}{l} x_2 = c\, a^2 = 3 \\ \\ x_3 = c\, a^3 = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{5}{3} = \frac{c\, a^3}{c\, a^2} = a \Rightarrow a = \frac{5}{3}\ ,\ c = \frac{27}{25}$$

Definición: Dada una ecuación en diferencias, ¿ podemos obtener una fórmula explícita para x_n ? Si la podemos calcular, dicha fórmula recibe el nombre de **solución** de la ecuación en diferencias.

2.- ECUACIONES EN DIFERENCIAS LINEALES DE PRIMER ORDEN.

Supongamos que una población crece de manera que cuando aumenta la población también aumenta su índice de crecimiento. Más explícitamente, supongamos que el índice de crecimiento de la población en cualquier periodo de tiempo es proporcional al tamaño de la población al comienzo del periodo. Matemáticamente:

$$x_{n+1} - x_n = a\, x_n \Rightarrow x_{n+1} = (1 + a)\, x_n$$

Vamos a resolverla, suponiendo conocido x_o:

$x_1 = (1 + a)\, x_o$

$x_2 = (1 + a)\, x_1 = (1 + a) (1 + a)\, x_o = (1 + a)^2 x_o$

$x_3 = (1 + a)\, x_2 = (1 + a) (1 + a)^2 x_o = (1 + a)^3 x_o$

....

$x_n = (1 + a)^n x_o$.

Si $a > 0 \Rightarrow 1 + a > 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$, la población crece cuando n crece.

Si $a = 0 \Rightarrow$ la población permanece constante al nivel x_o.

Si $0 > a > -1 \Rightarrow 1 > 1 + a > 0$ y x_n tiende a 0 cuando n crece. En este caso, la población llegará a extinguirse.

Si $a = -1 \Rightarrow$ la población se extingue después del primer periodo de tiempo.

En este modelo no nos interesa $a < -1$ ya que conduciría a poblaciones negativas.

Ejemplo:

Una población de bacterias es inicialmente de 1000 y crece un 50% cada hora. ¿Cuál es la población después de 10 horas?.

Solución:

Representaremos por x_n a la población después de n horas. En este ejemplo $x_{n+1} = 1.5\ x_n$ y $x_o = 1000$.

Entonces $x_1 = (1.5)\ 1000$, $x_2 = (1.5)^2\ 1000$, etc.

La solución general es $x_n = (1.5)^n\ 1000$.

Después de 10 horas la población será $x_{10} = (1.5)^{10}\ 1000 \approx 57700$.

La ecuación $x_{n+1} = (1 + a)\ x_n$ es un ejemplo de ecuación en diferencias lineal de primer orden. Los términos que acompañan a x_n y x_{n+1} son de la forma $a(n)\ x_n$ y $b(n)\ x_{n+1}$, donde $a(n)$ y $b(n)$ son expresiones que se suponen conocidas y que dependen sólo de n. No aparecen términos como x_n^2, x_{n+1}^3, $x_n\ x_{n+1}$, $\frac{1}{x_n}$, etc. Cuando lo hacen se dice que la ecuación es **no lineal**.

Ejemplos:

Son lineales:

1) $x_{n+1} = 5\ x_n - 4\ x_{n-1}$

2) $x_{n+1} = n^2\ x_n$

3) $x_{n+2} - x_n = 0$

4) $x_{n+1} - n\ x_n = n^2$

Ejemplos:

Las siguientes ecuaciones son no lineales:

1) $x_{n+1} = x_n^2$

2) $x_n\ x_{n+1} = x_{n-1}$

3) $x_{n+2} = x_{n+1}\ (1 + x_n)$

4) $x_{n+1} = \sqrt{x_n}$.

La ecuación lineal en diferencias de primer orden más general es:

$$\boxed{x_{n+1} = f(n)\, x_n + g(n)}$$

donde f(n) y g(n) son funciones conocidas de n. Si g(n) = 0 se denomina **homogénea**.

Resolveremos primero la ecuación homogénea

$$x_{n+1} = f(n)\, x_n$$

de forma recursiva. Es decir, hacemos

$$n = 0,\ x_1 = f(0)\, x_o,$$
$$n = 1,\ x_2 = f(1)\, x_1 = f(1)\, f(0)\, x_o,$$
$$n = 2,\ x_3 = f(2)\, x_2 = f(2)\, f(1)\, f(0)\, x_o.$$

lo que nos lleva a la solución general

$$x_n = f(n\text{-}1)\, f(n\text{-}2) \ldots f(1)\, f(0)\, x_o.$$

Ejemplo:

Consideremos una población de bacterias que crece a partir de una población inicial de tamaño 1000 de manera que la población después de n+1 horas es $\frac{n+3}{n+2}$ veces la población después de n horas.

Solución:

Esta es una ecuación homogénea con $f(n) = \frac{n+3}{n+2}$. La solución general es:

$$x_n = f(n\text{-}1)\, f(n\text{-}2) \ldots f(1)\, f(0)\, x_o = \frac{n+2}{n+1}\,\frac{n+1}{n} \ldots \frac{5}{4}\,\frac{4}{3}\,\frac{3}{2}\, 1000$$

Simplificando, $x_n = \frac{n+2}{2} 1000 = 500\,(n + 2)$.

Después de 10 horas la población es $x_{10} = 500 \cdot 12 = 6000$ bacterias. En este proceso de crecimiento, la población aumenta en 500 bacterias cada hora. De todas formas este modelo es poco realista ya que los recursos necesarios para el crecimiento están siempre limitados. No obstante eso, puede ser una buena descripción para ciertos tipos de crecimiento cuando se considera un número limitado de horas.

Resolución de la ecuación general:

Vamos ahora a resolver la ecuación general:

$$x_{n+1} = f(n)\, x_n + g(n)$$

Entonces:

$$n = 0,\quad x_1 = f(0)\, x_o + g(0)$$
$$n = 1,\quad x_2 = f(1)\, x_1 + g(1) = f(1)\, f(0)\, x_o + f(1)\, g(0) + g(1)$$
$$n = 2,\quad x_3 = f(2)\, x_2 + g(2) = f(2)\, f(1)\, f(0)\, x_o + f(2)\, f(1)\, g(0) + f(2)\, g(1) + g(2).$$

Esto sugiere la solución general:

$$x_n = f(n\text{-}1)\, f(n\text{-}2) \ldots f(1)\, f(0)\, x_o + f(n\text{-}1)\, f(n\text{-}2) \ldots f(1)\, g(0) + f(n\text{-}1)\, f(n\text{-}2) \ldots f(2)\, g(1) + \ldots + f(n\text{-}1)\, g(n\text{-}2) + g(n\text{-}1).$$

Ejemplo:

Una población de bacterias crece a partir de un tamaño inicial de 1000 de manera que la población aumenta en $500\ 2^{-n}$ bacterias entre la hora n y la n+1. ¿Cuál es la población después de 10 horas?.

Solución:

En este caso $x_{n+1} = x_n + 500\ 2^{-n}$ y $x_o = 1000$, con $f(n) = 1$ y $g(n) = 500\ 2^{-n}$.

Después de una hora, $x_1 = x_o + 500\ 2^{-0} = 1000 + 500 = 1500$,

después de 2 horas, $x_2 = x_1 + 500\ 2^{-1} = 1500 + \frac{500}{2} = 1750$,

después de 3 horas, $x_3 = x_2 + 500\ 2^{-2} = 1750 + \frac{500}{4} = 1875$.

La solución general es:

$$x_n = 1000 + 500 + \frac{500}{2} + \frac{500}{2^2} + ... + \frac{500}{2^{n-1}} = 1000 + 500 \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} .$$

Por tanto,

$$x_n = 1000 + 1000 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right) = 2000 - 1000\ 2^{-n}.$$

Después de 10 horas $x_{10} = 2000 - 1000\ 2^{-10} \approx 1999$ bacterias.

Cuando va pasando el tiempo, la población de bacterias crece hasta llegar a un tamaño de equilibrio de 2000. En términos del modelo de crecimiento esto podría interpretarse como el tamaño de la población que puede mantenerse con los recursos disponibles.

3.- ECUACIONES EN DIFERENCIAS LINEALES DE SEGUNDO ORDEN.

La más general es de la forma

$$a(n)\ x_{n+2} + b(n)\ x_{n+1} + c(n)\ x_n = d(n) \qquad (3.1)$$

donde a(n), b(n), c(n), d(n) son funciones conocidas de n.

Si a(n), b(n), c(n) son constantes, la ecuación (3.1) recibe el nombre de lineal de segundo orden **con coeficientes constantes**. Si d(n) = 0, se denomina **homogénea**.

Resolución de la ecuación en diferencias lineal de segundo orden homogénea con coeficientes constantes:

Vamos a resolver la siguiente ecuación:

$$a\ x_{n+2} + b\ x_{n+1} + c\ x_n = 0, \qquad (3.2)$$

donde a, b, c son constantes y $a \neq 0$.

Podríamos escribir la ecuación como:

$$x_{n+2} = -\left(\frac{b}{a}\right) x_{n+1} - \left(\frac{c}{a}\right) x_n$$

y buscar la solución haciendo sucesivamente n= 0, 1, 2, ..., pero eso conduce a una fórmula para x_n en términos de x_1 y x_0 bastante complicada.

La resolución de la ecuación de primer orden $x_{n+1} = (1 + a)\, x_n$ nos sugiere un método mejor: buscar soluciones de la forma $x_n = \lambda^n$ para ciertos valores de λ.

Si $x_n = \lambda^n$, para satisfacer (3.2) ha de cumplir que $a\,\lambda^{n+2} + b\,\lambda^{n+1} + c\,\lambda^n = 0$ para n = 0, 1, 2, ... En particular, haciendo n = 0 tenemos que $a\,\lambda^2 + b\,\lambda + c = 0$. Esta ecuación se denomina **ecuación auxiliar** de la ecuación en diferencias. Sean λ_1 y λ_2 las raices de la ecuación auxiliar.

Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$ (λ_1, λ_2 reales y distintas)

El método anterior produce dos soluciones de la ecuación (3.2), $x_n = \lambda_1^n$ y $x_n = \lambda_2^n$.

La solución general es

$$x_n = k_1\, \lambda_1^n + k_2\, \lambda_2^n,$$

donde k_1 y k_2 son constantes arbitrarias.

Caso 2: $b^2 - 4ac = 0$ ($\lambda_1 = \lambda_2$ reales)

El método produce únicamente una solución $x_n = \lambda_1^n$, pero puede comprobarse que $x_n = n\lambda_1^{n-1}$ es otra solución de la ecuación (3.2) en este caso.

La solución general es

$$x_n = k_1\, \lambda_1^n + k_2\, n\lambda_1^{n-1},$$

donde k_1 y k_2 son constantes arbitrarias.

Caso 3: $b^2 - 4ac < 0$ ($\lambda_1 = \alpha + \beta\, i$, $\lambda_2 = \alpha - \beta\, i$, imaginarias)

En este caso, $\lambda_1^n = \left(\frac{c}{a}\right)^{n/2} [\ \cos(n\theta) + i\ \mathrm{sen}(n\theta)\ ]$, $\lambda_2^n = \left(\frac{c}{a}\right)^{n/2} [\ \cos(n\theta) - i\ \mathrm{sen}(n\theta)\ ]$

donde $\mathrm{tg}\ \theta = \dfrac{-\sqrt{4\,a\,c - b^2}}{b}$.

La solución general se puede escribir como:

$$x_n = k_1 \left(\frac{c}{a}\right)^{n/2} \cos(n\theta) + k_2 \left(\frac{c}{a}\right)^{n/2} \mathrm{sen}(n\theta),$$

donde k_1 y k_2 son constantes arbitrarias.

Ejemplos:

1.- Encontrar la solución general de $x_{n+2} - 3\, x_{n+1} + 2\, x_n = 0$. ¿Cuál es la solución particular que cumplirá las condiciones iniciales $x_o = 1000$ y $x_1 = 1500$?. ¿Cuanto vale x_5 ?.

Solución:

$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \dfrac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$

Por tanto, la solución general es

$$x_n = k_1\, 2^n + k_2\, 1^n = k_1\, 2^n + k_2$$

$$\left.\begin{array}{l} x_o = 1000 = k_1 + k_2 \\ x_1 = 1500 = 2\,k_1 + k_2 \end{array}\right\} \Rightarrow k_1 = 500\,,\ k_2 = 500.$$

Entonces,

$$x_n = 500\, 2^n + 500 = 500\,(\,2^n + 1\,)$$

Cuando n = 5, $x_5 = 500\,(\,32 + 1\,) = 16500$.

2.- Encontrar la solución general de $x_{n+2} - 4\,x_{n+1} + 4\,x_n = 0$. ¿Cuál es la solución particular que satisface las condiciones iniciales $x_o = 500$ y $x_1 = 1000$?. ¿Cuánto vale x_5 ?.

Solución:

$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = 2$

Por tanto, la solución general es

$$x_n = k_1\, 2^n + k_2\, n\, 2^{n-1}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_o = 500 = k_1 \\ x_1 = 1000 = 2\,k_1 + k_2 \end{array}\right\} \Rightarrow k_1 = 500\,,\ k_2 = 0.$$

Entonces,

$$x_n = 500\, 2^n$$

Cuando n = 5, $x_5 = 500\,(\,32\,) = 16000$.

3.- Encontrar la solución general de $x_{n+2} + x_n = 0$. ¿Cuál es la solución particular que satisface las condiciones iniciales $x_o = 0$ y $x_1 = 1000$?. ¿Cuánto vale x_5 ?.

Solución:

$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = i, \lambda_2 = -\,i$. Como $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{\sqrt{4}}{0} = +\,\infty$, tenemos $\theta = \dfrac{\pi}{2}$

Por tanto, la solución general es

$$x_n = k_1 \cos\left(n\,\frac{\pi}{2}\right) + k_2\, \mathrm{sen}\left(n\,\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} x_o = 0 = k_1 \cos 0 + k_2\, \mathrm{sen}\, 0 = k_1 \\ x_1 = 1000 = k_1 \cos \frac{\pi}{2} + k_2\, \mathrm{sen}\, \frac{\pi}{2} = k_2 \end{array}\right\} \Rightarrow k_1 = 0\,,\ k_2 = 1000.$$

Entonces,

$$x_n = 1000\ \mathrm{sen}\left(n\,\frac{\pi}{2}\right)$$

Por ejemplo, $x_2 = 0$, $x_3 = -1000$, $x_4 = 0$, $x_5 = 1000$, etc. Esto correspondería a las variaciones de una población alrededor de su media.

4.- MÉTODO DE VARIACIÓN DE LAS CONSTANTES PARA LA RESOLUCIÓN DEL CASO NO HOMOGENEO.

Resolveremos la ecuación no homogénea

$$a\, x_{n+2} + b\, x_{n+1} + c\, x_n = f(n) \qquad (4.1)$$

donde a, b, c son constantes y $a \neq 0$.

Se trata de una ecuación en diferencias lineal de segundo orden no homogénea con coeficientes constantes. Como antes, hay 3 casos a considerar correspondientes a que las raices de la ecuación sean las dos reales, 1 real (doble) o las dos complejas.

Por simplicidad consideraremos únicamente el caso $\lambda_1 \neq \lambda_2$ reales. La solución general es de la forma

$$x_n = k_n \lambda_1^n + l_n \lambda_2^n$$

donde,

$$k_n = k_o + \frac{1}{a\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2)}\left[f(0) + \frac{f(1)}{\lambda_1} + \frac{f(2)}{\lambda_1^2} + \dots + \frac{f(n-1)}{\lambda_1^{n-1}} \right] \qquad (4.2)$$

$$l_n = l_o + \frac{1}{a\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)}\left[f(0) + \frac{f(1)}{\lambda_2} + \frac{f(2)}{\lambda_2^2} + \dots + \frac{f(n-1)}{\lambda_2^{n-1}} \right] \qquad (4.3)$$

<u>Ejemplo</u>:

Determinar la solución de $x_{n+2} - x_n = 1$ que satisface $x_o = 50$ y $x_1 = 100$.

<u>Solución</u>:

$\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1$. La solución general es $x_n = k_n 1^n + l_n (-1)^n = k_n + l_n (-1)^n$

donde k_n y l_n se calculan como sigue:

$$k_n = k_o + \frac{1}{2}(1 + 1 + \dots + 1) = k_o + \frac{n}{2}$$

$$l_n = l_o + \frac{1}{2}(1 - 1 + 1 - \dots + (-1)^{n-1}) = l_o + \frac{1}{4}(1 - (-1)^n)$$

Por tanto,

$$x_n = k_o + \frac{n}{2} + (-1)^n \left(l_o + \frac{1}{4}(1 - (-1)^n) \right)$$

$$\left.\begin{array}{l} x_o = 50 = k_o + l_o \\ x_1 = 100 = k_o + \frac{1}{2} - (l_o + \frac{1}{2}) \end{array}\right\} \Rightarrow k_o = 75,\ l_o = -25.$$

Así pues,

$$x_n = 75 + \frac{n}{2} + (-1)^n \left(-25 + \frac{1}{4} (1 - (-1)^n) \right)$$

Ejemplo:

Si se deja crecer una población de peces sin interferir en su desarrollo, en el (n+1)-ésimo año crecerá el doble que en el n-ésimo. No obstante, para estudiarla se añaden 100 peces a la población cada año. Si $x_o = 1000$ y $x_1 = 1200$, determinar x_n.

Solución:

$x_{n+2} - x_{n+1} = 2 (x_{n+1} - x_n) + 100 \quad \Rightarrow \quad x_{n+2} - 3 x_{n+1} + 2 x_n = 100$

$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \dfrac{3 \pm 1}{2} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1.$

La solución general es $x_n = k_n 2^n + l_n 1^n = k_n 2^n + l_n$, donde k_n y l_n se calculan como sigue:

$$k_n = k_o + \frac{1}{2} \left(100 + \frac{100}{2} + \frac{100}{2^2} + ... + \frac{100}{2^{n-1}} \right) = k_o + 50 \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = k_o + 100 \left(1 - \frac{1}{2^n} \right)$$

$l_n = l_o - (100 + 100 + ... + 100) = l_o - 100 n$

Por lo tanto,

$$x_n = k_o 2^n + 100 (2^n - 1) + l_o - 100 n$$

$$\left. \begin{array}{r} x_o = 1000 = k_o + l_o \\ x_1 = 1200 = 2 k_o + 100 + l_o - 100 n \end{array} \right\} \Rightarrow k_o = 200, l_o = 800.$$

Entonces,

$$x_n = 200\, 2^n + 100 (2^n - 1) + 800 - 100 n = 300\, 2^n + 700 - 100 n$$

TEMA 8

SISTEMAS DE ECUACIONES EN DIFERENCIAS

1.Sistemas de ecuaciones en diferencias lineales de primer orden.

2.Resolución del caso homogéneo.

3.Resolución del caso no homogéneo.

1.- SISTEMAS DE ECUACIONES EN DIFERENCIAS LINEALES DE PRIMER ORDEN.

Hemos estado considerando ecuaciones en diferencias que podrían haber aparecido al describir el crecimiento de una especie en un medio determinado, pero no se ha tenido en cuenta la presencia de otras especies en competencia ni otros factores. Para tener una descripción más detallada y una mejor comprensión del crecimiento de la población de una especie, debemos encontrar formas de incluir en las ecuaciones de crecimiento, factores correspondientes a las características importantes del ambiente.

Por ejemplo, si dos especies coexisten en un medio, sus poblaciones en el (n+1)-ésimo periodo de tiempo dependerán de sus poblaciones en el n-ésimo. Dos especies en relación simbiótica crecerán y decrecerán al mismo tiempo, mientras que si una es depredadora de la otra, cuando disminuya la primera, aumentará la segunda.

Un ecosistema real es una complicada red de competición y cooperación entre muchas especies diferentes. Aquí nos restringiremos al caso de 2 especies y por tanto al estudio de los sistemas con dos ecuaciones en diferencias, aunque, en principio, los métodos son generalizables a cualquier número de especies. Los sistemas, pues, de ecuaciones en diferencias que estudiaremos son de la forma:

$$x_{n+1} = a_{11}\, x_n + a_{12}\, y_n + f(n)$$
$$y_{n+1} = a_{21}\, x_n + a_{22}\, y_n + g(n)$$

donde a_{11}, a_{12}, a_{21} y a_{22} son constantes.

El problema es determinar funciones x_n e y_n que satisfagan estas ecuaciones. Cuando f(n) = g(n) = 0, el sistema se denomina **homogéneo**.

2.- RESOLUCION DEL CASO HOMOGÉNEO (EJEMPLO : UN MODELO DE COMPETICION DE ESPECIES)

Para la resolución del sistema homogéneo consideraremos por ejemplo el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x_{n+1} = 2\, x_n - y_n \\ y_{n+1} = -\, x_n + 2\, y_n \end{array}\right\}$$

que describe la influencia de dos especies competitivas en sus poblaciones y supongamos que x_o = 100 e y_o = 150. Calcularemos las poblaciones de ambas especies en cualquier periodo de tiempo.

<u>Solución</u>:

Resolveremos el sistema de ecuaciones planteando una ecuación de segundo orden a partir de él.

Primero sustituimos n+1 por n en la primera ecuación:

$$x_{n+2} = 2\, x_{n+1} - y_{n+1}$$

Segundo, sustituimos la segunda ecuación en la ecuación anterior:

$$x_{n+2} = 2\, x_{n+1} - y_{n+1} = 2\, x_{n+1} + x_n - 2\, y_n$$

Tercero, sustituimos y_n arriba por su expresión al despejarla de la primera ecuación del sistema:

$$x_{n+2} = 2\, x_{n+1} + x_n - 2\, y_n = 2\, x_{n+1} - 3\, x_n + 2\, x_{n+1} = 4\, x_{n+1} - 3\, x_n$$

Así obtenemos una ecuación en diferencias lineal de segundo orden (homogénea en este caso) cuya solución pasamos a obtener :

$$x_{n+2} - 4\, x_{n+1} + 3\, x_n = 0$$

La ecuación auxiliar es $\lambda^2 - 4\,\lambda + 3 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \dfrac{4 \pm 2}{2} \;\Rightarrow$

$$\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 1.$$

La solución general es $x_n = k_1\, 3^n + k_2\, 1^n = k_1\, 3^n + k_2$

Entonces $y_n = 2\, x_n - x_{n+1} = 2\,(k_1\, 3^n + k_2) - (k_1\, 3^{n+1} + k_2) = k_2 - k_1\, 3^n$

$$\left.\begin{array}{l} x_o = 100 = k_1 + k_2 \\ y_o = 150 = - k_1 + k_2 \end{array}\right\} \Rightarrow\; k_1 = -25,\ C_2 = 125.$$

Por tanto, $x_n = 125 - 25 \cdot 3^n$ e $y_n = 125 + 25 \cdot 3^n$

La primera población se extinguirá rápidamente: $x_o = 100$, $x_1 = 50$, $x_2 = 0$, mientras la segunda no dejaría de aumentar.

3.- RESOLUCIÓN DEL CASO NO HOMOGÉNEO

La resolución de un sistema no homogéneo de la forma:

$$x_{n+1} = a_{11}\, x_n + a_{12}\, y_n + f(n)$$
$$y_{n+1} = a_{21}\, x_n + a_{22}\, y_n + g(n)$$

puede hacerse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= a_{11}\, x_{n+1} + a_{12}\, y_{n+1} + f(n+1) = \\ &= a_{11}\, x_{n+1} + a_{12}\,(a_{21}\, x_n + a_{22}\, y_n + g(n)) + f(n+1) = \\ &= a_{11}\, x_{n+1} + a_{12}\, a_{21}\, x_n + a_{12}\, a_{22}\, y_n + a_{12}\, g(n) + f(n+1) \end{aligned}$$

De la primera ecuación $a_{12}\, y_n = x_{n+1} - a_{11}\, x_n - f(n)$ y tenemos

$$x_{n+2} = a_{11}\, x_{n+1} + a_{12}\, a_{21}\, x_n + a_{22}\, x_{n+1} - a_{22}\, a_{11}\, x_n - a_{22}\, f(n) + a_{12}\, g(n) + f(n+1)$$

Por tanto, x_n satisface la ecuación de segundo orden:

$$x_{n+2} - (a_{11} + a_{12})\, x_{n+1} + (a_{22}\, a_{11} - a_{12}\, a_{21})\, x_n = - a_{22}\, f(n) + a_{12}\, g(n) + f(n+1)$$

que puede resolverse por el método de variación de constantes.

<u>Ejemplo</u>:

$$\left.\begin{array}{l} x_{n+1} = 2\, x_n - y_n - 1 \\ y_{n+1} = -\, x_n + 2\, y_n + 2 \end{array}\right\}$$

Supongamos que $x_o = 100$ e $y_o = 150$.

- <u>Solución</u>:

$$x_{n+2} = 2\, x_{n+1} - y_{n+1} - 1 = 2\, x_{n+1} + (\, x_n - 2\, y_n - 2\,) - 1 = 2\, x_{n+1} + x_n - 2\, y_n - 3 =$$
$$= 2\, x_{n+1} + x_n + (\, 2\, x_{n+1} - 4\, x_n + 2\,) - 3 = 4\, x_{n+1} - 3\, x_{n+1} - 1$$

Por tanto, debemos resolver la ecuación

$$x_{n+2} - 4\, x_{n+1} + 3\, x_n = -\, 1$$

La ecuación auxiliar es $\lambda^2 - 4\,\lambda + 3 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \dfrac{4 \pm 2}{2} \;\Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 1.$

La solución general es $x_n = k_n\, 3^n + l_n\, 1^n = k_n\, 3^n + l_n$, donde

$$k_n = k_o + \frac{1}{6}\left(-1 + \frac{-1}{3} + \frac{-1}{3^2} + \ldots + \frac{-1}{3^{n-1}} \right) = k_o + \frac{-1}{6}\,\frac{1 - \dfrac{1}{3^n}}{1 - \dfrac{1}{3}} = k_o + \frac{-1}{4}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$$

$$l_n = l_o + \frac{-1}{2}\,(\,(-1) + (-1) + \ldots + (-1)\,) = l_o + \frac{n}{2}$$

Por tanto,

$$x_n = \left(k_o + \frac{-1}{4}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)\right) 3^n + l_o + \frac{n}{2} = \left(k_o - \frac{1}{4}\right) 3^n + l_o + \frac{1}{4} + \frac{n}{2}$$

Entonces

$$y_n = 2\, x_n - x_{n+1} - 1 = \left(\left(2\, k_o - \frac{1}{2}\right) 3^n + 2\, l_o + \frac{1}{2} + n\right) -$$
$$- \left(\left(k_o - \frac{1}{4}\right) 3^{n+1} + l_o + \frac{1}{4} + \frac{n+1}{2}\right) - 1 =$$
$$= \left(-\, k_o + \frac{1}{4}\right) 3^n + l_o - \frac{3}{4} + \frac{n-1}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_o = 100 = \left(k_o - \dfrac{1}{4}\right) + l_o + \dfrac{1}{4} = k_o + l_o \\[2ex] y_o = 150 = \left(-\, k_o + \dfrac{1}{4}\right) + l_o - \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{2} = -\, k_o + l_o - 1 \end{array}\right\} \Rightarrow k_o = -\,\frac{51}{2}\,,\ l_o = \frac{251}{2}\ .$$

APÉNDICE

MATRICES

1.- Matrices numéricas.

2.- Operaciones con matrices.

3.- Determinante de una matriz.

4.- Matriz inversa.

5.- Resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

1: MATRICES

1.- MATRICES NUMERICAS

Una *matriz de orden (m,n)* es una tabla de números de m filas y n columnas.

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & -7 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -6 & 0 \\ 5 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix} \text{ es una matriz de orden (3,4).}$$

Una notación muy útil es el *doble subíndice.* Supongamos que un investigador efectúa un experimento repetidas veces bajo diversas condiciones usando diferentes tratamientos. Al número de tratamientos lo llamamos *m* y al número de medidas en cada tratamiento *n*. Si n y m fueran grandes, el alfabeto no contendría bastantes letras para denotar cada medida y no seria útil sólo un índice como x_1, x_2,... . Es conveniente introducir un segundo subíndice. Así:

x_{23} (se lee x dos tres)

quiere decir tercera medida del segundo tratamiento. Las medidas forman la matriz:

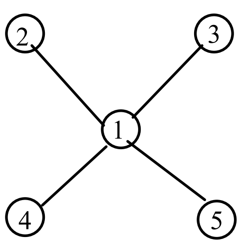
$$\begin{array}{c c}
 & \text{Medida nº} \\
\text{Tratamiento nº} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{array} \\
\hline
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \dots \\ m \end{array} & \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & x_{m3} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}
\end{array}$$

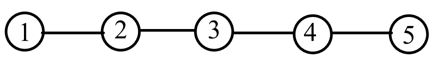
Cada x se llama *elemento o componente* de la matriz. La componente en la fila i y la columna j es x_{ij}. El primer subíndice designa a la fila i y el segundo a la columna j en la que está situado el elemento. En nuestra notación, i recorre de 1 a m, mientras j va de 1 a n.

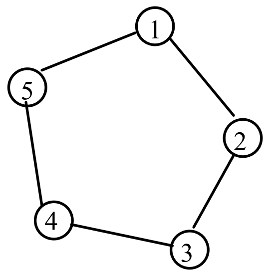
Cuando hablemos de líneas nos referiremos tanto a filas como a columnas.

Ejemplo:

Los vértices son átomos y las aristas enlaces químicos. Forman una matriz de la siguiente forma: los átomos son numerados en cualquier orden. Si existe un enlace entre dos átomos, asignamos el numero 1, en otro caso, el numero 0. Los números se recogen en una matriz cuadrada como se muestra a continuación. Tales matrices se llaman *matrices de incidencia.*







$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Veamos algunos tipos particulares de matrices:

Matriz nula es la que tiene nulos todos sus elementos.

Matriz fila es la que tiene solo una fila, es decir, es de la forma: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$.

Matriz columna es la que solo tiene una columna, o sea, es de la forma: $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$.

Matriz transpuesta de una matriz A es la que se obtiene al intercambiar ordenadamente las filas por las columnas.

Así, la matriz transpuesta de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 5 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{es} \qquad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 8 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Matriz cuadrada es la que tiene el mismo numero de filas que de columnas, es decir, m=n. Una matriz cuadrada de orden (n,n) diremos simplemente que es de orden n. En una matriz cuadrada se llama **diagonal principal** al conjunto de términos de la forma a_{ii}. Así, en la matriz cuadrada

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 0 & 7 & 2 \\ 6 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

la diagonal principal está formada por los números 3, 7 , -4.

Matriz diagonal es una matriz cuadrada en la que los términos que no están en la diagonal principal valen 0, es decir, es aquella en la que $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

Por ejemplo, $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

Matriz identidad es una matriz diagonal en la que los términos de la diagonal principal valen 1, es decir, es aquella en la que $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$, y $a_{ij} = 1$ si $i = j$.

Por ejemplo, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Matriz simétrica es una matriz cuadrada en la que $a_{ij} = a_{ji}$ para todo i,j. También puede decirse que es la que coincide con su transpuesta.

Por ejemplo, $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

2.- OPERACIONES CON MATRICES

2.1.- SUMA DE MATRICES

Dadas dos matrices A y B de orden (m,n), se llama matriz suma de las dos a otra matriz C de orden (m,n), cuyos términos se obtienen sumando los respectivos términos de las matrices A y B.

Así pues, para todo i, j, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 4 & -8 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -6 & 5 \\ 3 & 9 & -3 \end{pmatrix}$$

Ejemplo: Supongamos que la capacidad de tolerar la feniltiocarboamida es hereditaria. Se recogió la siguiente muestra:

	Número de hijos	
Tipo parental	tolerante	no tolerante
tolerante x tolerante	88	13
tolerante x no tolerante	52	25
no tolerante x no tolerante	0	19

Los datos forman una matriz 3 x 2 que denotaremos por A. Más tarde se recogió una muestra más grande. Con la misma ordenación, la nueva matriz era:

$$B = \begin{pmatrix} 122 & 18 \\ 102 & 73 \\ 0 & 91 \end{pmatrix}$$

Es bastante natural ponderar los datos, es decir, añadir las correspondientes frecuencias. Esta operación se define como la adición de dos matrices. Así:

$$A + B = \begin{pmatrix} 88 & 13 \\ 52 & 25 \\ 0 & 19 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 122 & 18 \\ 102 & 73 \\ 0 & 91 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 210 & 31 \\ 154 & 98 \\ 0 & 110 \end{pmatrix}.$$

Es fácil comprobar que el conjunto de todas las matrices de orden (m,n) con la operación suma tiene estructura de grupo conmutativo, porque es ley de composición interna y tiene las propiedades asociativa, elemento neutro, elemento simétrico y conmutativa.

2.2.- PRODUCTO DE UN NÚMERO REAL POR UNA MATRIZ

Dada una matriz A de orden (m,n) y un numero real k, se llama matriz producto de ambos a una matriz B de orden (m,n), cuyos términos se obtienen multiplicando k por cada termino de A. Así pues, para todo i,j, $b_{ij} = k\, a_{ij}$.

Ejemplo:

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 9 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 15 \\ 9 & 27 & 18 \end{pmatrix}$$

Es fácil comprobar que la operación anterior cumple la propiedad distributiva respecto de la suma de matrices: $k\cdot(A+B) = k\cdot A + k\cdot B$, y respecto de la suma de números: $(k+h)\cdot A = k\cdot A + h\cdot A$.

2.3.- PRODUCTO DE MATRICES

Dada una matriz A de orden (m,n) y otra matriz B de orden (n,p), se llama matriz producto de las dos a otra matriz C de orden (m,p), cuyos términos se obtienen aplicando la formula:

$$c_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{jk}$$

Así pues, si:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mp} \end{pmatrix}$$

donde los términos c_{ik} se obtienen de la siguiente forma:

$$c_{11} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\, b_{j1} = a_{11}\, b_{11} + a_{12}\, b_{21} + \dots + a_{1n}\, b_{n1}$$

Es decir, el término que ocupa la primera fila y la primera columna de la matriz C se obtiene multiplicando cada término de la primera fila de A por el correspondiente término de la primera columna de B, y sumando los productos obtenidos.

$$c_{12} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\, b_{j2} = a_{11}\, b_{12} + a_{12}\, b_{22} + ... + a_{1n}\, b_{n2}$$

Notemos que para que el producto de matrices pueda realizarse, el numero de columnas de la primera ha de ser igual al de filas de la segunda. La matriz obtenida como resultado tiene el mismo numero de filas que la primera y el mismo numero de columnas que la segunda.

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 8 & -7 \\ 7 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Ejemplo: Supongamos que en una encuesta 88 familias no tienen hijos, 217 familias tienen un hijo y 370 tienen dos hijos. Entonces, el número total de hijos se puede calcular mediante el producto de dos matrices:

$$(88, 217, 370) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 88 \text{ x } 0 + 217 \text{ x } 1 + 370 \text{ x } 2 = 957$$

Notemos que el producto de matrices tiene las <u>propiedades asociativa y distributiva respecto de la suma,</u> pero no la propiedad conmutativa.

Ejemplo: $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

3.- DETERMINANTE DE UNA MATRIZ

Dada una matriz cuadrada $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$ de orden n, podemos obtener a partir de ella un numero llamado **determinante** de dicha matriz.

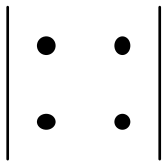
Como la definición de determinante para el caso de un n cualquiera es un poco complicada, daremos en primer lugar la definición de determinante en los casos $n = 2$ y $n = 3$, y más adelante veremos la forma de calcular los determinantes de orden superior.

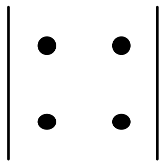
El determinante de la matriz A se representa así: $|A|$, o así: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$

3.1.- DETERMINANTES DE ORDEN 2

Dada una matriz cuadrada de orden 2: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ el determinante de esta matriz es el número obtenido así: $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$. Lo cual queda expresado en el esquema:

SIGNO + SIGNO -





<u>Ejemplo</u>: $\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 4 \cdot 5 - 8 \cdot 3 = -4$

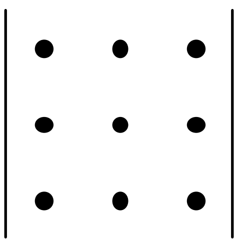
3.2.- DETERMINANTES DE ORDEN 3

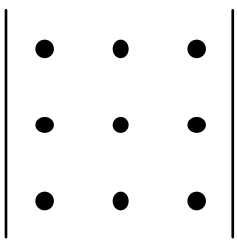
Dada una matriz cuadrada de orden 3: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ el determinante de esta matriz es el número obtenido así:

$(a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}) + (a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}) + (a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}) - (a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}) - (a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}) - (a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32})$

lo cual queda expresado en el siguiente esquema, llamado *regla de Sarrus:*

SIGNO + SIGNO -





<u>Ejemplo</u>: $\begin{vmatrix} 8 & 4 & -3 \\ 2 & -7 & 5 \\ 6 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 8 \cdot (-7) \cdot 9 + (-3) \cdot 2 \cdot 1 + 4 \cdot 5 \cdot 6 - (-3) \cdot (-7) \cdot 6$

$- 4 \cdot 2 \cdot 9 - 8 \cdot 5 \cdot 1 = - 504 - 6 + 120 - 126 - 72 - 40 = - 628$

3.3.- PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

Admitiremos, sin demostración, las siguientes propiedades de los determinantes:

1ª.- Si en un determinante se cambian ordenadamente las filas por las columnas respectivas, el valor del determinante no varía ($|A| = |A^t|$).

Ejemplo: $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 7 \\ 3 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 106$

Cambiando la primera fila por la primera columna, etc. , tenemos $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \\ 5 & 7 & -4 \end{vmatrix} = 106$

En virtud de esta propiedad, todo lo que se diga en adelante para las filas es válido para las columnas, y viceversa.

2ª.- Si en un determinante se intercambian entre sí dos filas (o dos columnas), el determinante conserva el mismo valor absoluto, pero cambia de signo.

Ejemplo: Al intercambiar las filas 1 y 2 en el ejemplo del apartado 1º : $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 7 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & -2 & -4 \end{vmatrix} = -106$

Si intercambiáramos las columnas 1ª y 3ª tendríamos:

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 7 & 0 & -1 \\ -4 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -106$$

3ª.- Un determinante con dos filas (o columnas) iguales, vale 0:

Ejemplo: El determinante $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 3 & -7 & -7 \\ 2 & 8 & 8 \end{vmatrix}$ tiene iguales las columnas 2ª y 3ª, por tanto vale 0.

4ª.- Si en un determinante multiplicamos todos los términos de una fila (de una columna) por un número, el valor del determinante queda multiplicado por dicho número.

Ejemplo: Si en el determinante $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 7 \\ 3 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 106$ multiplicamos la segunda fila por 3 tenemos: $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -3 & 0 & 21 \\ 3 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 318$

5ª.- Si una fila (o una columna) de un determinante tiene un factor común, este puede sacarse fuera del determinante.

Ejemplo: En el determinante $\begin{vmatrix} 5 & 9 & -2 \\ -5 & 1 & 7 \\ 10 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ observamos que la primera columna tiene el factor 5 común. Entonces, lo podemos sacar fuera del determinante, y tenemos:

$$5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 9 & -2 \\ -1 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

6ª.- Un determinante con dos filas (o dos columnas) proporcionales, vale 0.

Ejemplo: El determinante $\begin{vmatrix} 7 & 2 & -5 \\ -8 & 12 & 4 \\ -6 & 9 & 3 \end{vmatrix}$ tiene proporcionales las filas 2ª y 3ª. En la 2ª podemos sacar 4 factor común y en la 3ª podemos sacar 3 factor común y nos queda un determinante con dos filas iguales, el cual vale 0.

7ª.- El determinante del producto de dos matrices cuadradas es igual al producto de los determinantes de las matrices respectivas.

Ejemplo: $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 5 & -9 \end{pmatrix}$ y los determinantes cumplen $6 \cdot 11 = 66$.

3.4.- DESARROLLO DE UN DETERMINANTE POR ADJUNTOS

Dada una matriz, si borramos algunas filas o columnas obtenemos una submatriz de la anterior. A los determinantes de las submatrices cuadradas de orden k los llamamos menores de orden k de la matriz.

Ejemplo: En la matriz $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -7 & 4 & 2 \\ 5 & 9 & 8 & 3 \end{pmatrix}$ algunos menores de orden 2 son $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -7 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -7 & 4 \\ 9 & 8 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}$, etc y algunos menores de orden 1 son: 3 , 0 , 9 , etc.

Definición: Dado un determinante | A | de orden n, y dado un elemento a_{ij} de él, se llama adjunto de a_{ij} al numero que resulta de multiplicar $(-1)^{i+j}$ por el menor de orden n-1 obtenido suprimiendo la fila y la columna a las que pertenece a_{ij}. Al adjunto del elemento a_{ij} se le representa por A_{ij}. Llamamos matriz de adjuntos, a la matriz siguiente:

$$A^d = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Por tanto, si tenemos un determinante de orden 2: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ los adjuntos de los cuatro elementos son:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot a_{22} = a_{22} \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot a_{21} = -a_{21}$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot a_{12} = -a_{12} \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot a_{11} = a_{11}$$

Para un determinante de orden 3: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ tenemos que:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \text{ etc.}$$

<u>Propiedad</u>:

El valor de un determinante es igual a la suma de los productos de los elementos de una línea por sus adjuntos respectivos.

Así, si tenemos un determinante de orden 3: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ y cogemos, por ejemplo, la primera fila, tenemos que:

$$|A| = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Si desarrollamos por la segunda columna tenemos que:

$$|A| = a_{12} \cdot A_{12} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{32} \cdot A_{32} = - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

<u>Ejemplo</u>: Hallar el valor del determinante $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}$

Desarrollando por una línea cualquiera, por ejemplo la primera, tenemos:

$$|A| = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 13 - 3 \cdot (-6) + 5 \cdot 5 = 26 + 18 + 25 = 69.$$

La propiedad anterior nos permite el cálculo de determinantes de orden superior a 3 reduciéndolos a determinantes de orden 2.

<u>Ejemplo</u>: Hallar el valor del determinante $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & -2 \end{vmatrix}$

Conviene desarrollar por la línea que contenga mayor número de ceros. Tomando la tercera fila tenemos:

$$|A| = 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 5 \\ 3 & -4 & -2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & -4 & -2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= (-2) \cdot 120 + 1 \cdot (-21) = -261$$

Propiedad: Si en un determinante se suma a una línea otra u otras líneas paralelas multiplicadas por números cualesquiera, el valor del determinante no cambia.

Como consecuencia, de esto se deduce que para calcular el valor de un determinante desarrollando por una línea, conviene a veces sumar a una línea otra u otras líneas paralelas multiplicadas por números adecuados para obtener el mayor numero posible de ceros en la línea por la que hemos de desarrollar.

Ejemplo: Para calcular el determinante $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ -5 & 3 & 8 & 1 \\ -6 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ vamos a desarrollar por la segunda fila, pero antes transformaremos este determinante en otro del mismo valor que tenga en la segunda fila el mayor numero posible de ceros. Sumemos a la 3ª columna las columnas 1ª y 4ª, y tendremos: $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ -5 & 3 & 4 & 1 \\ -6 & 4 & -3 & 1 \end{vmatrix}$.

Sumemos a la 4ª columna la 1ª columna multiplicada por -2 y tendremos:

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 & -14 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 3 & 4 & 11 \\ -6 & 4 & -3 & 13 \end{vmatrix}$$

Desarrollando ahora por la segunda fila tenemos:

$$-\begin{vmatrix} 1 & 3 & -14 \\ 3 & 4 & 11 \\ 4 & -3 & 13 \end{vmatrix} = -450$$

4.- MATRIZ INVERSA

Dada una matriz cuadrada A de orden n, se llama matriz inversa de A a otra matriz cuadrada A^{-1} del mismo orden tal que:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I,$$

donde I es la matriz identidad de orden n.

Observemos que no todas las matrices cuadradas tienen inversa. En efecto, sea la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Si tuviera inversa, esta debería de ser de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, cumpliéndose:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De aquí se deduce:

$$\begin{cases} a + 2c = 1 \\ b + 2d = 0 \\ 2a + 4c = 0 \\ 2b + 4d = 1 \end{cases}$$

y este sistema no tiene solución, por tanto no hay matriz inversa de la dada.

Puede demostrarse que **una matriz cuadrada A tiene inversa si y sólo si su determinante | A | es distinto de cero**. En tal caso, la matriz inversa es:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}}$$

donde los A_{ij} son los adjuntos de los elementos situados en los lugares (i,j). Observemos que en la expresión de la matriz inversa el adjunto del elemento que ocupa el lugar (i,j) se sitúa en el lugar (j,i). Una matriz, tal que su determinante es distinto de cero, y que, en consecuencia, tiene matriz inversa se llama **matriz regular** o **no singular.**

<u>Ejemplo</u>: Hallar la matriz inversa de $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

En primer lugar comprobemos que $|A| \neq 0$: $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 40 \neq 0$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 12, \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -6$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2, \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -8, \text{ etc.}$$

Por tanto, la matriz inversa es: $A^{-1} = \frac{1}{40} \cdot \begin{pmatrix} 12 & -8 & 2 \\ -6 & 4 & 9 \\ -2 & -12 & 3 \end{pmatrix}$

5.- RESOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Un sistema de **m** ecuaciones lineales con **n** incógnitas es un conjunto de m igualdades del tipo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Los números a_{11}, a_{12}, ..., a_{mn} son, generalmente, conocidos y se llaman **coeficientes**.
Los números b_1, b_2, ..., b_m son también conocidos y se llaman **términos independientes**.
Los números x_1, x_2, ..., x_n son desconocidos y se llaman **incógnitas**.
Mientras no digamos otra cosa supondremos que todos los números anteriores son reales.
Observemos que las ecuaciones son lineales y de primer grado.

Ejemplo:

$$\begin{cases} 9x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + x_3 - 8x_4 = 0 \\ 6x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$$

es un sistema de 3 ecuaciones lineales con 4 incógnitas.

En el resto del tema, mientras no digamos lo contrario, cuando hablemos de sistemas nos referiremos a sistemas de m ecuaciones lineales con n incógnitas.

5.1.- CLASIFICACIÓN DE LOS SISTEMAS LINEALES

Dado un sistema de ecuaciones lineales, se llama **solución** de dicho sistema a un conjunto de n números: α_1, α_2, ..., α_n tales que al sustituirlos en las igualdades, x_1 por α_1, x_2 por α_2, ..., x_n por α_n, dichas igualdades se cumplen efectivamente.

Interpretación geométrica de los sistemas lineales:

Puede ocurrir que un sistema tenga una única solución, que no tenga ninguna o que tenga infinitas. Para ilustrar esto, consideramos el siguiente sistema lineal de 2 ecuaciones con 2 incógnitas.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

Notemos que las ecuaciones $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$ y $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$ representan 2 rectas en el plano. Si las dos rectas intersectan en un punto, hay una única solución dada por las coordenadas del punto de la intersección. Si las rectas son coincidentes, todo punto en la recta da una solución. Finalmente, si las rectas son paralelas, entonces no hay ningún punto de la intersección y el sistema no tiene solución.

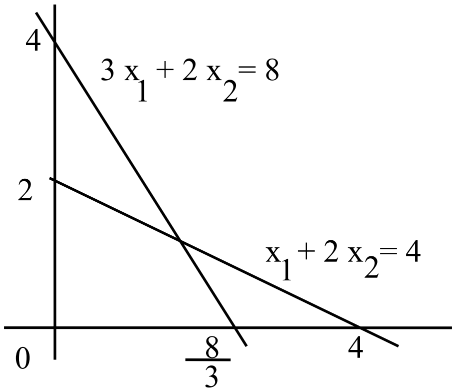
Ejemplo:

(a) El sistema $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 = 8 \end{cases}$ tiene una única solución, que es $x_1 = 2$, $x_2 = 1$.(Figura 1.a)

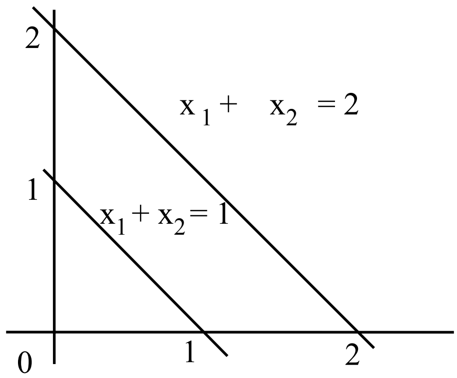
(b) El sistema $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$ no tiene ninguna solución. (Figura 1.b)

(c) El sistema $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 12 \\ 6x_1 + 8x_2 = 24 \end{cases}$ tiene infinitas soluciones, tales como:

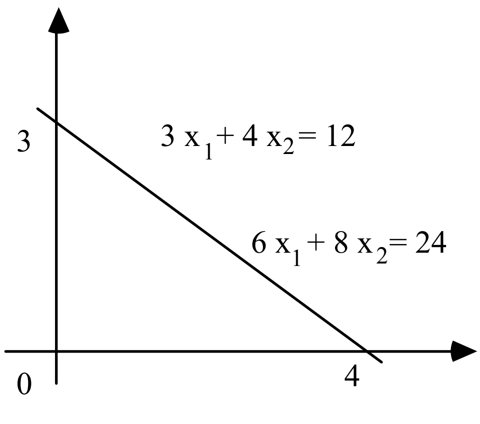
$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1.5 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 0 \end{cases}$, etc. (Figura 1.c)



(a) rectas que se intersectan en un punto



(b) rectas paralelas



(c) rectas coincidentes

Figura 1

Todas las soluciones de este último sistema pueden obtenerse dando a λ todos los valores reales posibles en la expresión $\begin{cases} x_1 = \lambda \\ x_2 = \dfrac{-3\lambda + 12}{4} \end{cases}$, la cual se llama **solución general** del sistema.

Según el número de soluciones los sistemas se clasifican en **compatibles** (si tienen alguna solución) e **incompatibles** (si no tienen ninguna solución). Además, los sistemas compatibles se clasifican en **determinados** (si tienen solución única) e **indeterminados** (si tienen infinitas soluciones).

5.2.- MÉTODO DE REDUCCIÓN O DE GAUSS PARA LA RESOLUCIÓN DE SISTEMAS

Dos **sistemas** de ecuaciones lineales se dicen **equivalentes** cuando tienen las mismas soluciones. Una forma de obtener un sistema equivalente a uno dado es sustituir una de sus ecuaciones por la ecuación que resulta de multiplicar la ecuación sustituida por un número distinto de cero, y sumarle las demás ecuaciones multiplicadas por números cualesquiera.

Resolver un sistema es hallar todas sus soluciones.

El método de Gauss para la resolución de sistemas consiste en aplicar la propiedad anterior para obtener sistemas equivalentes cada vez más sencillos. Los pasos a seguir son los siguientes:

1.- Se colocan las ecuaciones de forma que $a_{11} \neq 0$.

2.- Se multiplica la primera ecuación por a_{21} y la segunda por a_{11} y se restan. Se sustituye la segunda ecuación por la ecuación obtenida.

3.- Se multiplica la primera ecuación por a_{31} y la tercera por a_{11} y se restan. Se sustituye la tercera ecuación por la ecuación obtenida.

4.- El proceso continúa con las demás ecuaciones con lo cual llegaremos a un sistema de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad a'_{m2}x_2 + \dots + a'_{mn}x_n = b'_m \end{cases}$$

5.- Supongamos que $a'_{22} \neq 0$; si no lo fuese, se cambiaría el orden de las ecuaciones (sin considerar la primera) para que el término que ocupa este lugar sea distinto de cero. Se repite el proceso anterior con todas las ecuaciones menos la primera, y se llegará a un sistema de la forma:

$$\left\{\begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ a''_{33}x_3 + \ldots + a''_{2n}x_n = b''_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a''_{m3}x_3 + \ldots + a''_{mn}x_n = b''_m \end{array}\right.$$

6.- El proceso anterior se va repitiendo sucesivamente para obtener al final un sistema en forma "de escalera":

$$\left\{\begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ a''_{33}x_3 + \ldots + a''_{2n}x_n = b''_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a'''_{mn}x_n = b'''_m \end{array}\right.$$

Si al realizar el proceso anterior aparecen dos ecuaciones iguales, una de ellas puede suprimirse.

También se puede suprimir una ecuación que sea igual a otra multiplicada por un número distinto de cero.

También se puede suprimir una ecuación del tipo $0 \cdot x_i = 0$, ya que no aporta nada nuevo, porque cualquier x_i es solución de esta ecuación.

Si aparece alguna ecuación del tipo $0 \cdot x_i = d$, con $d \neq 0$, el sistema es incompatible, porque no hay ningún x_i que cumpla dicha ecuación.

Veamos ahora los casos que pueden presentarse según el número de ecuaciones y de incógnitas:

a.- <u>Igual número de ecuaciones que de incógnitas</u>.

Este caso corresponde a $m = n$. De este caso, podemos distinguir los siguientes tres subcasos.

Caso a-1: Que $a_{11} \neq 0$, $a'_{22} \neq 0$, $a''_{33} \neq 0$, ..., $a'''_{mm} \neq 0$, es decir, que los m términos de subíndices iguales del sistema final sean distintos de cero.

Por ser $a'''_{mm} \neq 0$, de la última ecuación se deduce que: $x_n = \dfrac{b'''_m}{a'''_{mm}}$.

La penúltima ecuación permite calcular x_{n-1} sustituyendo el valor de x_n obtenido anteriormente, y así sucesivamente hasta obtener x_1, y el sistema es **determinado.**

Ejemplo:

Resolver el sistema:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 = -5 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -2 \\ -5x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 1 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = -6 \end{cases}$$

Multiplicando la primera ecuación por -2 y la segunda por 3 y sumándolas se obtiene la ecuación: $11x_2 - 7x_3 + 5x_4 = 4$,

y sustituimos la segunda ecuación del sistema por esta.

Multiplicando la primera ecuación por 5 y la tercera por 3 y sumándolas se obtiene la ecuación:

$$-11x_2 + x_3 - 11x_4 = -22,$$

y sustituimos la tercera ecuación del sistema por esta.

Multiplicando la primera ecuación por -4 y la cuarta por 3 y sumándolas se obtiene la ecuación: $x_2 - 5x_3 + x_4 = 2$,

y sustituimos la cuarta ecuación del sistema por esta.

Así pues, después de este primer paso se obtiene el sistema equivalente:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 = -5 \\ 11x_2 - 7x_3 + 5x_4 = 4 \\ -11x_2 + x_3 - 11x_4 = -22 \\ x_2 - 5x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

Sumando la segunda ecuación y la tercera se obtiene la ecuación $-6x_3 - 6x_4 = -18$, que después de simplificada por -6 queda así: $x_3 + x_4 = 3$, y sustituimos la tercera ecuación por esta.

Multiplicando la 4ª ecuación por -11 y sumándola a la 2ª, obtenemos $48x_3 - 6x_4 = -18$, que después de simplificar por 6 queda $8x_3 - x_4 = -3$.

Así pues, después de este segundo paso se obtiene el sistema equivalente:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 = -5 \\ 11x_2 - 7x_3 + 5x_4 = 4 \\ x_3 + x_4 = 3 \\ 8x_3 - x_4 = -3 \end{cases}$$

Multiplicando la tercera ecuación por -8 y sumándola a la cuarta se obtiene $-9x_4 = -27$, sustituimos la cuarta ecuación por esta.

Así pues, después de este tercer paso se obtiene el sistema equivalente:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 = -5 \\ \quad 11x_2 - 7x_3 + 5x_4 = 4 \\ \quad\quad x_3 + x_4 = 3 \\ \quad\quad -9x_4 = -27 \end{cases}$$

De la cuarta ecuación se deduce que $x_4 = 3$.

De la tercera ecuación se deduce que $x_3 = 0$.

De la segunda ecuación se deduce que $x_2 = -1$.

De la primera ecuación se deduce que $x_1 = 2$.

Por tanto, la solución del sistema es: $x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = 0, x_4 = 3$.

Caso a-2: Al realizar las operaciones obtenemos alguna ecuación del tipo $0 \cdot x_i = d$, con $d \neq 0$. Entonces, el sistema es **incompatible.**

Ejemplo: Resolver el sistema:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + 5x_2 - 13x_3 = 0 \end{cases}$$

Después de realizar el primer paso, el sistema se convierte en:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 3 \\ \quad -2x_2 + 3x_3 = -2 \\ \quad +10x_2 - 15x_3 = 3 \end{cases}$$

Después de realizar el segundo paso, el sistema se convierte en:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 3 \\ \quad -2x_2 + 3x_3 = -2 \\ \quad\quad 0x_3 = -7 \end{cases}$$

Como la última ecuación no tiene solución, el sistema es incompatible.

Caso a-3: Al realizar las operaciones aparecen dos ecuaciones iguales, o dos ecuaciones de forma que una es igual a la otra multiplicada por una constante, y además no hay ninguna incompatibilidad. Entonces, el sistema es **indeterminado.**

Ejemplo: Resolver el sistema:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 9x_3 = -10 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = -2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 14 \end{cases}$$

Después de realizar el primer paso, el sistema se convierte en:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 9x_3 = -10 \\ \quad 2x_2 - 4x_3 = 8 \\ \quad 11x_2 - 22x_3 = 44 \end{cases}$$

Observemos que, si simplificamos la segunda ecuación por 2 y la tercera por 11, obtenemos en ambos casos la ecuación $x_2 - 2x_3 = 4$, por lo que la tercera ecuación puede suprimirse y el sistema se convierte en:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 9x_3 = -10 \\ \quad\;\; x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$$

Si damos a x_3 un valor arbitrario λ tenemos $x_3 = \lambda$.

De la segunda ecuación se deduce: $x_2 = 4 + 2\lambda$.

De la primera ecuación se deduce: $x_1 = 2 - 3\lambda$.

Así pues, la solución general del sistema es $x_1 = 2 - 3\lambda$, $x_2 = 4 + 2\lambda$, $x_3 = \lambda$.

Dando a λ valores arbitrarios se van obteniendo soluciones particulares del sistema:

Para $\lambda = 0$: $x_1 = 2, x_2 = 4, x_3 = 0$.

Para $\lambda = 1$: $x_1 = -1, x_2 = 6, x_3 = 1$.

Para $\lambda = 2$: $x_1 = -4, x_2 = 8, x_3 = 2$.

Conviene tener en cuenta que la forma de expresar la solución general del sistema no es única. Así , en el ejemplo anterior, tanto la expresión $x_1 = \mu$, $x_2 = \frac{16-2\mu}{3}$, $x_3 = \frac{2-\mu}{3}$ como la expresión: $x_1 = \frac{16-3\sigma}{2}$, $x_2 = \sigma$, $x_3 = \frac{\sigma - 4}{2}$ son también soluciones generales del sistema.

b.- <u>Menor número de ecuaciones que de incógnitas</u>.

En este caso tenemos $m < n$. Después de realizar el proceso conocido se llega al final a un sistema de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + ... + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \quad\quad .... \\ \quad\quad a'''_{mi}x_i + ... + a'''_{mn}x_n = b'''_m \end{cases}$$

Podemos distinguir los siguientes subcasos:

Caso b-1: Si aparece alguna ecuación de la forma $0 \cdot x_i + ... + 0 \cdot x_n = d$, con $d \neq 0$, el sistema es **incompatible.**

<u>Ejemplo</u>: Resolver el sistema:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - 4x_2 - 7x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

Después de realizar el primer paso el sistema se convierte en:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 2 \\ \quad - 3x_2 - 5x_3 + x_4 = -3 \\ \quad - 6x_2 - 10x_3 + 2x_4 = -1 \end{cases}$$

Después de realizar el segundo paso el sistema se convierte en:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 2 \\ \quad - 3x_2 - 5x_3 + x_4 = -3 \\ \qquad 0x_3 + 0x_4 = 5 \end{cases}$$

Como la ultima ecuación no tiene solución, el sistema es incompatible.

Caso b-2: Si no aparece ninguna ecuación de la forma $0 \cdot x_i + ... + 0 \cdot x_n = d$, con $d \neq 0$, el sistema es **indeterminado.**

Ejemplo: Resolver el sistema:

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 - 6x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 4x_4 + 6x_5 = 4 \\ -2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 8x_4 + x_5 = 6 \end{cases}$$

Después de realizar el primer paso el sistema se convierte en:

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 - 6x_5 = 0 \\ \quad - 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 - 12x_5 = -6 \\ \quad 3x_2 + 21x_3 + 20x_4 - 9x_5 = 18 \end{cases}$$

Después de realizar el segundo paso el sistema se convierte en:

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 - 6x_5 = 0 \\ \quad - 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 - 12x_5 = -6 \\ \qquad 45x_3 + 45x_4 - 30x_5 = 30 \end{cases}$$

Si damos a x_4 un valor arbitrario λ y a x_5 un valor arbitrario μ, tenemos que $x_4 = \lambda$, $x_5 = \mu$.

De la tercera ecuación se deduce que: $x_3 = \frac{30-45\lambda+30\mu}{45} = \frac{2-3\lambda+2\mu}{3}$. De la segunda ecuación se deduce que: $x_2 = \frac{4+\lambda-5\mu}{3}$. De la primera ecuación se deduce que: $x_1 = 2+\mu$. La solución general del sistema es: $x_1 = 2+\mu$, $x_2 = \frac{4+\lambda-5\mu}{3}$, $x_3 = \frac{2-3\lambda+2\mu}{3}$, $x_4 = \lambda$, $x_5 = \mu$.

Dando a λ y a μ valores arbitrarios se van obteniendo soluciones particulares del sistema:

Para $\lambda = 0$, $\mu = 2$ es: $x_1 = 4$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$, $x_4 = 0$, $x_5 = 2$.

Para $\lambda = 2$, $\mu = 1$ es: $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{1}{3}$, $x_3 = -\frac{2}{3}$, $x_4 = 2$, $x_5 = 1$, etc.

c.- <u>Mayor número de ecuaciones que de incógnitas</u>.

En este caso tenemos $m > n$. Después de realizar el proceso conocido se llega al final a un sistema de la forma:

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a'''_{nn}x_n = b'''_n \end{array}\right\} \quad (*)$$

$$\begin{array}{r} a'''_{n+1n}x_n = b'''_{n+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a'''_{mn}x_n = b'''_m \end{array} \quad (**)$$

Podemos distinguir los siguientes subcasos:

Caso c-1: Si al calcular x_n en todas las ecuaciones (**) se obtiene el mismo valor en todas las ecuaciones, y además las ecuaciones (*) son del tipo del caso a-1, el sistema es **determinado.**

Ejemplo: Resolver el sistema:

$$\left\{\begin{array}{r} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -9 \\ -4x_1 + 7x_2 - 6x_3 = 13 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -2 \\ 2x_2 - 9x_3 = 1 \end{array}\right.$$

Después de realizar el primer paso el sistema se convierte en:

$$\left\{\begin{array}{r} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -9 \\ -5x_2 + 2x_3 = -23 \\ 5x_2 - 3x_3 = 22 \\ 2x_2 - 3x_3 = 7 \\ 2x_2 - 9x_3 = 1 \end{array}\right.$$

Después de realizar el segundo paso el sistema se convierte en:

$$\left\{\begin{array}{r} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -9 \\ -5x_2 + 2x_3 = -23 \\ -x_3 = -1 \\ -11x_3 = -11 \\ -41x_3 = -41 \end{array}\right.$$

De las tres últimas ecuaciones se deduce que $x_3 = 1$. De la segunda ecuación se deduce que $x_2 = 5$. De la primera ecuación se deduce que $x_1 = 4$. Por tanto, la solución del sistema es: $x_1 = 4$, $x_2 = 5$, $x_3 = 1$.

Caso c-2: Si al realizar el proceso podemos suprimir algunas ecuaciones, de forma que nos queden menos ecuaciones que incógnitas, y además, en las que quedan no aparece ninguna incompatibilidad, el sistema es **indeterminado.**

Ejemplo: Resolver el sistema:

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 4 \\ 2x_1 \qquad\quad + x_3 = 5 \\ x_1 - 6x_2 + 9x_3 = -3 \\ 5x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 6 \end{cases}$$

Después de realizar el primer paso el sistema se convierte en:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 4 \\ \quad - 9x_2 + 13x_3 = -7 \\ \quad - 9x_2 + 13x_3 = -7 \\ \quad - 18x_2 + 26x_3 = -14 \end{cases}$$

Podemos suprimir la tercera y la cuarta ecuación, porque son iguales a la segunda, y nos queda el sistema:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 4 \\ \quad - 9x_2 + 13x_3 = -7 \end{cases}$$

Dando a x_3 el valor arbitrario λ tenemos la solución del sistema:

$$x_1 = \frac{5-\lambda}{3}, \; x_2 = \frac{7+13\lambda}{9}, \; x_3 = \lambda.$$

Caso c-3: Si al calcular x_n en las ecuaciones (**) se obtienen valores distintos, o alguna de las ecuaciones del sistema final es del tipo $0 \cdot x_i = d$, con $d \neq 0$, el sistema es **incompatible.**

Ejemplo: Resolver el sistema:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 5 \\ x_1 \qquad\quad - x_3 = 2 \end{cases}$$

Después de realizar el primer paso el sistema se convierte en:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 0 \\ \quad - 9x_2 + 7x_3 = 1 \\ \quad 7x_2 + 2x_3 = 5 \\ \quad - 5x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

Después de realizar el segundo paso el sistema se convierte en:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 0 \\ \quad - 9x_2 + 7x_3 = 1 \\ \qquad\qquad 67x_3 = 52 \\ \qquad\quad - 26x_3 = 13 \end{cases}$$

De la tercera ecuación se deduce que $x_3 = \frac{52}{67}$, y de la cuarta que $x_3 = -\frac{1}{2}$, por tanto, al ser valores distintos el sistema es incompatible.

5.3.- EXPRESIÓN MATRICIAL DE UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

Dado un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

podemos expresarlo de esta otra forma, utilizando el producto de matrices:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .. \\ b_m \end{pmatrix}$$

ya que si multiplicamos las dos primeras matrices, obtenemos:

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .. \\ b_m \end{pmatrix}$$

y al igualar las dos matrices obtenemos el sistema de ecuaciones inicial.

Ejemplo: El sistema:

$$\begin{cases} -3x_1 + 7x_2 - 3x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 - 7x_2 + 8x_3 + 2x_4 = -1 \\ 3x_1 - 5x_2 \qquad - 2x_4 = -2 \end{cases}$$

puede expresarse matricialmente así: $\begin{pmatrix} -3 & 7 & -3 & 1 \\ 1 & -7 & 8 & 2 \\ 3 & -5 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Si el sistema tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas, es decir, m=n, y además la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$ tiene determinante $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$ distinto de cero, entonces el sistema se puede resolver por este procedimiento:

Después de haber escrito el sistema matricialmente $A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .. \\ b_n \end{pmatrix}$, observamos que por ser $|A| \neq 0$, la matriz A tiene inversa A^{-1}. Multiplicamos la igualdad anterior por A^{-1} en ambos miembros y tendremos:

$$A^{-1} \bullet A \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \bullet \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .. \\ b_n \end{pmatrix} \Rightarrow \quad I \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \bullet \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .. \\ b_n \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & ... & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & ... & A_{n2} \\ ... & ... & ... & ... \\ A_{1n} & A_{2n} & ... & A_{nn} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .. \\ b_n \end{pmatrix} ;$$

y a partir de aquí se deducen los valores de las incógnitas.

Ejemplo: Resolver matricialmente el sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 4 \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 2 \\ 4x_1 - 6x_3 = 11 \end{cases}$$

Expresemos el sistema matricialmente: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & -2 \\ 4 & 0 & -6 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix}$

Como $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & -2 \\ 4 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -30 \neq 0$, la matriz A tiene inversa, que es $A^{-1} = \frac{1}{-30} \begin{pmatrix} -30 & 18 & -6 \\ 10 & -12 & 4 \\ -20 & 12 & 1 \end{pmatrix}$.

Si realizamos el proceso explicado anteriormente, nos queda:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{-30} \begin{pmatrix} -30 & 18 & -6 \\ 10 & -12 & 4 \\ -20 & 12 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix}, \text{ es decir: } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{-30} \begin{pmatrix} -150 \\ 60 \\ -45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Por tanto, la solución del sistema es: $x_1 = 5,\ x_2 = -2,\ x_3 = \frac{3}{2}$.

5.4.- REGLA DE CRAMER

Aplicando un razonamiento parecido al visto en el apartado anterior, se puede demostrar el siguiente teorema, llamado **regla de Cramer.**

Dado un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

si el determinante de la matriz de coeficientes $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$ es distinto de cero, el sistema es determinado, y su solución es:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|} \;;\; x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|} \;;\; \dots ; x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}}{|A|}$$

es decir, la incógnita x_i se obtiene calculando el determinante que resulta al sustituir en | A | la columna i por la columna de los términos independientes, y dividendo este determinante por | A |.

Ejemplo: Resolver, utilizando la regla de Cramer, el sistema:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + \quad + x_3 = 7 \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 5 \end{cases}$$

Calculamos en primer lugar, el determinante | A | de los coeficientes: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & -3 \end{vmatrix} =$ $3 \neq 0$, por tanto el sistema es determinado. Su solución es:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 7 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & -3 \end{vmatrix}}{3} \;;\; x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & 7 & 1 \\ 3 & 5 & -3 \end{vmatrix}}{3} \;;\; x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 7 \\ 3 & 5 & 5 \end{vmatrix}}{3}$$

Por tanto, la solución del sistema es: $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = 2$, $x_3 = \frac{7}{3}$.

Observemos que la regla de Cramer permite el cálculo de cualquier incógnita sin necesidad de calcular previamente el resto.

5.5.- EJEMPLOS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE SISTEMAS DE ECUACIONES

Ejemplo 1: **Coexistencia de bacterias.**

Tres especies de bacterias coexisten en un tubo de ensayo y se alimentan de tres recursos. Supongamos que una bacteria de la i-ésima especie consume por termino medio una cantidad c_{ij} del recurso j-ésimo por día. Definimos $c_i = (c_{i1}, c_{i2}, c_{i3})$ como el vector de consumos para la i-ésima especie. Supongamos que $c_1 = (1,1,1)$, $c_2 = (1,2,3)$ y $c_3 = (1,3,5)$, y supongamos que cada día se suministran al tubo de ensayo 15.000 unidades del primer recurso, 30.000 unidades del segundo recurso y 45.000 unidades del tercer recurso. Suponiendo que todos los recursos se consumen, ¿cuales son las poblaciones de las tres especies que pueden coexistir en este ambiente?

Solución: Sean x_1, x_2 y x_3 las poblaciones de las tres especies que pueden coexistir por medio de los recursos. Los x_1 individuos de la primera especie consumen x_1 unidades de cada recurso. Los x_2 individuos de la segunda especie consumen x_2, $2x_2$ y $3x_2$ unidades del primer, segundo y tercer recurso, respectivamente. Los correspondientes consumos de la tercera especie son x_3, $3x_3$ y $5x_3$ unidades. Igualando el consumo total de cada recurso a la cantidad disponible, obtenemos

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 15000 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 30000 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 45000 \end{aligned}$$

Simplificando tenemos que

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 15000 \\ x_2 + 2x_3 &= 15000 \\ 2x_2 + 4x_3 &= 30000 \end{aligned} \qquad \text{o} \qquad \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 15000 \\ x_2 + 2x_3 &= 15000 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Este sistema no tiene solución única, pero $x_1 = x_3 = \frac{15000-x_2}{2}$. Las poblaciones de bacterias deben ser no negativas. Por tanto, $0 \leq x_2 \leq 15000$ y $0 \leq x_1 = x_3 \leq 7500$. La población total que puede coexistir es 15000 y las poblaciones de las tres especies cumplen que $x_1=x_3$ y $x_2 = 15000 - 2x_1$ si todos los recursos se consumen.

<u>Ejemplo 2</u>: Ajustar la reacción química:

$$NO_3H + Fe \rightarrow (NO_3)_3Fe + NO_3NH_4 + H_2O$$

<u>Solución</u>: Escribamos la reacción con los coeficientes buscados, que de momento son desconocidos:

$$x\ NO_3H + y\ Fe \rightarrow z\ (NO_3)_3Fe + t\ NO_3NH_4 + u\ H_2O$$

Los coeficientes x, y, z, u, de cada compuesto deben de ser números tales que la cantidad de átomos de cada elemento sea la misma en ambos lados de la igualdad.

Igualemos el N: $x = 3z + 2t$

Igualemos el O: $3x = 9z + 3t + u$

Igualemos el H: $x = 4t + 2u$

Igualemos el Fe: $y = z$

Por tanto, hemos de resolver el sistema: $\left\{ \begin{array}{l} x - 2t - 3z = 0 \\ 3x - 3t - u - 9z = 0 \\ x - 4t - 2u = 0 \\ z - y = 0 \end{array} \right.$

Después de realizar el primer paso el sistema se convierte en: $\left\{ \begin{array}{l} x - 2t - 3z = 0 \\ 3t - u = 0 \\ -2t - 2u + 3z = 0 \\ z - y = 0 \end{array} \right.$

Después de realizar el segundo paso el sistema se convierte en: $\left\{\begin{array}{l} x - 2t - 3z = 0 \\ 3t - u = 0 \\ - 8u + 9z = 0 \\ z - y = 0 \end{array}\right.$

Dando a y un valor arbitrario λ tenemos la solución del sistema:

$$x = \frac{30\lambda}{8} = \frac{15\lambda}{4}, \ y = \lambda, \ z = \lambda, \ t = \frac{3\lambda}{8}, \ u = \frac{9\lambda}{8}$$

Para cualquier valor de λ se obtiene una solución valida. No obstante, se suelen utilizar unos coeficientes que sean números enteros. La solución mas sencilla se obtiene haciendo
$\lambda = 8$.

Entonces: $x = 30, y = 8, z = 8, t = 3, u = 9$, es decir:

$$30\ NO_3H + 8\ Fe \rightarrow 8\ (NO_3)_3Fe + 3\ NO_3NH_4 + 9\ H_2O$$

Ejemplo 3: En una caja hay monedas de peseta, de duro y de dos duros. En total hay 153 monedas. Si las monedas de peseta fueran duros y viceversa, el valor total de la caja seria el doble del inicial, y si las monedas de duro fuesen de dos duros y viceversa, el valor de la caja seria $\frac{3}{2}$ del inicial. Hallar el número de monedas de duro.

Solución: Llamamos x_1, x_2, x_3 al número respectivo de monedas de peseta, duro y dos duros.

El valor inicial de la caja es: $x_1 + 5x_2 + 10x_3$.

El valor de la caja si hacemos el primer cambio es: $5x_1 + x_2 + 10x_3$.

El valor de la caja si hacemos el segundo cambio es: $x_1 + 10x_2 + 5x_3$.

Por tanto, podemos escribir el sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 153 \\ 2(x_1 + 5x_2 + 10x_3) = 5x_1 + x_2 + 10\,x_3 \\ \frac{3}{2}(x_1 + 5x_2 + 10x_3) = x_1 + 10x_2 + 5x_3 \end{array}\right.$$

El sistema puede escribirse así: $\left\{\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 153 \\ 3x_1 - 9x_2 - 10x_3 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 20x_3 = 0 \end{array}\right.$

Como nos interesa sólo la incógnita x_2, podemos aplicar la regla de Cramer, comprobando que el determinante de los coeficientes del sistema es distinto de cero:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -9 & -10 \\ 1 & -5 & 20 \end{vmatrix} = -306 \neq 0, \text{ por tanto, el sistema es determinado.}$$

El valor de x_2 es:

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 153 & 1 \\ 3 & 0 & -10 \\ 1 & 0 & 20 \end{vmatrix}}{-306} = \frac{-153 \cdot 70}{-306} = 35$$

Conviene tener en cuenta que en muchos problemas (como es el caso de éste) las soluciones deben ser números naturales. Por tanto, hemos de comprobar que la solución obtenida cumple este requisito.

Ejemplo 4: Repartir 1000 ptas. entre cuatro personas, de forma que la suma de la cantidad obtenida por la 1ª y la 4ª sea igual a la cantidad obtenida por la 2ª y la 3ª, que la suma de la cantidad obtenida por la 1ª y la 2ª sea igual a la suma de la cantidad obtenida por la 3ª y la 4ª, y que la 1ª reciba 100 pesetas más que la 3ª.

Solución: Llamando x_1, x_2, x_3, x_4 a la parte que recibe cada persona respectivamente, el enunciado da origen al siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1000 \\ x_1 + x_4 = x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 = x_3 + x_4 \\ x_1 - x_3 = 100 \end{array}\right.$$

Vamos a resolver este sistema escribiéndolo de esta forma: $\left\{\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1000 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_3 = 100 \end{array}\right.$

Después de realizar el primer paso el sistema se convierte en:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1000 \\ 2x_2 + 2x_3 = 1000 \\ 2x_3 + 2x_4 = 1000 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 900 \end{array}\right.$$

Después de realizar el segundo paso el sistema se convierte en:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1000 \\ 2x_2 + 2x_3 = 1000 \\ 2x_3 + 2x_4 = 1000 \\ 2x_3 + 2x_4 = 800 \end{array}\right.$$

Observando las dos últimas ecuaciones deducimos que el sistema es incompatible, es decir, no hay ningún reparto que cumpla las condiciones del enunciado.

Ejemplo 5: Una bolsa contiene 100 golosinas entre caramelos, confites y bombones. Cada caramelo vale 1 pta, cada confite 3 ptas, y cada bombón 10 ptas, y el valor total es 150 ptas. ¿Cuantas golosinas de cada clase hay en la bolsa?.

Solución: Llamando x_1, x_2, x_3 al número respectivo de golosinas de cada tipo, el enunciado origina el sistema: $\left\{\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 100 \\ x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 150 \end{array}\right.$

Después de realizar el primer paso el sistema se convierte en: $\left\{\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 100 \\ 2x_2 + 9x_3 = 50 \end{array}\right.$

Dando a x_3 un valor arbitrario λ tenemos que $x_3 = \lambda$, $x_2 = \frac{50-9\lambda}{2} = 25 - \frac{9\lambda}{2}$, $x_1 = 75 + \frac{7\lambda}{2}$

Aunque el sistema es indeterminado y tiene infinitas soluciones reales, el enunciado del problema nos indica que las soluciones deben de ser números naturales, por tanto, solo serán admisibles los valores de λ para los cuales las incógnitas son números naturales. Es inmediato comprobar que los valores son $\lambda = 2$ y $\lambda = 4$. Las soluciones respectivas son:

Para $\lambda = 2$: $x_1 = 82$, $x_2 = 16$, $x_3 = 2$.

Para $\lambda = 4$: $x_1 = 89$, $x_2 = 7$, $x_3 = 4$.