Igualdad curiosa

Hay que comprobar algebraicamente que la siguiente igualdad es cierta

$$\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-1+x}{\sqrt{x^2+1}+1+x}\right)^2 = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}$$

Solución

Hay que empezar haciendo una asignación a algunas partes de la izquierda. Hacemos pues,

$$\sqrt{x^2+1}-1 = A \tag{1}$$

y

$$\sqrt{x^2+1}+1 = B \tag{2}$$

Con ello la expresión del principio queda

$$\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-1+x}{\sqrt{x^2+1}+1+x}\right)^2 = \left(\frac{A+x}{B+x}\right)^2 = \frac{A^2+2Ax+x^2}{B^2+2Bx+x^2} \tag{3}$$

Ahora bien por la definición de A y B vemos que

$$A\cdot B = (\sqrt{x^2+1}-1)\cdot(\sqrt{x^2+1}+1) = (\sqrt{x^2+1})^2 - 1^2 = x^2+1-1 = x^2 \tag{4}$$

Tenemos pues que

$$x^2 = A\cdot B \tag{5}$$

que podemos sustituirlo en la ecuación (3),

$$\frac{A^2+2Ax+x^2}{B^2+2Bx+x^2} = \frac{A^2+2Ax+A\cdot B}{B^2+2Bx+A\cdot B} \tag{6}$$

En la ecuación (6) podemos sacar factor común a A en el numerador y a B en el denominador

$$\frac{A^2+2Ax+A\cdot B}{B^2+2Bx+A\cdot B} = \frac{A\cdot(A+2x+B)}{B\cdot(B+2x+A)} = \frac{A\cdot(A+2x+B)}{B\cdot(A+2x+B)} = \frac{A}{B} \tag{7}$$

Se simplifican en el numerador y en el denominador los factores $(A+2x+B)$, por lo tanto

$$\boxed{\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-1+x}{\sqrt{x^2+1}+1+x}\right)^2 = \frac{A}{B} = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}} \tag{8}$$