Derivada de una arcotangente

Queremos hallar la derivada de la siguiente función

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) \tag{1}$$

Sabemos que la derivada de la función arcotangente es la siguiente

$$\frac{d}{dx}\arctan u = \frac{\frac{du}{dx}}{1+u^2} \tag{2}$$

Aplicando pues a (1) la fórmula (2) se obtiene

$$\frac{d}{dx}\left(\arctan\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)\right) = \frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)}{1+\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2} \tag{3}$$

Vamos a aplicar la regla del cociente al numerador y a operar en el denominador

$$\frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)}{1+\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2} = \frac{\frac{(x^2-1)'\cdot(x^2+1)-(x^2-1)\cdot(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}}{\frac{(x^2+1)^2+(x^2-1)^2}{(x^2+1)^2}} \tag{4}$$

Como vemos los factores $(x^2+1)^2$ de ambos denominadores se cancelan y simplificando más

$$\frac{(x^2-1)'\cdot(x^2+1)-(x^2-1)\cdot(x^2+1)'}{(x^2+1)^2+(x^2-1)^2} = \frac{2x\cdot(x^2+1)-2x\cdot(x^2-1)}{(x^2+1)^2+(x^2-1)^2} \tag{5}$$

$$= \frac{2x^3+2x-2x^3+2x}{x^4+2x^2+1+x^4-2x^2+1} = \frac{4x}{2x^4+2} = \frac{2x}{x^4+1}$$

Por lo tanto

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\arctan\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)\right) = \frac{2x}{x^4+1}}$$