Límite por la regla de l'Hôpital

Como ya sabemos la regla de l'Hôpital se usa en cálculo para obtener límites indeterminados de la forma $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$. Si el límite no es exactamente de esa forma se puede transformar algebraicamente para que tenga esa indeterminación. La regla de l'Hôpital nos dice que el límite de ese cociente es igual que el límite entre el cociente de sus derivadas, y es consecuencia del teorema del valor medio de Cauchy. Vamos aplicarlo para resolver el límite

$$\lim_{x\to 1}(\ln x)^{\ln x} \tag{1}$$

donde $\ln x$ representa el logaritmo natural o neperiano de x. El primer paso como siempre es sustituir en el límite $x = 1$, con lo que nos queda

$$\lim_{x\to 1}(\ln x)^{\ln x} = (\ln 1)^{\ln 1} = 0^0 \to \text{Indeterminado} \tag{2}$$

El límite no es pues de la forma requerida así que vamos a hacer algunas manipulaciones algebraicas aplicando logaritmos. Sea la función

$$f(x) = (\ln x)^{\ln x} \tag{3}$$

Si tomamos logaritmos en ambos lados y aplicamos las reglas de los logaritmos

$$\ln f(x) = \ln\left((\ln x)^{\ln x}\right) = \ln x \cdot \ln(\ln x)) \tag{4}$$

Si nos damos cuenta para $x \to 1$ tenemos $\ln 1 \cdot \ln(\ln 1)) = 0 \cdot -\infty$, que tampoco es la indeterminación que buscamos. Podemos sin embargo pasar el primer logaritmo al denominador de abajo en la fórmula (4), quedándonos ahora

$$\lim_{x\to 1}\ln x \cdot \ln(\ln x) = \lim_{x\to 1}\frac{\ln(\ln x)}{\frac{1}{\ln x}} = \frac{-\infty}{\infty} \to \text{Indeterminado} \tag{5}$$

que salvo el signo ya es el tipo de indeterminación que buscamos. Vamos a aplicar ahora sí la regla de l'Hôpital al límite de la ecuación (5), haciendo las derivadas del numerador y del denominador

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(\ln x)}{\dfrac{1}{\ln x}} = \lim_{x\to 1} \frac{(\ln(\ln x))'}{\left(\dfrac{1}{\ln x}\right)'} \tag{6}$$

Ahora hay que ser cuidadosos al aplicar las reglas de derivación del logaritmo y del cociente y operar algebraicamente

$$\lim_{x\to 1} \frac{(\ln(\ln x))'}{\left(\dfrac{1}{\ln x}\right)'} = \lim_{x\to 1} \frac{\dfrac{\frac{1}{x}}{\ln x}}{\dfrac{0\cdot \ln x - 1\cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2}} = \lim_{x\to 1} \frac{\dfrac{1}{x\cdot \ln x}}{-\dfrac{1}{x\cdot (\ln x)^2}} \tag{7}$$

de donde eliminando factores comunes en los denominadores se reduce a

$$\lim_{x\to 1} (-\ln x) = -\ln 1 = 0 \tag{8}$$

Recordemos que el límite que hemos hallado es en realidad el logaritmo del límite que nos pedían, como hemos establecido en la ecuación (4), por lo que en realidad el límite buscado será la inversa del logaritmo, es decir la función exponencial, $e^0 = 1$. Podemos concluir pues

$$\boxed{\lim_{x\to 1} (\ln x)^{\ln x} = 1}$$