Los números irracionales como fracciones continuas

La descomposición en fracciones continuas de un número irracional da lugar siempre a curiosas regularidades. Vamos a calcular el valor de:

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}} \tag{1}$$

Como vemos que el patrón se repite podemos escribir sencillamente

$$x=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}}}} \tag{2}$$

y como resultará obvio

$$x=1+\frac{1}{x} \tag{3}$$

que se reduce a una ecuación de segundo grado

$$x^2=x+1 \qquad \text{o lo que es lo mismo} \qquad x^2-x-1=0 \tag{4}$$

cuyas soluciones son

$$x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{y} \qquad x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \tag{5}$$

La solución x_1 se conoce con el nombre de número aúreo y se representa también por φ.

De las ecuaciones (1) y (2) resulta pues que

$$\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}} \tag{6}$$

Así pues aunque el número aúreo es un irracional por la presencia de $\sqrt{5}$, admite cierta *periodicidad* en forma de fracciones continuas, pues delante de las sucesivas fracciones que aparecen en el denominador siempre está presente el número 1.

Dejamos como ejercicio para el curioso lector que demuestre que:

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}} \qquad \sqrt{5}=2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cdots}}}} \tag{7}$$