

Carlos Ivorra

---

**ANÁLISIS NO  
ESTÁNDAR**

---



*Si una cantidad no negativa fuera tan pequeña que resultara menor que cualquier otra dada, ciertamente no podría ser sino cero. A quienes preguntan qué es una cantidad infinitamente pequeña en matemáticas, nosotros respondemos que es, de hecho, cero. Así pues, no hay tantos misterios ocultos en este concepto como se suele creer. Esos supuestos misterios han convertido el cálculo de lo infinitamente pequeño en algo sospechoso para mucha gente. Las dudas que puedan quedar las resolveremos por completo en las páginas siguientes, donde explicaremos este cálculo.*

LEONHARD EULER



# Índice General

<b>Introducción</b>	<b>vii</b>
<b>Capítulo I: Preliminares conjuntistas</b>	<b>1</b>
1.1 Conjuntos . . . . .	2
1.2 Los conceptos conjuntistas básicos . . . . .	7
1.3 Elementos de teoría de conjuntos . . . . .	12
1.3.1 Funciones . . . . .	12
1.3.2 Relaciones . . . . .	16
1.3.3 Conjuntos finitos . . . . .	18
1.3.4 Estructuras algebraicas y de orden . . . . .	21
1.3.5 Elementos de aritmética . . . . .	27
1.4 La teoría de conjuntos no estándar . . . . .	30
<b>Capítulo II: Los números reales</b>	<b>43</b>
2.1 Los números naturales . . . . .	43
2.2 Cuerpos ordenados . . . . .	47
2.3 Convergencia de sucesiones . . . . .	53
2.4 La incompletitud de $\mathbb{Q}$ . . . . .	59
2.5 La construcción de $\mathbb{R}$ . . . . .	63
2.6 Consecuencias de la completitud de $\mathbb{R}$ . . . . .	70
<b>Capítulo III: Cálculo diferencial de una variable</b>	<b>77</b>
3.1 La gráfica de una función . . . . .	77
3.2 Funciones continuas . . . . .	78
3.3 Funciones derivables . . . . .	85
3.4 Derivadas sucesivas, la fórmula de Taylor . . . . .	99
3.5 Exponenciales y logaritmos . . . . .	102
3.6 Límites de funciones . . . . .	109
<b>Capítulo IV: Cálculo integral de una variable</b>	<b>117</b>
4.1 La integral de Riemann . . . . .	117
4.2 Las funciones trigonométricas . . . . .	133
4.3 Cálculo de longitudes, áreas y volúmenes . . . . .	141

<b>Capítulo V: Series infinitas</b>	<b>153</b>
5.1 Series numéricas . . . . .	153
5.2 Sucesiones funcionales . . . . .	163
5.3 Series de potencias . . . . .	174
<b>Capítulo VI: Cálculo diferencial de varias variables</b>	<b>179</b>
6.1 Espacios métricos y espacios normados . . . . .	179
6.2 Elementos de topología . . . . .	183
6.3 Funciones continuas . . . . .	189
6.4 Derivadas y diferenciales . . . . .	195
6.5 El teorema de la función implícita . . . . .	208
6.6 Optimización clásica . . . . .	212
<b>Capítulo VII: Cálculo integral de varias variables</b>	<b>219</b>
7.1 Resultados básicos . . . . .	219
7.2 Dominios de integración . . . . .	223
7.3 Cálculo de integrales . . . . .	231
7.4 El teorema de la media . . . . .	235
7.5 El teorema de cambio de variable . . . . .	238
7.6 Áreas de superficies . . . . .	250
7.7 Apéndice: Descomposición de aplicaciones lineales . . . . .	257
<b>Apéndice A: La teoría de Nelson</b>	<b>261</b>
<b>Apéndice B: La teoría de Hrbacek</b>	<b>271</b>
<b>Apéndice C: El teorema de conservación</b>	<b>285</b>
C.1 Modelos internos . . . . .	285
C.2 Ultrapotencias . . . . .	291
C.3 Límites inductivos . . . . .	297
C.4 El teorema de conservación para la teoría de Hrbacek . . . . .	303
<b>Bibliografía</b>	<b>315</b>
<b>Índice de Materias</b>	<b>316</b>

# Introducción

En la historia de las matemáticas nos encontramos con muchos momentos en que los matemáticos han manejado con seguridad —por no decir con virtuosismo— conceptos cuya naturaleza y propiedades básicas eran incapaces de precisar. El ejemplo típico lo tenemos en los algebristas de los siglos XVI y XVII, que eran capaces de encontrar raíces reales de polinomios pasando, en caso de ser necesario, por raíces “imaginarias” de otros polinomios que aparecían a lo largo del cálculo. Los números imaginarios eran concebidos como unos conceptos ficticios en los que, sin saber cómo ni por qué, se podía “confiar”, en el sentido de que al incluirlos en los cálculos llevaban a conclusiones correctas.

Naturalmente, la razón por la que los cálculos con números complejos eran correctos es que es posible construir los números complejos, de tal modo que lo que hacían los algebristas —aunque no lo supieran— era usar una serie de teoremas que no sabían demostrar o siquiera enunciar (los números complejos forman un cuerpo, etc.)

Hay muchos otros casos similares: los físicos han estado derivando funciones no derivables durante mucho tiempo, con la convicción de que las derivadas eran unas “funciones generalizadas” que no sabían definir, pero en la que también “se podía confiar”. La razón por la que estos cálculos con funciones misteriosas que no eran funciones no llevaban a paradojas y contradicciones es, por supuesto, que es posible construir unos objetos (las distribuciones) con las propiedades que los físicos postulaban implícitamente en el uso que hacían de sus funciones generalizadas. También Kummer usó unos “divisores primos ideales” que no existían, y que finalmente formalizó Dedekind a través de la noción de ideal de un anillo, los propios números reales no estuvieron exentos de polémicas sobre sus propiedades hasta que Dedekind y Cantor dieron las primeras construcciones explícitas, etc.

El análisis no estándar es la respuesta última a una asignatura pendiente que tenía la matemática. En su origen, el cálculo diferencial se basó también en unos “números ideales” que nadie sabía definir porque tenían que ser no nulos y a la vez menores que cualquier cantidad positiva. Eran los infinitésimos. Por ejemplo, Leibniz explicaba así el cálculo de la derivada de  $f(x) = x^2$ : tomamos un infinitésimo  $dx$ , calculamos el incremento  $df = f(x+dx) - f(x)$  y lo dividimos entre la cantidad (no nula)  $dx$ . Resulta

$$\frac{df}{dx} = 2x + dx.$$

Ahora bien, puesto que  $dx$  es una cantidad infinitesimal, la presencia del último término es insignificante, por lo que podemos eliminarla y así

$$\frac{df}{dx} = 2x + dx = 2x.$$

Leibniz era consciente de las contradicciones de este argumento: primero suponemos que  $dx \neq 0$  pero luego lo eliminamos como si fuera  $dx = 0$ . Pese a ello, también era consciente de que los resultados a los que se llegaba con este tipo de razonamientos eran correctos y estaba convencido de que los argumentos con infinitésimos tenían que poder reformularse como argumentos “del estilo de Arquímedes”, lo cual hoy es fácil traducir a “mediante pasos al límite”.

Uno de los grandes virtuosos de los infinitésimos fue Euler, quien parecía convencido de que bastaba concebirlos como números arbitrariamente pequeños (pero no nulos) en lugar de como números infinitamente pequeños. Sin embargo sus razonamientos están bastante lejos del estilo moderno  $\epsilon$ - $\delta$ .

Al contrario de lo que sucedió con los números reales, los números complejos, las distribuciones o los números ideales de Kummer, los matemáticos del siglo XIX y la primera mitad del siglo XX fueron incapaces de construir unos objetos que se comportaran como debían comportarse los infinitésimos, y el resultado fue que los erradicaron de la matemática teórica. Cauchy introdujo (con infinitésimos aún) la noción de límite y mostró que los restantes conceptos del análisis podían expresarse en términos de límites. Posteriormente Weierstrass introdujo las definiciones y los razonamientos  $\epsilon$ - $\delta$ . Ahora bien, la rebeldía de los infinitésimos a dejarse formalizar no los hacía menos prácticos, por lo que los físicos siguieron usándolos, con la convicción de que son mucho más intuitivos y cómodos que los épsilon y las deltas.

El hecho de que los infinitésimos “funcionaran” indicaba claramente que debían poder construirse. Hubo algunos intentos previos poco satisfactorios, pero sólo a finales de los 60, Abraham Robinson consiguió este objetivo. Del trabajo de Robinson se sigue que es posible formalizar el cálculo diferencial definiendo las derivadas como cocientes de incrementos infinitesimales, porque, si bien en  $\mathbb{R}$  no hay infinitésimos (como tampoco hay números con raíz cuadrada negativa), lo cierto es que es posible extender  $\mathbb{R}$  a un cuerpo que los tenga (igual que puede extenderse a  $\mathbb{C}$ , donde los números negativos sí que tienen raíces cuadradas).

Por desgracia, los infinitésimos de Robinson se construían y se manejaban mediante técnicas de lógica matemática, que resultan bastante complejas y artificiales para los matemáticos no familiarizados con esta disciplina. No obstante, a finales de los 60 y principios de los 70 surgieron aproximaciones axiomáticas al análisis no estándar, es decir, aproximaciones que, en lugar de construir los infinitésimos —que es complicado—, lo que hacen es postular mediante unos axiomas sencillos su existencia y sus propiedades. Es como si en un curso de introducción al análisis no construímos los números reales, sino que postulamos la existencia de un cuerpo ordenado completo. El resultado es que partimos exactamente del mismo punto a donde habríamos llegado si hubiésemos empezado por la construcción de  $\mathbb{R}$ . Naturalmente, al eliminar la construcción perdemos

una información, y es que el axioma que postula la existencia de  $\mathbb{R}$  es en realidad un axioma inesencial, en el sentido de que todo lo que se demuestra con él, se puede demostrar también sin él (simplemente, demostrándolo y convirtiéndolo así en un teorema). Lo mismo sucede con el análisis no estándar.

De entre las distintas versiones axiomáticas del análisis no estándar, aquí vamos a exponer una especialmente “fuerte”, en el sentido de que no vamos a postular axiomáticamente la mera existencia —por ejemplo— de un cuerpo que contiene al cuerpo de los números reales y que además tiene infinitésimos, sino que vamos a presentar toda una *teoría de conjuntos no estándar*, añadiendo a los axiomas usuales de la teoría de conjuntos otros axiomas que postulan la existencia de elementos ideales en todos los conjuntos infinitos. Dado que no vamos a comparar este enfoque con otros posibles, el lector no tendrá la oportunidad de constatarlo (salvo que compare con otros textos), pero esta versión supone una simplificación enorme de la teoría, tanto en sus aspectos técnicos como en los conceptuales.

Ahora bien, tal y como explicábamos un poco más arriba, debemos tener presente que los objetos cuya existencia postulan estos axiomas pueden ser contruidos, de modo que los axiomas del análisis no estándar no son como otros axiomas que pueden añadirse a la teoría de conjuntos (tales como la hipótesis del continuo, el axioma de Martín, etc.) sino que son “eliminables”, en el sentido de que cualquier afirmación “estándar” que pueda demostrarse con ellos, puede demostrarse también sin ellos.

De este modo, la teoría de conjuntos no estándar no es una teoría “nueva” que proporcione nuevos resultados, sino una teoría alternativa que permite probar los mismos resultados que la teoría clásica pero de forma distinta. Así, mientras que una teoría matemática “usual” se valora normalmente en función de los resultados “nuevos” que permite demostrar, este criterio no es aplicable para valorar la teoría de conjuntos no estándar (ya que la respuesta es que no permite demostrar nada nuevo), sino que su valor dependerá más bien de la comparación entre las técnicas clásicas y las técnicas no estándar. El propósito de este libro es, precisamente, poner al lector en condiciones de realizar esa comparación y para que pueda sopesar por sí mismo las ventajas y los inconvenientes de la teoría de conjuntos no estándar frente a la teoría de conjuntos clásica.

En esta comparación, probablemente, el factor de más peso es un hecho externo a la teoría misma: por razones históricas, la teoría de conjuntos clásica está profundamente arraigada, mientras que la teoría de conjuntos no estándar no es más que una curiosidad, y es casi impensable que algún día pase a ser más que eso. No obstante, siempre queda el —cuanto menos— “*divertimento*” teórico de juzgar ambas teorías en pie de igualdad, prescindiendo de su grado de popularidad. Entonces, los dos platos de la balanza quedan bastante igualados:

Por una parte, la teoría de conjuntos no estándar da lugar a pruebas más ¿intuitivas?, ¿elegantes?, ¿sencillas? que la teoría clásica.

Por otra parte, la teoría de conjuntos no estándar requiere un marco de razonamiento lógico ¿un poco?, ¿bastante?, ¿mucho? más complejo que la teoría de conjuntos clásica.

Lo que el lector deberá juzgar es cuáles de las palabras entre interrogantes son apropiadas (o si hay que cambiarlas por otras). Si considera que la teoría no estándar no es ni intuitiva, ni elegante, ni sencilla, ni nada parecido, concluirá que lo mejor es olvidarse de ella, al igual que si considera que sus sutilezas lógicas la vuelven inmajenable en la práctica.

Quizá convenga destacar que no hay contradicción en afirmar que las pruebas no estándar pueden ser más sencillas y que su lógica subyacente puede ser más complicada. Esto quiere decir que, para alguien que haya asimilado esa lógica subyacente, las pruebas pueden resultar mucho más sencillas, y la cuestión es, entonces, si la (presunta) simplificación (o cualquier otra ventaja) que supone el uso de la teoría no estándar compensa el (presunto) esfuerzo de familiarizarse con ella. Probablemente, ésta es la pregunta principal sobre la que deberá meditar el lector.

Aunque una valoración adecuada de la teoría de conjuntos no estándar requiere, evidentemente, un examen a fondo de sus principios y su funcionamiento (que es lo que pretende ofrecer este libro), podemos formarnos una primera impresión considerando el teorema siguiente, de Sierpinski:

*Si  $a_1, \dots, a_n, b$  son números reales positivos, la ecuación*

$$\frac{a_1}{x_1} + \dots + \frac{a_n}{x_n} = b$$

*tiene a lo sumo un número finito de soluciones naturales.*

Ahora vamos a ver el aspecto de una demostración no estándar. Evidentemente, a menos que el lector ya esté familiarizado con la teoría de conjuntos no estándar, no estará en condiciones de entenderla con detalle, pero aquí se trata simplemente de comparar su aspecto con el de una demostración clásica. (Lo que sí puede tratar de hacer el lector es demostrar el teorema por sí mismo por medios clásicos y comparar las pruebas.)

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer que  $n, a_1, \dots, a_n$  y  $b$  son estándar.<sup>1</sup> Si el conjunto de  $n$ -tuplas  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n$  que cumplen la ecuación fuera infinito, tendría que contener un elemento no estándar. Una  $n$ -tupla (con  $n$  estándar) que tenga todas sus componentes estándar será estándar, luego tenemos una solución  $(x_1, \dots, x_n)$  en la que algún  $x_i$  es infinitamente grande.

Ahora bien, no puede ser que todos los  $x_i$  sean infinitamente grandes, ya que entonces el miembro izquierdo de la ecuación sería infinitamente pequeño, y el miembro derecho no. Por consiguiente, también existe algún  $x_i$  que no es infinitamente grande. Reordenando los índices, podemos suponer que  $x_1, \dots, x_r$  son infinitamente grandes y  $x_{r+1}, \dots, x_n$  no lo son. Pero esto nos lleva igualmente a una contradicción, ya que podemos despejar

$$\frac{a_1}{x_1} + \dots + \frac{a_r}{x_r} = b - \frac{a_{r+1}}{x_{r+1}} - \dots - \frac{a_n}{x_n}$$

y, nuevamente, el miembro izquierdo es infinitesimal, y el derecho no. ■

<sup>1</sup>Esto implica, en particular, que no son números infinitamente pequeños o infinitamente grandes.

La prueba puede parecer extremadamente simple, pero en esta apariencia hay algo de engañoso, y esto nos lleva precisamente hacia el otro plato de la balanza. Las sutilezas lógicas inherentes a la teoría de conjuntos no estándar están relacionadas con las causas por las que los matemáticos tuvieron que abandonar el uso de infinitésimos a la hora de fundamentar el análisis: si no se toman las precauciones debidas, los infinitésimos dan lugar a contradicciones.

El problema es análogo al que tuvieron que resolver los matemáticos para fundamentar la teoría de conjuntos. Si no se toman las precauciones debidas, determinados “conjuntos” como “el conjunto de todos los conjuntos”, “el conjunto de todos los cardinales”, etc. dan lugar a contradicciones por el mero hecho de aceptar su existencia. Cantor llamaba a estos conjuntos paradójicos “multiplicidades inconsistentes”, y hay esencialmente dos formas de abordar el problema de extirpar de la teoría matemática las contradicciones que generan:

- La teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel (ZFC) es una teoría axiomática en la que, simplemente, las “multiplicidades inconsistentes” no existen: a partir de sus axiomas se puede demostrar que no existe ningún conjunto que contenga a todos los conjuntos, ni existe ningún conjunto que contenga a todos los cardinales, etc. No obstante, informalmente se puede hablar de la “clase” de todos los conjuntos o la “clase” de todos los cardinales, pero sólo en afirmaciones que claramente pueden reformularse eliminando estos conceptos (por ejemplo, si decimos que la clase de todos los cardinales está contenida en la clase de todos los conjuntos, esto es equivalente a decir que todo cardinal es un conjunto, y así hemos eliminado toda mención a “clases” inexistentes).
- La teoría de conjuntos de von Neumann-Bernays-Gödel introduce formalmente la diferencia entre “conjuntos” y “clases propias”, de modo que las multiplicidades inconsistentes de Cantor se corresponden con las “clases propias”. Las contradicciones aparecen si se confunden ambos conceptos y se tratan las clases propias como si fueran conjuntos. Estableciendo la distinción, los argumentos que originalmente daban lugar a contradicciones se transforman en los argumentos que demuestran que determinadas clases son propias y no son conjuntos.

A la hora de fundamentar el uso de infinitésimos, nos encontramos con problemas similares: determinados “conjuntos” como “el conjunto de todos los números reales infinitesimales” dan lugar a contradicciones, y en este libro presentaremos dos teorías axiomáticas que resuelven el problema:

- La *teoría de Nelson* resuelve el problema negando la existencia de los conjuntos “problemáticos”. Así por ejemplo, a partir de sus axiomas se demuestra, desde luego, que existen números reales infinitesimales, pero también que no existe ningún conjunto cuyos elementos sean los números reales infinitesimales. Esto es técnicamente análogo al caso de la teoría de conjuntos de ZFC, en la que se demuestra que existen los números cardinales (finitos e infinitos), pero se demuestra que no existe ningún conjunto

cuyos elementos sean todos los cardinales. La única diferencia (de carácter psicológico) es que uno puede estudiar álgebra, análisis, topología, etc. y hablar de cardinales de conjuntos finitos e infinitos, sin tener realmente necesidad de hablar en ningún momento del conjunto de todos los cardinales, por lo que apenas se nota la prohibición que la teoría impone como precio para excluir las contradicciones. En cambio, cuando uno habla de números reales infinitesimales, resulta tentador en muchas ocasiones razonar considerando el conjunto de todos los infinitesimales, y la prohibición de hacerlo puede resultar desconcertante.

- La *teoría de Hrbacek* distingue entre “conjuntos internos” y “conjuntos externos” de un modo similar a como la teoría NBG distingue entre conjuntos y clases propias. Es posible hablar del “conjunto de todos los números infinitesimales”, pero los argumentos que, a partir de este concepto, dan lugar a contradicciones se convierten ahora en razonamientos que prueban que tal conjunto es externo. En realidad, la teoría de Nelson permite hablar de conjuntos externos en el mismo sentido informal (pero riguroso) en que es posible hablar de clases en ZFC, es decir, como conceptos que es posible introducir en las afirmaciones a condición de que éstas puedan reformularse eliminando toda mención a ellos.

Volviendo a la demostración que hemos dado más arriba del teorema de Sierpinski, uno de los pasos que hemos dado, aunque es correcto, no es, en realidad, evidente. Se trata del punto en que hemos reordenado los subíndices para poner en primer lugar los números infinitos y luego los finitos. La reordenación en sí es intrascendente. Lo que no es trivial es que, implícitamente, ahí estamos considerando el conjunto

$$I = \{i \leq n \mid x_i \text{ es infinitamente grande}\}.$$

En general, conjuntos como éste son los que dan lugar a contradicciones si no se toman las precauciones debidas. Por ejemplo, si aceptamos sin más reflexión la existencia del conjunto  $I$ , deberíamos aceptar igualmente la existencia de

$$J = \{i \in \mathbb{N} \mid i \text{ es infinitamente grande}\},$$

y este conjunto nos lleva a una contradicción, ya que es fácil probar que si  $i \in J$ , entonces  $i - 1 \in J$ , luego tendríamos un subconjunto de  $\mathbb{N}$  no vacío y sin mínimo elemento. En la teoría de conjuntos de Nelson se demuestra que  $I$  existe, mientras que  $J$  no existe, pero, por la misma razón que no es obvio que  $J$  no exista, tampoco es obvio que  $I$  sí que exista.<sup>2</sup>

El precio que hay que pagar para trabajar consistentemente en la teoría de conjuntos no estándar —el precio que el lector deberá juzgar si es caro o barato— es asimilar las sutilezas lógicas que determinan que  $I$  sí que existe pero  $J$  no.

---

<sup>2</sup>Cuando el lector esté familiarizado con la teoría de conjuntos no estándar podrá entender la razón por la que  $I$  sí que existe:  $I = \{i \leq n \mid x_i \in A\}$ , donde  $A = {}^\circ\{x_1, \dots, x_n\}$ , que es un conjunto estándar por el teorema A.7.

En la teoría de Hrbacek, esta sutileza desaparece de la prueba del teorema de Sierpinski, ya que tanto  $I$  como  $J$  existen trivialmente. La diferencia entre ambos es ahora que  $I$  es interno, mientras que  $J$  es externo, pero que  $I$  sea interno o externo es irrelevante para la demostración del teorema. Lo único necesario era hacer referencia a  $I$  para despejar en la ecuación. Sin embargo, la teoría axiomática de Hrbacek requiere bastante más familiaridad con la lógica matemática que la teoría de Nelson.

De todos modos, debemos tener presente que *cualquier* teoría axiomática es ardua para un lector sin la suficiente preparación matemática. Incluso hay muchos matemáticos que son expertos en su campo y que sólo tienen un vago conocimiento de lo que es la lógica matemática (formal) y la teoría axiomática de conjuntos. Por ello, no sería justo comparar una exposición de la teoría de conjuntos no estándar según los patrones de rigor propios de la lógica matemática con una exposición de la teoría clásica al nivel semiformal que emplean todos los libros de matemáticas (excepto los que tratan temas directamente relacionados con la lógica matemática o están escritos por pedantes). Debido a estas consideraciones, la estructura de este libro es la siguiente:

- El primer capítulo está dedicado a describir informalmente la lógica de la teoría de conjuntos clásica (en sus tres primeras secciones) y la de la teoría de conjuntos no estándar (en la cuarta sección). Su objetivo es preparar al lector para que pueda manejar la teoría no estándar con el mismo nivel de seguridad con que un estudiante de matemáticas medio maneja la teoría estándar. En el caso de la teoría estándar, para conseguir este dominio informal es posible prescindir prácticamente por completo de toda alusión a la lógica matemática, pero la teoría no estándar requiere, como mínimo, unas nociones básicas sobre la lógica subyacente para no caer en contradicciones.

Es importante insistir en que todas las explicaciones, ejemplos, analogías, etc. presentadas en este primer capítulo (incluso en las secciones sobre la teoría clásica) sólo pretenden sugerir al lector una forma pragmática de concebir la teoría no estándar para desenvolverse en ella con soltura. En particular, no pretenden defender ninguna posición filosófica sobre cómo han de concebirse las matemáticas en general o los infinitésimos en particular.

La sección 1.3 contiene un resumen (con demostraciones) de los resultados básicos sobre funciones, relaciones, estructuras algebraicas, números naturales, etc., en definitiva, de los hechos y conceptos que el lector debe conocer para leer este libro. Su finalidad es servir de ayuda a un hipotético lector obstinado en que la teoría no estándar contradice en algo a la teoría estándar. La sección 1.3 le dará la oportunidad de buscar concretamente qué resultado contradice a la teoría no estándar, y tal vez el no encontrar ninguno le ayude a entender que la contradicción sólo está en su imaginación. (Si encuentra alguno, entonces su problema es más grave, pero puede estar seguro de que será *su* problema, no un problema de la teoría

no estándar.) Los lectores que no sean especialmente suspicaces pueden saltarse esa sección sin riesgo a echar nada en falta más adelante.

- Segundo capítulo pretende familiarizar al lector con el uso práctico de la teoría de conjuntos no estándar —siempre a un nivel informal, lo más parecido posible al nivel de cualquier libro de matemáticas serio, pero no técnico—, a través del estudio de los números naturales, los números racionales y la construcción de los números reales.
- Los capítulos siguientes desarrollan los contenidos típicos de un curso universitario de análisis matemático: cálculo diferencial e integral para funciones de una y varias variables. La exposición pretende ser natural o, mejor dicho, pretende ser lo que sería una exposición natural si la teoría de conjuntos no estándar fuera considerada una teoría “normal” en la práctica matemática. Desarrollamos la teoría no estándar como si la teoría clásica no existiese, exactamente igual que los libros clásicos desarrollan la teoría clásica como si la teoría no estándar no existiese. En particular, cada concepto se define de la forma que resulta natural en el contexto de la teoría no estándar, sin mostrar la equivalencia con la definición clásica correspondiente, salvo que ello tenga interés en la propia teoría no estándar.

El lector no necesita ningún conocimiento matemático previo más allá de cierta familiaridad con los conceptos matemáticos básicos (los mismos que se exponen en el primer capítulo), excepto para las secciones 6.5, 6.6 y 7.5, en las que necesitará conocer algunos hechos básicos del álgebra lineal (matrices, determinantes, espacios vectoriales, y poco más).

- Los apéndices A y B presentan con rigor la axiomática de Nelson y la de Hrbacek, respectivamente. Aquí el lector necesitará cierta familiaridad con la lógica matemática y con la teoría axiomática de conjuntos.<sup>3</sup> Toda la teoría desarrollada en los capítulos precedentes puede formalizarse en la teoría de Nelson sin más esfuerzo que el necesario para formalizar en ZFC cualquier exposición razonable del análisis clásico.
- El apéndice C contiene la demostración del teorema de conservación, según el cual, todo teorema “estándar” que pueda demostrarse en la teoría de conjuntos no estándar puede demostrarse también en la teoría de conjuntos clásica. En particular, si la teoría clásica es consistente, la teoría no estándar también lo es. La prueba es metamatemática y finitista. Eso quiere decir, en términos más llanos, que cualquiera que afirme convencido que la teoría de conjuntos no estándar no sirve porque es contradictoria, no tiene ni idea de la estupidez que está diciendo. Para este apéndice, el lector necesitará un buen conocimiento de la lógica matemática y de la teoría de conjuntos.

---

<sup>3</sup>Los dos capítulos I, II y VIII de mi libro de *Lógica* son más que suficientes, al menos para la teoría de Nelson. En el caso de la teoría de Hrbacek, el primer capítulo de mi libro de *Pruebas de consistencia* sería conveniente también.

Hay un aspecto de la comparación entre la teoría clásica y la teoría no estándar en el que no vamos a entrar aquí, y es si la teoría no estándar ofrece ventajas frente a la teoría clásica de cara a la investigación. Hasta la fecha no hay ningún resultado demostrado con técnicas no estándar y que no pueda demostrarse de forma razonablemente pareja en dificultad mediante técnicas estándar. Los defensores del análisis no estándar citan ejemplos como éste, aunque —la verdad sea dicha— no hay muchos otros que citar:

El quinto problema de Hilbert consistía en determinar si todo grupo topológico localmente euclídeo es un grupo de Lie. El problema fue resuelto afirmativamente en 1952 por Montgomery, Zippin y Gleason. En 1964 Kaplanski publicó otra demostración. Sin embargo, en 1976 se celebró un congreso sobre los problemas de Hilbert en el que un especialista de cada rama debía explicar la solución de los que ya habían sido resueltos, pero el correspondiente a este problema dijo que las demostraciones conocidas eran tan técnicas y tan complejas que no podía siquiera esbozarlas. En 1990 J. Hirschfeld publicó<sup>4</sup> una prueba no estándar mucho más simple y, cuanto menos, esbozable.

Para terminar, añadiremos únicamente que la exposición del cálculo diferencial e integral que contiene este libro sólo es una muestra reducida de las posibilidades de la teoría de conjuntos no estándar. Al igual que es posible una exposición no estándar del análisis matemático, podemos desarrollar una topología no estándar, una geometría diferencial no estándar, una teoría de la medida no estándar, un análisis funcional no estándar y, en general, cualquier rama de la matemática que estudie conjuntos infinitos es susceptible de un enfoque no estándar. Las teorías axiomáticas que presentamos aquí son suficientes para formalizar tales enfoques. La pregunta sigue siendo si merece la pena. Dejamos al lector la última palabra.

---

<sup>4</sup>J. Hirschfeld, *The nonstandard treatment of Hilbert's fifth problem*, Trans. Amer. Math. Soc. **321** (1) (1990).



# Capítulo I

## Preliminares conjuntistas

Suponemos que el lector tiene cierta familiaridad con las matemáticas elementales, especialmente con la manipulación de expresiones algebraicas (como que  $a^m a^n = a^{m+n}$  o que  $a/b + c/d = (ad + bc)/bd$ , etc.) Más en general, supondremos que el lector conoce los números naturales, enteros y racionales, y también sería conveniente cierta familiaridad con los números reales.

El propósito de este primer capítulo es conectar estos conocimientos informales que suponemos al lector con otros conceptos más abstractos en que es necesario enmarcarlos para abordar con el rigor necesario otros temas más delicados, como el análisis matemático, especialmente desde el punto de vista no estándar que vamos a adoptar. Con “el rigor necesario” no nos referimos al rigor absoluto, consistente en trabajar en un sistema axiomático formal, lo cual exigiría un esfuerzo al lector que incluso muchos licenciados en matemáticas no son capaces de realizar, sino al rigor necesario para que el lector pueda distinguir informalmente un razonamiento válido de otro que no lo es, que es como —de hecho— trabaja la mayoría de los matemáticos profesionales cuya especialidad no está relacionada con la fundamentación de las matemáticas.

De todos modos, conviene tener presente que, del mismo modo que lo que determina la validez de los razonamientos que hacen los matemáticos profesionales es el hecho de que podrían expresarse con todo rigor en el seno de una teoría axiomática formal (por ejemplo, la teoría de conjuntos ZFC), y ello sin perjuicio de que muchos matemáticos no sepan en qué consiste exactamente esta teoría, también sucede que los patrones de razonamiento que vamos a tratar de inculcar al lector en este libro se corresponden con los que pueden expresarse con todo rigor en otra teoría axiomática formal. En otras palabras, lo que trataremos de conseguir es que el lector pueda razonar correctamente en el seno de la matemática no estándar de forma intuitiva, sin necesidad de asimilar para ello las sutilezas y los tecnicismos de la lógica matemática, pero de tal modo que el resultado práctico sea el mismo que si el lector conociera todos esos tecnicismos.

Quizá esta comparación pueda ser útil: un ciudadano honrado puede respetar la ley sin haber leído nunca un código legal. Su buen juicio le permite determinar qué conductas serán sin duda ilegales y cuáles son admisibles. Sólo

en caso de verse en una situación delicada que escape a lo que le es familiar necesitará asesoramiento legal. Del mismo modo, el lector deberá tener presente que, en cualquier momento en que se dé cuenta de que no “domina” una situación y no esté seguro de si un razonamiento es “legal” o “ilegal”, deberá consultar a un experto en “leyes”, es decir, a alguien que sí domine el sistema axiomático formal que determina sin margen de ambigüedad lo que puede y lo que no puede hacerse.

## 1.1 Conjuntos

Invitamos al lector a que conciba todo cuanto vamos a ver aquí como una película de cine. Según su argumento, una película puede ser *fantástica*, en el sentido de que lo que se narra en ella no tiene nada que ver con la realidad; puede ser *histórica*, en el sentido de que todo cuanto se narra en ella es una réplica de lo que ha sucedido realmente en una determinada época y un determinado lugar; o bien puede combinar en diferentes proporciones elementos reales con elementos fantásticos (por ejemplo, si narra una historia ficticia fielmente enmarcada en un contexto histórico real).

Dejamos al lector la libertad de clasificar nuestra “película” en el género que considere oportuno. Los lectores que consideren que nuestra “película” es histórica son los que los filósofos llaman *platonistas*; los que consideren que es pura fantasía son los llamados *formalistas*; mientras que los que adopten una postura intermedia se distribuirán en una amplia gama de posibilidades entre el platonismo y el formalismo, entre las cuales, una de las más populares es el *finitismo*.

En cualquier caso, el lector debe tener presente que cualquier espectador que quiera entender una película ha de ser consciente de que cada película tiene su propia realidad interna, y que es necesario remitir a ella los juicios sobre cada escena, y no a la realidad externa a la película. Por ejemplo, pensemos en un espectador sensato que sabe que creer en fantasmas es ridículo, pero va a ver una película en la que un personaje advierte a otros que no deben entrar en una determinada casa, porque en ella habitan fantasmas. Para entender la película, deberá estar abierto a dos posibilidades:

Puede tratarse de una película de fantasmas, de modo que, internamente, sea verdad que en la casa hay fantasmas, en cuyo caso el espectador deberá concluir que los incrédulos que se adentran en la casa son unos insensatos que no saben lo que hacen.

Pero también puede tratarse de una película realista, en la que el personaje que previene contra los fantasmas lo hace, digamos, porque está buscando un tesoro oculto en la casa y emplea ciertos trucos para ahuyentar a otras personas que pudieran encontrarlo antes. En tal caso, los incrédulos que se adentran en la casa son personajes más inteligentes que los bobos a los que el “malo” ha conseguido acobardar.

Lo importante es que el juicio que el espectador se forme sobre los personajes no debe depender de su opinión personal sobre si existen o no fantasmas

(su concepción de la realidad externa) sino de la realidad interna que presenta la película. De otro modo, si, por ejemplo, la película es de fantasmas y el espectador se niega a aceptar internamente la existencia de fantasmas, no podrá entender el final, cuando los fantasmas se manifiesten abiertamente y no dejen lugar a dudas de su existencia (interna).

Los personajes de nuestra película se llaman *conjuntos*. Los matemáticos los llaman habitualmente conjuntos, sin más, pero nosotros necesitamos introducir una precisión y, por ello, los llamaremos *conjuntos internos*. Del mismo modo que un personaje de una película pretende ser (y es internamente) una persona (aunque externamente pueda no existir, por ejemplo, porque sea una imagen creada por ordenador), los conjuntos internos de nuestra película pretenden ser (y son internamente) colecciones de objetos. ¿De qué objetos? Nuestra película es, en este sentido, bastante económica: los objetos que forman parte de un conjunto interno son otros conjuntos internos. En nuestra película no hay nada más que conjuntos internos.

Así pues, un conjunto interno  $B$  es, en nuestra película, una colección de conjuntos internos. Si  $A$  es uno de estos conjuntos internos que forman parte de  $B$ , representaremos este hecho con la notación

$$A \in B.$$

Habitualmente se lee “ $A$  pertenece a  $B$ ”, aunque también podemos decir que “ $A$  es un elemento de  $B$ ” o que “ $A$  está en  $B$ ”, etc. Para indicar lo contrario se escribe  $A \notin B$ .

Una película coherente ha de respetar unas normas, que pueden fijarse arbitrariamente (siempre que no se incurra en contradicciones) pero que, una vez fijadas, se han de respetar. Por ejemplo, en una película que narre una ficticia conspiración para matar al presidente de los Estados Unidos, podrán aparecer personajes ficticios, incluso un presidente de los Estados Unidos ficticio, pero no podrá aparecer un asesino con cuatro manos. En otro tipo de películas sí que podrá aparecer un personaje con cuatro manos, pero en ésta no. Por el contrario, para que la trama del complot resulte interesante, tendrá que someterse al principio de que todos los personajes sean seres humanos “normales”.

Nuestra película también tiene sus leyes internas, llamadas *axiomas*. Son principios que los conjuntos internos respetan para que el argumento resulte a la vez coherente e interesante. Del mismo modo que muchas películas exigen que sus personajes tengan el aspecto y el comportamiento de seres humanos “normales”, nosotros vamos a pedir a nuestros conjuntos internos que se comporten como lo que queremos que sean internamente, es decir, meras colecciones de elementos. El principio que garantiza esto se conoce como *axioma de extensionalidad*:

**Axioma de extensionalidad** *Si dos conjuntos tienen los mismos elementos, entonces son iguales.*

En la práctica, esto significa que si tenemos dos conjuntos  $A$  y  $B$  y queremos probar que  $A = B$ , bastará con que tomemos un elemento arbitrario  $x \in A$  y logremos probar que también  $x \in B$ , y viceversa.

Conviene introducir la notación  $A \subset B$  para referirse a “la mitad” de este hecho. Diremos que un conjunto interno  $A$  es un *subconjunto* de un conjunto interno  $B$  (y se representa como acabamos de indicar) si todo elemento de  $A$  es también un elemento de  $B$ . En estos términos, el axioma de extensionalidad afirma que la igualdad  $A = B$  equivale a las dos inclusiones  $A \subset B$  y  $B \subset A$ .

Desde un punto de vista más teórico, el axioma de extensionalidad puede verse así: llamamos *extensión* de un conjunto interno  $B$  a todos los conjuntos internos  $A$  que cumplen  $A \in B$ . El axioma de extensionalidad afirma que dos conjuntos internos son iguales si y sólo si tienen la misma extensión. Es este axioma el que nos permite afirmar que un conjunto no es ni más ni menos que su extensión<sup>1</sup> y, por consiguiente, que es una colección de conjuntos internos.

En este punto es crucial que hagamos una observación: el hecho de que los conjuntos internos sean colecciones de conjuntos internos no nos garantiza que toda colección de conjuntos internos sea (la extensión de) un conjunto interno. De hecho, sucede que es lógicamente imposible que esto sea así. Vamos a ver por qué.

Podemos especificar una colección de conjuntos internos a través de una propiedad común a todos ellos. Por ejemplo, vamos a considerar la propiedad  $P(x) \equiv x \notin x$ . Más claramente: dado un conjunto interno  $x$ , diremos que cumple la propiedad  $P(x)$  si no se pertenece a sí mismo. Nadie dice que tenga que haber conjuntos internos que se pertenezcan a sí mismos. Si no los hay, lo que tenemos es que todos los conjuntos cumplen la propiedad  $P(x)$ .

En cualquier caso, podemos llamar  $R$  a la colección de todos los conjuntos internos que cumplen  $P(x)$ . Ciertamente, se trata de una colección de conjuntos internos definida con toda precisión. Pero nos formulamos la pregunta siguiente: ¿Es  $R$  la extensión de un conjunto interno? o, dicho de otro modo, ¿existe un conjunto interno  $R$  cuyos elementos sean precisamente los conjuntos internos que no se pertenecen a sí mismos?

La respuesta es negativa. Si existiera tal conjunto  $R$ , tendría que darse una de estas dos alternativas: o bien  $R \in R$ , o bien  $R \notin R$ . Pero sucede que ambas nos llevan a una contradicción. Si suponemos que  $R \in R$ , entonces, por definición de  $R$ , tenemos que  $R$  es un conjunto interno que cumple la propiedad  $P(R)$ , es decir, que cumple  $R \notin R$ , y estábamos suponiendo lo contrario. Es imposible. Por otra parte, si  $R \notin R$ , entonces  $R$  es un conjunto interno que

---

<sup>1</sup>Conviene tener presente que esto no es una necesidad lógica. En nuestra película podríamos haber decidido que los conjuntos tuvieran otras propiedades relevantes además de su extensión. Por ejemplo, podríamos haber decidido que hubiera conjuntos blancos y negros, de modo que podría haber dos conjuntos distintos  $A$  y  $B$  que tuvieran ambos un único elemento  $C$ , pero que fueran distintos porque  $A$  fuera blanco y  $B$  fuera negro. Lo que afirma el axioma de extensionalidad es que un conjunto interno no tiene ninguna otra propiedad distintiva más que su extensión.

cumple la propiedad  $P(R)$ , luego debería ser  $R \in R$ , lo cual es nuevamente absurdo.

Los matemáticos suelen expresar esto diciendo que no existe ningún conjunto que contenga a los conjuntos que no se pertenecen a sí mismos, pero, dicho así, es difícil de digerir, porque parece que se nos esté negando la posibilidad de pensar en la colección de los conjuntos que verifican una determinada propiedad que no tiene nada de ambiguo.

Sin embargo, bien entendida, esta “paradoja” no tiene nada de extraño. Lo que acabamos de probar es que la colección  $R$  no es la extensión de ningún conjunto interno. Los matemáticos expresan esto de forma más afortunada diciendo que  $R$  es una “clase propia”, una colección de objetos formada por personajes de nuestra película pero que no es ella misma un personaje de nuestra película, una colección externa a ella, que está “detrás de las cámaras”.

Quizá esta comparación sirva de ayuda: imaginemos un decorado para una película de romanos. Es una sala de un palacio y en un punto hay un jarrón con flores, y dentro del jarrón con flores está oculto un micrófono. Podemos decir que el jarrón es un objeto interno de la película. El espectador lo verá y deberá entender que es un jarrón. En cambio, el micrófono es un objeto externo. El espectador no debe verlo o, si lo ve, debe aparentar ser otra cosa, por ejemplo, una flor.

Podemos decir que el micrófono no existe internamente, en el sentido de que, si existiera, la película se volvería contradictoria, ya que en un palacio romano del siglo I a.C. no puede haber un micrófono. En la práctica, que no exista internamente no significa que no exista, porque lo cierto es que está ahí, sino que no puede verse y que ningún personaje de la película puede aludir a él como podría aludir al jarrón con flores.

Igualmente, la clase  $R$  “está ahí”, pero es externa a nuestra película. Si la consideramos como parte de sus personajes llegamos a una contradicción, como sería una contradicción que Julio César llevara un crucifijo. Podemos demostrar que  $R$  no existe igual que podemos “demostrar” que Julio César no lleva crucifijo, sin perjuicio de que, si, en una determinada escena, Julio César lleva una coraza, debajo de la coraza pueda llevar un crucifijo colgado del cuello si el actor es cristiano.

Observemos que, visto así, la clase  $R$  no es contradictoria. Haciendo un uso externo del signo  $\in$ , podemos decir que  $R \notin R$ , y no hay contradicción porque  $R$  es la clase de todos los conjuntos internos que no se pertenecen a sí mismos. Para pertenecer a  $R$  hay que cumplir dos requisitos: 1) ser un conjunto interno y 2) no pertenecerse a sí mismo. Tenemos que  $R$  cumple 2), pero le falla 1), y por eso no podemos concluir que  $R \in R$ , y no llegamos, pues, a ninguna contradicción.

Más en general, hemos de tener presente que un conjunto interno es una colección de conjuntos internos, luego en ningún caso puede pertenecerle una colección de conjuntos que no sea un conjunto interno. Una colección de conjuntos externa puede estar formada por algunos conjuntos internos, pero no puede formar parte de un conjunto interno.

Esto nos plantea el problema de especificar con qué colecciones de conjuntos

internos podemos contar en nuestra película. No podemos afirmar que, para toda propiedad  $P(x)$ , existe un conjunto interno formado por todos los conjuntos internos que cumplan  $P(x)$ , ya que, tomando  $P(x) \equiv x \notin x$ , esto nos permitiría concluir que  $R$  es un conjunto interno y nuestra película se derrumbaría, como si Julio César exhibiera un crucifijo.

Los matemáticos tuvieron que pensar durante mucho tiempo sobre qué propiedades  $P(x)$  son admisibles para definir conjuntos y cuáles no. Aparte de  $x \notin x$ , hay muchas otras propiedades que dan lugar a clases propias, es decir, a colecciones de conjuntos internos que darían lugar a contradicciones si les concediéramos la existencia interna en nuestra película.

Afortunadamente, las únicas propiedades que dan lugar a clases propias son las que definirían conjuntos “demasiado grandes”. Por ejemplo, puede probarse que no existe un conjunto interno que contenga a todos los conjuntos internos o, equivalentemente, que la clase de todos los conjuntos internos no es un conjunto interno, como tampoco lo es la clase de todos los conjuntos internos que tienen un único elemento, etc.

Decimos “afortunadamente” porque la práctica matemática usual no requiere considerar tales colecciones enormes. Podemos hablar de conjuntos internos con un elemento sin necesidad de tratar con la clase enorme de todos los conjuntos internos con un elemento, podemos hablar de conjuntos internos sin necesidad de hablar de la clase enorme de todos los conjuntos internos, etc.

El axioma más general que vamos a aceptar sobre formación de conjuntos a partir de propiedades es el siguiente:

**Axioma de especificación** *Si  $A, x_1, \dots, x_n$  son conjuntos internos y consideramos una propiedad interna  $P(x, x_1, \dots, x_n)$ , entonces existe un conjunto interno cuyos elementos son los conjuntos internos  $x \in A$  que cumplen la propiedad  $P$ . Lo representaremos por*

$$\{x \in A \mid P(x, x_1, \dots, x_n)\}.$$

Aquí hemos empleado por primera vez la expresión *propiedad interna* para referirnos, concretamente, a cualquier propiedad que pueda expresarse exclusivamente en términos del signo  $\in$  y de conceptos lógicos, como “y”, “o”, “si... entonces...”, “existe”, “para todo”, “=”, etc.

Esto significa que, por ejemplo, no podemos definir el conjunto de todos los conjuntos que son “verdes”, ya que “verdes” no es un concepto definido a partir de  $\in$  y de conceptos lógicos.

La clave del axioma de especificación es que sólo permite que una propiedad seleccione algunos conjuntos internos de entre los conjuntos internos que pertenecen a un conjunto interno dado  $A$ . Aunque podamos escribir

$$\{x \mid P(x, x_1, \dots, x_n)\}$$

para referirnos a la colección de todos los conjuntos internos  $x$  que cumplen la propiedad  $P$ , no podemos pretender que tal colección de conjuntos internos sea

la extensión de un conjunto interno. Al contrario, podemos encontrarnos con una contradicción que demuestre que tal colección de conjuntos es una clase propia, externa a nuestra película.

Así, dado un conjunto interno  $A$ , podemos considerar como personaje de nuestra película al conjunto

$$R_A = \{x \in A \mid x \notin x\},$$

y este conjunto no da lugar a ninguna contradicción. Sería una contradicción que cumpliera  $R_A \in R_A$ , por lo que podemos deducir que  $R_A \notin R_A$ , de donde a su vez se desprende que  $R_A \notin A$  (pues si fuera  $R_A \in A$  podríamos concluir que  $R_A \in R_A$ , y tendríamos otra contradicción).

No obstante, el axioma de especificación no es suficiente para garantizar la existencia de todos los conjuntos internos que nos gustaría ver en nuestra película. Por ejemplo, dados dos conjuntos internos  $u$  y  $v$ , nos gustaría tener un conjunto interno  $w$  formado ni más ni menos que por  $u$  y  $v$ , es decir,

$$w = \{x \mid x = u \text{ o } x = v\},$$

pero esta expresión no es de la forma que nos permite apelar al axioma de especificación.

Problemas como éste se nos presentarán en muy pocas ocasiones, y sólo necesitaremos unos pocos axiomas específicos para asegurar la existencia algunos conjuntos internos como  $w$ . Ahora bien, una vez dispongamos de estos conceptos básicos, el único principio general de formación de conjuntos que vamos a necesitar (y el único que tendremos derecho a usar si no queremos caer en contradicciones) será el axioma de especificación.

## 1.2 Los conceptos conjuntistas básicos

En esta sección describiremos los personajes básicos de nuestra película. Empezamos observando que el axioma de especificación que ya hemos discutido requiere conocer la existencia de al menos un conjunto interno  $A$  para generar a partir de él nuevos conjuntos internos, y de momento no conocemos ninguno. Por eso necesitaremos algunos axiomas específicos que nos garanticen la existencia de algunos conjuntos que encabecen nuestro “reparto”.

**Axioma del conjunto vacío** *Existe un conjunto interno que no tiene ningún elemento.*

El axioma de extensionalidad implica que tal conjunto es único, pues si existieran dos conjuntos internos sin elementos, entonces ambos tendrían los mismos elementos (a saber, ninguno), luego tendrían que ser el mismo. Esta unicidad nos permite darle un nombre. Lo llamaremos *conjunto vacío* y lo representaremos por  $\emptyset$ .

**Axioma del par** *Dados dos conjuntos internos  $u$  y  $v$ , existe un conjunto interno cuyos elementos son exactamente  $u$  y  $v$ .*

Nuevamente, el axioma de extensionalidad garantiza que sólo puede haber un conjunto interno cuyos elementos sean  $u$  y  $v$ , pues dos de ellos serían dos conjuntos con los mismos elementos. Por ello podemos llamar a tal conjunto el *par desordenado* formado por  $u$ , y  $v$ , y lo representaremos por  $\{u, v\}$ .

Observemos que, si tenemos dos conjuntos internos  $u$  y  $v$ , no necesitamos ningún axioma que nos de derecho a pensar coherentemente en la colección formada por ellos dos. Lo que garantiza el axioma del par es que dicha colección no es externa a nuestra película, sino que también forma parte de ella.

También es importante destacar que el axioma no requiere que los conjuntos  $u$  y  $v$  sean distintos. Si son iguales abreviaremos  $\{u, u\} = \{u\}$ , que es un conjunto interno que tiene a  $u$  como único elemento.

El nombre de “par desordenado” hace referencia a que, evidentemente, se cumple  $\{u, v\} = \{v, u\}$ , dado que ambos conjuntos tienen los mismos elementos. Cuando queramos dar importancia al orden en que consideramos dos conjuntos podemos agruparlos en lo que llamaremos un *par ordenado*:

$$(u, v) = \{\{u\}, \{u, v\}\}.$$

Observemos que  $(u, v)$  es un conjunto interno cuya existencia se demuestra aplicando tres veces el axioma del par. Es fácil demostrar que la igualdad  $(u, v) = (p, q)$  sólo se da cuando  $u = p$  y  $v = q$ . En particular, si  $u \neq v$ , tenemos que  $(u, v) \neq (v, u)$ .

Ahora podemos definir una *terna ordenada*  $(u, v, w) = ((u, v), w)$ , e igualmente, una *cuádrupla ordenada*  $(u, v, w, x) = ((u, v, w), x)$ , etc.

Dados dos conjuntos  $u$  y  $v$ , definimos su *unión* y su *intersección* como

$$u \cup v = \{x \mid x \in u \text{ o } x \in v\}, \quad u \cap v = \{x \mid x \in u \text{ y } x \in v\}.$$

El lector debería protestar ante estas definiciones, ya que parecen aplicaciones del axioma de especificación y, sin embargo, no respetan su estructura, ya que no estamos restringiendo la selección a los  $x$  que pertenecen a un conjunto  $A$  prefijado. En el caso de la intersección esto se puede arreglar, ya que podemos escribir

$$u \cap v = \{x \in u \mid x \in v\},$$

sin embargo, con la unión la objeción es irrefutable, por lo que necesitamos un axioma específico:

**Axioma de la unión** *Dados dos conjuntos internos, existe un conjunto interno cuyos elementos son los conjuntos internos que pertenecen a cualquiera de los dos conjuntos dados.*<sup>2</sup>

<sup>2</sup>En realidad, la teoría de conjuntos requiere un axioma de la unión más fuerte que éste, pero no necesitamos explicitar este hecho.

Esto nos permite hablar de conjuntos internos como

$$\{a, b, c, d\} = \{a\} \cup \{b\} \cup \{c\} \cup \{d\},$$

que es el único conjunto interno cuyos elementos son los cuatro conjuntos internos  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ .

Otro uso válido del axioma de especificación es la definición del *complementario* de un conjunto interno en otro:

$$u \setminus v = \{x \in u \mid x \notin v\}.$$

El último concepto básico que requiere su axioma específico es el siguiente:

**Axioma del conjunto de partes** *Dado un conjunto interno  $A$ , existe un conjunto interno cuyos elementos son todos los subconjuntos de  $A$ .*

A dicho conjunto lo llamaremos *conjunto de las partes de  $A$* :

$$\mathcal{P}A = \{x \mid x \subset A\}.$$

Observemos que si  $u \in A$  y  $v \in B$ , entonces  $u, v \in A \cup B$ , luego

$$\{u\}, \{u, v\} \in \mathcal{P}(A \cup B),$$

luego

$$(u, v) = \{\{u\}, \{u, v\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)).$$

Esto implica que, aunque la definición

$$A \times B = \{(u, v) \mid u \in A, v \in B\}$$

podría parecer un uso fraudulento del axioma de especificación, en realidad es legítima, porque podríamos haber escrito

$$A \times B = \{(u, v) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)) \mid u \in A, v \in B\}.$$

Este conjunto, es decir, el conjunto de todos los pares ordenados con primera componente en  $A$  y segunda componente en  $B$ , se llama *producto cartesiano* de  $A$  y  $B$ .

Terminaremos esta sección esbozando la construcción del conjunto  $\mathbb{N}$  de los números naturales. La idea que perseguimos es demostrar la existencia de un conjunto interno que tenga este aspecto:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Pero, para ello, tenemos dos problemas: en primer lugar, para que  $\mathbb{N}$  sea un conjunto interno hemos de definir sus elementos 0, 1, 2, etc. de tal modo que podamos considerar a cada uno de ellos como un conjunto interno, y en segundo

lugar hemos de arreglárnoslas para definir un conjunto  $\mathbb{N}$  que los tenga a ellos por elementos y sólo a ellos.

El primer problema es fácil de resolver. Si pensamos en los números naturales como en ciertos “personajes históricos”, lo que necesitamos es seleccionar unos actores que interpreten estos papeles en nuestra película. Como número 0, ninguno parece más idóneo que el conjunto vacío. En lo sucesivo llamaremos *número natural* 0 a  $0 = \emptyset$ . Esto significa que, cuando pensemos en el conjunto vacío como en el único conjunto interno sin elementos, escribiremos  $\emptyset$ , mientras que cuando pensemos en él como número natural 0 escribiremos 0, si bien se trata en ambos casos del mismo conjunto.

A continuación definimos, para cualquier conjunto interno  $x$ , el que llamaremos *siguiente* de  $x$ , que será  $x' = x \cup \{x\}$ . En particular, definimos

$$1 = 0' = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\} = \{0\},$$

$$2 = 1' = 1 \cup \{1\} = \{0\} \cup \{1\} = \{0, 1\},$$

$$3 = 2' = 2 \cup \{2\} = \{0, 1\} \cup \{2\} = \{0, 1, 2\},$$

y así sucesivamente. El problema que nos queda es convertir el “así sucesivamente” en una propiedad interna que podamos usar para definir el conjunto interno  $\mathbb{N}$ . Para ello definimos:

Un conjunto interno  $A$  es *inductivo* si  $0 \in A$  y, siempre que un conjunto  $x$  cumple  $x \in A$ , también se cumple que  $x' \in A$ .

Es decir, un conjunto es inductivo si contiene a todos los conjuntos internos que queremos tomar como números naturales. Ahora necesitamos el último axioma que perfilará el comportamiento básico de los conjuntos internos:

**Axioma de infinitud** *Existe un conjunto interno inductivo.*

Se llama axioma de infinitud porque sin él es imposible, no ya construir los números naturales, sino siquiera demostrar la existencia de un conjunto interno que sea infinito.

El problema de los conjuntos inductivos es que, además de los números naturales, pueden contener otros conjuntos. La definición siguiente resuelve este problema:

Llamaremos *conjunto de los números naturales* al conjunto interno

$$\mathbb{N} = \{x \in A \mid x \text{ pertenece a todos los conjuntos internos inductivos}\},$$

donde  $A$  es un conjunto inductivo arbitrario. Es claro que  $\mathbb{N}$  no depende de la elección de  $A$ , pues si llamamos  $\mathbb{N}_A$  y  $\mathbb{N}_B$  a los conjuntos definidos de este modo a partir de dos conjuntos inductivos  $A$  y  $B$ , entonces todo  $x \in \mathbb{N}_A$  pertenece a todos los conjuntos inductivos, en particular a  $B$ , luego también  $x \in \mathbb{N}_B$ , y viceversa, luego  $\mathbb{N}_A = \mathbb{N}_B$ .

A partir de aquí, es una pura rutina demostrar los siguientes hechos básicos sobre los números naturales:

1.  $0 \in \mathbb{N}$  y, si  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $n' \in \mathbb{N}$  (el cero es un número natural y el siguiente de un número natural es también un número natural).
2. No existe ningún  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $n' = 0$  (el cero no es el siguiente de ningún número natural).
3. Si  $n \in \mathbb{N}$  y  $n \neq 0$ , existe un  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $n = m'$  (todo número natural no nulo es el siguiente de otro número natural).
4. Si  $m, n \in \mathbb{N}$  y  $m' = n'$  entonces  $m = n$  (números distintos tienen siguientes distintos).
5. Si  $A \subset \mathbb{N}$  es un conjunto interno tal que  $0 \in A$  y, cuando  $n \in A$ , también  $n' \in A$ , entonces  $A = \mathbb{N}$ .

La última propiedad se conoce como *principio de inducción* y, aunque parezca la propiedad más compleja de las cinco, es una de las más fáciles de demostrar: un conjunto  $A$  en tales condiciones es, por definición, inductivo, luego si  $n \in \mathbb{N}$ , se cumple que  $n \in A$  por definición de  $\mathbb{N}$ , es decir, porque  $n$  ha de pertenecer a todos los conjuntos internos inductivos. Por consiguiente,  $\mathbb{N} \subset A$ , lo que, unido a la hipótesis de que  $A \subset \mathbb{N}$ , nos da que  $A = \mathbb{N}$ .

Las propiedades 1. y 2. son inmediatas, 3. se prueba trivialmente usando 5. (que ya está probada).

**Ejercicio:** Probar 4. siguiendo este esquema:

- a) Demostrar por inducción sobre  $n$  que si  $m \in n \in \mathbb{N}$ , entonces  $m \subset n$ .
- b) Demostrar por inducción que, si  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $n \notin n$ .
- c) Demostrar 4. por reducción al absurdo: si  $m \neq n$ , entonces  $m \in n$  y  $n \in m$ . Llegar de aquí a una contradicción.

A veces es más cómodo expresar el principio de inducción en términos de propiedades: Dados unos conjuntos internos  $x_1, \dots, x_n$  y una propiedad interna  $P(n, x_1, \dots, x_n)$ , podemos considerar el conjunto interno

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n, x_1, \dots, x_n)\}.$$

Lo que dice el principio de inducción para el caso del conjunto  $A$  es que, si  $0$  tiene la propiedad  $P$  y, supuesto que un  $n \in \mathbb{N}$  tiene  $P$ , podemos probar que  $n'$  también tiene la propiedad  $P$ , entonces podemos asegurar que todo número natural tiene la propiedad  $P$ .

Las cinco propiedades que hemos enunciado sobre los números naturales se conocen como *axiomas de Peano* (aunque no son axiomas, sino teoremas de nuestra película). Peano creía, y muchos matemáticos siguen creyendo actualmente, que determinan completamente al conjunto  $\mathbb{N}$  de los números naturales, en el sentido de que no puede haber más que un conjunto que cumpla esas cinco propiedades. Esto es cierto si, por “conjunto”, entendemos “conjunto interno”, es decir, un conjunto de los que forman parte de nuestra película.

**Ejercicio:** Demostrar que si  $\mathbb{N}_1$  y  $\mathbb{N}_2$  son dos conjuntos internos que cumplen los cinco axiomas de Peano, entonces  $\mathbb{N}_1 = \mathbb{N}_1 \cap \mathbb{N}_2 = \mathbb{N}_2$ .

Ahora bien, quienes creen que los axiomas de Peano determinan de forma absoluta el conjunto de los números naturales no tienen en cuenta que las películas son películas. No es éste el mejor momento para discutir sobre la cuestión. Volveremos sobre ella más tarde. De momento dejamos únicamente esta idea al lector: En el mundo real sólo ha habido un Julio César, y, por ello, en una película sobre Julio César sólo puede haber un personaje que sea Julio César, pero eso no garantiza que el Julio César que presente la película sea una imagen fiel del Julio César histórico. Sería un error garrafal afirmar que el Julio César de la película ha de ser idéntico al Julio César real porque no puede haber más que un Julio César. En realidad tenemos dos unicidades: hay un único Julio César externo y un único Julio César interno, pero el Julio César interno puede ser muy diferente del Julio César externo.

### 1.3 Elementos de teoría de conjuntos

Una vez presentados los principales personajes de nuestra película, ahora vamos a dar algunos detalles del argumento. Puesto que todo lo que vamos a decir hace referencia a lo que sucede en la realidad de nuestra película, hablaremos de “conjuntos” entendiendo que en todo momento nos referimos a conjuntos internos.

#### 1.3.1 Funciones

**Definición 1.1** Dados dos conjuntos  $A$  y  $B$ , una *aplicación* (o una *función*)  $f : A \rightarrow B$  es un subconjunto  $f \subset A \times B$  tal que, para cada  $a \in A$ , existe un único  $b \in B$  tal que  $(a, b) \in f$ . Este único  $b$  se llama *imagen* por  $f$  del conjunto  $a$ , y se representa por  $b = f(a)$ . También se dice que  $a$  es una *antiimagen* de  $b$  por  $f$ .

En la práctica, para definir una aplicación  $f : A \rightarrow B$  podemos olvidar que estamos definiendo un conjunto de pares ordenados y definir simplemente  $f(a)$  para todo  $a \in A$ . En el fondo, esto es siempre una aplicación del axioma de especificación. Por ejemplo, si definimos  $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  como la aplicación dada por  $s(n) = n'$ , con más precisión estamos definiendo el conjunto

$$s = \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m = n'\}.$$

**Definición 1.2** Una aplicación  $f : A \rightarrow B$  es *inyectiva* si elementos distintos de  $A$  tienen imágenes distintas en  $B$  o, alternativamente, si cuando  $f(a) = f(a')$ , entonces  $a = a'$ .

Diremos que  $f$  es *suprayectiva* si todo elemento de  $B$  tiene al menos una antiimagen en  $A$ . Diremos que  $f$  es *biyectiva* si es inyectiva y suprayectiva.

Definimos<sup>3</sup>

$$B^A = \{f \mid f : A \longrightarrow B\}.$$

Si  $f : A \longrightarrow B$  y  $g : B \longrightarrow C$ , definimos la *composición*  $f \circ g : A \longrightarrow C$  como la aplicación dada por  $(f \circ g)(a) = g(f(a))$ .

La aplicación *identidad*  $I_A : A \longrightarrow A$  en un conjunto  $A$  es la aplicación biyectiva dada por  $I_A(a) = a$ .

Si  $A \subset B$ , la *inclusión* de  $A$  en  $B$  es la aplicación  $i : A \longrightarrow B$  dada por  $i(a) = a$  (de modo que la identidad es la inclusión de un conjunto en sí mismo).

Si  $f : A \longrightarrow B$  es una aplicación biyectiva, podemos definir la *aplicación inversa*  $f^{-1} : B \longrightarrow A$  como la aplicación

$$f^{-1} = \{(b, a) \in B \times A \mid f(a) = b\}.$$

De este modo,  $f(a) = b$  equivale a  $f^{-1}(b) = a$ . Es fácil ver que  $f^{-1}$  es también biyectiva y es la única aplicación  $g : B \longrightarrow A$  que cumple  $f \circ g = I_B$  y  $g \circ f = I_A$ .

Si  $f : A \longrightarrow B$  y  $C \subset A$ , llamaremos *restricción* de  $f$  a  $C$  a la aplicación  $f|_C : C \longrightarrow B$  dada por  $f|_C(c) = f(c)$ , para todo  $c \in C$ .

**Ejercicio:** Comprobar que la composición de aplicaciones inyectivas, suprayectivas o biyectivas es también inyectiva, suprayectiva o biyectiva.

**Teorema 1.3 (Teorema de recursión)** *Dado un conjunto  $A$ , un conjunto  $a \in A$  y una aplicación  $g : A \longrightarrow A$ , existe una única aplicación  $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$  que cumple  $f(0) = a$  y, para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f(n') = g(f(n))$ .*

Es decir, para definir una aplicación  $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$  basta definir  $f(0)$  y definir  $f(n')$  a partir de  $f(n)$ .

DEMOSTRACIÓN:<sup>4</sup> Por inducción se demuestra que, si  $m \in \mathbb{N}$ , se cumple que  $0 \in m'$ , todos los elementos de  $m'$  son números naturales y, si  $n \in m$ , entonces  $n' \in m'$ .

En efecto, esto es cierto para  $m = 0$ , ya que  $0 \in 0' = \{0\}$ , el único elemento de  $0'$  es  $0$ , que es un número natural, y la tercera propiedad es trivial, ya que no existe ningún  $n \in 0 = \emptyset$ .

Supongámoslo cierto para  $m$  y veámoslo para  $m'$ . Hemos de probar que  $0 \in m'' = m' \cup \{m'\}$ . Como suponemos que  $0 \in m'$ , es claro que también

<sup>3</sup>Podemos usar el axioma de especificación porque, de hecho,

$$B^A = \{f \in \mathcal{P}(A \times B) \mid f : A \longrightarrow B\}.$$

<sup>4</sup>La prueba es bastante técnica, y los argumentos que requiere son de naturaleza muy distinta a los que realmente nos van a interesar en este libro, por lo que el lector puede pasarla por alto sin que ello vaya a afectar a su comprensión de lo que sigue. La incluimos únicamente por si acaso, más adelante, el lector encuentra motivos para desconfiar de la construcción de los números naturales y quiere revisarla con detalle.

$0 \in m''$ . Si todos los elementos de  $m'$  son números naturales, también lo son todos los de  $m''$ , ya que son los de  $m'$  y el propio  $m'$ , que es un número natural. Además, si  $n \in m' = m \cup \{m\}$ , o bien  $n \in m$ , en cuyo caso  $n' \in m' \subset m''$  por la hipótesis de inducción, o bien  $n = m$ , en cuyo caso  $n' = m' \in m''$  por definición de  $m''$ .

Ahora vamos a probar que, para cada  $m \in \mathbb{N}$ , existe una única aplicación  $f_m : m' \rightarrow A$  que cumple  $f_m(0) = a$  y, para todo  $n \in m$ ,  $f_m(n') = g(f_m(n))$ .

En efecto, para  $m = 0$  basta tomar  $f_0 = \{(0, a)\}$ . Si existe  $f_m$ , definimos  $f_{m'} = f_m \cup \{(m', g(f_m(m)))\}$ . De este modo,  $f_{m'}(n) = f_m(n)$  para todo  $n \in m$ , por lo que la propiedad que suponemos que cumple  $f_m$  puede reformularse así:

$$f_{m'}(0) = a, \quad f_{m'}(n') = g(f_{m'}(n)),$$

para todo  $n \in m'$ . Como  $m' = m \cup \{m\}$ , sólo falta probar que la segunda parte se cumple también para  $n = m$ . Ahora bien, por definición,

$$f_{m'}(m') = g(f_m(m)) = g(f_{m'}(m)).$$

Para probar la unicidad, sea  $h : m'' \rightarrow A$  cualquier aplicación que cumpla las condiciones

$$h(0) = a, \quad h(n') = g(h(n)), \quad \text{para todo } n \in m',$$

y vamos a probar que es justamente la  $f_{m'}$  que hemos definido. Demostramos por inducción que si  $n \in m''$ , entonces  $h(n) = f_{m'}(n)$ .

En efecto, si  $n = 0$ , entonces  $h(0) = a = f_{m'}(0)$ . Si  $h(n) = f_{m'}(n)$  y  $n' \in m''$ , entonces

$$h(n') = g(h(n)) = g(f_{m'}(n)) = f_{m'}(n').$$

Así pues,  $h = f_{m'}$ , como queríamos probar.

Ahora definimos  $f : \mathbb{N} \rightarrow A$  mediante  $f(n) = f_n(n)$ . La aplicación  $f$  tiene la propiedad indicada, pues  $f(0) = f_0(0) = a$  y, si  $n \in \mathbb{N}$ , entonces

$$f(n') = f_{n'}(n') = g(f_{n'}(n)) = g(f_n(n)) = g(f(n)).$$

La unicidad se demuestra por inducción exactamente igual a como hemos probado la unicidad de  $f_{m'}$ . ■

Veamos una primera aplicación del teorema de recursión:

**Definición 1.4** Para cada  $m \in \mathbb{N}$ , definimos la aplicación  $(m+) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  determinada recursivamente por  $m$  y la aplicación siguiente  $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , es decir, como la única aplicación que cumple:

$$(m+)(0) = m, \quad (m+)(n') = s((m+)(n)) = ((m+)(n))'.$$

En la práctica escribiremos  $m + n$  en lugar de  $(m+)(n)$ , con lo que las propiedades anteriores se vuelven más legibles:

$$m + 0 = m, \quad m + n' = (m + n)'$$

Más aún, recordando la definición  $1 = 0'$ , tenemos que

$$m + 1 = m + 0' = (m + 0)' = m + 1.$$

Por ello, en lo sucesivo no volveremos a representar el siguiente de  $m$  por  $m'$ , sino que nos referiremos a él como  $m + 1$ . En estos términos, las propiedades que definen a la suma se expresan así:

$$m + 0 = m, \quad m + (n + 1) = (m + n) + 1.$$

Más en general, las condiciones del teorema de recursión se expresan como sigue:

$$f(0) = a, \quad f(n + 1) = g(f(n)).$$

**Definición 1.5** Para cada  $m \in \mathbb{N}$ , definimos la aplicación  $(m \cdot) : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$  como la única que cumple

$$m \cdot 0 = 0, \quad m \cdot (n + 1) = m \cdot n + m,$$

donde hemos utilizado el teorema de recursión con la función  $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$  dada por  $g(n) = n + m$ .

A partir de aquí, es pura rutina demostrar todas las propiedades conocidas de la suma y el producto de números naturales. Veamos algunos ejemplos:

PROPIEDAD ASOCIATIVA DE LA SUMA:  $(m + n) + r = m + (n + r)$ .

Lo probamos por inducción sobre  $r$ . Si  $r = 0$  se reduce a

$$(m + n) + 0 = m + n = m + (n + 0).$$

Si vale para  $r$ , lo probamos para  $r + 1$ :

$$\begin{aligned} (m + n) + (r + 1) &= ((m + n) + r) + 1 = (m + (n + r)) + 1 \\ &= m + ((n + r) + 1) = m + (n + (r + 1)), \end{aligned}$$

donde hemos usado la definición de suma, la hipótesis de inducción y dos veces más la definición de suma. ■

PROPIEDAD CONMUTATIVA DE LA SUMA:  $m + n = n + m$ .

Dejamos como ejercicio probarlo para  $m = 0$  y  $m = 1$ , es decir, probar por inducción sobre  $n$  que  $0 + n = n + 0$  y que  $1 + n = n + 1$ .

Ahora probamos el resultado general, también por inducción sobre  $n$ . Para  $n = 0$  es: uno de los casos que hemos dejado como ejercicio:  $m + 0 = m = 0 + m$ . Si vale para  $n$ , tenemos

$$m + (n + 1) = (m + n) + 1 = (n + m) + 1 = n + (m + 1) = n + (1 + m) = (n + 1) + m,$$

donde hemos usado la definición de suma, la hipótesis de inducción, la definición de suma, el caso que hemos dejado como ejercicio y la propiedad asociativa. ■

SIMPLIFICACIÓN DE LA SUMA: Si  $u + n = v + n$ , entonces  $u = v$ .

Por inducción sobre  $n$ . Para  $n = 0$  es  $u + 0 = v + 0$ , luego  $u = v$ . Si vale para  $n$ , entonces, si  $u + (n + 1) = v + (n + 1)$ , también  $(u + n) + 1 = (v + n) + 1$ , luego  $u + n = v + n$  (por el cuarto axioma de Peano), luego  $u = v$ , por hipótesis de inducción. ■

### 1.3.2 Relaciones

**Definición 1.6** Una *relación* en un conjunto  $A$  es un conjunto  $R \subset A \times A$ . En lugar de escribir  $(a, b) \in R$ , escribiremos  $a R b$  y diremos que  $a$  *está relacionado con*  $b$  (según la relación  $R$ )

Una *relación de orden (total)* en un conjunto  $A$  es una relación  $\leq$  en  $A$  que cumple las propiedades siguientes:

**Reflexiva**  $a \leq a$ .

**Antisimétrica** Si  $a \leq b$  y  $b \leq a$ , entonces  $a = b$ .

**Transitiva** Si  $a \leq b$  y  $b \leq c$ , entonces  $a \leq c$ .

**De conexión**  $a \leq b$  o  $b \leq a$ .

Si  $\leq$  es una relación de orden en un conjunto  $A$ , escribiremos  $a < b$  para indicar  $a \leq b$  y  $a \neq b$ . Escribiremos  $a \geq b$  como equivalente a  $b \leq a$ , así como  $a > b$  como equivalente a  $b < a$ .

Un *conjunto ordenado* es un par  $(A, \leq)$ , donde  $\leq$  es una relación de orden en el conjunto  $A$ .

**Teorema 1.7** La relación en  $\mathbb{N}$  dada por

$$m \leq n \text{ si y sólo si existe un } r \in \mathbb{N} \text{ tal que } m + r = n$$

es una relación de orden.

DEMOSTRACIÓN: Las propiedades reflexiva y transitiva son inmediatas. Para probar la propiedad antisimétrica suponemos que  $m \leq n$  y  $n \leq m$ , de modo que  $m + r = n$  y  $n + s = m$ , para ciertos  $r, s \in \mathbb{N}$ . Entonces  $m + r + s = m = m + 0$ .

Por la propiedad de simplificación,  $r + s = 0$ . De aquí se sigue que  $s = 0$ , ya que en caso contrario  $s = t + 1$ , con lo que  $r + t + 1 = 0$ , en contra del segundo axioma de Peano. Por lo tanto,  $m = n + s = n + 0 = n$ .

La conexión la demostramos por inducción sobre  $a$ . Si  $a = 0$  entonces  $0 \leq b$ , ya que  $b = 0 + b$ . Si vale para  $a$ , entonces  $a \leq b$  o  $b \leq a$ . En el segundo caso  $b \leq a \leq a + 1$ , luego  $b \leq a + 1$ . En el primer caso tenemos que  $a + r = b$ , para cierto  $r \in \mathbb{N}$ . Si  $r \neq 0$ , entonces  $r = s + 1$ , luego  $a + 1 + s = b$ , lo que prueba que

$a + 1 \leq b$ . Si  $r = 0$  tenemos que  $a = b$ , luego  $b \leq b + 1 = a + 1$ . En cualquier caso, tenemos la conexión. ■

En lo sucesivo consideraremos siempre a  $\mathbb{N}$  como conjunto ordenado con la relación que acabamos de definir.

**Definición 1.8** Si  $m \leq n$  son dos números naturales, por definición existe un  $r \in \mathbb{N}$  tal que  $m + r = n$ . Por la propiedad de cancelación, este  $r$  es único, y lo llamaremos  $r = n - m$ .

**Ejercicio:** Demostrar que, si  $n \in \mathbb{N}$ , no existe ningún  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $n < m < n + 1$ . Equivalentemente, si  $m < n + 1$ , entonces  $m \leq n$  y si  $m < n$ , entonces  $m + 1 \leq n$ .

**Definición 1.9** Si  $(A, \leq)$  es un conjunto ordenado y  $B \subset A$ , el *mínimo* de  $B$  es un elemento  $m \in B$  tal que  $m \leq b$  para todo  $b \in B$ . El *máximo* de  $B$  es un elemento  $M \in B$  tal que  $b \leq M$  para todo  $b \in B$ .

Un conjunto  $B \subset A$  no tiene por qué tener mínimo elemento, pero si lo tiene es único, ya que, si hubiera dos, digamos  $m$  y  $m'$ , entonces tendría que ser  $m \leq m'$ , porque  $m$  es mínimo, y  $m' \leq m$ , porque  $m'$  es mínimo. Por la antisimetría, sería  $m = m'$ . Lo mismo sucede con el máximo.

Con la relación de orden que hemos definido, el conjunto  $\mathbb{N}$  de los números naturales cumple la siguiente propiedad fundamental:

**Teorema 1.10 (Principio de buena ordenación)** *Todo subconjunto de  $\mathbb{N}$  no vacío tiene mínimo elemento.*

DEMOSTRACIÓN: Vamos a probar por inducción sobre  $n$  que todo subconjunto  $A \subset \mathbb{N}$  que contenga un número  $\leq n$  tiene un mínimo elemento. Si  $A$  contiene un número  $m \leq 0$ , entonces ha de ser  $m = 0$ , porque  $0 + m = m$ , luego  $0 \leq m$ , luego  $m = 0$ . Por el mismo motivo, 0 es menor o igual que todo número de  $A$ , luego 0 es el mínimo de  $A$ .

Supongamos que todo conjunto de números naturales que contenga un número  $\leq n$  tiene mínimo elemento y supongamos que  $A$  contiene un número  $a \leq n + 1$ .

Distinguiamos dos casos: si  $A$  no contiene ningún número menor que  $a$ , es que  $a$  es el mínimo de  $A$ . En caso contrario,  $A$  contiene un elemento  $b < a \leq n + 1$ , luego  $b < n + 1$ , luego  $b \leq n$  y, por hipótesis de inducción,  $A$  tiene mínimo elemento. ■

En particular, el mínimo de  $\mathbb{N}$  es 0, y  $n + 1$  es el menor natural mayor que  $n$ . Por otra parte,  $\mathbb{N}$  no tiene un máximo elemento, ya que todo número natural  $n$  es menor que  $n + 1$ .

**Definición 1.11** Si  $(A, \leq)$  es un conjunto ordenado, diremos que un  $M \in A$  es una *cota superior* de un conjunto  $B \subset A$  si  $b \leq M$  para todo  $b \in B$  (pero, al contrario que en la definición de máximo, no exigimos que  $M \in B$ ). Análogamente se define una cota inferior. Diremos que un conjunto  $B \subset A$  está *acotado superior o inferiormente* si tiene una cota superior o inferior.

**Teorema 1.12** *Todo subconjunto de  $\mathbb{N}$  no vacío acotado superiormente tiene un máximo elemento.*

DEMOSTRACIÓN: Sea  $A \subset \mathbb{N}$ . Si  $A$  tiene una cota superior, el conjunto de sus cotas superiores es un subconjunto de  $\mathbb{N}$  no vacío, luego podemos considerar la menor cota superior  $M$  de  $A$ . Vamos a probar que es el máximo de  $A$ . Sólo hay que probar que  $M \in A$ . Si  $M \notin A$ , entonces todo  $a \in A$  cumple  $a < M$ . Como  $A$  no es vacío, no puede ser  $M = 0$ , luego  $M = c + 1$ , para cierto  $c \in \mathbb{N}$ . Entonces, si  $a \in A$ , tenemos que  $a < c + 1$ , luego  $a \leq c$ , luego  $c$  es una cota superior de  $A$ , pero  $c < M$ , en contradicción con que  $M$  era la menor cota posible. Así pues,  $M \in A$  y  $M$  es el máximo de  $A$ . ■

**Definición 1.13** Una relación  $R$  en un conjunto  $A$  es una *relación de equivalencia* si cumple las propiedades siguientes:

**Reflexiva**  $a R a$ .

**Simétrica** Si  $a R b$ , entonces  $b R a$ .

**Transitiva** Si  $a R b$  y  $b R c$ , entonces  $a R c$ .

En estas condiciones, definimos la *clase de equivalencia* de un elemento  $a \in A$  como el conjunto

$$[a] = \{b \in A \mid a R b\}.$$

El *conjunto cociente* de  $A$  sobre  $R$  es el conjunto  $A/R$  que contiene a todas las clases de equivalencia de los elementos de  $A$ .

**Ejercicio:** Demostrar que, en las condiciones anteriores,  $a R b$  si y sólo si  $[a] = [b]$ , mientras que no  $a R b$  si y sólo si  $[a] \cap [b] = \emptyset$ .

### 1.3.3 Conjuntos finitos

**Definición 1.14** Si  $n \in \mathbb{N}$  es un número natural, definimos

$$I_n = \{m \in \mathbb{N} \mid m < n\}.$$

Un conjunto  $A$  es *finito* si existe un número natural  $n$  y una aplicación biyectiva  $f : I_n \rightarrow A$ . En caso contrario es *infinito*.

Observemos que,  $I_0 = \emptyset$  y, técnicamente,  $\emptyset : \emptyset \rightarrow \emptyset$  biyectiva, por lo que  $\emptyset$  es un conjunto finito. Si el lector juzga esto difícil de digerir, puede considerar simplemente que  $\emptyset$  es finito por definición.

Los conjuntos  $I_n$  son finitos, pues cumplen la definición con la aplicación identidad.

Otro hecho obvio es que, si existe una aplicación biyectiva  $g : A \rightarrow B$ , entonces  $A$  es finito si y sólo si  $B$  es finito. En efecto, si existe una aplicación biyectiva  $f : I_n \rightarrow A$ , entonces  $f \circ g : I_n \rightarrow B$  también es biyectiva.

**Teorema 1.15** *Un subconjunto de  $\mathbb{N}$  es finito si y sólo si está acotado superiormente.*

DEMOSTRACIÓN: Para incluir al conjunto vacío, hay que entender que éste está trivialmente acotado. (De hecho, 0 es una cota superior.)

Si  $A \subset \mathbb{N}$  es finito, existe una aplicación biyectiva  $f : I_n \rightarrow A$ . Vamos a probar que  $A$  está acotado por inducción sobre  $n$ . Si  $n = 0$  entonces  $A = \emptyset$  y, como acabamos de decir, está trivialmente acotado.

Supongamos que el teorema es cierto para  $n$  y pongamos que  $f : I_{n+1} \rightarrow A$  es biyectiva. Si  $a = f(n)$ , entonces  $f$  se restringe a una aplicación biyectiva  $f' : I_n \rightarrow A \setminus \{a\}$ , luego  $A \setminus \{a\}$  está acotado superiormente. Sea  $M \in \mathbb{N}$  una cota superior de  $A \setminus \{a\}$ , es decir,  $b \leq M$  para todo  $b \in A$  que no sea  $b = a$ .

Si  $a \leq M$ , entonces  $M$  es una cota superior de  $A$ . Si  $M \leq a$ , entonces  $a$  es, de hecho, el máximo de  $A$ .

Supongamos ahora que  $A$  está acotado superiormente. También podemos suponer que  $A \neq \emptyset$ . Vamos a probar que es finito por inducción sobre una cota superior.

Si  $A$  tiene a 0 por cota superior, entonces  $A = \{0\} = I_1$ , luego es finito.

Si es cierto para conjuntos acotados por  $n$ , supongamos que una cota superior de  $A$  es  $n + 1$ . Si  $n$  es también una cota superior, entonces  $A$  es finito por hipótesis de inducción. En caso contrario es que  $n + 1 \in A$ . El conjunto  $A \setminus \{n + 1\}$  tiene a  $n$  por cota superior, luego por hipótesis de inducción es finito. Sea  $f : I_m \rightarrow A \setminus \{n + 1\}$  biyectiva. Entonces,

$$f \cup \{(m, n + 1)\} : I_{m+1} \rightarrow A \text{ es biyectiva,}$$

luego  $A$  es finito. ■

En particular,  $\mathbb{N}$  es infinito.

**Teorema 1.16** *Un conjunto  $A$  es finito si y sólo si existe una aplicación inyectiva  $A \rightarrow I_n$ , para cierto  $n \in \mathbb{N}$ .*

DEMOSTRACIÓN: Si  $A$  es finito, existe una aplicación biyectiva  $I_n \rightarrow A$ , y su inversa es también biyectiva, en particular inyectiva.

Si existe una aplicación  $A \rightarrow I_n$  inyectiva, podemos verla también como una aplicación biyectiva  $A \rightarrow B$ , donde  $B \subset I_n$ . Como  $I_n$  es finito,  $B$  también lo es, luego  $A$  también lo es. ■

**Ejercicio:** Demostrar que si  $A \rightarrow B$  es inyectiva y  $B$  es finito, entonces  $A$  es finito.

**Teorema 1.17** *Todo subconjunto de un conjunto finito es finito.*

DEMOSTRACIÓN: Sea  $A$  un conjunto finito y sea  $B \subset A$ . Existe una aplicación inyectiva  $A \rightarrow I_n$  que se restringe a otra aplicación inyectiva  $B \rightarrow I_n$ , luego  $B$  es finito. ■

**Ejercicio:** Probar que un conjunto  $A$  es infinito si y sólo si existe una aplicación suprayectiva  $I_n \rightarrow A$ , para cierto  $n \in \mathbb{N}$ .

**Teorema 1.18** Si  $m, n \in \mathbb{N}$  y existe una aplicación biyectiva  $I_m \rightarrow I_n$ , entonces  $m = n$ .

DEMOSTRACIÓN: Lo probamos por inducción sobre  $n$ . Si  $n = 0$ , entonces  $I_n = \emptyset$ , por lo que  $I_m$  ha de ser también vacío, luego  $m = 0$ .

Supongamos el teorema cierto para  $n$  y supongamos que tenemos una aplicación biyectiva  $f : I_m \rightarrow I_{n+1}$ . Claramente,  $m \neq 0$ , luego  $m = r + 1$  si  $f(r) = n$ , entonces  $f$  se restringe a una aplicación biyectiva  $I_r \rightarrow I_n$ , luego  $r = n$ , luego  $m = n + 1$ .

Si  $f(r) \neq n$ , consideramos los números  $f(r) = u \neq n$  y  $v = f^{-1}(n) \neq r$ . Es fácil ver que

$$(f \setminus \{(r, u), (v, n)\}) \cup \{(v, u)\} : I_r \rightarrow I_n \text{ biyectiva,}$$

luego nuevamente  $r = n$  y  $m = n + 1$ . ■

Así pues, si  $A$  es un conjunto finito, existe un único  $n \in \mathbb{N}$  tal que existe una aplicación biyectiva  $f : I_n \rightarrow A$ , pues si  $g : I_m \rightarrow A$ , entonces se cumple que  $g \circ f^{-1} : I_m \rightarrow I_n$  es biyectiva, luego  $m = n$ .

**Definición 1.19** Si  $A$  es un conjunto finito, llamaremos *cardinal* de  $A$  al único  $n \in \mathbb{N}$  tal que existe una aplicación biyectiva  $f : I_n \rightarrow A$ . Lo representaremos por  $|A|$ .

El cardinal de un conjunto finito es lo que más habitualmente se llama su “número de elementos”. Claramente  $|A| = 0$  si y sólo si  $A = \emptyset$ .

Si  $A \neq \emptyset$  tiene  $n$  elementos, existe  $x : I_n \rightarrow A$  biyectiva. Si escribimos  $x_i = x(i - 1)$ , podemos representar  $A$  en la forma  $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ .

**Teorema 1.20** Si  $A$  y  $B$  son conjuntos finitos, entonces  $A \cup B$  es finito y

$$|A \cup B| + |A \cap B| = |A| + |B|.$$

DEMOSTRACIÓN: Supongamos primeramente que  $A \cap B = \emptyset$ . Sean  $m = |A|$ ,  $n = |B|$ , de modo que existen  $f : A \rightarrow I_m$  y  $g : B \rightarrow I_n$  son biyectivas. Podemos definir una aplicación biyectiva  $h : A \cup B \rightarrow I_{m+n}$  mediante

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A, \\ m + g(x) & \text{si } x \in B. \end{cases}$$

Por consiguiente,  $|A \cup B| = m + n = |A| + |B|$ .

En el caso general, sea  $B' = B \setminus (A \cap B)$ . Como  $B = B' \cup (A \cap B)$  y ambos conjuntos son disjuntos, la parte ya probada nos da que  $|B| = |B'| + |A \cap B|$ .

Por otra parte,  $A \cup B = A \cup B'$  y  $A \cap B' = \emptyset$ . De nuevo por la parte ya probada,  $|A \cup B| = |A| + |B'|$ . Sumando  $|A \cap B|$  a ambos miembros tenemos la fórmula del enunciado. ■

**Ejercicio:** Probar que si  $A$  y  $B$  son conjuntos finitos, entonces  $A \times B$  también es finito, y  $|A \times B| = |A||B|$ .

**Teorema 1.21** *Todo conjunto (totalmente) ordenado finito no vacío tiene un máximo y un mínimo elemento.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos, por reducción al absurdo, que existe un conjunto ordenado no vacío sin máximo elemento. Sea  $n$  el mínimo cardinal posible para un conjunto en tales condiciones. Esto significa que cualquier conjunto ordenado con menos de  $n$  elementos tiene un máximo elemento.

Sea, pues  $A$  un conjunto de  $n$  elementos, no vacío y sin máximo. No puede ser  $n = 0$ , así que  $n = m + 1$ . Tampoco puede ser  $n = 1$ , porque entonces  $A = \{a\}$  y obviamente, tiene máximo. Por lo tanto,  $m \neq 0$ . Si  $a \in A$ , entonces  $A \setminus \{a\}$  es un conjunto ordenado no vacío con  $m$  elementos, luego tiene un máximo  $a'$ . Si  $a' \geq a$ , entonces  $a'$  es el máximo de  $A$ . Si  $a' < a$ , entonces  $a$  es el máximo de  $A$ . Igualmente se razona con los mínimos. ■

Si  $A$  es un conjunto ordenado finito, todo subconjunto de  $A$  también lo es, luego, de hecho, todos los subconjuntos no vacíos de  $A$  tienen máximo y mínimo elemento. En particular, todo elemento que no sea el máximo tiene un inmediato posterior (el mínimo de los elementos mayores que él), y todo elemento que no sea el mínimo tiene un inmediato anterior.

### 1.3.4 Estructuras algebraicas y de orden

**Definición 1.22** Una *ley de composición interna* en un conjunto  $A$  es una aplicación

$$* : A \times A \longrightarrow A.$$

En lugar de escribir  $*(a, b)$ , escribiremos  $a * b$ . En definitiva, una ley de composición interna en  $A$  es cualquier forma de operar dos elementos de  $A$  para obtener un nuevo elemento de  $A$ .

Por ejemplo, aunque, técnicamente, hemos definido la suma y el producto de números naturales como una familia de aplicaciones  $(m+)$  y  $(m\cdot)$ , para cada  $m \in \mathbb{N}$ , es más natural reunir las en dos únicas leyes de composición interna

$$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad \cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}.$$

Por definición,  $m + n = (m+)(n)$  y  $m \cdot n = (m\cdot)(n)$ .

**Definición 1.23** Un *anillo conmutativo y unitario* es una terna  $(A, +, \cdot)$ , donde  $A$  es un conjunto y  $+ : A \times A \longrightarrow A$ ,  $\cdot : A \times A \longrightarrow A$  son dos leyes de composición interna en  $A$  que cumplen las propiedades siguientes:

**Asociativa**  $(a + b) + c = a + (b + c)$ ,  $(ab)c = a(bc)$ .

**Conmutativa**  $a + b = b + a$ ,  $ab = ba$ .

**Distributiva**  $a(b + c) = ab + ac$ .

**Elemento neutro** Existen  $0, 1 \in A$  tales que  $a + 0 = a$ ,  $a \cdot 1 = a$ .

**Elemento simétrico** Para cada  $a \in A$  existe un elemento  $-a \in A$  tal que  $a + (-a) = 0$ .

En lo sucesivo, siempre que hablemos de anillos se entenderá que son anillos conmutativos y unitarios.

Observemos que los elementos neutros  $0$  y  $1$  son únicos, pues si  $0$  y  $0'$  son neutros para la suma, entonces  $0 = 0 + 0' = 0'$ , e igualmente con el producto.

Igualmente, el elemento simétrico ha de ser único, pues si existe otro  $(-a)'$  que cumple  $a + (-a) = 0 = a + (-a)'$ , entonces

$$-a = -a + 0 = -a + a + (-a)' = 0 + (-a)' = (-a)'.$$

En la práctica, escribiremos  $a - b$  en lugar de  $a + (-b)$ .

Observemos que en cualquier anillo se cumple  $a \cdot 0 = 0$ , pues

$$a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$$

y, sumando  $-(a \cdot 0)$  a ambos miembros, llegamos a que  $0 = a \cdot 0$ .

**Ejercicio:** Demostrar que en cualquier anillo se cumple  $(-a)b = a(-b) = -(ab)$ ,  $(-a)(-b) = ab$ ,  $-(a + b) = -a - b$ .

**Definición 1.24** Si  $A$  es un anillo, un *ideal* de  $A$  es un subconjunto  $I \subset A$  con las propiedades siguientes:

- a)  $0 \in I$ .
- b) Si  $a, b \in I$ , entonces  $a + b \in I$ .
- c) Si  $a \in I$  y  $b \in A$ , entonces  $ab \in I$ .

En tal caso, definimos en  $A$  la relación  $a \equiv b$  (mód  $I$ ) dada por  $a - b \in I$ . Se dice que  $a$  y  $b$  son *congruentes* módulo el ideal  $I$ .

**Teorema 1.25** Sea  $A$  un anillo e  $I$  un ideal de  $A$ .

- a) La congruencia en  $A$  módulo  $I$  es una relación de equivalencia.
- b) Si  $a \equiv a'$  (mód  $I$ ) y  $b \equiv b'$  (mód  $I$ ), entonces  $a + b \equiv a' + b'$  (mód  $I$ ) y  $ab \equiv a'b'$  (mód  $I$ ).

DEMOSTRACIÓN: a) Se cumple  $a \equiv a$  (mód  $I$ ) porque  $a - a = 0 \in I$ .

Si  $a \equiv b$  (mód  $I$ ), entonces  $a - b \in I$ , luego  $(-1)(a - b) = b - a \in I$ , luego  $b \equiv a$  (mód  $I$ ).

Si  $a \equiv b$  (mód  $I$ ) y  $b \equiv c$  (mód  $I$ ), entonces  $a - b \in I$  y  $b - c \in I$ . La suma también está en  $I$ , y es  $a - c \in I$ , luego  $a \equiv c$  (mód  $I$ ).

b) Sea  $a = a' + i$ ,  $b = b' + j$ , con  $i, j \in I$ . Entonces  $a + b = b + b' + i + j$ , con  $i + j \in I$ , y  $ab = a'b' + a'j + ib' + ij$ , y los tres últimos productos están en  $I$ , luego su suma también. Por lo tanto tenemos que  $a + b \equiv a' + b'$  (mód  $I$ ) y  $ab \equiv a'b'$  (mód  $I$ ). ■

**Definición 1.26** Si  $A$  es un anillo e  $I$  es un ideal de  $A$ , representaremos por  $A/I$  el conjunto cociente de  $A$  respecto a la relación de congruencia módulo  $I$ . El teorema anterior prueba que podemos definir una suma y un producto en  $A/I$  mediante

$$[a] + [b] = [a + b], \quad [a][b] = [ab].$$

El punto crucial es que estas definiciones no dependen del elemento de la clase de equivalencia con el que hacemos las operaciones, es decir, que si  $[a] = [a']$  y  $[b] = [b']$ , llegamos a la misma clase si calculamos  $[a + b]$  que si calculamos  $[a' + b']$ , e igualmente con el producto.

Es inmediato comprobar que estas operaciones convierten a  $A/I$  en un anillo, el llamado *anillo cociente* de  $A$  sobre  $I$ .

**Ejercicio:** Demostrar, mediante los oportunos razonamientos inductivos, que  $\mathbb{N}$  cumple todas las propiedades de la definición de anillo excepto la existencia de elementos simétricos.

Al añadir un elemento simétrico a cada número natural obtenemos el anillo de los números enteros. Veamos cómo hacerlo:

**Definición 1.27** Definimos en  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  la relación dada por

$$(m, n) R (m', n') \text{ si y sólo si } m + n' = n + m'.$$

Si pudiéramos restar dos números naturales cualesquiera, esta relación podría escribirse así:

$$m - n = m' - n'.$$

Vemos así que el significado de la relación  $R$  es que dos pares de números están relacionados si y sólo si “deberían” tener la misma resta.

**Ejercicio:** Demostrar que la relación  $R$  que acabamos de definir es de equivalencia.

Llamaremos conjunto de los *números enteros* al conjunto cociente

$$\mathbb{Z} = (\mathbb{N} \times \mathbb{N})/R.$$

**Ejercicio:** Demostrar que si  $(m, n) R (m', n')$  y  $(u, v) R (u', v')$ , entonces

$$(m + u, n + v) R (m' + u', n' + v'), \quad (mu + nv, mv + nu) R (m'u' + n'v', m'v' + n'u')$$

así como que

$$m + v \leq n + u \quad \text{si y sólo si} \quad m' + v' \leq n' + u'.$$

El ejercicio anterior nos permite definir en  $\mathbb{Z}$  las operaciones

$$[(m, n)] + [(u, v)] = [(m + u, n + v)], \quad [(m, n)][(u, v)] = [(mu + nv, mv + nu)],$$

así como la relación

$$[(m, n)] \leq [(u, v)] \quad \text{si y sólo si} \quad m + v \leq n + u.$$

La interpretación es que si imaginamos que  $[(m, n)]$  representa a la “resta”  $m - n$  y  $[(u, v)]$  representa a la “resta”  $u - v$ , entonces su suma debe ser

$$m - n + u - v = (m + u) - (n + v),$$

y su producto debe ser

$$(m - n)(u - v) = mu + nv - mv - nu = (mu + nv) - (mv + nu)$$

y estas dos restas se corresponden con las clases de pares que hemos definido como suma y producto de las clases dadas.

Igualmente,  $m - n \leq u - v$  debe ser equivalente a  $m + v \leq n + u$ .

**Ejercicio:** Demostrar que  $\mathbb{Z}$  es un anillo con las operaciones que acabamos de definir. Los elementos neutros son  $0 = [(0, 0)]$ ,  $1 = [(1, 0)]$ . Los elementos simétricos son  $-[(m, n)] = [(n, m)]$ .

**Ejercicio:** Demostrar que la relación  $\leq$  que hemos definido en  $\mathbb{Z}$  es una relación de orden.

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , definimos los números enteros  $+n = [(n, 0)]$ ,  $-n = [(0, n)]$ . Si  $[(m, n)]$  es un número entero arbitrario, vemos que, si  $m \geq n$ , entonces

$$[(m, n)] = [(m - n, 0)] = +(m - n),$$

mientras que si  $m \leq n$  entonces

$$[(m, n)] = [(0, n - m)] = -(n - m).$$

Además,  $+0 = [(0, 0)] = -0$  es el elemento neutro  $0 \in \mathbb{Z}$ . Por consiguiente, si llamamos  $\mathbb{Z}^+ = \{+n \mid n \in \mathbb{N}, n \neq 0\}$  y  $\mathbb{Z}^- = \{-n \mid n \in \mathbb{N}, n \neq 0\}$ , se cumple

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+.$$

Es inmediato comprobar que la aplicación  $i : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  dada por  $i(n) = +n$  es inyectiva y cumple:

$$i(m + n) = i(m) + i(n), \quad i(mn) = i(m)i(n),$$

$$m \leq n \quad \text{si y sólo si} \quad i(m) \leq i(n).$$

Esto significa que podemos identificar cada número natural  $n$  con el número entero  $+n$ , de forma que la suma, el producto y la relación de orden entre números naturales se calculan igual si los consideramos como naturales o como enteros. Por ello, a partir de este momento consideraremos que  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ .

Observemos que, si  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $-n$  es el elemento simétrico de  $n$  en  $\mathbb{Z}$ , de modo que  $\mathbb{Z}$  consta únicamente de los números naturales y de sus simétricos (teniendo en cuenta que, en el caso de 0 (y sólo en este caso), se cumple  $0 = -0$ ).

**Ejercicio:** Demostrar que  $\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 0\}$ .

El anillo  $\mathbb{Z}$  cumple una propiedad que no exige la definición de anillo, a saber, que si  $mn = 0$ , entonces  $m = 0$  o  $n = 0$ .

En efecto, observemos en primer lugar que esto lo cumplen los números naturales, ya que si  $m \neq 0$  y  $n \neq 0$ , entonces  $m = r + 1$ , luego  $mn = rr + n$ , luego  $mn \geq n > 0$ .

En general, si  $mn = 0$ , también  $-mn = m(-n) = 0$  y  $(-m)(-n) = 0$ , y una de estas cuatro combinaciones corresponde a números naturales, luego ha de ser  $\pm m = 0$  o  $\pm n = 0$ , lo cual implica  $m = 0$  o  $n = 0$ . ■

**Definición 1.28** Un *anillo ordenado* es una cuádrupla  $(A, +, \cdot, \leq)$  que cumple la definición de anillo y la definición de conjunto (totalmente) ordenado, y además la relación de orden verifica las dos propiedades siguientes de compatibilidad:

**Compatibilidad con la suma** Si  $a \leq b$ , entonces  $a + c \leq b + c$ .

**Compatibilidad con el producto** Si  $a \leq b$  y  $c \geq 0$ , entonces  $ac \leq bc$ .

Para probar que  $(\mathbb{Z}, +, \cdot, \leq)$  es un anillo ordenado conviene observar que si  $a = [(m, n)]$  y  $b = [(u, v)]$ , entonces

$$b - a = [(u, v)] + [(n, m)] = [(n + u, m + v)]$$

luego  $b - a \geq 0$  equivale a que  $m + v \leq n + u$ , es decir, a que  $a \leq b$ .

Así pues, si  $a \leq b$ , tenemos que  $b - a = b + c - (a + c) \geq 0$ , luego  $a + c \leq b + c$ . Igualmente, si  $a \leq b$  y  $c \geq 0$ , tenemos que  $b - a \geq 0$  y  $c \geq 0$ , es decir, que ambos son números naturales, y también lo será su producto  $bc - ac \geq 0$ , lo que equivale a  $ac \leq bc$ . ■

Veamos algunas propiedades de los anillos ordenados:

- a) Si  $a \leq b$ , entonces  $-b \leq -a$  (pues  $0 = a - a \leq b - a$  y  $-b \leq -b + b - a = -a$ ).
- b) Si  $a \geq 0$ , entonces  $-a \leq 0$ . (Caso particular de a.)
- c) Si  $b, c \geq 0$ , entonces  $bc \geq 0$  (por la compatibilidad del producto).
- d)  $aa \geq 0$  (porque  $aa = (-a)(-a)$  y a una de las dos expresiones se le puede aplicar b).
- e)  $1 \geq 0$  y  $-1 \leq 0$ . (porque  $1 = 1 \cdot 1$ ).
- f) Si  $a \leq b$  y  $c \leq 0$  entonces  $ac \geq bc$  (porque  $-ac \leq -bc$ ).

**Definición 1.29** Un elemento  $a$  de un anillo  $A$  es una *unidad* si existe un  $a^{-1} \in A$  tal que  $aa^{-1} = 1$ . El elemento  $a^{-1}$  se llama *inverso* de  $a$ , y es único, pues si existe otro  $a'^{-1}$ , entonces  $a'^{-1} = a'^{-1} \cdot 1 = a'^{-1}aa^{-1} = 1 \cdot a^{-1} = a^{-1}$ .

Un *cuerpo* es un anillo en el que todo elemento distinto de 0 es una unidad.

**Ejercicio:** Demostrar que las únicas unidades de  $\mathbb{Z}$  son  $\pm 1$ .

Para dotar de inverso a cada número entero construimos el cuerpo de los números racionales por un procedimiento similar al que hemos seguido para construir  $\mathbb{Z}$  a partir de  $\mathbb{N}$ .

**Definición 1.30** Sea  $A = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid n \neq 0\}$ . Definimos en  $A$  la relación

$$(m, n) R (m', n') \text{ si y sólo si } mn' = nm'.$$

Se demuestra fácilmente que se trata de una relación de equivalencia. La clase de equivalencia de un par  $(m, n)$  se representa por  $m/n$ . Diremos que es una *fracción* de *numerador*  $m$  y *denominador*  $n$ . De este modo tenemos que

$$\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'} \text{ si y sólo si } mn' = nm'.$$

El conjunto cociente  $\mathbb{Q} = A/R$  se llama conjunto de los *números racionales*. Definimos en  $\mathbb{Q}$  las operaciones

$$\frac{m}{n} + \frac{u}{v} = \frac{mv + nu}{nv}, \quad \frac{m}{n} \frac{u}{v} = \frac{mu}{nv}$$

Como el denominador de una fracción no puede ser 0, aquí estamos usando que el producto de números enteros no nulos es no nulo.

**Ejercicio:** Comprobar que estas definiciones son correctas, en el sentido de que, si tomamos dos representantes distintos de cada fracción,  $m/n = m'/n'$  y  $u/v = u'/v'$ , las fracciones que obtenemos al sumar y multiplicar son la misma.

**Ejercicio:** Comprobar que  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$  es un cuerpo. Los elementos neutros son  $0/1$  y  $1/1$ , los simétricos son  $-(m/n) = (-m)/n$ , y los inversos  $(m/n)^{-1} = n/m$ .

Observemos que de la definición de las fracciones se sigue que

$$\frac{am}{an} = \frac{m}{n}.$$

En particular, para  $a = -1$ , esto implica que podemos cambiar el signo al numerador y el denominador de una fracción, por lo que

$$\mathbb{Q} = \{m/n \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n \neq 0\}.$$

En otras palabras: no perdemos generalidad si suponemos que el denominador de una fracción es positivo.

**Definición 1.31** Definimos en  $\mathbb{Q}$  la relación  $\leq$  dada por

$$\frac{m}{n} \leq \frac{u}{v} \text{ si y sólo si } mv \leq nu \text{ (donde } n, v > 0\text{)}.$$

**Ejercicio:** Demostrar que la relación que acabamos de definir es correcta, en el sentido de que no depende del representante de cada fracción con que la comprobamos.

**Ejercicio:** Demostrar que, con esta relación  $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$  es un cuerpo ordenado, es decir, un cuerpo que verifica las propiedades de anillo ordenado.

Consideramos ahora la aplicación  $i : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$  dada por  $i(n) = n/1$ . Se comprueba sin dificultad que es inyectiva, y además cumple:

$$i(m+n) = i(m) + i(n), \quad i(mn) = i(m)i(n),$$

$$m \leq n \quad \text{si y sólo si} \quad i(m) \leq i(n).$$

Una vez más, esto significa que podemos identificar a cada número entero con su imagen en  $\mathbb{Q}$ , de modo que las propiedades de los números enteros son las mismas cuando los consideramos como números enteros o como números racionales. Así pues, a partir de ahora consideraremos que  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ .

Observemos que

$$\frac{m}{n} = \frac{m}{1} \frac{1}{n} = \frac{m}{1} \left( \frac{n}{1} \right)^{-1} = i(m)i(n)^{-1} = mn^{-1},$$

donde en el último paso hemos usado la identificación que acabamos de establecer. Esto significa que, a partir de ahora, podemos “olvidarnos” de que las fracciones son clases de equivalencia de pares de números enteros y considerar que  $m/n = mn^{-1}$ , donde el producto y el inverso del miembro derecho son las operaciones de  $\mathbb{Q}$ . Más aún, si  $K$  es un cuerpo arbitrario, usaremos la notación  $a/b = ab^{-1}$ , para todo  $a, b \in K$ ,  $b \neq 0$ . En particular, en el caso de  $\mathbb{Q}$  podemos considerar fracciones con numerador y denominador fraccionario:

$$\frac{m/n}{u/v} = \frac{m}{n} \left( \frac{u}{v} \right)^{-1} = \frac{m}{n} \frac{v}{u} = \frac{mv}{nu}.$$

### 1.3.5 Elementos de aritmética

Terminamos esta sección discutiendo algunos resultados variados sobre la aritmética de los anillos y los cuerpos en general y de los conjuntos numéricos en particular.

En primer lugar observamos que si  $A$  es un anillo y  $a \in A$ , podemos definir una aplicación  $\mathbb{N} \longrightarrow A$  mediante el teorema de recursión, estableciendo que

$$0a = 0, \quad (n+1)a = na + a.$$

A su vez, podemos extenderla a una aplicación  $\mathbb{Z} \longrightarrow A$  mediante

$$(-n)a = -(na), \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Hemos definido una aplicación para cada  $a \in A$ , pero podemos unir las todas en una única aplicación  $\mathbb{Z} \times A \longrightarrow A$ .

**Ejercicio:** Demostrar que

$$0a = 0, \quad (-1)a = -a, \quad (m+n)a = ma + na, \quad (mn)a = m(na).$$

Por ejemplo,  $3a = (1+1+1)a = a+a+a$ . Notemos que si  $A = \mathbb{Z}$  el producto que acabamos de definir no es sino el producto usual en  $\mathbb{Z}$ .

Similarmente, para cada  $a \in A$  podemos definir una aplicación  $\mathbb{N} \rightarrow A$  mediante  $a^0 = 1$ ,  $a^{n+1} = a^n \cdot a$ . Si  $a$  es una unidad de  $A$ , podemos extender esta aplicación a otra  $\mathbb{Z} \rightarrow A$  mediante  $a^{-n} = (a^{-1})^n$ . Observemos que  $a^{-1}$  en este sentido resulta ser  $a^{-1}$  en el sentido del inverso de  $a$ .

**Ejercicio:** Demostrar que  $a^{m+n} = a^m a^n$ ,  $(a^m)^n = a^{mn}$ , donde  $m, n \in \mathbb{N}$  si  $a$  no es una unidad, o  $m, n \in \mathbb{Z}$  si lo es. En este último caso tenemos también que  $a^{-n} = 1/a^n$  y  $a^m/a^n = a^{m-n}$ .

Definimos ahora la aplicación *factorial*  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  del modo siguiente:

$$0! = 1, \quad (n+1)! = n!(n+1).$$

Así, por ejemplo,

$$1! = 0! \cdot 1 = 1, \quad 2! = 1! \cdot 2 = 1 \cdot 2 = 2, \quad 3! = 2! \cdot 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$$

Si  $0 \leq m \leq n$  definimos el *número combinatorio*

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

**Teorema 1.32** Sean  $m \leq n$  números naturales.

- $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$ .
- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ ,  $\binom{n}{1} = n$ .
- Si  $m < n$ ,  $\binom{n}{m} + \binom{n}{m+1} = \binom{n+1}{m+1}$ .
- Los números combinatorios son números naturales.

DEMOSTRACIÓN: c) Hay que probar que

$$\frac{n!}{m!(n-m)!} + \frac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!} = \frac{(n+1)!}{(m+1)!(n-m)!}.$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} & \left( \frac{n!}{m!(n-m)!} + \frac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!} \right) (m+1)!(n-m)! \\ &= \frac{n!(m+1)m!(n-m)!}{m!(n-m)!} + \frac{n!(m+1)!(n-m)(n-m-1)!}{(m+1)!(n-m-1)!} \\ &= n!(m+1) + n!(n-m) = mn! + n! + n n! - m n! = (n+1)n! = (n+1)! \end{aligned}$$

d) Una simple inducción nos da que  $\binom{n}{m}$  es un número natural, pues cada número combinatorio con  $n+1$  es suma de dos con  $n$ , por el apartado c). ■

La forma más fácil de calcular los números combinatorios es disponerlos en forma de triángulo, de modo que cada uno es la suma de los dos que hay sobre él. El triángulo así construido se suele llamar *triángulo de Tartaglia*.

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & & & & 1 \\
 & & & & & & & 1 \\
 & & & & & & 1 & & 1 \\
 & & & & & & 1 & & 2 & & 1 \\
 & & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 & & & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & & & & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
 \end{array}$$

Triángulo de Tartaglia

Enunciamos sin demostración el resultado principal sobre los números combinatorios:

**Teorema 1.33 (Binomio de Newton)** *Sea  $A$  un anillo,  $n \in \mathbb{N}$  y  $a, b \in A$ . Entonces*

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} a^m b^{n-m}.$$

Quizá algún lector objete que no hemos definido el signo  $\sum$ . Las sumas finitas en un anillo  $A$  se definen recurrentemente. Consideremos una aplicación  $a : I_{n+1} \rightarrow A$ . Convenimos en representar  $a(i) = a_i$ . Por comodidad, la extendemos a una aplicación  $\mathbb{N} \rightarrow A$  tomando  $a_i = 0$  para  $i > n$ . Entonces definimos, en virtud del teorema de recursión:

$$\sum_{i=0}^0 a_i = a_0, \quad \sum_{i=0}^{r+1} a_i = \sum_{i=0}^r a_i + a_{r+1}.$$

Es frecuente escribir

$$\sum_{i=0}^n a_i = a_0 + \cdots + a_n,$$

y entonces hemos de tener presente que los puntos suspensivos son sólo el signo que hemos elegido para representar la suma finita, tan legítimo como pueda serlo la letra  $\Sigma$ . Todas las propiedades de las sumas finitas se demuestran rutinariamente por inducción. Igualmente pueden definirse productos finitos en un anillo, que habitualmente se representan por

$$\prod_{i=0}^n a_i = a_0 \cdots a_n.$$

Por último mencionaremos un hecho de uso cotidiano sobre la aritmética de los números naturales sobre el que no hemos dicho nada hasta ahora, y es la posibilidad de expresarlos con la notación decimal.

Si definimos

$$2 = 1 + 1, \quad 3 = 2 + 1, \quad 4 = 3 + 1, \quad 5 = 4 + 1,$$

$$6 = 5 + 1, \quad 7 = 6 + 1, \quad 8 = 7 + 1, \quad 9 = 8 + 1, \quad d = 9 + 1,$$

entonces se demuestra que todo número natural no nulo  $N$  se expresa de forma única como

$$N = a_n d^n + a_{n-1} d^{n-1} + \cdots + a_2 d^2 + a_1 d + a_0,$$

donde  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_i \in \{0, \dots, 9\}$ ,  $a_n \neq 0$ .

Esto permite adoptar el convenio de referirnos a  $N$  como  $N = a_n \cdots a_0$ , donde esto no hay que entenderlo como un producto, sino como la mera yuxtaposición de las cifras  $a_i$ . Como el número  $d$  se expresa en la forma  $d = 1 \cdot d + 0$ , tenemos que  $d = 10$ , por lo que el desarrollo anterior puede escribirse, más claramente, como

$$N = a_n(10)^n + a_{n-1}(10)^{n-1} + \cdots + a_2(10)^2 + a_1 10 + a_0,$$

La elección de  $d$  es arbitraria. Sirve cualquier número natural  $d \geq 2$ .

## 1.4 La teoría de conjuntos no estándar

La sección precedente es un resumen de los resultados básicos de lo que podemos llamar *matemática clásica*. Tal y como hemos visto, hemos partido de dos conceptos fundamentales: la noción de *conjunto interno*, y la de *pertenencia entre conjuntos internos*. A partir de estas dos nociones hemos definido muchas otras, como las de unión, intersección, aplicación, anillo, etc. Todos los conceptos que pueden definirse a partir de los dos conceptos básicos de “conjunto interno” y pertenencia son lo que hemos llamado *conceptos internos*. Todas las afirmaciones y propiedades que hagan referencia únicamente a conceptos internos, son lo que hemos llamado *afirmaciones y propiedades internas*.

Observemos que en ningún momento hemos definido qué son los conjuntos internos ni la pertenencia entre conjuntos internos. Para poder decir algo sobre estos conceptos sin tenerlos definidos, nos hemos tenido que apoyar en unos axiomas, que son afirmaciones internas. Cuando hablamos de *matemática clásica* nos referimos, más concretamente, a todo el cuerpo de afirmaciones internas que pueden deducirse a partir de estos axiomas.<sup>5</sup>

En esta sección vamos a extender la matemática clásica, no sólo añadiéndole nuevos axiomas, sino también una nueva noción fundamental que presentaremos sin definición, y que tendrá, pues, el mismo *status* lógico que las nociones de

<sup>5</sup>Aquí hay que ser más precisos: nos referimos a los axiomas de la teoría de conjuntos, digamos ZFC. Ésta incluye unos pocos axiomas más que nosotros no hemos tenido necesidad de citar, como el axioma de reemplazo o el axioma de elección. También consideraremos parte de la matemática clásica cualquier resultado que se demuestre a partir de otros axiomas que se añadan a ZFC, como puede ser la hipótesis del continuo, siempre y cuando estos nuevos axiomas sean afirmaciones internas, es decir, no contengan ningún concepto que no haya sido definido previamente a partir de las meras nociones de “conjunto interno” y “pertenencia”.

“conjunto interno” y “pertenencia”. Las afirmaciones matemáticas que se deducen de esta versión extendida de la matemática clásica (extendida con un nuevo concepto básico y con nuevos axiomas) formarán lo que llamaremos *matemática no estándar* o *teoría de conjuntos no estándar*.

Al nuevo concepto básico lo llamaremos “*ser estándar*”, de modo que a partir de ahora distinguiremos entre dos clases de conjuntos internos: los *conjuntos internos estándar* y los *conjuntos internos no estándar*. Tal y como hemos dicho, no definiremos qué es un conjunto interno estándar, igual que no hemos definido qué es un conjunto interno. Serán los nuevos axiomas que vamos a incorporar a la teoría los que nos permitirán distinguir qué conjuntos internos son estándar y cuáles no, así como las diferencias que puedan darse entre unos y otros.

Para que el lector se forme una idea lo más operativa posible del papel que representará este concepto en la nueva teoría, conviene volver a la metáfora cinematográfica. Podemos considerar que el equivalente cinematográfico de “no estándar” es “efectos especiales”. Por ejemplo, si en una película un actor besa a una actriz, el beso es estándar, porque se lo da realmente; pero si el actor mata a la actriz, el asesinato es no estándar, porque está simulado con una pistola ficticia y una sangre ficticia. El beso es real internamente en la película y externamente, en la realidad externa, mientras que el asesinato es real internamente en la película y ficticio en la realidad externa.

En la trilogía (cinematográfica) *El señor de los anillos*, el personaje de *Frodo Bolsón* es estándar, porque lo interpreta un actor, mientras que *Gollum* es no estándar, porque es una imagen creada por ordenador. Aquí es crucial entender que internamente no hay diferencia entre estándar y no estándar. En la película, *Frodo Bolsón* es un personaje real y *Gollum* es otro personaje igual de real. Sólo externamente podemos decir que *Frodo* existe y *Gollum* no.

Ahora bien, el lector no debe deducir de este ejemplo que estemos insinuando que los conjuntos estándar van a ser conjuntos que existen en la realidad y que los conjuntos no estándar van a ser conjuntos que no existen realmente. Pensemos que los efectos especiales no tienen por qué ser fantásticos. Por ejemplo, en una película sobre Julio César, la muerte de César será no estándar, pero eso no impide que, en la realidad, Julio César muriera como se muestra en la película. El actor que interpreta a César está reproduciendo fielmente, mediante técnicas no estándar, lo que le ocurrió realmente a Julio César. Fijémonos en que la realidad interna de la película es fiel a la realidad histórica, mientras que la realidad externa no lo es, ya que César murió acuchillado, no fingió morir acuchillado con efectos especiales.

Dijimos al principio del capítulo que no pretendemos persuadir al lector para que adopte ninguna postura en concreto sobre si existen o no los objetos de los que hablamos. Sólo hay algo cuya realidad es indiscutible: y es que cuando leemos un libro de matemáticas estamos viendo una película que está ahí, con sus personajes y sus técnicas, y podemos preocuparnos por entender la realidad interna que describe o no, sin que importe para nada la naturaleza filosófica de esa realidad interna. Sobre eso, cada cual es libre de pensar lo que quiera.

El lector que sea platonista (es decir, que crea que todos los conjuntos de los

que vamos a hablar, estándar y no estándar, son reales) deberá pensar que aquí le vamos a hablar de cómo rodar una película sobre todos esos objetos reales pero usando solamente una parte de ellos (los estándar) y usando efectos especiales para simular los no estándar. Algo así como cuando se quiere presentar en el cine un gran ejército (real) y se usan sólo unos pocos actores para los primeros planos, mientras que los otros miles se simulan por efectos especiales.

El lector que sea formalista (es decir, que crea que todo lo que estamos contando es un argumento de ficción) deberá pensar que le estamos hablando sobre una película que trata sobre el rodaje de otra película, de modo que, dentro de la ficción que es la primera película, tiene sentido hablar de lo que es real en la segunda película y lo que se consigue mediante efectos especiales.

Si un lector prefiere pensar que los conjuntos estándar existen y los no estándar no, entonces sólo tiene que concebir a éstos como efectos especiales (como maquetas, imágenes por ordenador, sangre simulada, etc.)

La mera introducción de la nueva noción fundamental “ser estándar” ya da pie a una definición importante:

**Definición 1.34** Un concepto (o propiedad, o afirmación, construcción, etc.) es *interno* si sólo hace referencia a conceptos definidos a partir de las nociones de conjunto interno y la pertenencia entre conjuntos internos, es decir, si en ningún momento requiere distinguir entre conjuntos estándar y no estándar. En caso contrario diremos que es *externo*.

Así, por ejemplo, la afirmación “5 es un número natural” es interna, mientras que la afirmación “5 es un número estándar” es externa.

Para entender esto adecuadamente podemos pensar en un “matemático clásico” como un matemático ideal que sabe y entiende todo lo que puede demostrarse en la matemática clásica, pero que es incapaz de entender cualquier afirmación que incluya la palabra “estándar”, es decir, cualquier afirmación externa. Cuando decimos que no puede entenderla no queremos decir que la tenga por falsa, sino que para él no significa nada. En estos términos, una afirmación interna es una afirmación que entiende un matemático clásico.

Podemos comparar un matemático clásico con un espectador que ve una película y entiende perfectamente su argumento, pero no sabe nada de cine, no sabe nada sobre cámaras y efectos especiales. Tal espectador puede entender que *Gollum* es feo, que es esquizofrénico, que es muchas cosas, pero no puede entender que sea un efecto especial. En la película, internamente, *Gollum* no es un efecto especial. Es un personaje tan real como cualquier otro. No es que el espectador niegue que *Gollum* sea un efecto especial, sino que eso no tiene significado para él, no es ni verdadero ni falso. El espectador podrá discutir sobre si *Gollum* es bueno o malo, pero nunca sobre si es real o virtual. Igualmente, el matemático clásico podrá discutir si 5 es par o impar, pero nunca si es estándar o no estándar.

Ya hemos explicado que la teoría de conjuntos no estándar sale de *añadir* nuevos axiomas (y un nuevo concepto básico) a la teoría de conjuntos estándar, lo cual tiene como consecuencia lo que podemos llamar principio de extensión:

**Principio de extensión** *Todas las afirmaciones de la matemática clásica siguen siendo válidas igualmente en la matemática no estándar, sin cambio alguno.*

Si un espectador ve una película de romanos y luego se entera de que el ejército de miles de soldados se rodó con sólo cien, tiene una información adicional externa sobre la película, pero eso no cambia su realidad interna. Si era lógico que César ganara la batalla porque duplicaba en número a sus enemigos, sería absurdo que el espectador, al enterarse del truco, se dijera: “pues no es creíble que César haya ganado si tenemos en cuenta que sus miles de soldados eran sólo una apariencia”. Si antes de enterarse del truco veía coherente que el abrumador ejército de César venciera a su enemigo, después ha de tener claro que el saber que la escena ha sido rodada con efectos especiales no disminuye un ápice el poderío militar (interno) de César.

Del mismo modo, todas las precisiones que nos permitirá hacer la distinción entre conjuntos estándar y no estándar no pueden alterar en nada los resultados de la matemática clásica, porque estamos aceptando todos sus axiomas y, por consiguiente, todas sus consecuencias.

Si, en algún momento, el lector cree que algo de lo que vamos a exponer de aquí en adelante contradice a lo hemos dicho hasta la sección anterior, o a cualquier otro resultado de la matemática clásica que él conozca, puede estar seguro de que no ha entendido bien lo que ha leído aquí, y si llega él por sus propios razonamientos a un resultado de tales características, puede estar seguro de que, o bien no entiende adecuadamente lo que ha obtenido, o bien ha razonado incorrectamente, de modo que en algún paso de su razonamiento ha utilizado algo que no se puede deducir legítimamente de los axiomas de la teoría de conjuntos no estándar.

La teoría de conjuntos no estándar necesita tres axiomas adicionales. Veamos el primero:

**Principio de Transferencia** *Sean  $y_1, \dots, y_n$  conjuntos estándar, y consideremos una propiedad interna  $P(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$ . Entonces:*

a) *Si todos los conjuntos estándar  $x_1, \dots, x_m$  cumplen*

$$P(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n),$$

*podemos asegurar que todos los conjuntos internos (estándar o no) cumplen  $P$ .*

b) *Si existen conjuntos internos  $x_1, \dots, x_m$  que cumplen*

$$P(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n),$$

*entonces existen conjuntos estándar  $x_1, \dots, x_m$  que cumplen  $P$ .*

Como primera consecuencia de este principio, podemos probar que todos los conjuntos definibles internamente son estándar.

Tomemos, por ejemplo, el conjunto vacío. Sabemos que  $\emptyset$  es un concepto propio de la matemática clásica, que puede definirse sin la ayuda del predicado “ser estándar”. Así pues, la propiedad  $P(x) \equiv x = \emptyset$  es interna. Como sabemos que existe un conjunto interno  $x$  que cumple  $x = \emptyset$ , el principio de transferencia nos da que existe un conjunto estándar  $x$  que cumple  $x = \emptyset$ . Esto significa que  $\emptyset$  es un conjunto estándar.

Si cambiamos  $x = \emptyset$  por  $x = \mathbb{N}$  concluimos que el conjunto  $\mathbb{N}$  es estándar, si partimos de  $x = 1\ 356$  concluimos que el número natural  $1\ 356$  es estándar, etc.

Más aún, la propiedad  $x = y \cup z$  también es interna. Por lo tanto, si fijamos dos conjuntos estándar  $y, z$ , puesto que existe un conjunto interno  $x$  que cumple  $x = y \cup z$ , el principio de transferencia nos da que existe un conjunto estándar  $x$  que cumple  $x = y \cup z$ . En otras palabras: *la unión de conjuntos estándar es un conjunto estándar*.

Si cambiamos  $x = y \cup z$  por  $x = y \cap z$  concluimos que *la intersección de conjuntos estándar es estándar*; si tomamos  $x = \{y, z\}$  concluimos que *el conjunto formado por dos conjuntos estándar es estándar*; si tomamos  $x = y \times z$  concluimos que *el producto cartesiano de dos conjuntos estándar es estándar*; si partimos de  $x = f(y)$  (que es una propiedad interna con tres variables,  $x, y, f$ ) concluimos que *la imagen de un conjunto estándar por una función estándar es un conjunto estándar*, etc.

En resumen:

- *Todo conjunto interno que pueda definir explícitamente un matemático clásico (como  $\mathbb{N}$ ,  $\{3, 5, 7\}$ ,  $-2/7$ ,  $\emptyset$ , etc.) es estándar.*
- *Todo conjunto interno construido a partir de conjuntos estándar mediante un procedimiento que entienda un matemático clásico es estándar. (Por ejemplo: la unión de conjuntos estándar es estándar, la suma de números naturales estándar es estándar, el conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto estándar es estándar, el cubo de un número racional estándar es estándar, etc.)*

Si el lector quiere sentirse cómodo con la teoría de conjuntos no estándar, no le conviene interpretar esto como que los conjuntos estándar son los que ya conoce, mientras que los conjuntos no estándar son conjuntos “nuevos” que no existen en la matemática clásica. Es mucho más conveniente que piense que la diferencia entre la matemática no estándar y la matemática clásica no es que la primera *introduzca* nuevos conjuntos, los conjuntos no estándar, sino que los conjuntos de la matemática clásica son los mismos que los de la matemática no estándar (los conjuntos internos, estándar y no estándar) y que lo novedoso de la matemática no estándar es la posibilidad de distinguir unos de otros.

Es verdad que, dado que no los distingue, la matemática clásica podría prescindir de los conjuntos no estándar, en el mismo sentido que —teóricamente— una película de romanos podría prescindir de efectos especiales y rodar todo de forma realista (reuniendo miles de hombres cuando se necesita un ejército de

miles de hombres y matando de verdad a los actores cuando el guión exige que mueran). Pero no es menos cierto que, aunque podría prescindir de ellos, nada impide suponer que los conjuntos no estándar siempre han estado ahí, pasando inadvertidos a los matemáticos clásicos, igual que el carácter virtual de unos miles de soldados puede pasar inadvertido a un espectador. La ventaja de pensarlo así es que el lector asimilará más fácilmente el principio de extensión y vacilará menos a la hora de aplicar en el contexto no estándar todos sus conocimientos de matemática clásica.

Volviendo al principio de transferencia, ya hemos visto una aplicación de su segunda parte. La primera es útil para reducir razonamientos al caso de conjuntos estándar. Por ejemplo, supongamos que tenemos que probar que un conjunto estándar  $A$  está contenido en otro conjunto estándar  $B$ . Esto supone probar que, para todo conjunto  $x$ , se cumple que " $x \in A \rightarrow x \in B$ ". Dado que la propiedad entre comillas es interna, el principio de transferencia reduce el problema a demostrar que si un conjunto estándar  $x$  está en  $A$ , entonces también está en  $B$ . Así pues:

**Teorema 1.35** *Sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos estándar. Entonces:*

- a)  $A \subset B$  si y sólo si todo elemento estándar de  $A$  está también en  $B$ .
- b)  $A = B$  si y sólo si  $A$  y  $B$  contienen los mismos elementos estándar.

Respecto al apartado b), observemos que —como en la matemática clásica— dos conjuntos internos se consideran iguales cuando tienen los mismos elementos (estándar o no). Lo que estamos diciendo (en virtud del principio de transferencia) es que si dos conjuntos estándar tienen los mismos elementos estándar, entonces también tienen los mismos elementos no estándar.

Nos aparece aquí una idea a la que el lector deberá acostumbrarse cuanto antes: los conjuntos no estándar son como "parásitos", no son algo que pueda meterse o sacarse de un conjunto interno a voluntad, sino que "se pegan" a los conjuntos estándar y van donde vayan ellos.

El apartado b) puede parafrasearse diciendo que un conjunto estándar está completamente determinado por sus elementos estándar, de modo que los elementos estándar que tiene un conjunto determinan automáticamente cuáles han de ser sus elementos no estándar.

**Ejercicio:** Supongamos que  $x$  es un conjunto interno no estándar. ¿Puede ser  $\{x\}$  un conjunto estándar? (Ayuda: Llegar a una contradicción probando que  $\{x\} = \emptyset$ .)

Para terminar con el principio de transferencia señalamos dos aspectos técnicos que pueden llevar a conclusiones contradictorias si se pasan por alto:

- Si la propiedad  $P$  a la que se aplica tiene parámetros, éstos han de ser conjuntos estándar.
- La propiedad  $P$  ha de ser interna, es decir, ha de poder entenderla un matemático clásico.

Hasta ahora no hemos visto nada que garantice la existencia de conjuntos no estándar. Esto es lo que afirma el segundo principio de la teoría no estándar, al que llamaremos Principio de Idealización. Vamos a dar una versión débil consistente en dos propiedades sobre conjuntos finitos. Ambas pueden deducirse de un principio más general, más técnico, que no vamos a necesitar.<sup>6</sup> La primera es la siguiente:

**Principio de Idealización I** *Un conjunto interno es estándar y finito si y sólo si todos sus elementos son estándar.*

O, recíprocamente: todos los conjuntos internos tienen elementos no estándar excepto los que son estándar y finitos. En particular, existen, por ejemplo, números naturales no estándar.

Por coherencia enunciamos a continuación la segunda propiedad de idealización, aunque no la necesitaremos sino mucho más adelante y en ocasiones muy contadas, siempre relacionadas con la noción topológica de compacidad.

**Principio de Idealización II** *Todo conjunto contiene un subconjunto finito que contiene a todos sus elementos estándar.*

No es éste el mejor momento para discutir este principio. Quizá el lector quiera meditar sobre él después de la discusión del concepto de finitud que expondremos en el capítulo siguiente (en la página 44 y siguientes.) En lo sucesivo, cuando hablemos del “principio de idealización”, entenderemos que nos referimos al Principio de Idealización I, salvo que indiquemos lo contrario.

Éste es un buen momento para mostrar un ejemplo de cómo podemos acabar enredados en contradicciones si no asimilamos adecuadamente la teoría de conjuntos no estándar:

**Paradoja 1.36** Según el teorema 1.10, todo subconjunto  $S \subset \mathbb{N}$  no vacío tiene un mínimo elemento. Esto es válido en la matemática clásica y, por consiguiente, también en la teoría de conjuntos no estándar. Sin embargo, consideremos el conjunto

$$S = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ no es estándar}\}.$$

El principio de idealización implica que  $S \neq \emptyset$ , luego debería tener un mínimo elemento. Sin embargo, si  $\mu \in S$ , como 0 es un número estándar, ha de ser  $\mu \neq 0$ , luego existe  $\mu - 1 < \mu$ . Ahora bien,  $\mu - 1$  ha de ser un número no estándar, ya que si fuera estándar, como la suma de números estándar es estándar (por el principio de transferencia) resultaría que  $(\mu - 1) + 1 = \mu$  también sería estándar, y no lo es. Así pues,  $\mu - 1 \in S$ , luego  $\mu$  no es el mínimo de  $S$ . Hemos probado que  $S$  no tiene elemento mínimo.

---

<sup>6</sup>Sería necesario, por ejemplo, para estudiar espacios topológicos arbitrarios, pero nosotros sólo vamos a tratar con  $\mathbb{R}$  en un principio y con espacios métricos después, y en estos contextos nos basta con los dos casos particulares que consideramos aquí.

El error del razonamiento anterior es, en cierto sentido, de la misma naturaleza que el error en el que incurre un matemático clásico que pretende aceptar como conjunto al “conjunto”  $R$  de todos los conjuntos que no se pertenecen a sí mismos. (Véase la discusión en la página 4.) Ya hemos explicado que  $R$  es una *clase propia*, es decir, una colección de conjuntos internos que no puede ser el rango de ningún conjunto interno, ya que, de suponerlo así, llegamos a una contradicción. Tendríamos una auténtica contradicción si, por otra parte, los axiomas de la teoría de conjuntos permitieran probar la existencia de un conjunto interno  $R = \{x \mid x \notin x\}$ , pero no es el caso, ya que esta “definición” no se ajusta a las condiciones del axioma de especificación, ni tampoco hay ningún axioma específico (como el axioma del par, o el del conjunto de partes, etc.) que demuestren la existencia de  $R$ .

Lo mismo sucede con el “conjunto”  $S$ . El error de la paradoja anterior está en suponer que existe un conjunto interno  $S$  que contiene a todos los números naturales no estándar, cuando ningún axioma permite demostrarlo. Observemos que la definición de  $S$  no respeta al axioma de especificación porque éste es un axioma de la matemática clásica, y, por consiguiente, sólo es válido para propiedades internas. (Y, obviamente, “*n no es estándar*” no es una propiedad interna.)

Así pues, la paradoja no es una paradoja, sino una demostración rigurosa de que  $S$  no existe (como conjunto interno). No diremos que  $S$  es una clase propia, pues reservaremos este nombre a las colecciones de conjuntos internos que son definibles internamente, pero no constituyen la extensión de ningún conjunto interno. A las colecciones de conjuntos internos a las que les pasa esto mismo, pero se definen externamente, las llamaremos “conjuntos externos”. Más precisamente:

**Definición 1.37** Si  $A, x_1, \dots, x_n$  son conjuntos internos y  $P(x, x_1, \dots, x_n)$  es una propiedad interna o externa, llamaremos *conjunto* determinado por estos datos a

$$E = \{x \in A \mid P(x, x_1, \dots, x_n)\}.$$

Ahora es crucial tener presente que hay dos posibilidades para un conjunto en este sentido amplio:

- a) Que (a partir de los axiomas de la teoría de conjuntos no estándar) pueda demostrarse que existe un conjunto interno  $B$  tal que, para todo  $x \in A$ , se cumple  $x \in B$  si y sólo si  $P(x, x_1, \dots, x_n)$ .

En tal caso, lo que hemos llamado conjunto  $E$  no es ni más ni menos que el conjunto interno  $B$ .

- b) Que (a partir de los axiomas de la teoría de conjuntos no estándar) pueda demostrarse que no existe ningún conjunto interno  $B$  tal que, para todo  $x \in A$ , se cumple que  $x \in B$  si y sólo si  $P(x, x_1, \dots, x_n)$ .

En tal caso diremos que  $E$  es un *conjunto externo*, lo cual ha de entenderse como una mera abreviatura que puede ser útil en muchos contextos

para expresar con lenguaje conjuntista algunos resultados de la teoría de conjuntos no estándar. Pero es fundamental tener presente en todo momento que  $E$  no es ninguno de los objetos que cumplen los axiomas de la teoría de conjuntos no estándar, por lo que tampoco podemos esperar que cumpla los resultados conocidos sobre conjuntos. Cualquier contradicción a la que se llegue al tratar de aplicar a  $E$  un resultado de la teoría de conjuntos no estándar no es una paradoja, sino una prueba más de que  $E$  no existe, de que no es un conjunto interno.<sup>7</sup>

Tenemos, pues, la siguiente clasificación de los conjuntos:

$$\text{Conjuntos} \left\{ \begin{array}{l} \text{Internos} \left\{ \begin{array}{l} \text{Estándar} \\ \text{No Estándar} \end{array} \right. \\ \text{Externos (no existen)} \end{array} \right.$$

Si al lector le parece artificial que podamos hablar de números naturales no estándar, pero que sea “ilegal” hablar del conjunto de todos los números naturales no estándar, debería pensar en una película de romanos, en la que Julio César puede dirigirse a sus soldados y decirles: “¡Atención!, los veteranos atacarán por la derecha, y los nuevos por la izquierda” y, mientras es perfectamente admisible que haya especificado de entre sus soldados el subconjunto de los veteranos, como podría haber especificado a los galos, o a los númeridas, o a los oficiales, o a los jinetes, lo que sería del todo impropio es que, en una determinada escena de la película, César gritara a sus hombres: “¡Atención!, los soldados reales atacarán por la derecha, mientras que los que son efectos especiales lo harán por la izquierda!”. Es verdad que un espectador bien informado podrá distinguir entre el conjunto de soldados que son reales y los que son efectos especiales. La distinción tiene perfecto sentido y, cada figura de soldado en la pantalla se clasifica inequívocamente en uno u otro subconjunto, pero esta distinción es externa a la película, es ajena a su realidad interna, y cualquier mención interna a esta distinción derrumbaría la lógica interna de la película, exactamente igual al modo en que tratar de formar un subconjunto de  $\mathbb{N}$  apelando a una propiedad externa volvería contradictoria a la teoría de conjuntos no estándar.

Cuando decimos que  $S$  no existe internamente (aunque podemos tratar con él externamente) estamos diciendo exactamente lo mismo que cuando decimos que “el conjunto de los soldados virtuales no existe internamente”. Tratar de aplicar a  $S$  un teorema de la teoría de conjuntos (como el principio de buena ordenación) es tan absurdo como valorar las probabilidades de victoria de César en función del cardinal del conjunto de sus soldados virtuales.

El lector tiene que empezar a plantearse la necesidad de asimilar que no todos los conjuntos en que puede pensar coherentemente son internos, lo cual

<sup>7</sup>En realidad podría darse un tercer caso: que los axiomas de la teoría de conjuntos no estándar no permitieran demostrar ni refutar la existencia de  $E$  como conjunto interno. Nunca nos encontraremos con tal situación, pero, si se diera, lo asimilaríamos al caso b): Todo conjunto es externo (es decir, sólo estamos legitimados a referirnos él como una mera abreviatura) mientras no se demuestre que es interno.

es importante porque a los conjuntos externos no se les puede aplicar los teoremas de la teoría de conjuntos (clásica o no estándar) porque no son conjuntos internos, es decir, porque no son los objetos de los que habla cualquiera de las dos teorías de conjuntos.

La teoría de conjuntos no estándar resultará natural al lector a partir del momento en que éste comprenda que la distinción entre conjuntos internos y externos, y el hecho de que los resultados que él conoce para conjuntos (internos) no se aplican a los conjuntos externos, son tan naturales y obvios como que Nerón tiene poder de vida o muerte sobre todos los que le rodean, pero que este hecho sobradamente conocido no se aplica al técnico de sonido que le disimula el micrófono bajo la túnica.

Una vez establecida la clasificación de los conjuntos, vamos a dar a finalmente la palabra “conjunto” su uso habitual:

**Nota** *Por comodidad, en lo sucesivo, cuando hablemos de conjuntos, entenderemos que nos referimos a conjuntos internos, y cuando queramos hablar de conjuntos externos lo indicaremos explícitamente.*

Observemos ahora que, cuando necesitemos explicitar que un conjunto es interno, puede dar la sensación de que estamos usando hechos no demostrados, como:

*La intersección de conjuntos internos es un conjunto interno.*

Aquí no hay nada que probar. Sólo debemos recordar que los conjuntos internos no son ni más ni menos que lo que los matemáticos clásicos llaman simplemente conjuntos. Repitiendo lo que ya dijimos en su momento: la afirmación anterior es consecuencia del axioma de especificación, según el cual, dados dos conjuntos (internos, por supuesto)  $u$ ,  $v$  existe el conjunto (interno, por supuesto)

$$u \cap v = \{x \in u \mid x \in v\}.$$

En estos términos, la paradoja 1.36 y la discusión posterior pueden reformularse como el teorema siguiente:

**Teorema 1.38** *El conjunto  $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ no es estándar}\}$  es externo.*

Veamos algún ejemplo más de la utilidad de los conjuntos externos como abreviaturas:

**Definición 1.39** Si  $A$  es un conjunto (interno), llamaremos

$${}^{\circ}A = \{x \in A \mid x \text{ es estándar}\}$$

Salvo en casos muy particulares,  ${}^{\circ}A$  será un conjunto externo, lo que —en sentido estricto— significa que no existe. Sin embargo, podemos escribir sin riesgo de llegar a ningún absurdo que  $x \in {}^{\circ}A$ , entendido como mera abreviatura de “ $x \in A$  y  $x$  es estándar”, que es una propiedad con pleno sentido en la teoría. También podemos escribir  ${}^{\circ}A \subset B$  para expresar que  $B$  contiene a todos los elementos estándar de  $A$ , que también es una afirmación con pleno sentido en la teoría.

**Teorema 1.40** *El conjunto  ${}^{\circ}\mathbb{N}$  es externo.*

DEMOSTRACIÓN: Si fuera interno, también lo sería  $\mathbb{N} \setminus {}^{\circ}\mathbb{N}$ , que es el conjunto de los números naturales no estándar, que ya hemos visto que es externo en el teorema 1.38. ■

**Ejercicio:** Explica por qué podemos afirmar que  ${}^{\circ}\mathbb{N} \subset \mathbb{N}$  es verdadero, mientras que  ${}^{\circ}\mathbb{N} \in \mathcal{P}\mathbb{N}$  es falso.

Aunque ya hemos prevenido al lector sobre los usos fraudulentos del axioma de especificación con propiedades externas, el tercer y último axioma de la teoría no estándar nos permite definir conjuntos internos —estándar, de hecho— usando propiedades externas, ahora bien, en unas condiciones que mantengan a raya las contradicciones. La clave está en permitir únicamente que las propiedades determinen cuáles son los conjuntos estándar que pertenecen al conjunto que estamos definiendo, y dejar que a él se incorporen los “parásitos” no estándar que deban rodear a tales elementos estándar de acuerdo con la teoría.

**Principio de estandarización** *Sean  $x_1, \dots, x_n$ ,  $A$  conjuntos (internos) arbitrarios con  $A$  estándar y sea  $P(x, x_1, \dots, x_n)$  una propiedad interna o externa. Entonces existe un conjunto estándar  $X$  cuyos elementos estándar son los conjuntos  $x \in A$  que cumplen  $P(x, x_1, \dots, x_n)$ . Lo representaremos por*

$$X = {}^S\{x \in A \mid P(x, x_1, \dots, x_n)\}.$$

La  $S$  nos recuerda que  $X$  no contiene a todos los elementos de  $A$  que cumplen la propiedad  $P$ , sino que sus elementos estándar son los elementos estándar de  $A$  que cumplen la propiedad  $P$ , aunque no decimos nada sobre qué elementos no estándar contiene  $X$  (que serán los que tengan que ser).

Observemos que el teorema 1.35 nos da que no puede haber más que un conjunto estándar cuyos elementos estándar sean los elementos estándar de  $A$  que cumplen  $P$ , por lo que tiene sentido darle nombre, tal y como acabamos de hacer.

Podemos pensar que el principio de estandarización asocia un conjunto estándar a cada conjunto externo (o interno no estándar). Por ejemplo,

$${}^S\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ no es estándar}\} = \emptyset,$$

pues, por definición, el miembro izquierdo es el único conjunto estándar cuyos elementos estándar son los números naturales estándar que no son estándar. Como no hay tales elementos, se trata del único conjunto estándar que no tiene elementos estándar. Obviamente, ha de ser el conjunto vacío.

Por el contrario:

$${}^S\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ es estándar}\} = \mathbb{N},$$

ya que  $\mathbb{N}$  es el único conjunto estándar cuyos elementos estándar son los números naturales estándar.

Con esto tenemos ya todo lo necesario para desenvolvernos sin contradicciones en la teoría de conjuntos no estándar. Terminamos la sección enunciando sin demostración un resultado muy profundo:

**Principio de conservación** *Todo resultado interno que pueda demostrarse en la teoría de conjuntos no estándar, puede demostrarse también en la teoría de conjuntos estándar.*

En la teoría de conjuntos no estándar se pueden demostrar teoremas “nuevos” que no pueden probarse en la teoría clásica de conjuntos, como, por ejemplo, “5 es un número natural estándar”. Es evidente que un matemático clásico nunca podrá demostrar esto, porque él nunca utilizará la propiedad “ser estándar”. Lo que dice el principio de conservación es que ésta es la única excepción, que si demostramos una afirmación interna, como, por ejemplo, el teorema de Bolzano, aunque en la demostración usemos conjuntos no estándar (por ejemplo, números reales infinitesimales), podemos tener la seguridad de que podríamos haber llegado al mismo resultado sin hablar en ningún momento de conjuntos no estándar (es decir, mediante una demostración clásica).

Más claramente: si en el seno de la teoría de conjuntos no estándar demostramos un resultado que un matemático clásico pueda entender, aunque no sea capaz de entender la prueba, podemos estar seguros de que existe otra prueba que sí que es capaz de entender. La teoría de conjuntos no estándar es una herramienta que permite simplificar muchas pruebas, pero no permite probar nada nuevo que no se pueda probar sin ella (salvo el caso obvio de los teoremas que hablen de conjuntos estándar y no estándar, que no tienen sentido en la matemática clásica).

Aceptar las técnicas de la teoría de conjuntos no estándar supone aceptar nuevos métodos, nuevas técnicas de demostración, pero en ningún caso nuevos resultados matemáticos clásicos (internos).

En particular, si en el seno de la teoría de conjuntos no estándar pudiera probarse una contradicción, a partir de ella podría probarse cualquier otra contradicción, por ejemplo,  $0 \neq 0$ , que es una afirmación interna, luego el principio de conservación nos dice que también podríamos demostrar  $0 \neq 0$  en el seno de la teoría de conjuntos clásica. Esto quiere decir que la teoría de conjuntos no estándar no puede ser contradictoria salvo que también lo sea la teoría de conjuntos clásica.

Así pues, si un lector empieza a estudiar la teoría de conjuntos no estándar y la abandona por inútil pensando que ha encontrado en ella una contradicción, puede estar seguro que el problema está en él y no en la teoría.



## Capítulo II

# Los números reales

Dedicamos este capítulo a construir los números reales, lo cual nos servirá a su vez para familiarizarnos con las técnicas del análisis no estándar. Previamente tendremos que estudiar desde un punto de vista no estándar los números naturales y los números racionales.

### 2.1 Los números naturales

En el capítulo anterior hemos construido el conjunto  $\mathbb{N}$  de los números naturales. Muchos matemáticos clásicos creen que su definición garantiza que  $\mathbb{N}$  está formado por los números  $0, 1, 2, 3, \dots$ , donde los puntos suspensivos representan todos los números que pueden obtenerse a partir del  $0$  en un número finito de pasos.

Ahora bien, el principio de idealización, sin contradecir en nada a lo que los matemáticos clásicos demuestran —cosa distinta es lo que creen saber— garantiza la existencia de números naturales no estándar, mientras que el principio de transferencia garantiza que todos los números  $0, 1, 2, 3, \dots$ , son estándar. ¿Dónde quedan, pues, los números no estándar?

Para responder a esta pregunta observamos en primer lugar que, si  $m$  es un número natural estándar, entonces el conjunto

$$I_m = \{n \in \mathbb{N} \mid n < m\}$$

es estándar. Esto es consecuencia del principio de transferencia: cualquier conjunto definible internamente (es decir, sin distinguir entre conjuntos estándar y no estándar) a partir de conjuntos estándar (en este caso, a partir de  $\mathbb{N}$  y  $m$ ) es estándar.

Así pues,  $I_m$  es estándar y finito, luego el principio de idealización nos dice que todos sus elementos (todos los números  $n < m$ ) son estándar. Con esto hemos probado que cualquier número natural no estándar ha de ser mayor que cualquier número natural estándar.

En vista de este hecho, conviene dar la definición siguiente:

**Definición 2.1** Llamaremos *números naturales infinitos* a los números naturales no estándar, mientras que a los números naturales estándar los llamaremos *números naturales finitos*.

En estos términos, lo que acabamos de probar puede enunciarse de varias formas equivalentes:

**Teorema 2.2** Sean  $m, n \in \mathbb{N}$  dos números naturales:

- a) Si  $n$  es finito y  $m < n$ , entonces  $m$  es finito.
- b) Si  $m$  es infinito y  $m < n$  entonces  $n$  es infinito.
- c) Si  $m$  es finito y  $n$  es infinito, entonces  $m < n$ .

Así pues, en la ordenación usual de los números naturales, los números no estándar (o infinitos) se sitúan después de todos los números estándar (o finitos). Si, por ejemplo,  $n$  es un número infinito, tenemos que

$$0 < 1 < 2 < 3 < \dots < n - 2 < n - 1 < n < n + 1 < n + 2 < \dots < 2n < \dots$$

Quede claro que los números infinitos que hemos representado en la sucesión anterior no pretenden ser una muestra representativa de la totalidad de los números infinitos. Por ejemplo, si  $n$  es un número par, el número  $n/2$  también sería infinito (porque, por transferencia, el producto de números naturales finitos es finito) y en la lista anterior vendría después de los primeros puntos suspensivos, y a unos puntos suspensivos de distancia de  $n - 2$ .

Lo dicho hasta aquí debería bastar para que al lector se le ocurran unas cuantas razones por las que todo esto “es imposible”. Veamos una de las más sencillas:

**Paradoja 2.3** La matemática clásica nos enseña que si  $n$  es un número natural, el conjunto  $I_n$  ha de ser finito, luego esto tendría que ser válido tanto para los números estándar como para los no estándar. Así pues, tenemos una contradicción, ya que si  $n$  es un número infinito entonces  $I_n$  es infinito, puesto que contiene infinitos números naturales:

$$\{0, 1, 2, 3, \dots\} \subset I_n.$$

El error de la paradoja anterior está justo al final. Como muy bien se argumenta al principio, el conjunto  $I_n$  debe ser (y es) finito, tanto si  $n$  es estándar como si es no estándar. En cualquiera de los dos casos, el conjunto  $I_n$  es finito porque tiene  $n$  elementos. Un conjunto cuyos elementos se pueden contar con un número natural es finito, y éste es el caso de  $I_n$ . La “prueba” de que  $I_n$  es infinito es incorrecta.

Es verdad que  $I_n$  contiene al número 0, y es verdad que contiene al número 1, y es verdad que contiene al número 2, y es verdad que contiene al número 3, y es verdad que podemos seguir así hasta donde el lector desee, pero ¿dónde está

la prueba de que contiene a infinitos números naturales? Si la “prueba” consiste en que  $I_n$  contiene al conjunto

$${}^{\circ}\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \subset I_n,$$

esto no tiene sentido, porque el conjunto  ${}^{\circ}\mathbb{N}$  no existe (es externo). Ya hemos demostrado que no existe en el capítulo anterior, pero no hace falta recurrir a ello. La paradoja 2.3, no es una paradoja, sino otra demostración de que  ${}^{\circ}\mathbb{N}$  no existe.

Externamente, es cierto que  ${}^{\circ}\mathbb{N}$  existe y es un conjunto infinito, lo que prueba que  $I_n$  es también (externamente) infinito. Sin embargo,  $I_n$  es internamente finito (mientras que, internamente,  ${}^{\circ}\mathbb{N}$ , no es ni finito ni infinito, porque internamente no existe). Los “efectos especiales” de nuestra película permiten que un conjunto muy grande, como  $I_n$ , parezca “en la pantalla” mucho más pequeño de lo que realmente es.

Pensemos, por ejemplo, en una película en la que vemos una gigantesca nave espacial surcando el espacio. ¿Qué sucedería si, en un momento dado, se viera en la pantalla una mano humana que la sujeta? Evidentemente, que “se vería” que la nave espacial ni es gigantesca, ni es una nave espacial, ni surca el espacio. Quedaría claro que se trata de una maqueta sostenida por una mano humana ante una foto del espacio estrellado, en contradicción con el argumento de la película, que exige que la nave sea gigantesca y surque el espacio.

El conjunto  ${}^{\circ}\mathbb{N}$  es como la mano que sostiene la maqueta. Ha de estar ahí, pero no ha de verse en la pantalla. En la realidad interna de la película, la maqueta existe, y no es una maqueta, es una nave espacial gigantesca, mientras que la mano que la sostiene no existe (luego no es ni grande ni pequeña). Del mismo modo que, ocultando toda referencia que pueda permitir al espectador calcular el tamaño real de la maqueta, es posible hacer que ésta pase por una nave gigantesca, nos encontramos con que, ocultando conjuntos como  ${}^{\circ}\mathbb{N}$  y todos los conjuntos (externos) que haga falta ocultar, podemos hacer que un matemático clásico (que no sepa distinguir los conjuntos estándar de los no estándar) crea que  $I_n$  es un conjunto pequeño (finito), pese a que externamente es gigantesco (es infinito).

Pretender que considerar finito a  $I_n$  es contradictorio por el mero hecho de que contiene a  ${}^{\circ}\mathbb{N}$ , es tan absurdo como considerar que una película de ciencia-ficción es contradictoria porque está rodada con maquetas. A lo sumo será fantástica (o tal vez no, ya que tal vez, en una galaxia muy lejana, hace mucho tiempo, existieron naves espaciales gigantes), pero eso no tiene nada que ver con que sea contradictoria.

De acuerdo con la discusión precedente, el lector deberá asimilar que los números naturales infinitos son sólo externamente infinitos, aunque internamente son (por definición) finitos. Así, si un conjunto (interno)  $A$  tiene  $n$  elementos y  $n$  es un número natural infinito, podemos afirmar que el conjunto  $A$  es finito, y si, por ejemplo,  $A \subset \mathbb{N}$ , podemos asegurar que  $A$  tendrá un máximo y un mínimo elemento, como corresponde a todo subconjunto finito de  $\mathbb{N}$ .

Quizá ayude también al lector pensar que los números naturales infinitos,

más que infinitos, son genéricos o indeterminados. Son números tan generales, tan generales, que no coinciden con ningún número particular. Es algo similar a lo que sucede con la igualdad

$$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1.$$

Podemos pensar que, en ella,  $x$  representa a un número arbitrario, sin especificar cuál, pero también podemos concebirla como una igualdad de polinomios. En tal caso,  $x$  ya no es un número, es otra cosa, es un polinomio concreto, el polinomio  $x$ , de grado 1, distinto de cualquier número (que sería un polinomio de grado 0), pero que está diseñado para comportarse como un número indeterminado.

Igualmente, cuando un matemático clásico dice “Sea  $n$  un número natural”, está pensando en  $n$  de acuerdo con la primera interpretación que le hemos dado a la  $x$ , mientras que un número natural infinito viene a ser como un número natural genérico, que es distinto de cualquier número concreto en el mismo sentido en que la indeterminada  $x$  es distinta de cualquier número concreto por el que pueda sustituirse.

Dejamos como ejercicio al lector que resuelva la paradoja siguiente:

**Paradoja 2.4** Vamos a probar que todos los números naturales son estándar. Razonamos por inducción: sabemos que 0 es estándar, y sabemos que la suma de números estándar es estándar, luego si  $n \in \mathbb{N}$  es estándar, también lo es  $n + 1$  (porque 1 es estándar). Así pues, todos los números naturales son estándar.

Notemos que los hechos: 0 es estándar, 1 es estándar, así como que la suma de números estándar es estándar, los hemos demostrado anteriormente, y todos ellos son incuestionables.

**Nota** Si  $m$  es un número natural infinito, tenemos que  $I_m \subset \mathbb{N}$  es un conjunto finito que contiene a todos los números naturales estándar. Se trata de un caso particular del Principio de Idealización II (que hemos demostrado a partir del Principio de Idealización I). El lector puede probar (naturalmente, sin usar el Principio de Idealización II) que  $\mathbb{Q}$  contiene también un subconjunto finito que contiene a todos los números racionales estándar. Así, lo que afirma el Principio de Idealización II es que esto es una característica de todos los conjuntos, y no sólo de  $\mathbb{N}$  o de  $\mathbb{Q}$ . ■

Ya sabemos que la suma de números finitos es finita. De acuerdo con 2.2, y teniendo en cuenta la desigualdad  $m \leq m + n$ , satisfecha por cualquier suma de números naturales, es fácil probar algo más:

**Teorema 2.5** *La suma de dos números naturales es finita si y sólo si los dos sumandos son finitos.*

(Ya que si  $m$  es infinito, la suma es también infinita por ser mayor.)

**Ejercicio:** ¿Es cierto el teorema anterior si cambiamos suma por resta (y consideramos pares de números que se puedan restar)?

Similarmente se puede probar:

**Teorema 2.6** *El producto de dos números naturales no nulos es finito si y sólo si los dos factores son finitos.*

**Ejercicio:** Sea  $n = p_1 \cdots p_m$  la descomposición de un número natural en factores primos. Si  $n$  es infinito, ¿ha de ser infinito alguno de los factores? (Ayuda: considérese el caso en el que todos los primos sean iguales.)

## 2.2 Cuerpos ordenados

En esta sección estudiaremos las propiedades externas del conjunto de los números racionales, si bien trabajaremos, más en general, en términos de un cuerpo ordenado arbitrario  $(K, +, \cdot, \leq)$ . La razón para ello es que así, cuando hayamos construido el cuerpo de los números reales, será evidente que todo lo dicho en esta sección valdrá también para  $\mathbb{R}$ .

Aunque ya hemos definido el concepto en el capítulo anterior, recordamos aquí todas las propiedades que le estamos exigiendo a  $(K, +, \cdot, \leq)$ . En primer lugar las propiedades de los cuerpos:

**Asociativa**  $(r + s) + t = r + (s + t)$ ,  $(rs)t = r(st)$ .

**Conmutativa**  $r + s = s + r$ ,  $rs = sr$ .

**Elemento neutro**  $r + 0 = r$ ,  $s \cdot 1 = s$ .

**Elemento simétrico**  $r + (-r) = 0$ ,  $s \cdot (s^{-1}) = 1$  (para  $s \neq 0$ ).

**Distributiva**  $r(s + t) = rs + rt$ .

En segundo lugar las propiedades de los conjuntos (totalmente) ordenados:

**Reflexiva**  $r \leq r$ .

**Antisimétrica** Si  $r \leq s$  y  $s \leq r$ , entonces  $r = s$ .

**Transitiva** Si  $r \leq s$  y  $s \leq t$ , entonces  $r \leq t$ .

**De conexión** O bien  $r \leq s$ , o bien  $s \leq r$ .

Y en tercer lugar las propiedades de compatibilidad:

**Compatibilidad con la suma** Si  $r \leq s$ , entonces  $r + t \leq s + t$ .

**Compatibilidad con el producto** Si  $r \leq s$  y  $t \geq 0$ , entonces  $tr \leq ts$ .

Sabemos que  $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$  cumple todas estas propiedades, a partir de las cuales pueden demostrarse (para un cuerpo ordenado arbitrario) todos los hechos algebraicos elementales con los que el lector debería estar familiarizado, como que  $rs = 0$  si y sólo si  $r = 0$  o  $s = 0$ , o las propiedades siguientes, relativas a la relación de orden:

- Si  $r \leq s$ , entonces  $-s \leq -r$ .
- $r^2 \geq 0$ .
- $1 \geq 0$ .
- Si  $0 < r \leq s$ , entonces  $0 < 1/s \leq 1/r$ . (Ésta no estaba probada en el capítulo anterior, porque no tiene sentido para anillos ordenados, sino para cuerpos: Si fuera  $1/s \leq 0$ , multiplicando por  $s > 0$  resultaría  $1 \leq 0$ , luego  $0 < 1/s$ . Igualmente,  $1/r > 0$ , lo que nos permite pasar de  $r \leq s$  a  $r/s \leq 1$  y a  $1/s \leq 1/r$ , multiplicando primero por  $1/s$  y luego por  $1/r$ .)

**Definición 2.7** Si  $K$  es un cuerpo ordenado, definimos el *valor absoluto* como la aplicación  $|\cdot| : K \rightarrow K$  dada por

$$|r| = \begin{cases} r & \text{si } r \geq 0, \\ -r & \text{si } r \leq 0. \end{cases}$$

**Ejercicio:** Demostrar que en un cuerpo ordenado  $K$  se cumple  $|r| \leq s$  si y sólo si  $-s \leq r \leq s$ .

**Ejercicio:** Demostrar que en un cuerpo ordenado  $K$  se cumple

$$|r + s| \leq |r| + |s|, \quad |rs| = |r||s|, \quad ||r| - |s|| \leq |r - s|.$$

En lo sucesivo nos restringiremos a cuerpos ordenados que tengan una propiedad adicional:

**Definición 2.8** Un cuerpo ordenado  $(K, +, \cdot, \leq)$  es *arquimediano* si  $\mathbb{Q} \subset K$  y, para todo  $r \in K$ , existe un  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $r \leq n$ .

Con la inclusión  $\mathbb{Q} \subset K$  hemos de entender que, al restringir a  $\mathbb{Q}$  las operaciones y el orden de  $K$ , obtenemos las operaciones y el orden usuales de  $\mathbb{Q}$ .

**Teorema 2.9** Si  $K$  es un cuerpo ordenado arquimediano y  $r \in K$ , existe un único número entero  $n \in \mathbb{Z}$  tal que  $n \leq r < n + 1$ .

DEMOSTRACIÓN: si  $0 \leq r$ , entonces el conjunto  $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq r\}$  es no vacío (contiene al 0) y es finito, ya que existe un número natural  $m > r$ , luego  $A \subset I_m = \{n \in \mathbb{N} \mid n < m\}$ , y este conjunto es finito. Todo subconjunto finito de  $\mathbb{N}$  no vacío tiene un máximo elemento  $n$ , que claramente cumplirá  $n \leq r < n + 1$ .

Si  $r < 0$  entonces  $-r \geq 0$ , luego existe un número natural  $m \leq -r < m + 1$ , luego  $-m - 1 < r \leq -m$ . Si  $r < -m$ , llamamos  $n = -m - 1 \in \mathbb{Z}$  y se cumple  $n \leq r < n + 1$ . Si  $r = -m$  entonces llamamos  $n = -m$  y tenemos que  $n \leq r < n + 1$ . La unicidad de  $n$  se prueba sin dificultad. ■

**Definición 2.10** Si  $K$  es un cuerpo ordenado arquimediano, definimos la *parte entera* como la aplicación  $E : K \rightarrow \mathbb{Z}$  que a cada  $r \in K$  le asigna el único número entero  $E[r]$  que cumple  $E[r] \leq r < E[r] + 1$ .

Observemos que todos los conceptos que hemos tratado hasta aquí en esta sección son internos, pues hasta ahora no hemos mencionado nunca la palabra “estándar”.

En lo sucesivo,  $(K, +, \cdot, \leq)$  será en todo momento un cuerpo ordenado arquimediano estándar arbitrario. El lector puede, si lo desea, pensar que es  $\mathbb{Q}$ , pero es importante observar que en ningún momento vamos a usar ninguna propiedad particular de  $\mathbb{Q}$ , sino únicamente las propiedades comunes a todos los cuerpos ordenados arquimedianos. Dado que sólo pretendemos aplicar los resultados que veremos aquí a los casos  $K = \mathbb{Q}$  y, más adelante,  $K = \mathbb{R}$ , llamaremos *números* a los elementos de  $K$ .

**Definición 2.11** Diremos que un número  $r \in K$  es *finito* si existe un número natural finito  $n$  tal que  $|r| \leq n$ . En caso contrario diremos que es *infinito*. Llamaremos  $\mathcal{O}$  al conjunto de los números finitos.

**Teorema 2.12** *El conjunto  $\mathcal{O}$  es externo.*

DEMOSTRACIÓN: Si fuera interno, también lo sería el conjunto  $\mathcal{O} \cap \mathbb{N} = {}^{\circ}\mathbb{N}$ , y ya sabemos que  ${}^{\circ}\mathbb{N}$  es externo. ■

El teorema siguiente muestra que un número infinito es mayor que todos los números de  $K$  si es positivo, y menor que todos ellos si es negativo.

**Teorema 2.13** *Si  $r$  es un número infinito, entonces  $|r|$  es mayor que todos los números finitos.*

DEMOSTRACIÓN: Si  $r$  es infinito y  $s$  es finito, entonces existe un número natural finito  $n$  tal que  $|s| \leq n$ . No puede ser  $|r| \leq n$ , ya que entonces  $r$  sería finito, luego  $s \leq |s| \leq n < |r|$ . ■

**Teorema 2.14** *Todo número estándar es finito.*

DEMOSTRACIÓN: Si  $r$  es estándar, entonces  $n = E[|r|] + 1$  es un número natural estándar, luego finito, y se cumple que  $r \leq |r| < n$ , luego  $r$  es finito por el teorema anterior. ■

**Teorema 2.15** *La suma y el producto de números finitos es finita.*

DEMOSTRACIÓN: Si  $r$  y  $s$  son finitos, existen números naturales finitos  $m$  y  $n$  tales que  $|r| \leq m$  y  $|s| \leq n$ . Entonces

$$|r + s| \leq |r| + |s| \leq m + n \quad |rs| = |r||s| \leq mn.$$

Como  $m + n$  y  $mn$  son finitos,  $r + s$  y  $rs$  también lo son. ■

**Ejercicio:** Probar que  $r$  es infinito si y sólo si existe un número natural infinito tal que  $|r| \geq n$ . (Ayuda: considerar  $E[|r|]$ .)

**Definición 2.16** Un número  $r \neq 0$  es *infinitesimal* (o un *infinitésimo*) si  $1/r$  es infinito. Aunque sería más acorde con la tradición considerar que un infinitésimo es, por definición, distinto de 0, vamos a adoptar el convenio (más práctico) de incluir al 0 entre los infinitésimos. Llamaremos  $o$  al conjunto de todos los números infinitesimales.

**Teorema 2.17** *El conjunto  $o$  es externo.*

DEMOSTRACIÓN: Si fuera interno, también sería interno<sup>1</sup> el conjunto

$$\{n \in \mathbb{N} \mid n \neq 0, 1/n \in o\},$$

pero este conjunto es el conjunto de los números naturales infinitos, que ya sabemos que es externo. ■

**Teorema 2.18** *El único infinitésimo estándar es el 0.*

DEMOSTRACIÓN: Si  $r \in o$  es no nulo, entonces  $1/r$  es infinito, luego es no estándar, luego  $r$  también es no estándar. ■

**Teorema 2.19** *Se cumplen las propiedades siguientes:*

- a) Si  $r \in o$  y  $s > 0$  es estándar, entonces  $|r| < s$ .
- b)  $o \subset \mathcal{O}$ .
- c) Si  $s \in o$  y  $|r| \leq |s|$ , entonces  $r \in o$ .
- d) Si  $r \in o$  y  $s \in \mathcal{O}$ , entonces  $rs \in o$ .
- e) Si  $r, s \in o$ , entonces  $r + s \in o$ .

DEMOSTRACIÓN: a) Si  $r \in o$  es no nulo, entonces  $1/r$  es infinito, luego existe un número natural infinito  $n \leq 1/|r|$ . Como  $s$  es estándar, también lo es  $1/s$ , luego es finito, luego existe un número natural finito  $m$  tal que

$$1/s \leq m < n \leq 1/|r|,$$

luego  $|r| < s$ .

b) Si  $r \in o$ , entonces, por el apartado anterior  $|r| < 1$ , luego  $r \in \mathcal{O}$ .

c) Podemos suponer que  $r \neq 0$ . Entonces  $1/|s| \leq 1/|r|$  y  $1/|s|$  es infinito, luego  $1/|r|$  también lo es, luego  $s \in o$ .

d) Podemos suponer que  $r \neq 0$ . Si  $1/rs$  fuera finito, también lo sería su producto por  $s$ , es decir,  $1/r$  sería finito, pero es infinito.

<sup>1</sup>Estamos usando que si existe un conjunto  $A \subset K$ , también existe el conjunto

$$\{n \in \mathbb{N} \mid n \neq 0, 1/n \in A\},$$

consecuencia del axioma de especificación (aplicado legítimamente con una propiedad interna).

e) No perdemos generalidad si suponemos que  $|r| \leq |s|$ . Tenemos que

$$|r + s| \leq |r| + |s| \leq 2|s|,$$

y  $2|s|$  es infinitesimal por el apartado anterior, luego  $r + s$  también lo es, por c). ■

En términos algebraicos, hemos probado que  $\mathcal{O}$  es un subanillo de  $K$  y que  $\mathcal{o}$  es un ideal de  $\mathcal{O}$ .

**Ejercicio:** Probar que el apartado d) del teorema anterior es falso si cambiamos  $s \in \mathcal{O}$  por  $s \in K$ .

Destacamos el teorema siguiente porque se presta a un equívoco sobre el que el lector deberá reflexionar:

**Teorema 2.20** *Si  $h \in \mathcal{o}$  y  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $h^n \in \mathcal{o}$ .*

DEMOSTRACIÓN: El lector podría creer que esto es una consecuencia inmediata del apartado d) del teorema anterior, pero sería así si pudiéramos argumentar por inducción sobre  $n$ . Ahora bien, es muy importante tener presente que es incorrecto razonar por inducción para demostrar una propiedad externa. La paradoja 2.4 es una muestra de ello. Aunque en este caso llegaríamos a una conclusión correcta, ello sería fruto de la casualidad, y no de la validez del argumento.

Una forma correcta de probar el teorema es demostrar que si  $|x| < 1$ , entonces  $|x^n| < |x|$ . Esto es una afirmación interna que es legítimamente demostrable por inducción sobre  $n$  a partir de las propiedades de los cuerpos ordenados (y la prueba es trivial). Como es válida para todo número  $x$ , podemos aplicarla al infinitésimo  $h$ , de donde deducimos que  $|h^n| < |h|$ , luego  $h^n \in \mathcal{o}$ . ■

**Definición 2.21** Diremos que dos números están *infinitamente próximos*, y lo representaremos por  $r \approx s$ , si  $r - s \in \mathcal{o}$ .

En estos términos, un número  $r$  es infinitesimal si y sólo si  $r \approx 0$ .

**Ejercicio:** Demostrar que la relación que acabamos de definir es de equivalencia, es decir, que es reflexiva, simétrica y transitiva.

El ejercicio anterior —al igual que el teorema siguiente— es inmediato si advertimos que la proximidad infinita no es sino la relación de congruencia módulo el ideal  $\mathcal{o}$ . No obstante, demostraremos el teorema para que el lector aprecie el razonamiento directo con infinitésimos.

**Teorema 2.22** *Se cumplen las propiedades siguientes:*

- a) *Si  $r \approx s$  y  $r' \approx s'$ , entonces  $r + r' \approx s + s'$ .*
- b) *Si  $r \approx s$ ,  $r' \approx s'$  y todos ellos son finitos, entonces  $rr' \approx ss'$ .*
- c) *Si  $r \approx r'$  no son infinitesimales, entonces  $1/r \approx 1/r'$ .*
- d) *Si  $r \approx s$ ,  $r' \approx s'$ ,  $r < r'$  y  $r \not\approx r'$ , entonces  $s < s'$ .*

DEMOSTRACIÓN: a) Tenemos que  $r = s + \epsilon$ ,  $r' = s' + \epsilon'$ , donde  $\epsilon, \epsilon' \in o$ . Por lo tanto,  $r + r' = s + s' + \epsilon + \epsilon'$  y  $\epsilon + \epsilon' \in o$ , luego  $r + r' \approx s + s'$ .

b) Con la misma notación del apartado anterior, ahora tenemos que

$$rr' = ss' + s\epsilon' + s'\epsilon + \epsilon\epsilon',$$

y, por la hipótesis de finitud, los tres últimos sumandos son infinitesimales. Por lo tanto,  $rr' \approx ss'$ .

c) Tenemos que

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} = \frac{r' - r}{rr'}.$$

Por hipótesis,  $r' - r \in o$  y  $1/r, 1/r' \in \mathcal{O}$ , luego el producto de los tres está en  $o$ .

d) Si fuera  $r' \leq s$ , entonces, de  $r < r' \leq s$  se sigue que  $|r' - r| < s - r \in o$ , luego  $r \approx r'$ , contradicción. Por lo tanto,  $s < r'$ . Si fuera  $s' \leq s$ , entonces  $s' \leq s < r'$  implicaría que  $|r' - s| < r' - s' \in o$ , luego  $r' \approx s \approx r$ , contradicción. Así pues,  $s < s'$ . ■

Nuevamente, hemos de ser cautos con las generalizaciones del teorema anterior que un matemático clásico consideraría obvias pero que en realidad se apoyan en un razonamiento inductivo elemental, razonamiento que en el contexto de la matemática no estándar es inválido por el mero hecho de que las inducciones sobre propiedades externas no son válidas.

Por ejemplo, no es cierto que si  $x \approx y$  son dos números finitos y  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $x^n \approx y^n$ , aunque esto pueda parecer una consecuencia “obvia” del apartado b) del teorema anterior.<sup>2</sup> Lo máximo que podemos decir es lo siguiente:<sup>3</sup>

**Teorema 2.23** *Si  $x \approx y$  son dos números finitos y  $n \in \mathbb{N}$  es finito, entonces se cumple  $x^n \approx y^n$ .*

DEMOSTRACIÓN: Sea  $h = x - y \approx 0$ , de modo que

$$y^n = (x + h)^n = x^n + h \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} x^{n-i} h^{i-1}.$$

Basta probar que el sumatorio es finito, pero esto es obvio, pues

$$\left| \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} x^{n-i} h^{i-1} \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} m^{n-i},$$

donde  $m > |x|$  es un número natural finito, y la última expresión es estándar, luego finita. ■

<sup>2</sup>Por ejemplo, si  $n$  es un número natural infinito, podemos tomar  $x = 1$ ,  $y = 1 + 1/n$ . Así,  $x \approx y$ , pero  $y^n = (1 + 1/n)^n \approx e \not\approx 1 = x^n$ . (Véase la página 107)

<sup>3</sup>Más adelante quedará claro que este teorema es una consecuencia inmediata de la continuidad de la función  $x^n$ .

**Teorema 2.24** Si  $r$  y  $s$  son números estándar y  $r \approx s$ , entonces  $r = s$ .

DEMOSTRACIÓN: Si fuera  $r \neq s$ , entonces  $1/(r - s)$  sería infinito y estándar al mismo tiempo, lo cual es imposible. ■

Observemos que, al contrario de lo que sucede con los números naturales, un número finito (un elemento de  $K$ ) no tiene por qué ser estándar. Los infinitésimos no nulos son ejemplos de números finitos no estándar. Más en general:

**Definición 2.25** Si  $x \in K$ , llamaremos *halo* de  $x$  al conjunto

$$h(x) = \{r \in K \mid r \approx x\}.$$

**Teorema 2.26** Si  $x \in K$  el halo  $h(x)$  es un conjunto externo.

DEMOSTRACIÓN: Si fuera interno, también lo sería

$$o = \{r \in K \mid r - x \in h(x)\}.$$

■

La última propiedad del teorema 2.22 afirma que los halos están “ordenados”, en el sentido de que, si dos halos son distintos (y, por consiguiente, disjuntos), entonces todos los elementos de uno son menores que todos los elementos del otro.

**Ejercicio:** Probar que si  $r \in {}^\circ K$ , entonces  $h(r) \cap {}^\circ K = \{r\}$ .

## 2.3 Convergencia de sucesiones

Para construir el conjunto de los números reales necesitaremos algunos hechos sobre la convergencia de sucesiones de números racionales. Aquí los estudiaremos en el contexto general de un cuerpo ordenado arquimediano para que después no tengamos la necesidad de demostrarlos nuevamente al estudiar las sucesiones de números reales.

Como en la sección anterior, llamaremos “números” a los elementos de un cuerpo ordenado arquimediano estándar  $K$  prefijado.

**Definición 2.27** Una *sucesión* en  $K$  es una aplicación

$$x : \mathbb{N} \longrightarrow K.$$

Si  $n \in \mathbb{N}$ , habitualmente escribiremos  $x_n$  en lugar de  $x(n)$ , y escribiremos  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  en lugar de  $x$  para referirnos a la sucesión.

Aunque, en teoría, a veces es importante que todas las sucesiones empiecen en el mismo número (en 0, según la definición que hemos dado), en la práctica

no suele haber inconveniente en que empecemos a numerar los términos de una sucesión donde resulte más oportuno. Por ejemplo, la sucesión

$$\{1/n\}_{n \geq 1} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$$

empieza con el término  $x_1$ , aunque, si es necesario, podemos reenumerarla como  $\{1/(n+1)\}_{n \geq 0}$ . Similarmente, la sucesión

$$\left\{ \frac{n+1}{n(n-1)} \right\}_{n \geq 2} = \left\{ \frac{3}{2}, \frac{4}{6}, \frac{5}{12}, \dots \right\}$$

empieza en  $n = 2$ , salvo que la reenumeremos adecuadamente.

**Definición 2.28** Llamaremos  $K^{\mathbb{N}}$  al conjunto de todas las sucesiones en  $K$ . En este conjunto podemos definir, término a término, una suma y un producto:

$$\{x_n\}_{n \geq 0} + \{y_n\}_{n \geq 0} = \{x_n + y_n\}_{n \geq 0}, \quad \{x_n\}_{n \geq 0} \{y_n\}_{n \geq 0} = \{x_n y_n\}_{n \geq 0}$$

Es inmediato comprobar que  $K^{\mathbb{N}}$  tiene estructura de anillo con estas operaciones. Los elementos neutros para la suma y el producto son, respectivamente, las sucesiones constantes

$$0 = \{0\}_{n \geq 0} = \{0, 0, 0, \dots\}, \quad 1 = \{1\}_{n \geq 0} = \{1, 1, 1, \dots\},$$

el elemento simétrico para la suma es  $-\{x_n\}_{n \geq 0} = \{-x_n\}_{n \geq 0}$ , y las sucesiones que tienen inversa son las que tienen todos sus términos no nulos, en cuyo caso  $\{x_n\}_{n \geq 0}^{-1} = \{x_n^{-1}\}_{n \geq 0}$ .

**Ejercicio:** ¿Cumple  $K^{\mathbb{N}}$  la propiedad de que si  $\{x_n\}_{n \geq 0} \{y_n\}_{n \geq 0} = 0$  entonces uno de los factores es igual a 0?

**Definición 2.29** Diremos que una sucesión estándar  $\{x_n\}_{n \geq 0} \in K^{\mathbb{N}}$  converge o tiende a un número estándar  $r$  si, para todo número natural infinito  $n$ , se cumple que  $x_n \approx r$ .

Llegados a este punto tenemos que hacer unas observaciones técnicas muy importantes que valdrán igualmente para todas las definiciones similares que veremos más adelante. El lector podría pensar que faltaría definir la convergencia de sucesiones no estándar, pero no es así. La definición anterior determina la convergencia de cualquier sucesión, estándar o no, a pesar de que no es aplicable literalmente a sucesiones no estándar. Veamos cómo (e insistimos en que el argumento siguiente es una técnica de definición totalmente general):

Digamos que una sucesión  $x \in K^{\mathbb{N}}$  (estándar o no) converge\* a un número  $r \in K$  (estándar o no) si cumple la definición anterior (eliminando, obviamente, el requisito de que la sucesión y el número sean estándar). De este modo,  $P(x, r) \equiv x \text{ converge}^* \text{ a } r$  es una propiedad externa. Definimos

$$\mathcal{C} = {}^S \{(x, r) \in K^{\mathbb{N}} \times K \mid x \text{ converge}^* \text{ a } r\}.$$

Ahora, si  $x \in K^{\mathbb{N}}$  es una sucesión arbitraria y  $r \in K$  es arbitrario, diremos que  $x$  converge a  $r$  si  $(x, r) \in \mathcal{C}$ .

De este modo, si  $x \in K^{\mathbb{N}}$  es una sucesión estándar y  $r \in K$  es un número estándar y  $x$  converge a  $r$  según la definición general que acabamos de dar, la definición de  $\mathcal{C}$  nos garantiza que  $x$  converge\* a  $r$  y, como ambos son estándar, esto no es ni más ni menos que la definición 2.29. Así pues, la definición general coincide con 2.29 para sucesiones y números estándar.

Sin embargo, debemos tener presente que si  $x$  o  $r$  no son estándar, el hecho de que  $x$  converja a  $r$ , es decir, que  $(x, r) \in \mathcal{C}$ , no implica que  $x$  converja\* a  $r$ .

El interés de esta maniobra es que así, por construcción,  $\mathcal{C}$  es un conjunto estándar. Por consiguiente, aunque la propiedad “ $x$  converge\* a  $r$ ” es externa, la propiedad “ $x$  converge a  $r$ ”, es decir,  $(x, r) \in \mathcal{C}$ , es una propiedad interna con un parámetro estándar  $\mathcal{C}$ . En definitiva, la noción de convergencia *es interna*, a pesar de que, tal y como la hemos introducido, un matemático clásico no la entenderá.<sup>4</sup>

En resumen, en lo sucesivo deberemos tener en cuenta el siguiente caso particular del principio de estandarización:

*Si definimos un concepto mediante una propiedad externa, pero limitamos la definición a conjuntos estándar, entonces la definición admite una única extensión a conjuntos cualesquiera, que resulta ser una propiedad interna.*

**Teorema 2.30** *Si una sucesión  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  converge a un número  $r \in K$ , éste es único.*

DEMOSTRACIÓN: Hemos de probar que, para toda sucesión  $x$  y para todo par de números  $r$  y  $r'$ , si  $x$  converge a  $r$  y  $x$  converge a  $r'$ , entonces  $r = r'$ . Como toda la afirmación es interna, podemos aplicar el principio de transferencia y suponer que  $x$ ,  $r$  y  $r'$  son estándar. En tal caso, tomamos un número natural infinito  $n$  y observamos que  $r \approx x_n \approx r'$ , luego  $r = r'$  por 2.24. ■

**Definición 2.31** Diremos que una sucesión  $\{x_n\}_{n \geq 0} \in K^{\mathbb{N}}$  es *convergente* si existe un  $r \in K$  tal que  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  converge a  $r$ . A este número (que es único por el teorema anterior), lo llamaremos *límite* de  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  y lo representaremos por

$$\lim_n x_n.$$

**Teorema 2.32** *El límite de una sucesión estándar convergente es estándar.*

---

<sup>4</sup>La razón de fondo por la que esto sucede es que la convergencia de sucesiones admite una definición alternativa que sí entienden los matemáticos clásicos (la que aparece en los libros de análisis estándar), pero no vamos a ocuparnos de ella.

DEMOSTRACIÓN: Se trata de una consecuencia inmediata del principio de transferencia: si existe un  $r$  tal que la sucesión  $x$  converge a  $r$  (como la propiedad es interna) existe un  $r$  estándar tal que la sucesión  $x$  converge a  $r$ , luego el límite de la sucesión es estándar. ■

Veamos algunos ejemplos:

a)  $\lim_n \frac{1}{n} = 0$ , pues si  $n$  es infinito entonces  $1/n \approx 0$ .

b)  $\lim_n \frac{6n^2+3n-5}{3n^2+5} = 2$ , pues si  $n$  es infinito, entonces

$$\frac{6n^2 + 3n - 5}{3n^2 + 5} = \frac{6 + 3/n - 5/n^2}{3 + 5/n^2} \approx \frac{6}{3} = 2.$$

c) En general, el límite de un cociente de polinomios del mismo grado es igual al cociente de los coeficientes de mayor grado, lo cual se demuestra como en el caso anterior, dividiendo numerador y denominador entre la potencia de  $n$  de mayor grado.

d)  $\lim_n \frac{3n^2+5}{n^5-3} = 0$ , pues si  $n$  es infinito tenemos que

$$\frac{3n^2 + 5}{n^5 - 3} = \frac{3/n^3 + 5/n^5}{1 - 3/n^5} \approx 0.$$

e) En general, el límite de un cociente de polinomios cuyo denominador tiene mayor grado es 0, lo cual se demuestra dividiendo entre la potencia de  $n$  de mayor grado.

f)  $\lim_n \frac{n^5-3}{3n^2+5}$  no existe, porque si  $n$  es infinito, entonces

$$\frac{n^5 - 3}{3n^2 + 5} = \frac{1 - 3/n^5}{3/n^3 + 5/n^5}$$

es infinito, luego no puede estar infinitamente cerca de ningún número estándar.

g) En general, el límite de un cociente de polinomios cuyo numerador tiene mayor grado no existe, porque la sucesión toma valores infinitos cuando el índice  $n$  es infinito.

h)  $\lim_n (-1)^n$  no existe, porque si  $n$  es infinito par, entonces  $(-1)^n = 1$  y si  $n$  es infinito impar  $(-1)^n = -1$ , luego si existiera el límite  $r$  debería ser  $r \approx 1 \approx -1$ , lo cual es imposible.

**Interpretación del límite** La definición clásica de límite de una sucesión es la siguiente, con su no menos clásica triple alternancia de cuantificadores (para todo-existe-para todo):

*Se cumple que  $\lim_n x_n = l$  si y sólo si para todo número  $\epsilon > 0$  existe un número natural  $n_0$  tal que, para todo  $n \geq n_0$  se cumple  $|x_n - l| < \epsilon$ .*

Por el principio de transferencia, para probar la equivalencia podemos suponer que la sucesión y el límite son estándar. Supongamos que existe el límite según la definición que hemos dado.

Para probar la equivalencia, de nuevo por el principio de transferencia, podemos tomar un  $\epsilon > 0$  estándar. Entonces, si  $n_0 \in \mathbb{N}$  es infinito y  $n \geq n_0$ , también  $n$  es infinito, por lo que  $x_n - l \approx 0$  y, en particular,  $|x_n - l| < \epsilon$ , como había que probar.

Recíprocamente, si se cumple la caracterización clásica, fijado un  $\epsilon > 0$  estándar, existe un  $n_0$  tal que, si  $n \geq n_0$ , se cumple  $|x_n - l| < \epsilon$ . Por el principio de transferencia, el  $n_0$  se puede tomar estándar.

Observemos que, en principio el  $n_0$  (estándar) que cumple esto depende de  $\epsilon$ , pero si  $n$  es un número natural infinito, cumplirá  $n \geq n_0$  sea cual sea el natural finito  $n_0$ , luego se cumplirá  $|x_n - l| < \epsilon$  para todo  $\epsilon > 0$  (estándar). Ahora bien, esto sólo puede suceder si  $x_n - l \approx 0$ , ya que en caso contrario  $|x_n - l|^{-1}$  sería un número finito, luego existiría un  $m \in \mathbb{N}$  finito tal que  $|x_n - l|^{-1} < m$ , luego  $|x_n - l| > 1/m$ , y no se cumpliría lo dicho para  $\epsilon = 1/m$ . Así pues,  $x_n \approx l$  y tenemos la convergencia.

En la prueba hemos visto que (para sucesiones estándar y  $\epsilon$  estándar, el  $n_0$  se puede tomar estándar, luego la convergencia implica que, para índices  $n$  finitos suficientemente grandes, el término  $x_n$  dista del límite  $l$  menos que cualquier  $\epsilon > 0$  prefijado.

En lo sucesivo no volveremos a mostrar este tipo de equivalencias clásicas. Consideraremos que propiedades como “ $x_n \approx l$  cuando  $n$  es infinito” ya muestran claramente su significado analítico (en este caso, que  $x_n$  es muy parecido a  $l$  cuando  $n$  es muy grande) sin necesidad de reducir la idea a aproximaciones finitas con tolerancias  $\epsilon > 0$  y valores mínimos  $n_0$  para  $n$ . ■

Conviene observar que la convergencia de una sucesión y el valor de su límite no se alteran si modificamos únicamente sus primeros términos:

**Teorema 2.33** *Si  $\{x_n\}_{n \geq 0}, \{y_n\}_{n \geq 0} \in K^{\mathbb{N}}$  son dos sucesiones tales que existe un  $n_0 \in \mathbb{N}$  de modo que  $x_n = y_n$  para todo  $n \geq n_0$ , entonces una converge si y sólo si lo hace la otra, y en tal caso el límite es el mismo para ambas.*

**DEMOSTRACIÓN:** Por el principio de transferencia podemos suponer que las sucesiones y  $n_0$  son estándar. Entonces, si  $n$  es cualquier natural infinito, tenemos que  $x_n = y_n$  y, como el concepto de convergencia depende únicamente de los términos infinitos de las sucesiones, es claro que se cumple el enunciado. ■

**Ejemplo** Vamos a estudiar la convergencia de una sucesión no estándar. Para ello probamos primero lo siguiente:

Si  $m \in \mathbb{N}$ , se cumple que

$$\lim_n \frac{m}{n} = 0.$$

En efecto, por el principio de transferencia podemos suponer que  $m$  es finito, en cuyo caso, si  $n$  es infinito, resulta que  $m/n \approx 0$ .

Tomemos ahora un número natural infinito  $m$ . Por lo que acabamos de probar, sabemos que

$$\lim_n \frac{m}{n} = 0,$$

pero si tomamos el número infinito  $n = m$ , no es cierto que  $m/m = 1 \approx 0$ , de modo que no se cumple la propiedad que define la convergencia en el caso de sucesiones estándar. ■

**Ejercicio:** Demostrar que si  $\{x_n\}_{n \geq 0}$ ,  $\{y_n\}_{n \geq 0}$  son sucesiones convergentes, entonces

$$\lim_n (x_n + y_n) = \lim_n x_n + \lim_n y_n, \quad \lim_n (x_n y_n) = \lim_n x_n \lim_n y_n,$$

y si además  $\lim_n y_n \neq 0$ , entonces

$$\lim_n \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_n x_n}{\lim_n y_n}.$$

**Definición 2.34** Una sucesión  $\{x_n\}_{n \geq 0} \in K^{\mathbb{N}}$  está *acotada* si existen números  $m < M$  tales que  $m \leq x_n \leq M$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Ejercicio:** Probar que una sucesión  $\{x_n\}_{n \geq 0} \in K^{\mathbb{N}}$  está acotada si y sólo si existe un  $M \in K$  tal que  $|x_n| \leq M$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Ésta es la definición clásica de función acotada, si bien tiene su equivalente no estándar, que nos será mucho más útil en la práctica. Podríamos haber tomado el teorema siguiente como definición:

**Teorema 2.35** Una sucesión estándar  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  está acotada si y sólo si  $x_n$  es finito para todo número natural infinito  $n$ .

**DEMOSTRACIÓN:** Si la sucesión está acotada, entonces hay números  $m < M$  tales que  $m < x_n < M$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Por el principio de transferencia, podemos tomar  $m$  y  $M$  finitos, con lo que  $x_n$  es finito para todo  $n \in \mathbb{N}$ , finito o infinito.

Supongamos ahora que la sucesión no está acotada, de modo que, para todo  $M \in K$ , existe un índice  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $|x_n| > M$ . En particular, esto vale cuando  $M$  es infinito, con lo que existe un  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $x_n$  también es infinito. Dicho  $n$  ha de ser infinito, porque si fuera finito sería estándar y, como la sucesión es estándar,  $x_n$  también sería estándar, luego sería finito. ■

A veces es útil el siguiente criterio de convergencia:

**Teorema 2.36** *El producto de una sucesión que tiende a 0 por una sucesión acotada, tiende a 0.*

DEMOSTRACIÓN: Por transferencia podemos suponer que las sucesiones son estándar. Si  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  está acotada, entonces  $x_n$  es finito cuando  $n$  es infinito. Si  $\{y_n\}_{n \geq 0}$  tiende a 0, entonces  $y_n \approx 0$  cuando  $n$  es infinito. Por el teorema 2.22 concluimos que  $x_n y_n \approx 0$ , luego  $\lim_n x_n y_n = 0$ . ■

**Definición 2.37** Sea  $\{x_n\}_n \in K^{\mathbb{N}}$  una sucesión estándar en  $K$ . Diremos que  $\lim_n x_n = \infty$  (respectivamente  $+\infty$  o  $-\infty$ ) si para todo  $n \in \mathbb{N}$  infinito se cumple que  $x_n$  es infinito (y además  $x_n > 0$ , para  $+\infty$ , o  $x_n < 0$ , para  $-\infty$ ).

**Ejercicio:** Demostrar las relaciones que usualmente se abrevian así:

$$\infty + \infty = \infty, \quad +\infty + \infty = +\infty, \quad -\infty - \infty = -\infty,$$

$$(+\infty)(+\infty) = +\infty, \quad (+\infty)(-\infty) = -\infty, \quad (-\infty)(-\infty) = +\infty, \quad \infty\infty = \infty,$$

$$a \cdot \infty = \infty, \quad a/0 = \infty, \quad a/\infty = 0, \quad (\text{donde } a \in K \setminus \{0\}).$$

Por ejemplo, la primera igualdad hay que entenderla como una abreviatura del teorema siguiente: si dos sucesiones convergen a  $\infty$ , su suma también converge a  $\infty$ .

Otras expresiones como  $0/0$ ,  $\infty/\infty$ ,  $\infty - \infty$ ,  $0 \cdot \infty$ , etc. se llaman *indeterminaciones*, para expresar que no puede demostrarse un resultado similar a los del ejercicio anterior, en el sentido de que la existencia y el valor del límite dependerá de las sucesiones concretas que se operan y no sólo de sus límites.

**Ejemplo** La expresión  $\infty - \infty$  es una indeterminación, ya que, por ejemplo, las sucesiones  $\{n + 3\}_{n \geq 0}$  y  $\{n\}_{n \geq 0}$  tienden ambas a  $\infty$ , y su diferencia tiende a 3; sin embargo, las sucesiones  $\{n^2\}_{n \geq 0}$  y  $\{n\}_{n \geq 0}$  tienden ambas a  $\infty$  y su diferencia tiende a  $\infty$ . (Podemos verla como un cociente de polinomios de grados 2 y 0 respectivamente.)

**Ejercicio:** Poner ejemplos que demuestren que las otras indeterminaciones que hemos citado son realmente indeterminaciones.

## 2.4 La incompletitud de $\mathbb{Q}$

La incompletitud de  $\mathbb{Q}$ , en el sentido de que  $\mathbb{Q}$  no contiene todos los números que “debería” contener, es un hecho que ya descubrieron los antiguos griegos y que traumatizó a muchos de sus matemáticos. En efecto, la geometría demuestra que la diagonal de un cuadrado de lado unidad debe medir  $\sqrt{2}$  unidades, y un sencillo argumento prueba que  $\sqrt{2}$  es irracional. Recordémoslo:

**Teorema 2.38** *No existe ningún  $r \in \mathbb{Q}$  tal que  $r^2 = 2$ .*

DEMOSTRACIÓN: Si existiera tal número  $r$ , podríamos tomarlo positivo (cambiándole el signo si fuera preciso) y expresarlo como cociente  $r = p/q$ , donde  $p$  y  $q$  son números naturales. Podemos tomar como  $p$  el mínimo numerador posible. Como  $p^2/q^2 = 2$ , tenemos que  $p^2 = 2q^2$ , luego  $p$  ha de ser par. Pongamos que  $p = 2p'$ . Entonces  $4p'^2 = 2q^2$ , luego  $2p'^2 = q^2$ . Esto implica que  $q = 2q'$  es par, pero entonces  $r = p/q = p'/q'$ , con  $p' < p$ , en contradicción con la elección de  $p$  como mínimo numerador posible para  $r$ . ■

Esto implica que, para hablar de  $\sqrt{2}$ , necesitamos un conjunto de números más amplio que  $\mathbb{Q}$ . Dado que  $r^2 \neq 2$ , podemos descomponer  $\mathbb{Q}$  del modo siguiente:

$$\mathbb{Q} = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < 0\} \cup \{r \in \mathbb{Q} \mid r \geq 0, r^2 < 2\} \cup \{r \in \mathbb{Q} \mid r \geq 0, r^2 > 2\}.$$

Si llamamos  $A$  a la unión de los dos primeros conjuntos y  $B$  al tercero, tenemos que  $\mathbb{Q} = A \cup B$ ,  $A \cap B = \emptyset$  y que todos los elementos de  $A$  son menores que todos los elementos de  $B$ . La diagonal de un cuadrado de lado unidad mide más que cualquier número de  $A$  y mide menos que cualquier número de  $B$ , pero (en  $\mathbb{Q}$ ) entre  $A$  y  $B$  no hay nada. Hay un “agujero” que debemos rellenar.

Nos encargaremos de ello en la sección siguiente, donde construiremos el cuerpo  $\mathbb{R}$  de los números reales, pero ahora nos ocuparemos de precisar en qué consisten estos “agujeros” de  $\mathbb{Q}$ , ya que con ello obtendremos al mismo tiempo los conceptos necesarios para “rellenarlos”. Una forma de definir rigurosamente los “agujeros” de  $\mathbb{Q}$  es a través del concepto de sección:

**Definición 2.39** Una *sección* de  $\mathbb{Q}$  es un par  $(A, B)$  de subconjuntos no vacíos de  $\mathbb{Q}$  tales que  $\mathbb{Q} = A \cup B$ ,  $A \cap B = \emptyset$ , cada elemento de  $A$  es menor que cada elemento de  $B$ , y  $B$  no tiene un mínimo elemento. Si además  $A$  no tiene un máximo elemento diremos que la sección es *estricta*.

Cada sección estricta de  $\mathbb{Q}$  en este sentido pone en evidencia la “falta” de un número entre  $A$  y  $B$ . Observemos la importancia de la última condición sobre ausencia de máximo y mínimo, ya que una sección como

$$\mathbb{Q} = \{r \in \mathbb{Q} \mid r \leq 3\} \cup \{r \in \mathbb{Q} \mid r > 3\},$$

que no es estricta, porque  $A$  tiene a 3 como máximo elemento,<sup>5</sup> no nos permite afirmar que falte ningún número entre  $A$  y  $B$ , sino que  $A$  y  $B$  están perfectamente separados por  $r = 3$ .

Aunque intuitivamente está claro, no es inmediato comprobar que los conjuntos  $A$  y  $B$  que hemos construido entre los que “debería” estar  $\sqrt{2}$  no tienen máximo ni mínimo. Vamos a verlo como consecuencia de una construcción más general que nos dará otras caracterizaciones de los “agujeros” de  $\mathbb{Q}$ .

<sup>5</sup>Recordemos que las definiciones de máximo y mínimo de un conjunto  $A$  exigen que éstos estén en  $A$ . Por ello, podemos decir que 3 es el máximo del conjunto de la izquierda, mientras que el conjunto de la derecha no tiene mínimo, ya que dicho mínimo “debería” ser 3 y no lo es porque no pertenece al conjunto.

**Ejemplo** Sea  $B = \{r \in \mathbb{Q} \mid r \geq 0, r^2 > 2\}$  y sea  $A = \mathbb{Q} \setminus B$ . Está claro que  $(A, B)$  cumple la definición de sección salvo quizá la condición de que  $A$  no tenga máximo y  $B$  no tenga mínimo. Observemos que  $1 \in A$  (porque  $1^2 < 2$ ) y  $2 \in B$  (porque  $2^2 > 2$ ). Esto se interpreta como que el “agujero” determinado por  $(A, B)$  está situado entre 1 y 2. Para precisar más su situación fijamos un número natural  $n$  y consideramos los  $n + 1$  números naturales de la forma

$$x_i = 1 + \frac{i}{n}, \quad 0 \leq i \leq n.$$

Más explícitamente, tenemos que

$$1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 2.$$

Elevando al cuadrado:

$$1 = x_0^2 < x_1^2 < \cdots < x_n^2 = 4.$$

Puesto que ninguno de los cuadrados puede ser exactamente igual a 2, tiene que existir un único  $i$  tal que  $x_i^2 < 2 < x_{i+1}^2$ . Definimos  $x_n = x_i$ ,  $y_n = x_{i+1}$ . De este modo, hemos construido dos sucesiones (estándar)  $\{x_n\}_{n \geq 0}$ ,  $\{y_n\}_{n \geq 0} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$  tales que

$$1 \leq x_n < y_n \leq 2, \quad y_n - x_n = 1/n, \quad x_n^2 < 2 < y_n^2.$$

Esto se interpreta como que el “agujero” determinado por  $(A, B)$  está situado entre  $x_n$  e  $y_n$  para todo  $n$ . Si  $n$  es infinito, entonces, la segunda condición de las tres anteriores nos da que  $x_n \approx y_n$ , luego también  $x_n^2 \approx y_n^2$ , y la tercera condición nos da que  $|x_n - 2| < |x_n^2 - y_n^2| \approx 0$ , luego  $x_n^2 \approx y_n^2 = 2$ .

Acabamos de probar que, aunque no existe ningún número racional  $r$  tal que  $r^2 = 2$ , sí que existe un  $r$  tal que  $r^2 \approx 2$ .

Por otra parte, ahora es claro que  $A$  no puede tener máximo elemento. Si lo tuviera, sería un número estándar  $r$  (por transferencia, el máximo de un conjunto estándar es un número estándar), y tendríamos (siempre para  $n$  infinito) que  $x_n \leq r < y_n$ , luego  $x_n \approx r$ , luego  $r^2 \approx x_n^2 \approx 2$ , luego  $r^2 = 2$  por el teorema 2.24, y esto es imposible. Igualmente se razona que  $B$  no puede tener mínimo. Así hemos probado que  $(A, B)$  es una sección estricta de  $\mathbb{Q}$ .

Observemos también que la sucesión  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  no es convergente (en  $\mathbb{Q}$ ), ya que, siendo estándar, si convergiera lo haría a un número racional estándar  $r$ , que cumpliría  $r^2 \approx x_n^2 \approx 2$  y de nuevo llegaríamos al absurdo  $r^2 = 2$ . (Lo mismo vale para  $\{y_n\}_{n \geq 0}$ .)

Esto se interpreta como que las sucesiones “deberían” converger a  $\sqrt{2}$ , pero, en  $\mathbb{Q}$ , en vez de  $\sqrt{2}$  tenemos un “agujero”.

No obstante, estas sucesiones cumplen una propiedad relacionada con la convergencia que definimos a continuación. ■

A partir de aquí, los resultados teóricos generales los enunciaremos, como en las secciones precedentes, para sucesiones en un cuerpo ordenado arquimediano estándar  $K$  arbitrario, si bien los alternaremos con aplicaciones al caso concreto de  $\mathbb{Q}$ .

**Definición 2.40** Una sucesión estándar  $\{x_n\}_{n \geq 0} \in K^{\mathbb{N}}$  es *de Cauchy* si para todo par de números naturales infinitos  $m$  y  $n$  se cumple que  $x_m \approx x_n$ .

Como en el caso de la definición de convergencia, el principio de estandarización nos permite considerar definido el concepto de sucesión de Cauchy para sucesiones arbitrarias, no necesariamente estándar, y de modo que la propiedad es interna.

Así como la noción de convergencia expresa que  $x_n$  es muy parecido al límite cuando  $n$  es muy grande, la noción de sucesión de Cauchy expresa que los términos de la sucesión son todos muy parecidos entre sí cuando los índices son muy grandes.

Las sucesiones  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  e  $\{y_n\}_{n \geq 0}$  que hemos construido en el ejemplo anterior son de Cauchy, pues si  $m$  y  $n$  son dos números naturales cualesquiera, podemos suponer que  $x_m \leq x_n$ , y entonces  $x_m \leq x_n < y_m$  (porque todo elemento de  $A$  es menor que todo elemento de  $B$ ), luego  $|x_n - x_m| \leq |y_m - x_m| \approx 0$ , luego  $x_m \approx x_n$ . Igualmente se razona con la otra sucesión.

Tenemos así ejemplos de sucesiones de Cauchy que no son convergentes (en  $\mathbb{Q}$ ). Por otra parte:

**Teorema 2.41** *Toda sucesión convergente es de Cauchy.*

DEMOSTRACIÓN: Sea  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  una sucesión convergente en  $K$ . Por transferencia podemos suponer que es estándar, y entonces también será estándar su límite  $l \in K$ . Si  $m$  y  $n$  son números naturales infinitos, tenemos que  $x_m \approx l \approx x_n$ , luego la sucesión es de Cauchy. ■

Lo que sucede es que, para que una sucesión pueda converger, es decir, para que sus términos se acerquen infinitamente a un límite  $l$ , es necesario en particular que se acerquen infinitamente entre sí. En cambio, aunque los términos de una sucesión se acerquen infinitamente entre sí, puede ocurrir que la sucesión no tenga límite porque converja hacia un “agujero”, como hemos visto que sucede en  $\mathbb{Q}$ . Las sucesiones de Cauchy no convergentes en  $\mathbb{Q}$  son otra forma de señalar los “agujeros” de  $\mathbb{Q}$ . Veamos otra más, ésta genuinamente no estándar:

**Definición 2.42** Un número  $r \in K$  es *casi estándar* si está infinitamente cerca de un número estándar, que por el teorema 2.24 está unívocamente determinado y lo llamaremos *parte estándar* de  $r$ , y lo representaremos por  $*r$ .

Todo número casi-estándar es suma de un número estándar (luego finito) y un infinitésimo (finito también), luego todos los números casi-estándar son finitos. En  $\mathbb{Q}$  el recíproco es falso, y este hecho supone otra caracterización de la incompletitud. Volviendo a la sucesión  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  del último ejemplo que hemos visto, cuando  $n$  es infinito tenemos que  $x_n$  es finito (está entre 1 y 2) y no está infinitamente próximo a ningún número estándar  $r$ , ya que, una vez más, si  $x_n \approx r$ , entonces  $r^2 = 2$ .

Así, los números racionales que “deberían” estar infinitamente cerca de un número irracional estándar son finitos, pero no casi-estándar porque su “parte estándar” es irracional.

**Ejercicio:** Demostrar que si  $r, s \in K$  son casi-estándar, también lo son  $r + s$  y  $rs$ , y que  $*(r+s) = *r + *s$ ,  $*(rs) = *r*s$ . Si  $s$  no es un infinitésimo, también es casi-estándar  $r/s$  y  $*(r/s) = *r/*s$ .

En resumen, hemos visto tres manifestaciones de la incompletitud de  $\mathbb{Q}$ :

- La existencia de secciones estrictas  $(A, B)$ , para las que “debería” haber un número que fuera el máximo de  $A$  o el mínimo de  $B$ , según a cuál de los dos lo añadamos.
- La existencia de sucesiones de Cauchy no convergentes, que “deberían” tener un límite.
- La existencia de números finitos que no son casi-estándar, que “deberían” estar infinitamente próximos a una parte estándar.

En la sección siguiente construiremos el cuerpo  $\mathbb{R}$  de los números reales y veremos que desaparecen estos tres fenómenos, lo que se interpretará como que habremos “tapado” todos los “agujeros” de  $\mathbb{Q}$ .

Terminamos con un último resultado sobre sucesiones de Cauchy:

**Teorema 2.43** *Toda sucesión de Cauchy está acotada.*

DEMOSTRACIÓN: Sea  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  una sucesión de Cauchy, que podemos suponer estándar. Si  $m \in \mathbb{N}$  es infinito, entonces, para todo  $n \geq m$ , se cumple que  $|x_n - x_m| < 1$ , ya que, de hecho, los dos términos están infinitamente próximos.

Por transferencia, podemos tomar un  $m \in \mathbb{N}$  finito que cumple lo mismo, es decir, tal que para todo  $n \geq m$  se cumple  $|x_n - x_m| < 1$ , en particular para todo  $n \in \mathbb{N}$  infinito. Como la sucesión y  $m$  son estándar, el término  $x_m$  también es estándar, luego es finito, luego  $x_n$  también es finito, para todo  $n \in \mathbb{N}$  infinito. Esto significa que la sucesión está acotada. ■

**Ejercicio:** Probar el análogo al teorema 2.33 para sucesiones de Cauchy.

Terminamos la sección con otras dos caracterizaciones de la incompletitud de  $\mathbb{Q}$ , una genuinamente no estándar y otra clásica:

## 2.5 La construcción de $\mathbb{R}$

Existen diversas formas de construir un cuerpo  $\mathbb{R}$  que complete a  $\mathbb{Q}$ , aunque todas ellas son equivalentes, en el sentido de que los cuerpos a los que se llega con cada método tienen exactamente las mismas propiedades y sus elementos pueden identificarse uno a uno a través de aplicaciones naturales.

La construcción de  $\mathbb{R}$  más simple desde un punto de vista conceptual es la de Dedekind, que define  $\mathbb{R}$  como el conjunto de todas las secciones de  $\mathbb{Q}$ . Podemos

definir entonces una aplicación  $i : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$  que a cada número  $x \in \mathbb{Q}$  le asigna la sección

$$i(x) = (\{r \in \mathbb{Q} \mid r \leq x\}, \{r \in \mathbb{Q} \mid r > x\}).$$

De este modo, los números racionales se identifican con las secciones no estrictas de  $\mathbb{Q}$ , pero, en  $\mathbb{R}$  hay muchos números irracionales, como la sección estricta que hemos estudiado en la sección anterior y que podríamos tomar como la definición de  $\sqrt{2}$ .

No obstante, construir  $\mathbb{R}$  no es sólo definir los números reales, sino dotarlos de una estructura de cuerpo ordenado y, con la construcción de Dedekind, esto resulta mucho más farragoso que con la que vamos a exponer aquí, basada, no en las secciones, sino en otro de los “detectores de agujeros” que hemos encontrado, a saber, las sucesiones de Cauchy.

Aquí nos encontramos con un inconveniente, y es que, mientras que secciones de  $\mathbb{Q}$  distintas entre sí determinan números racionales distintos (si no son estrictas) o “agujeros distintos” (si son estrictas), es fácil construir sucesiones de Cauchy distintas que se aproximen hacia el mismo “agujero” de  $\mathbb{Q}$ , por lo que no podemos definir los números reales como las sucesiones de Cauchy de  $\mathbb{Q}$ , sino que cada número real deberá ser el conjunto de todas las sucesiones de Cauchy que se aproximan a un mismo “agujero”.

**Definición 2.44** Llamaremos  $\mathcal{C}$  al conjunto de todas las sucesiones de Cauchy en  $\mathbb{Q}$ .

Observemos que la suma y el producto de dos sucesiones de Cauchy  $\{x_n\}_{n \geq 0}$ ,  $\{y_n\}_{n \geq 0}$  es también una sucesión de Cauchy. En efecto, si  $m$  y  $n$  son números naturales infinitos, entonces  $x_m \approx x_n$ ,  $y_m \approx y_n$ , luego  $x_m + y_m \approx x_n + y_n$ , luego  $\{x_n + y_n\}_{n \geq 0}$  también es de Cauchy. Con el producto se razona análogamente, pero teniendo en cuenta que las sucesiones de Cauchy están acotadas, porque para aplicar el teorema 2.22 hace falta que los números sean finitos.

Esto convierte al conjunto  $\mathcal{C}$  en un subanillo del anillo  $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ . Aquí usamos también que las sucesiones constantes 0 y 1 están en  $\mathcal{C}$ , lo cual es obvio, porque todas las sucesiones constantes son convergentes, luego son de Cauchy.

**Definición 2.45** Diremos que dos sucesiones estándar  $\{x_n\}_{n \geq 0}$ ,  $\{y_n\}_{n \geq 0} \in \mathcal{C}$  son *equivalentes*, y lo representaremos por  $\{x_n\}_{n \geq 0} \sim \{y_n\}_{n \geq 0}$ , si para todo  $n \in \mathbb{N}$  infinito, se cumple que  $x_n \approx y_n$ . Observemos que si esto se cumple para un cierto  $n$  infinito, entonces se cumple automáticamente para todos.

Es evidente que la equivalencia que acabamos de definir es ciertamente una relación de equivalencia, es decir, que es reflexiva, simétrica y transitiva.

**Ejercicio:** Probar que dos sucesiones de Cauchy son equivalentes si y sólo si su diferencia converge a 0. Esto significa precisamente que ambas “deberían” tener el mismo límite, en caso de tenerlo.

Definimos el *conjunto de los números reales*  $\mathbb{R}$  como el conjunto de todas las clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy respecto de la equivalencia que acabamos de definir. Es obvio que  $\mathbb{R}$ , así definido, es un conjunto estándar.

De este modo, cada  $\alpha \in \mathbb{R}$  es de la forma  $\alpha = [\{x_n\}_{n \geq 0}]$ , donde los corchetes representan la clase de equivalencia formada por todas las sucesiones de Cauchy equivalentes a  $\{x_n\}_{n \geq 0}$ .

**Ejercicio:** Demostrar que si  $\{x_n\}_{n \geq 0} \sim \{x'_n\}_{n \geq 0}$  y  $\{y_n\}_{n \geq 0} \sim \{y'_n\}_{n \geq 0}$ , entonces  $\{x_n + y_n\}_{n \geq 0} \sim \{x'_n + y'_n\}_{n \geq 0}$  y  $\{x_n y_n\}_{n \geq 0} \sim \{x'_n y'_n\}_{n \geq 0}$ .

El ejercicio precedente permite definir la suma y el producto de dos números reales  $\alpha = [\{x_n\}_{n \geq 0}]$  y  $\beta = [\{y_n\}_{n \geq 0}]$  como

$$\alpha + \beta = [\{x_n + y_n\}_{n \geq 0}], \quad \alpha\beta = [\{x_n y_n\}_{n \geq 0}].$$

En otros términos: para sumar o multiplicar dos números reales escogemos una sucesión de Cauchy en cada uno de ellos, las sumamos o multiplicamos, y el resultado es la clase de la sucesión suma o producto. La clave está en que este resultado será el mismo cualquiera que sea el par de sucesiones con el que hagamos las operaciones.

Todas estas comprobaciones pueden reducirse a unas pocas a través del concepto de ideal:

**Ejercicio:** Demostrar que el conjunto  $\mathcal{I}$  de las sucesiones de  $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$  que convergen a 0 es un ideal del anillo  $\mathcal{C}$ , de modo que la equivalencia de sucesiones de Cauchy no es más que la congruencia módulo  $\mathcal{I}$  y  $\mathbb{R}$  no es más que el anillo cociente  $\mathcal{C}/\mathcal{I}$ .

**Teorema 2.46**  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  es un cuerpo.

**DEMOSTRACIÓN:** La comprobación de que  $\mathbb{R}$  es un anillo es inmediata. Todas las propiedades se reducen a las correspondientes a la suma y el producto de sucesiones, que a su vez se reducen a las de la suma y el producto de números racionales. Por ejemplo, la propiedad conmutativa del producto se prueba así:

Si  $\alpha = [\{x_n\}_{n \geq 0}]$  y  $\beta = [\{y_n\}_{n \geq 0}]$ , entonces

$$\alpha\beta = [\{x_n y_n\}_{n \geq 0}] = [\{y_n x_n\}_{n \geq 0}] = \beta\alpha.$$

Observemos que los elementos neutros para la suma y el producto son las clases de las sucesiones constantes  $0 = [\{0\}_{n \geq 0}]$ ,  $1 = [\{1\}_{n \geq 0}]$ .

La única propiedad que requiere algo de atención es la de existencia de elemento inverso para el producto. Para ello tomamos un número  $\alpha \in \mathbb{R}$  no nulo, que podemos suponer estándar. Será de la forma  $\alpha = [\{x_n\}_{n \geq 0}]$ , donde  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  es una sucesión de Cauchy, que podemos tomar estándar, tal que, si  $n$  es infinito,  $x_n \not\approx 0$  (pues de lo contrario la sucesión sería equivalente a  $\{0\}_{n \geq 0}$  y tendríamos  $\alpha = 0$ ).

Consideremos la sucesión (estándar)  $\{y_n\}_{n \geq 0}$  definida por

$$y_n = \begin{cases} x_n & \text{si } x_n \neq 0, \\ 1 & \text{si } x_n = 0. \end{cases}$$

Según lo dicho, si  $n$  es infinito será  $y_n = x_n$ , luego  $\{y_n\}_{n \geq 0}$  es también una sucesión de Cauchy equivalente a  $\{x_n\}_{n \geq 0}$ . Por lo tanto,  $\alpha = [\{y_n\}_{n \geq 0}]$ , con la diferencia de que ahora  $y_n \neq 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Esto nos permite considerar la sucesión inversa  $\{y_n^{-1}\}_{n \geq 0}$ , que también es de Cauchy, pues si  $m$  y  $n$  son números naturales infinitos, entonces  $y_m \approx y_n$  son números racionales no infinitesimales, luego  $y_m^{-1} \approx y_n^{-1}$  (por 2.22). Por consiguiente, tenemos definido el número real  $\beta = [\{y_n^{-1}\}_{n \geq 0}]$ , que obviamente cumple  $\alpha\beta = 1$ , luego existe el inverso  $\alpha^{-1} = \beta$ . ■

**Definición 2.47** Si  $\alpha = [\{x_n\}_{n \geq 0}]$  y  $\beta = [\{y_n\}_{n \geq 0}]$  son dos números reales estándar distintos, el teorema 2.22 implica que la condición  $x_n < y_n$  (para  $n$  infinito) no depende ni del  $n$  considerado ni de la elección de las sucesiones dentro de cada número real. Por ello diremos que  $\alpha < \beta$  si  $\alpha \neq \beta$  y  $x_n < y_n$  para algún  $n$  infinito (o, equivalentemente, para todos). A su vez, definimos  $\alpha \leq \beta$  como  $\alpha < \beta$  o  $\alpha = \beta$ .

**Teorema 2.48**  $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$  es un cuerpo ordenado.

DEMOSTRACIÓN: Es inmediato que la relación que acabamos de definir es reflexiva, antisimétrica y transitiva. Por ejemplo, para probar la antisimetría hemos de ver que, si  $\alpha = [\{x_n\}_{n \geq 0}]$  y  $\beta = [\{y_n\}_{n \geq 0}]$  (que podemos suponer estándar) cumplen  $\alpha \leq \beta$  y  $\beta \leq \alpha$ , entonces ha de ser  $\alpha = \beta$ . Por reducción al absurdo, si fuera  $\alpha \neq \beta$ , entonces tendríamos  $\alpha < \beta$  y  $\beta < \alpha$ , luego, fijado un  $n \in \mathbb{N}$  infinito,  $x_n < y_n$ ,  $y_n < x_n$ , lo cual es absurdo porque la relación de orden en  $\mathbb{Q}$  es antisimétrica.

Similarmente, si  $\alpha \neq \beta$ , fijado  $n \in \mathbb{N}$  infinito, o bien  $x_n < y_n$ , en cuyo caso  $\alpha < \beta$ , o bien  $y_n < x_n$ , en cuyo caso  $\beta < \alpha$ . Esto implica que, o bien  $\alpha \leq \beta$ , o bien  $\beta \leq \alpha$ .

La compatibilidad del orden con la suma y el producto se prueban también sin dificultad. Por ejemplo, si  $\alpha \leq \beta$  y consideramos un tercer número real  $\gamma = [\{z_n\}_{n \geq 0}]$ , o bien  $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$ , en cuyo caso tenemos también  $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$ , o bien  $\alpha + \gamma \neq \beta + \gamma$ , lo que obliga a  $\alpha \neq \beta$  y, más concretamente, a  $\alpha < \beta$ . Entonces, fijado un  $n \in \mathbb{N}$  infinito, tenemos que  $x_n < y_n$ , luego  $x_n + z_n < x_n + y_n$ , luego  $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$ , luego  $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$ . ■

**Definición 2.49** Sea  $i : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$  la aplicación que a cada  $r \in \mathbb{Q}$  le asigna el número real  $i(r) = [\{r\}_{n \geq 0}]$ .

**Teorema 2.50** La aplicación  $i : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$  que acabamos de definir es inyectiva y cumple las propiedades siguientes:

- a)  $r \leq s$  si y sólo si  $i(r) \leq i(s)$ .
- b)  $i(r + s) = i(r) + i(s)$ .
- c)  $i(rs) = i(r)i(s)$ .
- d) Para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$  existe un  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $i(m) \geq \alpha$ .

DEMOSTRACIÓN: La inyectividad de  $i$  significa que si  $i(r) = i(s)$ , entonces  $r = s$ . Podemos suponer que  $r$  y  $s$  son estándar. Lo que tenemos es que la sucesión constante  $r$  es equivalente a la sucesión constante  $s$ , luego  $r \approx s$  y, como son estándar,  $r = s$ .

Las propiedades a), b) y c) son inmediatas.

Para probar d) podemos suponer que  $\alpha = [\{x_n\}_{n \geq 0}]$  es estándar, con lo que también podemos suponer que lo es la sucesión  $\{x_n\}_{n \geq 0}$ . Como es de Cauchy, está acotada, lo cual implica que existe un  $M \in \mathbb{Q}$  (que podemos tomar estándar) tal que  $x_n \leq M$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Sea  $m = E[M] + 2$ , que es un número natural finito, y es claro que  $|x_n - m| > 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , luego la sucesión  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  no es equivalente a la sucesión constante  $m$  y, como  $x_n < m$  para cualquier  $n$  infinito, concluimos que  $\alpha < i(m)$ . ■

En virtud de este último teorema, podemos identificar a  $\mathbb{Q}$  con su imagen en  $\mathbb{R}$  a través de la aplicación  $i$ , de modo que podemos considerar  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ . La suma, el producto y la relación de orden entre números racionales son los mismos si los consideramos como números racionales o como números reales. La última propiedad implica que  $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$  es un cuerpo ordenado arquimediano estándar. Por lo tanto, podemos aplicarle toda la teoría que hasta ahora hemos desarrollado para un cuerpo  $K$  arbitrario.

En particular, podemos distinguir entre números reales infinitos, finitos e infinitesimales. A partir de ahora,  $\mathcal{O}$  representará específicamente al conjunto (externo) de todos los números reales finitos y  $\mathcal{o}$  al conjunto (externo) de todos los números reales infinitesimales.

Observemos que un número racional  $r$  es finito si y sólo si existe un número natural finito  $n$  tal que  $|r| \leq n$ , y esto no depende de si consideramos a  $r$  como número racional o como número real. En otras palabras, un número racional es finito como número racional si y sólo si lo es como número real. Más brevemente: el conjunto (externo) de los números racionales finitos es  $\mathcal{O} \cap \mathbb{Q}$ . Similarmente, los números racionales infinitesimales son los de  $\mathcal{o} \cap \mathbb{Q}$ . A su vez, esto implica que dos números racionales están infinitamente próximos como números racionales si y sólo si lo están como números reales, así como que todo número racional casi-estándar sigue siendo casi-estándar como número real, con la misma parte estándar.

**Teorema 2.51** *Entre dos números reales distintos hay siempre un número racional.*

DEMOSTRACIÓN: Sean  $\alpha < \beta$  dos números reales, que podemos tomar estándar. Sea  $m = E[\alpha]$  de modo que  $m \leq \alpha < m + 1$ . Fijado un número natural  $n$  consideremos los números racionales de la forma

$$x_i = m + \frac{1}{n}, \quad 0 \leq i \leq n.$$

Como  $x_0 = m \leq \alpha$  y  $x_n = m + 1 > \alpha$ , ha de haber un  $i$  tal que  $x_{i-1} \leq \alpha < x_i$ . Si  $n$  es infinito, entonces  $x_{i-1} - x_i = 1/n \approx 0$ , luego  $\alpha \approx x_i$ , luego  $x_i < \beta$ , ya

que si fuera  $\alpha < \beta \leq x_i$  sería también  $\alpha \approx \beta$ , lo cual es imposible porque ambos números son estándar. Así pues,  $r = x_i$  es un número racional que cumple  $\alpha < r < \beta$ . (Ciertamente, es un número racional no estándar, pero, por transferencia, si existe uno no estándar, siendo  $\alpha$  y  $\beta$  estándar, también existe otro estándar, aunque esto no es necesario para la prueba.) ■

**Teorema 2.52** *Sea  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  una sucesión de Cauchy de números racionales y sea  $\alpha = [\{x_n\}_{n \geq 0}] \in \mathbb{R}$ . Entonces, si consideramos la sucesión dada como sucesión de números reales, se cumple que*

$$\lim_n x_n = \alpha.$$

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer que la sucesión (y, por lo tanto,  $\alpha$ ) es estándar. Hemos de probar que si  $n \in \mathbb{N}$  es infinito, entonces  $x_n \approx \alpha$ . En caso contrario,  $|x_n - \alpha|$  no es infinitesimal, luego su inverso no es finito. Existe, pues, un número natural finito  $k$  tal que  $|x_n - \alpha|^{-1} < k$ , luego  $|x_n - \alpha| > 1/k$ .

Si, por ejemplo,  $x_n < \alpha$ , entonces  $x_n < \beta = \alpha - 1/k < \alpha$ , donde  $\beta$  es un número real estándar. Por el teorema anterior, existe un número racional (que podemos tomar estándar) tal que  $\beta < r < \alpha$ . Entonces  $x_n < r < \alpha$ , pero la primera desigualdad implica, por definición, que  $\alpha = [\{x_n\}_{n \geq 0}] < [\{r\}_{n \geq 0}] = r$ , luego tenemos  $\alpha < r < \alpha$ , contradicción. Si fuera  $\alpha < x_n$  razonamos igualmente con  $\beta = \alpha + 1/k$ . ■

A partir de este momento ya nunca más tendremos que recordar que un número real es, por definición, una clase de equivalencia de sucesiones de Cauchy, sino que podremos concebir a  $\mathbb{R}$  como un conjunto de números, sin que importe para nada la naturaleza conjuntista de sus elementos. En lugar de escribir  $\alpha = [\{x_n\}_{n \geq 0}]$ , podremos escribir

$$\lim_n x_n = \alpha.$$

Observemos que el teorema anterior garantiza que hemos tapado todos los “agujeros” de  $\mathbb{Q}$ , en el sentido de que cada sucesión de Cauchy de números racionales tiene límite en  $\mathbb{R}$ , pero no asegura que, en el proceso, no hayamos generado “agujeros nuevos”, en el sentido de que haya sucesiones de Cauchy de números reales (irracionales) que no tengan límite. A continuación probaremos que no es el caso, que es lo que se conoce como teorema de completitud de  $\mathbb{R}$ . En primer lugar demostramos una versión no estándar, de la que deduciremos trivialmente la versión estándar:

**Teorema 2.53 (Teorema de completitud)** *Todo número real finito  $\alpha$  está infinitamente próximo a un único número real estándar  $^*\alpha$ , al que llamaremos su parte estándar.*

DEMOSTRACIÓN: Consideremos el conjunto estándar

$$A = {}^S\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \alpha\}.$$

Recordemos que esto significa que un número real estándar  $x$  está en  $A$  si y sólo si cumple  $x \leq \alpha$ , pero no tenemos información directa sobre qué números no estándar están en  $A$ .

Como  $\alpha$  es finito, el número entero  $m = E[\alpha]$  es finito, luego es estándar, y se cumple que  $m \leq \alpha < m + 1$ , luego  $m \in A$  y  $m + 1 \notin A$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$  consideramos los números racionales

$$a_i = m + \frac{i}{n}, \quad 0 \leq i \leq n.$$

Como  $a_0 = m \in A$  y  $a_n = m + 1 \notin A$ , ha de existir un  $i$  tal que  $x_n = a_i \in A$ , pero  $y_n = a_{i+1} \notin A$ . Tenemos así definidas dos sucesiones  $\{x_n\}_{n \geq 0}$ ,  $\{y_n\}_{n \geq 0}$  de números racionales que son estándar, pues están definidas internamente a partir de  $A$  y  $m$ , que son conjuntos estándar.

Por construcción,  $x_n \in A$ ,  $y_n \notin A$ ,  $x_n < y_n$ ,  $y_n - x_n = 1/n$ . Cuando  $n$  es finito (y sólo en este caso) podemos asegurar que  $x_n \leq \alpha < y_n$ .

Un poco más en general, si  $n$  y  $n'$  son finitos, tenemos que  $x_n < y_{n'}$  luego, por transferencia, esta desigualdad se cumple cuando  $n$  y  $n'$  son arbitrarios.

Si  $n$  y  $n'$  son infinitos y, por ejemplo,  $x_n \leq x_{n'}$ , tenemos que

$$|x_{n'} - x_n| \leq |x_n - y_n| = 1/n \approx 0,$$

luego  $x_n \approx x_{n'}$ . Igualmente se razona que  $y_n \approx y_{n'}$ , luego ambas sucesiones son de Cauchy. Por el teorema anterior, existe  $\beta = \lim x_n \in \mathbb{R}$ , que será un número real estándar. Tenemos así que  $x_n \approx y_n \approx \beta$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$  infinito.

Vamos a probar que  $\beta \approx \alpha$ , con lo que el teorema quedará probado. (La unicidad de la parte estándar es el teorema 2.24.)

En caso contrario,  $|\beta - \alpha|^{-1}$  es finito, luego podemos tomar  $k \in \mathbb{N}$  finito tal que  $|\beta - \alpha| > 1/k$ . Si, por ejemplo,  $\alpha < \beta$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$  finito tenemos que  $x_n \leq \alpha < \beta - 1/k < \beta$ . En la desigualdad  $x_n < \beta - 1/k$ , todo es estándar, luego, por transferencia, vale para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Así pues,  $|\beta - x_n| > 1/k$ , lo cual es absurdo cuando  $n$  es infinito, ya que  $x_n \approx \beta$ . Si  $\beta < \alpha$  razonamos igualmente con  $\beta < \beta + 1/k < \alpha < y_n$ . ■

El teorema anterior prueba que los números reales finitos coinciden con los casi-estándar, pero, precisamente por ello, ya no volveremos a hablar de números casi-estándar, ya que este concepto se ha vuelto sinónimo de "finito".

La versión estándar del teorema de completitud es ahora trivial:

**Teorema 2.54 (Teorema de completitud)** *Una sucesión de números reales es convergente si y sólo si es de Cauchy.*

DEMOSTRACIÓN: Sea  $\{\alpha_n\}_{n \geq 0}$  una sucesión de Cauchy de números reales, que podemos tomar estándar. Toda sucesión de Cauchy está acotada, luego, fijado  $m \in \mathbb{N}$  infinito,  $\alpha_m$  es finito, luego existe  $\alpha = {}^*\alpha_m \approx \alpha_m$ . Como la sucesión es de Cauchy, de hecho  $\alpha \approx \alpha_n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$  infinito, luego

$$\alpha = \lim_n \alpha_n$$

El recíproco es el teorema 2.41. ■

## 2.6 Consecuencias de la completitud de $\mathbb{R}$

En esta sección recogemos algunas propiedades elementales de  $\mathbb{R}$  que no son ciertas para  $\mathbb{Q}$  porque dependen de la propiedad de completitud. Empezamos con otra de las caracterizaciones clásicas:

**Definición 2.55** Si  $(X, \leq)$  es un conjunto ordenado, el *supremo* de un subconjunto  $A \subset X$  no vacío es la menor de sus cotas superiores, y el *ínfimo* es la mayor de sus cotas inferiores.

Más detalladamente,  $s \in X$  es el supremo de  $A$  si es una cota superior de  $A$  (es decir, si  $a \leq s$  para todo  $a \in A$  y cualquier otra cota superior  $c \in X$  cumple  $s \leq c$ ). Análogamente podemos desarrollar la definición de ínfimo.

Un conjunto  $A$  no tiene por qué tener supremo o ínfimo, pero si existen son claramente únicos. Si  $A$  tiene un máximo (resp. mínimo) elemento, es claro que éste es también su supremo (resp. ínfimo).

La completitud de  $\mathbb{R}$  equivale al teorema siguiente:

**Teorema 2.56** *Todo subconjunto de  $\mathbb{R}$  no vacío y acotado superiormente tiene supremo.*

DEMOSTRACIÓN: Sea  $A \subset \mathbb{R}$  un subconjunto estándar no vacío y acotado superiormente. Sea  $a \in A$  estándar y sea  $c \in \mathbb{R}$  una cota superior estándar. Si  $a$  es el máximo de  $A$ , entonces es su supremo. Supongamos que  $a$  no es el máximo de  $A$ , con lo que  $a < c$ .

Fijemos  $n \in \mathbb{N}$  infinito y consideremos la sucesión  $x_i = a + 1/n$ , para  $i \in \mathbb{N}$ . Tenemos que  $x_0 = a$  no es una cota superior de  $A$ , mientras que  $x_{n^2} > c$ , luego sí lo es. Ha de existir un  $i \in \mathbb{N}$  tal que  $x_i$  no sea una cota superior pero  $x_{i+1}$  sí que lo sea. Que  $x_i$  no sea cota superior significa que existe un  $b \in A$  tal que  $a < x_i < b < c$ , luego  $x_i$  es finito. Sea  $s = *x_i = *x_{i+1}$ . Vamos a probar que  $s$  es el supremo de  $A$ .

En primer lugar,  $s$  es una cota superior, pues si existe  $b \in A$  tal que  $s < b$ , podemos tomarlo estándar, y entonces  $x_{i+1} < b$ , en contradicción con que  $x_{i+1}$  es una cota superior de  $A$ .

Si existe otra cota superior  $d < s$ , podemos tomarla estándar, con lo que  $d < x_i$ , y esto contradice que  $x_i$  no sea una cota superior. ■

**Ejercicio:** Demostrar que todo subconjunto de  $\mathbb{R}$  no vacío y acotado inferiormente tiene ínfimo.

Las caracterizaciones siguientes del supremo de un conjunto pueden ser útiles:

**Teorema 2.57** *Sea  $A \subset \mathbb{R}$  un conjunto estándar y sea  $s \in \mathbb{R}$  un número estándar. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

a)  $s$  es el supremo de  $A$ .

b)  $s$  es una cota superior de  $A$  y existe  $x \approx s$  que no es cota superior de  $A$ .

c)  $s$  es una cota superior de  $A$  y existe  $a \approx s$  tal que  $a \in A$ .

DEMOSTRACIÓN: a)  $\Rightarrow$  b) Cualquier  $x \approx s$  que cumpla  $x < s$  no será cota superior de  $A$ .

b)  $\Rightarrow$  c) Necesariamente  $x < s$ . Si  $x$  no es cota superior, existe un  $a \in A$  tal que  $x < a$  y, como  $s$  sí que es cota superior, ha de ser  $x < a \leq s$ , luego  $a \approx x$ .

c)  $\Rightarrow$  a) Si existe una cota superior  $c < s$ , podemos tomarla estándar, pero entonces  $c < a$ , contradicción. ■

Hemos visto que una de las evidencias de la incompletitud de  $\mathbb{Q}$  era que en este cuerpo no existe la raíz cuadrada de 2. En cambio, ahora podemos probar que los números reales positivos tienen siempre una raíz  $k$ -ésima:

**Teorema 2.58** Si  $\alpha \geq 0$  es un número real y  $k \in \mathbb{N}$  es no nulo, existe un único número real  $\beta \geq 0$  tal que  $\beta^k = \alpha$ .

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer que  $\alpha$  y  $k$  son estándar, con lo que también lo será el conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^k \leq \alpha\}.$$

También podemos suponer que  $\alpha > 0$ , ya que en otro caso tomamos  $\beta = 0$ . Tenemos que  $A \neq \emptyset$ , pues  $0 \in A$ , y  $A$  está acotado superiormente, por ejemplo por cualquier número natural  $n > \alpha$ , ya que si  $x \geq n$ , entonces

$$x^k \geq n^k > n > \alpha,$$

luego  $x \notin A$ . Podemos tomar, pues el supremo  $\beta$  de  $A$ , que será un número estándar. Por el teorema anterior, existe un  $\beta' \in A$  tal que  $\beta' \approx \beta$  (y necesariamente  $\beta' \leq \beta$ ). Por otra parte, cualquier  $\beta'' > \beta$  tal que  $\beta'' \approx \beta$  cumple  $\beta'' \notin A$ , luego tenemos

$$\beta' \leq \beta \leq \beta'', \quad \beta'^k \leq \alpha \leq \beta''^k.$$

Por consiguiente,  $\beta'^k \leq \beta^k \leq \beta''^k$  y, por 2.23, sabemos que  $\beta'^k \approx \beta''^k$ , con lo que ha de ser  $\beta^k \approx \alpha$ . Como ambos son estándar,  $\beta^k = \alpha$ .

La unicidad es consecuencia de que si  $0 < \beta < \beta'$ , entonces  $\beta^k < \beta'^k$ . ■

**Definición 2.59** Si  $\alpha \geq 0$  es un número real, definimos la raíz  $k$ -ésima de  $\alpha$ , representada por  $\sqrt[k]{\alpha}$ , como el único número real  $\beta \geq 0$  que cumple  $\beta^k = \alpha$ .

Observemos que si  $k$  es impar y  $\alpha < 0$ , podemos definir  $\sqrt[k]{\alpha} = -\sqrt[k]{-\alpha}$  y se sigue cumpliendo que  $(\sqrt[k]{\alpha})^k = \alpha$  (y, en general,  $\sqrt[k]{\alpha}$  tiene el mismo signo que  $\alpha$ ). Por el contrario, si  $k$  es par,  $\beta^k \geq 0$  para todo  $\beta \in \mathbb{R}$ , por lo que los números negativos no tienen raíz  $k$ -ésima.

**Ejercicio:** Demostrar las propiedades básicas de las raíces (con radicandos positivos):

$$\sqrt[k]{\alpha\beta} = \sqrt[k]{\alpha}\sqrt[k]{\beta}, \quad (\sqrt[k]{\alpha})^n = \sqrt[k]{\alpha^n}, \quad \sqrt[k]{\sqrt[r]{\alpha}} = \sqrt[kr]{\alpha}.$$

**Ejemplo** Vamos a probar que

$$\lim_n \sqrt[n]{n} = 1.$$

En efecto, si llamamos  $x_n = \sqrt[n]{n} - 1$ , hemos de probar que

$$\lim_n x_n = 0.$$

Tenemos que

$$n = (1 + x_n)^n = 1 + nx_n + \frac{n(n-1)}{2}x_n^2 + \cdots + x_n^n \geq \frac{n(n-1)}{2}x_n^2.$$

Así pues,

$$0 \leq x_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

Si  $n$  es infinito, concluimos que  $x_n \approx 0$ . ■

El teorema 2.38 nos da que  $\sqrt{2}$  es un número irracional, y a partir de aquí es fácil probar que existen infinitos números irracionales:

**Teorema 2.60** *Entre dos números reales distintos hay al menos un número racional y un número irracional.*

DEMOSTRACIÓN: Sean  $\alpha < \beta$  dos números reales, que podemos suponer estándar. El teorema 2.51 nos da que existe un número racional  $r$  (que podemos tomar estándar) tal que  $\alpha < r < \beta$ . Por otra parte, si  $n \in \mathbb{N}$  es infinito, entonces

$$\alpha < r + \frac{\sqrt{2}}{n} < \beta,$$

y  $x = r + \sqrt{2}/n$  es irracional, ya que en caso contrario  $\sqrt{2} = (x - r)n \in \mathbb{Q}$ . ■

En particular, dado  $x \in \mathbb{R}$ , podemos aplicar el teorema anterior a  $x$  y  $x + h$ , donde  $h > 0$  es infinitesimal, para concluir que todo número real está infinitamente cerca de números racionales y de números irracionales. Hay un caso particular de aproximación por números reales por números racionales que tiene especial interés práctico:

**Expresión decimal de un número real** Para cada  $x \in \mathbb{R}$  y cada  $n \in \mathbb{N}$ , podemos considerar  $k_n = E[10^n x]$ , de modo que

$$\frac{k_n}{10^n} \leq x < \frac{k_n + 1}{10^n}.$$

Tenemos así un número entero  $k_n$ , unívocamente determinado, tal que el número racional  $k_n/10^n$  que aproxima a  $x$  con un error menor que  $1/10^n$ . Por ejemplo, es pura rutina comprobar que

$$\frac{14142}{10^4} \leq \sqrt{2} \leq \frac{14143}{10^4}$$

lo que se expresa más habitualmente en notación decimal:

$$1.4142 \leq \sqrt{2} \leq 1.4143.$$

Observemos que, en general,

$$\frac{10k_n}{10^{n+1}} \leq x < \frac{10k_n + 10}{10^{n+1}},$$

por lo que  $k_{n+1}$  será de la forma  $10k_n + c_n$ , donde  $0 \leq c_n \leq 9$  es un número natural. Esto significa que cada aproximación decimal de  $x$  se obtiene añadiendo una nueva cifra decimal a la anterior (pero sin modificar las cifras decimales anteriores). Así, por ejemplo, la siguiente aproximación decimal de  $\sqrt{2}$  es

$$1.41421 \leq \sqrt{2} < 1.41422.$$

Por último observamos que la sucesión  $\{k_n\}_{n \geq 0}$  determina completamente el número  $x$  ya que, suponiéndolo estándar y tomando  $n$  infinito, la relación

$$\frac{k_n}{10^n} \leq x < \frac{k_n + 1}{10^n}$$

implica que  $x \approx \frac{k_n}{10^n}$ , ya que la diferencia entre los dos extremos es  $1/10^n \approx 0$ . Por consiguiente:

$$x = \lim_n \frac{k_n}{10^n}.$$

Por esto podemos escribir

$$\sqrt{2} = 1.4142135 \dots$$

entendiendo que el miembro derecho, con sus puntos suspensivos, representa el límite de la sucesión de aproximaciones decimales de  $\sqrt{2}$ . ■

La completitud de  $\mathbb{R}$  puede expresarse en términos de la convergencia de las sucesiones de Cauchy. Otra forma equivalente utiliza sucesiones monótonas:

**Definición 2.61** Una sucesión  $\{x_n\}_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  es *monótona creciente* (resp. *decreciente*) si cuando  $m \leq n$  se cumple  $x_m \leq x_n$  (resp.  $x_n \leq x_m$ ). Diremos que una sucesión es *monótona* si es monótona creciente o monótona decreciente.

**Teorema 2.62** *Toda sucesión monótona y acotada de números reales es convergente.*

DEMOSTRACIÓN: Sea  $\{\alpha_n\}_{n \geq 0}$  una sucesión acotada de números reales, que podemos tomar estándar, y supongamos, por ejemplo, que es monótona creciente. Vamos a probar que es de Cauchy. En caso contrario, existirían  $m, n \in \mathbb{N}$  infinitos tales que  $\alpha_m \not\approx \alpha_n$ . Esto equivale a que  $^*\alpha_m \neq ^*\alpha_n$ . Pongamos que  $^*\alpha_m < ^*\alpha_n$ . Como son números estándar, existe un número real estándar  $^*\alpha_m < r < ^*\alpha_n$ . Esto implica que  $\alpha_m < r < \alpha_n$

Como existe un  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $r < \alpha_n$ , por transferencia existe un  $n_0 \in {}^\circ\mathbb{N}$  tal que  $r < \alpha_{n_0}$ . Ahora bien,  $m > n_0$  y, sin embargo,  $\alpha_m < \alpha_{n_0}$ , en contradicción con la monotonía de la sucesión. Así pues, la sucesión es de Cauchy y, por lo tanto, convergente. ■

**Ejercicio:** Probar que el límite de una sucesión monótona creciente (resp. decreciente) y acotada  $\{\alpha_n\}_{n \geq 0}$  es el supremo (resp. el ínfimo) del conjunto  $\{\alpha_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ .

Otra consecuencia de la completitud de  $\mathbb{R}$  es una caracterización, que veremos a continuación, de los subconjuntos de  $\mathbb{R}$  que más nos van a interesar: los intervalos.

**Definición 2.63** Si  $\alpha < \beta$  son dos números reales, definimos los *intervalos acotados* de extremos  $\alpha$  y  $\beta$  como

$$] \alpha, \beta[ = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha < x < \beta\}, \quad [\alpha, \beta] = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha \leq x \leq \beta\},$$

$$] \alpha, \beta] = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha < x \leq \beta\}, \quad [\alpha, \beta[ = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha \leq x < \beta\}.$$

Los *intervalos no acotados* de extremo  $\alpha$  son:

$$] \alpha, +\infty[ = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha < x\}, \quad [\alpha, +\infty[ = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha \leq x\},$$

$$]-\infty, \alpha[ = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \alpha\}, \quad ]-\infty, \alpha] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \alpha\}.$$

Consideraremos también como intervalo a  $]-\infty, +\infty[ = \mathbb{R}$ .

**Teorema 2.64** Un subconjunto  $I \subset \mathbb{R}$  es un intervalo si y sólo si cuando tres números reales cumplen  $\alpha < \beta < \gamma$  y  $\alpha, \gamma \in I$ , también  $\beta \in I$ .

**DEMOSTRACIÓN:** Es evidente que los intervalos cumplen esta propiedad. Sea ahora  $I \subset \mathbb{R}$  un conjunto que la cumpla y veamos que es un intervalo. Podemos suponer que  $I$  es estándar. Si  $I = \emptyset$ , entonces  $I = ]0, 0[$ , luego podemos suponer que existe un  $x \in I$ , que podemos tomar estándar.

Si  $I = \{x\}$ , entonces  $I = [x, x]$ , luego podemos suponer que  $I$  contiene otro punto además de  $x$ . No perdemos generalidad si suponemos que  $[x, x'] \subset I$ , donde  $x < x'$  son ambos estándar.

Si  $I = \mathbb{R}$ , también es, por definición, un intervalo, luego podemos suponer que existe un  $y \in \mathbb{R} \setminus I$  (también estándar). Vamos a suponer que  $x < x' < y$ . La alternativa es  $y < x < x'$ , en cuyo caso razonaríamos análogamente.

Fijamos  $k \in \mathbb{N}$  infinito y consideramos la sucesión  $a_i = x' + i/k$ . Tenemos que  $a_0 = x' \in I$ , mientras que  $a_{k^2} > y$ , luego  $a_{k^2} \notin I$ . Por consiguiente, tiene que haber un  $i$  tal que  $a_i \in I$ , pero  $a_{i+1} \notin I$ .

Observemos que  $a_i < y$  o, de lo contrario,  $x < y < a_i$  implicaría que  $y \in I$ , luego  $a_i$  es finito, luego podemos tomar  $\beta = {}^*a_i = {}^*a_{i+1}$ . Así,  $\beta \in {}^\circ\mathbb{R}$  está infinitamente cerca de puntos de  $I$  y de puntos de  $\mathbb{R} \setminus I$ .

Se cumple que  $x < x' \leq \beta$ . Veamos que

$$[x, \beta[ \subset I \subset ]-\infty, \beta].$$

Si no se da la primera inclusión, existe  $x < u < \beta$  estándar tal que  $u \notin I$ , pero entonces  $x < u < a_i$ , luego  $u \in I$ , contradicción. Si no se da la segunda inclusión, existe  $u > \beta$  estándar tal que  $u \in I$ , pero entonces  $x < a_{i+1} < u$ , luego  $a_{i+1} \in I$ , contradicción.

Si  $I = ]-\infty, \beta]$  o  $I = ]-\infty, \beta[$ , ya tenemos que  $I$  es un intervalo. En caso contrario, existe un  $z < x$  estándar tal que  $z \notin I$ . Razonando ahora con  $z$  y con  $x$  igual que antes hemos razonado con  $x'$  y con  $y$ , podemos construir un  $\alpha \in {}^\circ\mathbb{R}$  tal que  $\alpha \leq x < x' \leq \beta$  y de modo que  $\alpha$  tiene infinitamente cerca puntos de  $I$  y puntos de  $\mathbb{R} \setminus I$ . De aquí se sigue, a su vez, que

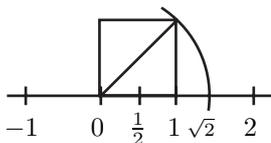
$$] \alpha, \beta[ \subset I \subset [\alpha, \beta].$$

En efecto, si existiera  $\alpha < u < \beta$  estándar tal que  $u \notin I$ , tomando un  $\alpha' \approx \alpha$  que sí que esté en  $I$ , tendríamos  $\alpha' < u < x'$ , luego  $u \in I$ , contradicción; y si existiera un  $u \in I$  estándar tal que  $u < \alpha$ , entonces tomando  $\alpha'' \approx \alpha$  que no esté en  $I$ , sería  $u < \alpha'' < x'$ , con lo que  $\alpha'' \in I$ , contradicción.

La doble inclusión que hemos obtenido implica que  $I$  es uno de los cuatro intervalos acotados de extremos  $\alpha$  y  $\beta$ . ■

La completitud de  $\mathbb{R}$  tiene una interpretación geométrica: la posibilidad de poner en correspondencia los números reales con los puntos de una recta:

- En principio, elegimos dos puntos a los que asignar arbitrariamente los números 0 y 1, de modo que la longitud del segmento de extremos 0 y 1 se convierte en la *unidad de medida*, o la *escala* de la representación.
- Cada número entero  $n$  se representa<sup>6</sup> a  $|n|$  unidades de distancia del 0, en la semirrecta que contiene al 1 si  $n > 0$  y en la opuesta si  $n < 0$ .
- Para representar un número racional  $m/n$ , dividimos la unidad en  $n$  partes iguales y lo situamos a una distancia del 0 igual a  $|m|$  de estas partes, en la semirrecta que corresponda a su signo. Se cumple así que la ordenación de los números racionales se corresponde con la ordenación geométrica de los puntos de la recta: si, como es habitual, hemos puesto el 1 a la derecha del 0, entonces un número racional es mayor cuanto más a la derecha está su punto correspondiente.



- Un punto  $P$  de la recta no tiene por qué tener asignado de este modo un número racional, pero divide a los números racionales en dos partes: los que están a su izquierda y los que están a su derecha. Estos dos subconjuntos  $A$  y  $B$  de  $\mathbb{Q}$  forman una sección (si entendemos que  $A$  contiene al

<sup>6</sup>SI el lector se pregunta dónde hay que poner los números infinitos, la respuesta es que en el mismo lugar donde pondría un número  $n$  en general, sin especificar cuál.

propio punto cuando éste es racional). De este modo, podemos asignar a  $P$  el supremo de  $A$ . Recíprocamente, a cada número real  $x$  le asignamos el único punto de la recta que está a la derecha de los números racionales menores que  $x$  y a la izquierda de los números racionales mayores que  $x$ .

## Capítulo III

# Cálculo diferencial de una variable

### 3.1 La gráfica de una función

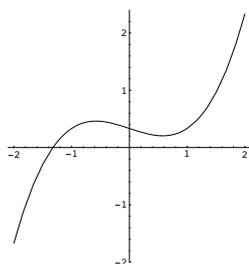
En este capítulo iniciaremos el estudio analítico de las funciones de una variable real, es decir, de funciones  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . En la mayoría de los casos, el dominio  $D$  de las funciones que estudiaremos será un intervalo o una unión de intervalos disjuntos.

Una forma de visualizar las funciones mínimamente razonables es a través de su gráfica:

**Definición 3.1** La *gráfica* de una función  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es el conjunto<sup>1</sup>

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in D, y = f(x)\}.$$

Puesto que  $\mathbb{R}$  puede representarse como una recta, tenemos que, a través de un sistema de ejes cartesianos,  $\mathbb{R}^2$  puede representarse como el conjunto de los puntos del plano, y  $\Gamma_f$  resulta ser una curva en el plano.



**Ejemplo** La figura muestra la gráfica de la función  $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = \frac{x^3 - x + 1}{3}.$$

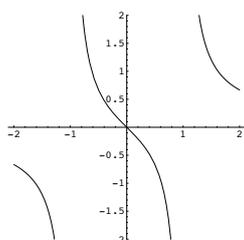
Podemos observar que, para valores pequeños de  $x$ , la función  $f$  toma valores negativos y es creciente. Toma el valor 0 en un número situado en el intervalo  $] -2, -1[$  y sigue creciendo hasta tomar un valor máximo en el intervalo  $] -1, 0[$ , luego

---

<sup>1</sup>En realidad, según la definición de función que hemos dado, se cumple que  $\Gamma_f = f$ , pero en la práctica podemos “olvidar” este hecho igual que podemos “olvidar” que los números reales son clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy de números racionales.

decrece hasta alcanzar un mínimo en el intervalo  $]0, 1[$  y, a partir de ese punto, vuelve a crecer.

Las técnicas analíticas que vamos a presentar aquí nos permitirán deducir estas características de  $f$  y otras muchas a partir de la propia expresión que la define, aunque no dispongamos de una representación gráfica. ■



**Ejemplo** Una función puede tener un aspecto sustancialmente diferente al que mostraba la función del ejemplo anterior. Por ejemplo, aquí tenemos la gráfica de la función  $g : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{x^2 - 1} & \text{si } x \neq \pm 1, \\ 0 & \text{si } x = \pm 1. \end{cases}$$

Vemos que esta función consta de “tres piezas” (cinco, en realidad, puesto que la gráfica también contiene a los puntos  $(-1, 0)$  y  $(1, 0)$ ). En otras palabras, lo que tenemos ahora es que, al contrario de lo que sucedía con la función  $f$  del ejemplo precedente, la gráfica de  $g$  no puede dibujarse “de un solo trazo”. En la sección siguiente expresaremos esta diferencia diciendo que  $f$  es continua en  $[-2, 2]$ , mientras que  $g$  es discontinua en los puntos  $\pm 1$ . ■

## 3.2 Funciones continuas

Vamos a plasmar formalmente la diferencia que hemos observado entre las funciones de los dos ejemplos de la sección anterior. Más concretamente, queremos definir la noción de continuidad de una función en un punto  $x$  de modo que garantice que la función no dará ningún “salto” en  $x$ , es decir, de modo que los puntos cercanos a  $x$  tengan sus imágenes cerca de  $f(x)$ . En principio, “cerca” es un término relativo, pero deja de serlo si lo precisamos como “infinitamente cerca”:

**Definición 3.2** Sea  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función estándar. Diremos que  $f$  es *continua* en un punto estándar  $x_0 \in D$  si cuando  $x \in D$  cumple  $x \approx x_0$ , entonces  $f(x) \approx f(x_0)$ . Diremos que  $f$  es *continua* en  $D$  si lo es en todos sus puntos.<sup>2</sup>

Notemos que si  $x = x_0$  se cumple trivialmente  $f(x) \approx f(x_0)$ , luego al aplicar la definición de continuidad podemos suponer siempre que  $x \neq x_0$ .

Vamos a discutir, según esta definición, los ejemplos de la sección precedente, incluso ligeramente generalizados:

<sup>2</sup>Recordemos que el principio de estandarización nos garantiza que una definición particularizada a datos estándar (en este caso una función estándar y un punto estándar) admite una única extensión a datos cualesquiera, que además es interna. (Véase la discusión tras la definición de convergencia 2.29. Así pues, la noción de continuidad es interna. En lo sucesivo no volveremos a hacer esta clase de observaciones, sino que el lector deberá tener presente que, para definir un concepto interno, basta hacerlo sobre conjuntos estándar y no importa que la definición sea externa.

**Ejemplo** La función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = \frac{x^3 - x + 1}{3}$$

es continua en  $\mathbb{R}$ .

En efecto, se trata de una función estándar y basta probar que es continua en cualquier punto  $x_0 \in \mathbb{R}$  estándar. Ahora bien, si  $x \approx x_0$ , las propiedades algebraicas de la proximidad infinita (recogidas en el teorema 2.22) nos dan que  $(x^3 - x + 1)/3 \approx (x_0^3 - x_0 + 1)/3$ , es decir, tenemos que  $f(x) \approx f(x_0)$ , luego  $f$  es continua en  $x_0$ . ■

**Ejemplo** La función  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{x^2 - 1} & \text{si } x \neq \pm 1, \\ 0 & \text{si } x = \pm 1, \end{cases}$$

es continua excepto en los puntos  $\pm 1$ .

En efecto, veamos que si  $x_0 \in \mathbb{R}$  es un punto estándar distinto de  $\pm 1$ , entonces  $g$  es continua en  $x_0$ . Para ello tomamos  $x \approx x_0$  y observamos que  $x^2 - 1 \approx x_0^2 - 1 \neq 0$ , luego ni  $x^2 - 1$  ni  $x_0^2 - 1$  son infinitesimales, luego sus inversos son finitos, luego el teorema 2.22 nos permite afirmar que

$$\frac{x}{x^2 - 1} \approx \frac{x_0}{x_0^2 - 1}.$$

Así pues,  $g(x) \approx g(x_0)$ .

En cambio, si  $x_0 = \pm 1$ , tomamos  $x \approx x_0$ ,  $x \neq x_0$  y observamos que, como antes,  $x^2 - 1 \approx x_0^2 - 1 = 0$ , luego  $x^2 - 1$  es un infinitésimo, luego  $1/(x^2 - 1)$  es infinito, y también ha de serlo  $g(x) = x/(x^2 - 1)$ . (Si fuera finito, despejando tendríamos que  $x = g(x)(x^2 - 1)$  sería infinitesimal, pero no lo es.) Así pues,  $g(x) \not\approx g(x_0) = 0$ .

Por lo tanto,  $g$  es discontinua en  $\pm 1$ . Más precisamente, hemos visto que  $g$  es infinita en los puntos infinitamente cercanos a  $\pm 1$ , tal y se ve en su gráfica. ■

**Ejemplo** La función  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  es continua en  $\mathbb{R}$ .

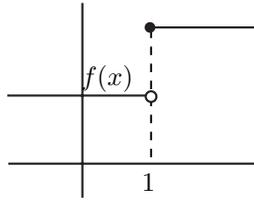
En efecto, tomamos un punto estándar  $x_0 \in \mathbb{R}$  y otro  $x \approx x_0$ . Es fácil ver que  $\sqrt[3]{x}$  es finito, con lo que podemos tomar  $y = \sqrt[3]{x} \approx \sqrt[3]{x_0}$ . Tenemos entonces que  $y^3 \approx x \approx x_0$ , luego  $y^3 = x_0$ , ya que ambos son estándar. Por consiguiente,  $\sqrt[3]{x_0} = y \approx \sqrt[3]{x}$ , es decir,  $f(x) \approx f(x_0)$ , como había que probar. ■

El ejemplo siguiente muestra que la continuidad de una función depende del dominio en que la consideremos definida, en el sentido de que, si una función es discontinua en un punto, puede suceder que, restringida a un dominio menor, pase a ser continua.

**Ejemplo** La función  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 1, \\ 2 & \text{si } x \geq 1, \end{cases}$$

es continua en todos los puntos de  $\mathbb{R}$  excepto en  $x_0 = 1$ . Sin embargo, su restricción al intervalo  $[1, +\infty[$  es continua en todo el intervalo, incluyendo al punto  $x_0 = 1$ .



En efecto, para probar que  $h$  es continua en todo punto  $x_0 \neq 1$ , podemos suponer que  $x_0$  es estándar. Si  $x_0 < 1$ , entonces, para todo  $x \approx x_0$ , se cumplirá también  $x < 1$ , luego  $h(x) = 1 = h(x_0)$ . Si  $x_0 > 1$  razonamos igualmente. Vemos que  $h$  es continua porque las variaciones infinitesimales de  $x_0$  no producen ninguna variación en  $h(x)$ .

En cambio, para  $x_0 = 1$ , consideramos un  $x \approx x_0$  que cumpla  $x < x_0$ . Entonces  $h(x) = 1 \not\approx 2 = h(x_0)$ . Vemos que  $h$  es discontinua en  $x_0 = 1$  porque basta un desplazamiento infinitesimal hacia la izquierda desde dicho punto para que el valor de  $h(x)$  varíe apreciablemente (es decir, no infinitesimalmente).

Sin embargo, cuando restringimos la función al intervalo  $D = [1, +\infty[$  y tomamos  $x_0 = 1$ , todo  $x \in D$  que cumpla  $x \approx x_0$  ha de ser  $x \geq x_0$ , con lo cual  $h(x) = h(x_0)$  y se cumple la definición de continuidad. ■

Un caso extremo en el que la continuidad es trivial se da cuando no es posible incrementar infinitesimalmente la variable sin salirse del dominio de la función:

**Definición 3.3** Si  $D \subset \mathbb{R}$  es un conjunto estándar y  $x_0 \in D$  es un punto estándar, diremos que  $x_0$  es un *punto aislado* de  $D$  si  $h(x_0) \cap D = \{x_0\}$ , es decir, si  $D$  no contiene puntos infinitamente próximos a  $x_0$ , salvo el propio  $x_0$ . En caso contrario se dice que  $x_0$  es un *punto de acumulación* de  $D$ .

Es evidente que una función  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  es continua en todos los puntos aislados de  $D$ .

**Ejercicio:** Probar que todos los puntos de  $\mathbb{Z}$  son aislados. Por lo tanto, toda función  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  es continua.

También es evidente que si  $x_0 \in D \subset E \subset \mathbb{R}$  y  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  es continua en  $x_0$ , entonces la restricción  $f|_D : D \rightarrow \mathbb{R}$  también es continua en  $x_0$ , pero el recíproco no es cierto, tal y como hemos visto en el último ejemplo.

Otra consecuencia obvia de la definición de continuidad es que ésta depende únicamente del comportamiento de la función sobre el halo del punto:

**Teorema 3.4** Sean  $f, g : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones estándar y sea  $x_0 \in D$  un punto estándar tal que<sup>3</sup>  $f|_{h(x_0) \cap D} = g|_{h(x_0) \cap D}$ . Entonces  $f$  es continua en  $x_0$  si y sólo si lo es  $g$ .

<sup>3</sup>Notemos que, aunque el halo  $h(x_0)$  sea, habitualmente, un conjunto externo, la igualdad  $f|_{h(x_0) \cap D} = g|_{h(x_0) \cap D}$  tiene sentido, pues significa que  $f(x) = g(x)$  para todo  $x \in D$  tal que  $x \approx x_0$ .

A continuación vamos a dar teoremas que garanticen que las funciones usuales son continuas (salvo en casos obvios). Para ello conviene observar que podemos definir de forma natural (punto a punto) operaciones sobre las funciones definidas en un mismo dominio:

**Definición 3.5** Si  $D \subset \mathbb{R}$ ,  $D \neq \emptyset$ , llamaremos  $F(D) = \mathbb{R}^D$  al conjunto de todas las funciones  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Notemos que podemos definir una suma y un producto en  $F(D)$  mediante

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (fg)(x) = f(x)g(x).$$

En inmediato comprobar que, con estas operaciones,  $F(D)$  tiene estructura de anillo. Más aún, podemos identificar los números reales con las funciones constantes en  $D$ , por lo que también tenemos definido el producto de un número por una función.

También es costumbre escribir  $f \leq g$  para indicar que  $f(x) \leq g(x)$  para todo  $x \in D$ . No obstante, hemos de tener presente que esta relación es reflexiva, simétrica y transitiva, pero no cumple que, dadas dos funciones  $f, g \in F(D)$ , se dé necesariamente una de las desigualdades  $f \leq g$  o  $g \leq f$ .

También es frecuente nombrar a una función por la expresión que la define. Por ejemplo, en lugar de decir que la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x^3$  cumple que  $f \in F(\mathbb{R})$ , escribiremos simplemente  $x^3 \in F(\mathbb{R})$ . Aquí hay que entender que  $x^3$  no es el cubo de ningún número  $x \in \mathbb{R}$ , sino la función  $f$  que acabamos de definir.

Las funciones de la forma  $a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \in F(\mathbb{R})$ , donde  $a_i \in \mathbb{R}$ , se llaman *polinomios*,<sup>4</sup> y forman claramente un subanillo  $\mathbb{R}[x] \subset F(\mathbb{R})$ .

**Teorema 3.6** Si dos funciones  $f, g : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  son continuas en un punto  $x_0 \in D$ , también lo son  $f + g$  y  $fg$ .

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer que todos los datos son estándar. Si  $x \in D$  cumple  $x \approx x_0$ , entonces

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \approx f(x_0) + g(x_0) = (f + g)(x_0),$$

e igualmente con el producto (en cuyo caso, para que se conserven las aproximaciones, usamos que  $f(x_0)$  y  $g(x_0)$  son finitos porque son estándar.) ■

**Definición 3.7** Si  $D \subset \mathbb{R}$  es un conjunto no vacío, definimos  $C(D) \subset F(D)$  como el conjunto de las funciones continuas en  $D$ .

---

<sup>4</sup>En realidad habría que distinguir entre un polinomio como objeto algebraico y la función polinómica que define, pero no necesitaremos entrar en esta sutileza, principalmente porque, sobre un dominio  $D \subset \mathbb{R}$  infinito, dos polinomios son iguales si y sólo si definen la misma función polinómica.

Es claro que  $C(D)$  es un subanillo de  $F(D)$  que contiene a su vez como subanillo al anillo  $\mathbb{R}[x]$  de los polinomios (ya que contiene a las constantes y a la identidad  $f(x) = x$ ).

Para que una función  $f \in F(D)$  tenga inversa  $1/f$ , es necesario y suficiente que  $f$  no tome el valor 0 en  $D$ . En tal caso, si  $f$  es continua, también lo es  $1/f$ :

**Teorema 3.8** *Si  $D \subset \mathbb{R}$  no es vacío y  $f \in C(D)$  no toma el valor 0, entonces  $1/f \in C(D)$ .*

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer todos los datos estándar. Tomamos  $x_0 \in D$  estándar. Sea  $x \in D$  tal que  $x \approx x_0$ . Entonces  $f(x) \approx f(x_0)$ . Como  $x_0$  es estándar,  $f(x_0)$  es estándar y no nulo, luego  $f(x)$  y  $f(x_0)$  no son infinitesimales, luego  $1/f(x) \approx 1/f(x_0)$ , luego  $1/f$  es continua en  $x_0$ , luego es continua en  $D$ . ■

**Ejemplo** *La función*

$$\frac{x^3 + x - 3}{x^2 - 1}$$

es continua en  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ .

En efecto, el numerador y el denominador son funciones continuas en  $\mathbb{R}$ , porque son polinomios. En particular lo son en  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ , y en este conjunto el denominador no se anula, luego  $1/(x^2 - 1)$  es continua en ese mismo conjunto, luego la función dada es continua por ser producto de dos funciones continuas. ■

**Teorema 3.9** *Si  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow E \subset \mathbb{R}$ ,  $g : E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in D$ ,  $f$  es continua en  $x_0$  y  $g$  es continua en  $f(x_0)$ , entonces  $f \circ g$  es continua en  $x_0$ .*

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer que todos los datos son estándar. Así, si  $x \in D$  cumple  $x \approx x_0$ , tenemos que  $f(x) \approx f(x_0)$  y, por consiguiente,

$$(f \circ g)(x) = g(f(x)) \approx g(f(x_0)) = (f \circ g)(x_0),$$

lo que prueba la continuidad de  $f \circ g$  en  $x_0$ . ■

En particular, si  $f$  es continua en  $D$  y  $g$  es continua en  $E$ , tenemos que  $f \circ g$  es continua en  $D$ .

**Ejercicio:** Probar que la función valor absoluto es continua en  $\mathbb{R}$ , mientras que la función parte entera  $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es continua en  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  y discontinua en  $\mathbb{Z}$ .

El ejemplo siguiente muestra la necesidad de tener cierta cautela a la hora de identificar la noción general de “función” con la idea intuitiva de “una curva que tal vez dé algunos saltos de vez en cuando”.

**Ejemplo** La función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

es discontinua en todos los números reales.

En efecto, basta probar que lo es en todo  $x_0 \in \mathbb{R}$  estándar. Si  $x_0$  es racional, podemos tomar  $x \approx x_0$  irracional, y viceversa. De este modo  $f(x) \not\approx f(x_0)$ , puesto que uno es 1 y el otro 0, luego  $f$  es discontinua en  $x_0$ . ■

Notemos que no es posible representar gráficamente la función de este ejemplo. Su gráfica tendría el aspecto de dos líneas horizontales paralelas, una a la altura del 0 y otra a la altura del 1, pero esta imagen no refleja las características de  $f$ . Por ejemplo, sería indistinguible de la representación gráfica de la función  $1 - f$ .

Quizá el lector piense que el carácter patológico del ejemplo anterior se debe precisamente al hecho de que se trata de una función discontinua. Veamos ahora un ejemplo de función que es continua en muchos puntos y no por ello es menos patológica:

**Ejemplo** La función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1/n & \text{si } x \in \mathbb{Q} \text{ y } n = \min\{m \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid mx \in \mathbb{Z}\}, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

es continua en  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  y discontinua en  $\mathbb{Q}$ . (En otras palabras, si  $x \in \mathbb{Q}$ , hemos definido  $f(x)$  como el menor denominador posible de una fracción  $x = m/n$ .)

Si  $x_0 \in \mathbb{Q}$  es estándar, entonces la fracción  $x = m/n$  con  $n$  mínimo tiene numerador y denominador estándar, luego  $f(x) = 1/n \not\approx 0$ , mientras que, si tomamos un irracional  $x \approx x_0$ , tenemos que  $f(x) = 0 \not\approx f(x_0)$ , luego  $f$  es discontinua en  $\mathbb{Q}$ .

Por otro lado, si  $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  es estándar y  $x \approx x_0$ , o bien  $x$  es irracional, en cuyo caso  $f(x) = 0 = f(x_0)$ , o bien  $x = m/n$  con  $n$  mínimo, pero  $n$  ha de ser infinito, ya que, en caso contrario,  $m = xn$  sería también finito y  $x$  sería estándar, pero entonces  $x = x_0$  sería irracional. Así pues, llegamos a que  $f(x) = 1/n \approx 0 = f(x_0)$ . Esto prueba que  $f$  es continua en  $x_0$ . ■

Demostremos ahora algunas propiedades importantes de las funciones continuas:

**Teorema 3.10 (Primer teorema de Weierstrass)** Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua, entonces alcanza un valor máximo y un valor mínimo en  $[a, b]$ .

DEMOSTRACIÓN: Lo que hemos de probar es que existen puntos  $x, y \in [a, b]$  tales que, para todo  $z \in [a, b]$  se cumple que  $f(x) \leq f(z) \leq f(y)$ . Podemos suponer que todos los datos son estándar.

Por el Principio de Idealización II, existe un conjunto finito  $F \subset [a, b]$  que contiene a todos los elementos estándar de  $[a, b]$ . Como  $F$  es finito, existe un  $r \in F$  donde  $f$  toma su valor máximo (esto es el teorema 1.21). Tomemos la parte estándar<sup>5</sup>  $y = {}^*r \in [a, b]$ . Vamos a probar que  $y$  cumple lo pedido.

En caso contrario, existiría un  $z \in [a, b]$  estándar, tal que  $f(z) > f(y)$ . Ahora bien, como  $y \approx r$  y  $f$  es continua en  $y$ , se cumple que  $f(y) \approx f(r)$ , luego  $f(z) > f(r)$ , pero esto es absurdo, ya que  $z \in F$  y  $f(r)$  es el mayor valor que  $f$  toma en el conjunto  $F$ . Igualmente se razona que  $f$  alcanza un valor mínimo. ■

Como ya hemos señalado en la prueba, el teorema anterior es falso en general para funciones definidas sobre intervalos que no sean de la forma  $[a, b]$ . Por ejemplo, la función  $f(x) = x$  es continua en el intervalo  $[0, 1[$  y no alcanza un valor máximo: dado cualquier  $x \in [0, 1[$ , existe otro punto (cualquiera que cumpla  $x < y < 1$ ) donde  $f$  toma un valor mayor. En este caso, todavía podemos decir que  $f$  tiene supremo en  $[0, 1[$ , en el sentido de que  $s = 1$  es el supremo del conjunto de los valores que  $f$  toma en el intervalo; pero, en cambio, la función  $1/x$ , que es continua en  $]0, 1]$ , no sólo no alcanza un valor máximo, sino que ni siquiera tiene supremo.

**Teorema 3.11 (Segundo teorema de Weierstrass)** *Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua, entonces toma todos los valores comprendidos entre  $f(a)$  y  $f(b)$ .*

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer que todos los datos son estándar. Si  $f(a) = f(b)$  no hay nada que probar. Supongamos que  $f(a) < f(b)$ . El caso contrario es análogo. Tomamos un  $\alpha$  estándar tal que  $f(a) < \alpha < f(b)$  y hemos de probar que existe un  $c \in [a, b]$  tal que  $f(c) = \alpha$ .

Fijemos  $n \in \mathbb{N}$  infinito y consideremos la sucesión  $x_i = a + i/n$ . Como  $x_{n^2} > b$ , existe un  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $x_k \leq b$  y  $x_{k+1} > b$ , luego  $x_k \approx b$ , luego  $f(x_k) \approx f(b) > \alpha$ , luego  $f(x_k) > \alpha$ .

Como  $f(x_0) = f(a) < \alpha$ , existe un  $i < k$  tal que  $f(x_i) < \alpha \leq f(x_{i+1})$ . Sea  $c = {}^*x_i = {}^*x_{i+1} \in [a, b]$ . Puesto que  $f$  es continua en  $c$ , se cumple que  $f(c) \approx f(x_i) \approx f(x_{i+1})$ , luego  $f(c) \approx \alpha$  y, como ambos son estándar,  $f(c) = \alpha$ . ■

Este teorema es geoméricamente evidente, y la técnica de demostración también: para encontrar el punto donde  $f$  toma el valor  $\alpha$ , nos vamos moviendo desde  $a$  hasta  $b$  a pasitos infinitesimales y esperamos el momento (que llegará tarde o temprano) en que  $f$  pase de ser  $< \alpha$  a ser  $\geq \alpha$ . El punto  $c$  que buscamos ha de estar infinitamente cerca del último paso que hemos dado.

<sup>5</sup>En este punto es crucial que el dominio de  $f$  es un intervalo de la forma  $[a, b]$ . (No serviría cualquier otro tipo de intervalo.) Concretamente, ahora usamos que si se cumple  $x \in [a, b]$ , entonces existe  ${}^*x \in [a, b]$ . Esto es evidente, pues si, por ejemplo, fuera  ${}^*x > b$ , al ser  ${}^*x$  y  $b$  estándar, tendría que ser  $x > b$ . Esta propiedad de los intervalos  $[a, b]$  se llama *compacidad*. El teorema es válido para funciones continuas definidas sobre cualquier conjunto compacto en este sentido.

**Ejercicio:** Dar un ejemplo de función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  que cumpla la propiedad del teorema anterior pero que sea discontinua.

Una consecuencia del último teorema es que si una función continua no toma dos veces el mismo valor, es porque siempre crece o porque siempre decrece:

**Definición 3.12** Una función  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es *monótona creciente* (resp. *monótona decreciente*) si cuando  $x, y \in D$  cumplen  $x \leq y$  entonces  $f(x) \leq f(y)$  (resp.  $f(y) \leq f(x)$ ). Si esto se cumple con desigualdades estrictas diremos que  $f$  es monótona creciente (o decreciente) estricta. Diremos que  $f$  es *monótona* si es monótona creciente o monótona decreciente.

**Teorema 3.13** Una función continua e inyectiva  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es monótona.

DEMOSTRACIÓN: Como es inyectiva, no puede ser  $f(a) = f(b)$ . Supongamos que  $f(a) < f(b)$  y veamos que  $f$  es monótona creciente. Igualmente se probaría que es decreciente si se diera la desigualdad contraria.

Si  $a < c < b$ , ha de ser  $f(a) < f(c) < f(b)$ , ya que si, por ejemplo, se diera el caso  $f(c) < f(a)$ , el segundo teorema de Weierstrass aplicado al intervalo  $[c, b]$  implicaría la existencia de un  $d \in ]c, b[$  tal que  $f(a) = f(c)$ , y  $f$  no sería inyectiva.

Tomemos ahora números  $a \leq x < y \leq b$ . Si fuera  $f(a) < f(y) < f(x) < f(b)$ , el teorema de Weierstrass aplicado al intervalo  $[y, b]$  nos daría un  $z \in [y, b]$  tal que  $f(z) = f(x)$ , luego  $f$  no sería inyectiva. Así pues, ha de ser  $f(x) < f(y)$ , con lo que  $f$  es monótona creciente. ■

Terminamos con una última propiedad de las funciones continuas:

**Teorema 3.14** Sean  $f, g : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones continuas en un intervalo  $I$  (que no se reduzca a un punto) y supongamos que ambas coinciden en  $\mathbb{Q} \cap I$ . Entonces son iguales.

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer que las funciones son estándar. Dado  $x \in I$  estándar, es claro que existe un  $x' \in \mathbb{Q} \cap I$  tal que  $x' \approx x$ . Entonces  $f(x) \approx f(x') = g(x') \approx g(x)$  y, como ambos son estándar,  $f(x) = g(x)$ . Esto prueba que  $f$  y  $g$  coinciden en  $I$ . ■

**Ejercicio:** Si  $D \subset E \subset \mathbb{R}$  son conjuntos estándar, se dice que  $D$  es *denso* en  $E$  si todo punto estándar de  $E$  está infinitamente cerca de un punto de  $D$ . Demostrar que si dos funciones continuas en  $E$  coinciden en un subconjunto denso, entonces son iguales.

### 3.3 Funciones derivables

Antes de entrar en el concepto que nos va a ocupar en esta sección (la derivabilidad de funciones) vamos a ocuparnos de una cuestión técnica: hemos visto que la continuidad de una función en un punto (estándar)  $x$  depende en gran medida del dominio de la función, pues, según en qué dominio la consideremos, éste podrá contener más o menos puntos infinitamente próximos a  $x$ . En el caso

de la derivabilidad vamos a exigir que el dominio de la función contenga a todos los puntos infinitamente próximos a  $x$ :

**Definición 3.15** Un conjunto estándar  $D \subset \mathbb{R}$  es un *entorno* de un punto estándar  $x_0 \in D$  si  $h(x_0) \subset D$ . También diremos que  $x_0$  es un *punto interior* de  $D$ . Diremos que  $D$  es *abierto* si es entorno de todos sus puntos.

**Ejercicio:** Demostrar que los intervalos  $]\alpha, \beta[$ ,  $]\alpha, +\infty[$ ,  $]-\infty, \beta[$  y  $]-\infty, +\infty[$ , son abiertos, mientras que cualquier otro no lo es.

El concepto de derivada que ahora vamos a introducir mide la velocidad a la que varía una función cuando varía su variable. Tal vez el caso más típico sea el propio concepto de velocidad. Si  $e(t)$  representa el espacio que ha recorrido un móvil hasta el instante  $t$ , la diferencia  $e(t+h) - e(t)$  es el espacio que recorrerá en los próximos  $h$  segundos a partir de  $t$ , (o el que ha recorrido en los últimos  $h$  segundos, con signo negativo, si  $h < 0$ ). El cociente

$$\frac{e(t+h) - e(t)}{h}$$

es entonces una aproximación a la velocidad del móvil en los próximos  $h$  segundos (o en los últimos  $h$  segundos si  $h < 0$ , donde al dividir hemos corregido el signo negativo del numerador).

Decimos que es una aproximación porque si obtenemos, por ejemplo, 10 m/s, esto no significa que, durante el tiempo  $h$ , el móvil se haya movido realmente a 10 m/s. Podría ser que se hubiera movido mucho más deprisa durante los primeros instantes y mucho más despacio en los últimos, de modo que los 10 m/s no son más que la velocidad media que ha llevado en el intervalo en cuestión.

Cuando menor sea el valor de  $h$ , esta velocidad media se parecerá más a la velocidad real a la que se movía en el instante  $t$ . El mayor parecido posible lo encontraremos cuando consideremos un incremento de tiempo  $h$  infinitesimal:

**Definición 3.16** Sea  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función estándar y sea  $x \in D$  un punto interior estándar. Diremos que  $f$  es *derivable* en  $x$  si existe un número estándar  $f'(x)$  tal que, para todo  $h \approx 0$ ,  $h \neq 0$ , se cumple

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \approx f'(x).$$

El número  $f'(x)$  (obviamente único) se llama *derivada* de  $f$  en el punto  $x$ .

Si  $D$  es abierto y  $f$  es derivable en todos los puntos de  $D$ , entonces tenemos definida la *función derivada*  $f' : D \rightarrow \mathbb{R}$ .

En estos términos, si  $e(t)$  representa el espacio recorrido por un móvil hasta un instante  $t$ , su derivada  $e'(t)$  representa la velocidad del móvil en cada instante  $t$ . En un ejemplo como éste, es razonable suponer que la función  $e(t)$  será derivable, pero, en general, debemos tener presente que una función dada puede tener o no tener derivada en un punto dado.

Como en el caso de la continuidad, es inmediato que la derivabilidad de una función estándar en un punto estándar depende únicamente de los valores que toma la función sobre el halo del punto. Sin embargo, como exigimos que dicho halo esté contenido en el dominio de la función, resulta que la derivabilidad en un punto no depende de que consideremos un dominio mayor o menor.

**Ejemplo** La función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x^2$  es derivable en  $\mathbb{R}$ , y su derivada es  $f'(x) = 2x$ .

En efecto, basta probar que existe la derivada en un punto estándar  $x \in \mathbb{R}$  arbitrario. Si  $h \approx 0$  es no nulo, entonces

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = 2x + h \approx 2x,$$

luego<sup>6</sup>  $f'(x) = 2x$ . ■

La derivabilidad es una propiedad más fuerte que la continuidad:

**Teorema 3.17** Si una función  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es derivable en un punto  $x_0 \in D$ , entonces es continua en  $x_0$ .

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer que todos los datos son estándar. Tomemos  $x \approx x_0$ ,  $x \neq x_0$ , y llamemos  $h = x - x_0$ . Por la definición de derivada tenemos que

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{h} \approx f'(x_0),$$

luego  $f(x) - f(x_0) \approx hf'(x_0) \approx 0$ , luego  $f(x) \approx f(x_0)$ . Esto significa que  $f$  es continua en  $x_0$ . ■

**Interpretación geométrica de la derivada** Sea  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función estándar derivable en un punto estándar  $x_0 \in D$ . Consideremos la gráfica de  $f$ :

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in D, y = f(x)\}.$$

Llamemos  $m = f'(x_0)$  y consideremos la función  $t(x) = x_0 + m(x - x_0)$ , cuya gráfica es la recta que pasa por el punto  $(x_0, f(x_0))$  con pendiente  $m$ .

Fijado un número real  $r > 0$ , la *homotecia* de radio  $r$  y centro  $(x_0, y_0)$  es la aplicación  $H_r : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$H_r(u, v) = (x_0, y_0) + r(u - x_0, v - y_0).$$

---

<sup>6</sup>Una de las mayores críticas que recibía el cálculo diferencial en sus inicios era el hecho de que los matemáticos tomaban cantidades infinitesimales  $h$  que consideraban no nulas al aceptarlas como denominadores válidos de los cocientes que definen a la derivadas, pero que, al final del cálculo, las eliminaban considerándolas nulas, como nosotros acabamos de eliminar la  $h$  de la expresión  $2x+h$ . Observemos que nuestra definición de derivada justifica totalmente estos hechos.

Geoméricamente se puede calcular así: trazamos la recta que une  $(x_0, y_0)$  con  $(u, v)$  y movemos  $(u, v)$  por dicha recta hasta que su distancia a  $(x_0, y_0)$  se multiplique por  $r$ . Si  $r > 1$  estamos aplicando al plano una “lupa” de  $r$  aumentos que deja fijo al punto  $(x_0, y_0)$ . Es claro que  $H_r$  también deja invariantes a las rectas que pasan por  $(x_0, y_0)$ .

Vamos a considerar, concretamente, una homotecia de centro  $(x_0, f(x_0))$  y radio infinito  $r$ . Al aplicársela a la gráfica de  $t$  obtenemos nuevamente la gráfica de  $t$ , pues es una recta que pasa por el centro de la homotecia.

Veamos qué obtenemos cuando se la aplicamos a la gráfica  $\Gamma_f$ . Obviamente, llegamos al conjunto

$$r\Gamma_f = \{(x_0 + r(u - x_0), f(x_0) + r(f(u) - f(x_0))) \in \mathbb{R}^2 \mid u \in D\}.$$

Tomemos un par estándar  $(x, y)$  que esté infinitamente próximo a un punto  $(x', y') \in r\Gamma_f$  (en el sentido de que  $x \approx x'$ ,  $y \approx y'$ ). Entonces

$$x \approx x' = x_0 + r(u - x_0),$$

para cierto  $u \in D$ , que cumplirá

$$u \approx x_0 + \frac{x - x_0}{r} = x_0 + h,$$

donde  $h$  es infinitesimal. Como  $f$  es continua en  $x_0$ , tenemos que

$$y \approx y' = f(x_0) + r(f(u) - f(x_0)) \approx f(x_0) + r(f(x_0 + h) - f(x_0))$$

Así pues,

$$y \approx f(x_0) + \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}(x - x_0) \approx f(x_0) + m(x - x_0) = t(x),$$

luego  $y = t(x)$ .

Hemos probado que los puntos finitos de  $r\Gamma_f$  están infinitamente cerca de los puntos estándar de la recta  $t(x)$ . Recíprocamente, si  $x \in \mathbb{R}$  es cualquier punto estándar, una comprobación análoga muestra que el punto  $(x, t(x))$  de la recta  $t(x)$  está infinitamente cerca del punto de  $r\Gamma_f$  determinado por el parámetro  $u \in D$  que cumple

$$x = x_0 + r(u - x_0).$$

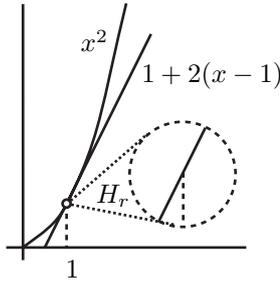
(Se cumple que  $u \in D$  porque  $u \approx x_0 \in D$  y  $D$  es abierto.) En definitiva:

*Cuando ampliamos infinitamente la gráfica de  $f$  alrededor del punto  $(x_0, f(x_0))$ , ésta se convierte en una curva infinitamente próxima a la recta*

$$y = x_0 + f'(x_0)(x - x_0).$$

*Esta recta recibe el nombre de recta tangente a la gráfica de  $f$  en el punto  $(x_0, f(x_0))$ .*

El punto crucial es que decir que una recta se parece a la gráfica de  $f$  alrededor de  $x_0$  en el sentido de que, para puntos infinitamente próximos, la diferencia es infinitesimal, es no decir nada. Eso lo cumplen todas las rectas (estándar) que pasan por  $(x_0, f(x_0))$ . (En efecto: si  $g(x_0) = f(x_0)$ , por la mera continuidad, cuando  $x \approx x_0$ , se cumple que  $g(x) \approx f(x_0) \approx f(x)$ ). Lo que distingue a la recta tangente de las demás rectas es que la diferencia entre  $f(x)$  y  $t(x)$  sigue siendo inapreciable (infinitesimal) cuando aplicamos una homotecia que hace apreciable (es decir, finita, pero no infinitesimal) la diferencia entre  $x$  y  $x_0$ .



La figura muestra la gráfica de  $f(x) = x^2$  y su recta tangente para  $x = 1$ , que, según hemos calculado, tiene pendiente  $f'(1) = 2$ . Podemos ver el parecido entre ambas para puntos cercanos a  $x = 1$ . Esto sólo significa que, para puntos a una distancia apreciable, pero pequeña, de  $x_0$ , la diferencia es apreciable, pero pequeña. Lo que hemos probado es que si ampliamos infinitamente la figura, la diferencia entre ambas seguirá siendo inapreciable.

En la práctica, una homotecia de radio suficientemente grande provoca el mismo efecto sobre una curva derivable. Por ejemplo, cuando miramos hacia el mar, el horizonte es un arco de circunferencia que resulta indistinguible de una línea recta.

**Ejercicio:** Definimos el halo de  $r\Gamma_f$  como el conjunto de todos los puntos de  $\mathbb{R}^2$  infinitamente próximos a puntos de  $r\Gamma_f$ . Probar que la recta tangente es la estandarización del halo de  $r\Gamma_f$ .

Esta interpretación geométrica está estrechamente relacionada con la interpretación de la derivada como incremento instantáneo. Por ejemplo, si  $e(t) = t^2$  es la posición que ocupa un móvil que se desplaza sobre una recta, sabemos que su velocidad es  $v(t) = 2t$ , lo que significa que está acelerando de forma continua, puesto que su velocidad es cada vez mayor. Si en el instante  $t = 1$  dejara de acelerar, a partir de ese momento su posición ya no sería  $t^2$ , sino que pasaría a moverse a velocidad constante  $v = 2$  y su posición en cada instante vendría dada por la recta tangente  $e(t) = 1 + 2(t - 1)$ . Podemos decir que la recta tangente en un punto  $x$  representa lo que sería la gráfica de la función si, desde el punto  $x$ , mantuviera constante su tasa de crecimiento. ■

Nos ocupamos ahora del cálculo explícito de derivadas:

**Teorema 3.18** Consideremos dos funciones  $f, g : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y un punto interior  $x \in D$ . Entonces:

- a) Si  $f$  es constante, entonces es derivable y  $f'(x) = 0$ .
- b) Si  $f$  y  $g$  son derivables en  $x$ , también lo son  $f + g$  y  $fg$ , y

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x), \quad (fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

c) Si  $f$  es derivable en  $x$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$ , entonces  $\alpha f$  también es derivable en  $x$  y  $(\alpha f)'(x) = \alpha f'(x)$ .

d) Si  $f$  y  $g$  son derivables en  $x$  y  $g$  no se anula en  $D$ , entonces  $f/g$  es derivable en  $x$  y

$$(f/g)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

DEMOSTRACIÓN: Veremos sólo el caso del producto y del cociente. Podemos suponer todos los datos estándar. Para derivar  $fg$  tomamos  $h \approx 0$  no nulo y calculamos

$$\begin{aligned} & \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x)}{h} + \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h} \\ &= f(x+h) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &\approx f(x)g'(x) + g(x)f'(x), \end{aligned}$$

donde hemos usado que  $f$  es continua en  $x$ .

Para el cociente tenemos

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} = \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)} \\ &= \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)} \\ &= \frac{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x) - f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}{g(x+h)g(x)} \approx \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}. \end{aligned}$$

■

**Ejercicio:** Probar inductivamente que si, para  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , la función  $f(x) = x^n$  es derivable en  $\mathbb{R}$  y  $f'(x) = nx^{n-1}$ . Generalizar la fórmula para  $n \in \mathbb{Z}$  y  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

**Teorema 3.19 (Regla de la cadena)** Consideremos dos funciones

$$f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow E \subset \mathbb{R}, \quad g : E \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Si  $f$  es derivable en un punto  $x$  y  $g$  es derivable en  $f(x)$ , entonces  $(f \circ g)$  es derivable en  $x$ , y  $(f \circ g)'(x) = g'(f(x))f'(x)$ .

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer que todos los datos son estándar. Sea  $h \approx 0$  no nulo. Entonces

$$\frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} = \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{f(x+h) - f(x)} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\approx g'(f(x))f'(x).$$

Aquí hemos supuesto que  $f(x+h) - f(x) \neq 0$ , pero si  $f(x+h) - f(x) = 0$ , entonces el miembro izquierdo vale 0 y, por otra parte,

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0,$$

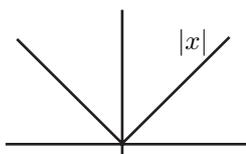
luego  $f'(x) = 0$  y sigue siendo cierto que

$$\frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} \approx g'(f(x))f'(x).$$

esto prueba la derivabilidad de la función compuesta. ■

Veamos ahora algunos ejemplos de funciones no derivables:

**Ejemplo** La función valor absoluto es derivable en  $\mathbb{R}$  excepto en 0.



En efecto, la función valor absoluto viene dada por

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0, \\ x & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Dado un número real estándar  $x$ , si  $x < 0$  entonces la función valor absoluto coincide en todo el halo  $h(x)$  con la función  $-x$ , que es derivable y su derivada es  $-1$ . Igualmente, si  $x > 0$  la función valor absoluto coincide en  $h(x)$  con la función  $x$ , que tiene derivada 1, luego el valor absoluto es derivable en todo  $x$  no nulo. Para  $x = 0$  tomamos un infinitésimo  $h \neq 0$  y calculamos

$$\frac{|h| - |0|}{h} = \frac{|h|}{h}.$$

Observamos que este cociente toma el valor 1 o  $-1$  según el signo de  $h$ , luego no hay un único número estándar que esté infinitamente próximo a todos los valores que puede tomar este cociente. Por consiguiente, no existe la derivada en  $x = 0$ . Hemos obtenido que la derivada es

$$|x|' = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

En general, la no derivabilidad se traduce en que la gráfica de la función tiene un “pico” en el punto. Si aplicamos una homotecia de radio infinito y centro  $(0, 0)$ , la gráfica del valor absoluto seguirá teniendo exactamente el mismo aspecto que tiene en la figura, con su pico, de modo que no se parecerá a una recta. Alternativamente, la figura muestra también que no hay ninguna recta

que pase por  $(0, 0)$  y que pueda confundirse con la gráfica de la función para valores infinitesimales de  $x$ : si se parece a la gráfica para valores positivos, será muy distinta para valores negativos, y viceversa. ■

Ahora veamos un ejemplo en el que la gráfica de una función no tiene ningún pico en un punto y se parece a una recta en un entorno infinitesimal del punto y, pese a ello, la función no es derivable en dicho punto:

**Ejemplo** La función  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  es derivable en  $\mathbb{R}$  excepto en  $x = 0$ , y su derivada es

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt[3]{x^2}}.$$

En efecto, de la identidad  $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$  se deduce, cambiando  $x$  por  $x/y$  y multiplicando por  $y^3$ , que

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2).$$

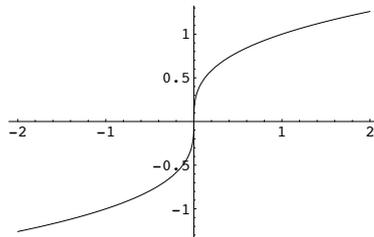
Tomemos ahora un  $x \in \mathbb{R}$  estándar no nulo y un infinitésimo  $h$  no nulo. Calculamos

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}}{h} &= \frac{(\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})}{h(\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})} \\ &= \frac{x+h-x}{h(\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})} = \frac{1}{\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}} \\ &\approx \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}. \end{aligned}$$

En el último paso hemos usado que la función  $\sqrt[3]{x}$  es continua, tal y como lo hemos demostrado en el ejemplo de la página 79. Esto prueba la existencia de la derivada. Sin embargo, si  $x = 0$ , tenemos que

$$\frac{\sqrt[3]{h} - \sqrt[3]{0}}{h} = \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}}$$

es infinito, ya que, si  $y = \sqrt[3]{h^2}$ , entonces  $y^3 \approx h^2 \approx 0$ , luego  $y^3 = 0$ , luego  $y = 0$ , luego  $\sqrt[3]{h^2} \approx 0$ . Así pues, el cociente no está infinitamente próximo a ningún número estándar.



La gráfica muestra lo que sucede: la gráfica tiene una recta tangente en el punto  $(0, 0)$ , pero ésta es vertical, y su pendiente es, por lo tanto, infinita. Si le aplicamos a la gráfica una homotecia de radio infinito con centro  $(0, 0)$ , obtenemos la recta vertical  $x = 0$ . La derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente a la gráfica en

dicho punto, puede no existir porque no exista tal recta (como en el caso del valor absoluto) o porque la recta tangente sea vertical, como en este caso. ■

Veamos ahora algunas relaciones entre las derivadas y el comportamiento de las funciones.

**Definición 3.20** Una función estándar  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  tiene un *máximo local* (resp. *mínimo local*) en un punto estándar  $x_0 \in ]a, b[$  si para todo  $x \approx x_0$  se cumple que  $f(x) \geq f(x_0)$  (resp.  $f(x) \leq f(x_0)$ ). Si la condición se cumple con desigualdades estrictas diremos que  $f$  tiene un *máximo* o un *mínimo local estricto* en  $x_0$ .

Es obvio que si  $f$  toma en  $x_0$  su valor máximo o su valor mínimo (y, en tal caso, diremos que  $f$  tiene un *máximo global* o un *mínimo global* en  $x_0$ ), entonces también tiene un máximo o un mínimo local en  $x_0$ .

**Teorema 3.21** Si una función derivable  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  tiene un máximo o un mínimo local en un punto  $x_0$  de su dominio, entonces  $f'(x_0) = 0$ .

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer que todos los datos son estándar. Si  $f'(x_0) > 0$ , entonces, para todo  $x \approx x_0$  se cumple que

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \approx f'(x_0) > 0,$$

luego también el cociente es  $> 0$  y, si  $x > x_0$ , tenemos que  $f(x) - f(x_0) > 0$ , es decir,  $f(x) > f(x_0)$ , lo que prueba que  $x_0$  no es un máximo local. Si  $x < x_0$  obtenemos que  $f(x) < f(x_0)$ , luego  $x_0$  tampoco es un mínimo local. En el caso  $f'(x_0) < 0$  razonamos análogamente. ■

**Ejemplo** La gráfica de la página 77 muestra que la función

$$f(x) = \frac{x^3 - x + 1}{3}$$

tiene un máximo y un mínimo local. Vamos a calcularlos.

Para ello calculamos la derivada  $f'(x) = \frac{3x^2 - 1}{3}$  y buscamos los puntos donde se anula, que son claramente  $\pm 1/\sqrt{3}$ . Según la gráfica,  $-1/\sqrt{3}$  ha de ser el máximo local y  $1/\sqrt{3}$  ha de ser el mínimo local. Podemos llegar a la misma conclusión sin mirar la gráfica. Para ello argumentamos que  $f'$  ha de tener el mismo signo en todos los puntos de cada intervalo

$$\left] -\infty, -1/\sqrt{3} \right[ , \left] -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3} \right[ , \left] 1/\sqrt{3}, +\infty \right[ ,$$

ya que es claramente continua y en ellos no toma el valor 0. Si tomara signos distintos, debería anularse, por el segundo teorema de Weierstrass. Basta evaluar  $f'$  en un punto cualquiera de cada intervalo para concluir que la derivada es positiva en el primero, negativa en el segundo y positiva en el tercero.

Ahora bien, que la derivada sea positiva significa que, en todo punto, la función experimenta incrementos positivos ante incrementos positivos de la variable, luego ha de ser creciente en los intervalos primero y tercero, mientras que, análogamente, ha de ser decreciente en el segundo, ya que, en este intervalo, incrementos positivos de la variable dan lugar a incrementos negativos de la función.<sup>7</sup> Por consiguiente, el punto  $-1/\sqrt{3}$ , donde la función pasa de ser creciente a ser decreciente, ha de ser un máximo local, mientras que  $1/\sqrt{3}$ , donde pasa de ser decreciente a ser creciente, ha de ser un mínimo local. ■

Ahora vamos a demostrar la relación que acabamos de utilizar entre el signo de la derivada y la monotonía de una función. En realidad vamos a obtener mucho más que esto:

**Teorema 3.22 (Teorema de la función inversa)** *Sea  $f : ]a, b[ \longrightarrow \mathbb{R}$  una función derivable cuya derivada nunca tome el valor 0. Entonces:*

- a)  $f$  es estrictamente monótona.
- b) Si  $f$  es monótona creciente, entonces  $f'(x) > 0$  para todo  $x \in ]a, b[$ .
- c) Si  $f$  es monótona decreciente, entonces  $f'(x) < 0$  para todo  $x \in ]a, b[$ .
- d) Existe un intervalo abierto  $I$  tal que  $f : ]a, b[ \longrightarrow I$  es biyectiva.
- e) La función  $f^{-1} : I \longrightarrow ]a, b[$  es derivable y, si  $x \in ]a, b[$  y llamamos  $y = f(x) \in I$ , se cumple que

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer que los datos son estándar. La función  $f$  ha de ser inyectiva, pues si existieran números  $a < x < y < b$  tales que  $f(x) = f(y)$ , el teorema anterior aplicado al intervalo  $[x, y]$  nos daría un punto donde la derivada de  $f$  valdría 0.

Por el teorema 3.13, sabemos que  $f$  es monótona (estricta, porque es inyectiva). Si es monótona creciente, entonces, para todo  $x \in ]a, b[$  estándar y todo  $h \approx 0$  no nulo, tenemos que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} > 0,$$

luego también  $f'(x) > 0$ . Igualmente se razona que si  $f$  es decreciente la derivada es negativa.

Sea  $I$  la imagen de  $f$ , de modo que  $f : ]a, b[ \longrightarrow I$  biyectiva. Hemos de probar que  $I$  es un intervalo abierto. Supongamos que  $f$  es monótona creciente.

<sup>7</sup>Esto es lo que cabe esperar que suceda, teniendo en cuenta la interpretación de la derivada como el incremento instantáneo de la función. No obstante, todavía no hemos demostrado que una función con derivada positiva es creciente y una función con derivada negativa es decreciente. Lo probamos justo a continuación.

En el caso contrario se razona análogamente. Probaremos que  $I$  es un intervalo mediante el teorema 2.64. Si  $\alpha, \beta \in I$  y  $\alpha < \gamma < \beta$ , entonces existen  $x, y \in ]a, b[$  tales que  $f(x) = \alpha$ ,  $f(y) = \beta$ . Por la monotonía, ha de ser  $x < y$ . Por el teorema 3.11 existe un  $z \in ]x, y[$  tal que  $f(z) = \gamma$ , luego  $\gamma \in I$ .

Falta probar que  $I$  es abierto. Esto es consecuencia de que, si  $\alpha \in I$ , entonces existe un  $x \in ]a, b[$  tal que  $f(x) = \alpha$ . Si  $h > 0$  es infinitesimal, entonces  $x - h < x < x + h$ , luego  $f(x - h) < \alpha < f(x + h)$  y los dos extremos están en  $I$ , luego  $\alpha$  no puede ser uno de los extremos de  $I$ . En otras palabras, los extremos de  $I$  no pertenecen a  $I$ , luego  $I$  es un intervalo abierto.

Sea  $h \approx 0$  no nulo y sea  $h' = f^{-1}(y + h) - f^{-1}(y) \neq 0$ , de modo que

$$f^{-1}(y + h) = x + h',$$

luego  $f(x + h') = f(x) + h$ . Observemos que  $h'$  es infinitesimal, pues si no lo fuera habría un número estándar  $r$  entre  $x$  y  $x + h'$ , con lo que  $f(r)$  estaría entre  $f(x)$  y  $f(x + h')$ , con lo que  $f(x) \approx f(x + h')$  y  $h \approx 0$ .

Ahora basta observar que

$$\frac{f^{-1}(y + h) - f^{-1}(y)}{h} = \frac{h'}{f(x + h') - f(x)} = \frac{1}{\frac{f(x + h') - f(x)}{h'}} \approx \frac{1}{f'(x)}.$$

Por consiguiente  $(f^{-1})'(y) = 1/f'(x)$ . ■

Por ejemplo, ahora podemos calcular fácilmente la derivada de la raíz  $n$ -sima:

**Teorema 3.23** *La función  $f(x) = \sqrt[n]{x}$  es derivable en  $]0, +\infty[$  y su derivada es*

$$f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}.$$

DEMOSTRACIÓN: La función  $g : ]0, +\infty[ \rightarrow ]0, +\infty[$  dada por  $g(y) = y^n$  es derivable y su derivada  $g'(y) = ny^{n-1}$  no se anula. Su inversa es claramente la función  $f$  del enunciado, luego, por el teorema anterior, es derivable, y si  $x = y^n$ , tenemos que

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{ny^{n-1}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}.$$

■

**Ejercicio:** Probar que si  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  es derivable y su derivada toma valores positivos y negativos, entonces también toma el valor 0. Generalizar este hecho para probar que si  $f'(u) < \alpha < f'(v)$ , existe un  $w$  entre  $u$  y  $v$  tal que  $f'(w) = \alpha$ .

**Ejercicio:** Supongamos que  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es continua en  $[a, b]$  y derivable en  $]a, b[$  y que la derivada no se anula en ningún punto. Demostrar que  $f$  es monótona estricta en  $[a, b]$ . (El teorema de la función inversa sólo prueba que lo es en  $]a, b[$ .)

Es evidente que las funciones constantes tienen derivada nula. En cambio, no es tan fácil probar que si una función tiene derivada nula (en todos los puntos)

es necesariamente constante. Esto es una consecuencia del llamado *teorema del valor medio*, que deduciremos de un resultado ligeramente más general. Previamente, necesitamos el siguiente hecho elemental:

**Teorema 3.24 (Teorema de Rolle)** *Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua en  $[a, b]$  y derivable en  $]a, b[$  y  $f(a) = f(b)$ , entonces existe un  $c \in ]a, b[$  tal que  $f'(c) = 0$ .*

DEMOSTRACIÓN: Si  $f$  es constante, entonces su derivada vale 0 en todos los puntos. En caso contrario, existe un punto  $x \in ]a, b[$  tal que  $f(x) \neq f(a)$ . Esto implica que, o bien  $f$  no toma su máximo valor en  $a$  y en  $b$ , o bien  $f$  no toma su mínimo valor en dichos puntos.

Por el teorema 3.10 existen puntos en  $[a, b]$  donde  $f$  toma su máximo valor y su mínimo valor. Según lo dicho, uno de ellos, digamos  $c$ , es distinto de  $a$  y  $b$ . Si  $f$  toma un valor máximo o mínimo global en  $c \in ]a, b[$ , entonces toma también un máximo o mínimo local y, por el teorema anterior,  $f'(c) = 0$ . ■

**Teorema 3.25 (Teorema de Cauchy)** *Sean  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funciones continuas en  $[a, b]$  y derivables en  $]a, b[$ . Existe un  $c \in ]a, b[$  tal que*

$$f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a)).$$

DEMOSTRACIÓN: Llamemos  $h(x) = f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a))$ , que es una función continua en  $[a, b]$  y derivable en  $]a, b[$ . Además

$$h(b) = h(a) = g(b)f(a) - f(b)g(a).$$

El teorema de Rolle nos da un punto  $c \in ]a, b[$  donde  $h'(c) = 0$ , pero esto es la fórmula del enunciado. ■

El teorema siguiente es el caso particular del anterior cuando tomamos como función  $g$  la identidad  $g(x) = x$ :

**Teorema 3.26 (Teorema del valor medio)** *Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua en  $[a, b]$  y derivable en  $]a, b[$ . Entonces existe un  $c \in ]a, b[$  tal que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

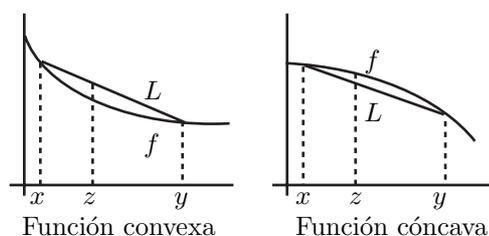
Como consecuencia podemos probar lo que habíamos afirmado:

**Teorema 3.27** *Si una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es continua en  $[a, b]$  y tiene derivada nula en  $]a, b[$ , entonces es constante.*

DEMOSTRACIÓN: Para cualquier par de puntos  $u, v \in [a, b]$ , el teorema anterior nos da que  $f(u) - f(v) = 0$ . ■

Equivalentemente, si dos funciones  $f, g : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  son derivables y  $f' = g'$ , entonces  $f = g + k$ , para cierto  $k \in \mathbb{R}$ .

Otra aplicación del teorema del valor medio es el estudio de la concavidad o convexidad de una función. La interpretación geométrica de la concavidad y la convexidad es que una función es convexa si al unir dos puntos de su gráfica con un segmento  $L$ , éste queda por encima de la gráfica, mientras que es cóncava si queda por debajo.



Para concretar, fijemos una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  y consideremos dos puntos  $a \leq x < y \leq b$ . Llamemos  $L : [x, y] \rightarrow \mathbb{R}$  a la función dada por

$$L(z) = f(x) + \frac{f(y) - f(x)}{y - x}(z - x),$$

cuya gráfica es claramente el segmento que une el punto  $(x, f(x))$  con  $(y, f(y))$ .

La función  $f$  será convexa si  $f(z) \leq L(z)$  para todo punto  $x < z < y$ , y será cóncava si se da la desigualdad contraria. No obstante, vamos a reformular esto de una forma más conveniente.

Para ello observamos que la función  $g(\lambda) = (1 - \lambda)x + \lambda y$  cumple  $g(0) = x$ ,  $g(1) = y$  y  $g'(\lambda) = y - x > 0$ , de donde se deduce que  $g : [0, 1] \rightarrow [x, y]$  es biyectiva y creciente.

Así pues, cada punto  $x < z < y$  se expresa de forma única como

$$z = (1 - \lambda)x + \lambda y, \quad 0 < \lambda < 1.$$

En estos términos,

$$L(z) = L(x - \lambda(y - x)) = f(x) + \lambda(f(y) - f(x)) = (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

Así pues, podemos dar la siguiente definición de concavidad y convexidad:

**Definición 3.28** Una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es *convexa* si para todo par de puntos  $a \leq x < y \leq b$  y todo número  $0 < \lambda < 1$  se cumple que

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

Si se da la desigualdad contraria, la función es *cóncava*.

Por ejemplo, la gráfica de la página 77 muestra que la función

$$f(x) = \frac{x^3 - x + 1}{3}$$

es cóncava en  $]-\infty, 0]$  y es convexa en  $[0, +\infty[$ . El teorema siguiente nos da la forma de comprobarlo analíticamente:

**Teorema 3.29** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua en  $[a, b]$  y derivable en  $]a, b[$ . Si  $f'$  es monótona creciente (resp. decreciente) en  $]a, b[$ , entonces  $f$  es convexa (resp. cóncava) en  $[a, b]$ .

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que  $f'$  es creciente (el caso contrario es análogo). Tomemos  $a \leq x < y \leq b$  y  $0 < \lambda < 1$  y llamemos  $z = (1-\lambda)x + \lambda y$ . Hemos de probar que  $f(z) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$ . Como  $f(z) = (1-\lambda)f(z) + \lambda f(z)$ , esto equivale a

$$(1-\lambda)f(z) + \lambda f(z) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y),$$

o

$$(1-\lambda)(f(z) - f(x)) \leq \lambda(f(y) - f(z)).$$

Por el teorema del valor medio, existen números  $x < c < z < d < y$  tales que

$$f(z) - f(x) = f'(c)(z - x), \quad f(y) - f(z) = f'(d)(y - z).$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} (1-\lambda)(z-x) &= (1-\lambda)((1-\lambda)x + \lambda y - x) = (1-\lambda)\lambda(y-x) \\ &= \lambda(y - (1-\lambda)x - \lambda y) = \lambda(y-z), \end{aligned}$$

con lo que

$$(1-\lambda)(f(z) - f(x)) = (1-\lambda)f'(c)(z-x) \leq \lambda f'(d)(y-z) = \lambda(f(y) - f(z)),$$

que era lo que teníamos que probar. ■

**Ejemplo** Consideremos nuevamente la función

$$f(x) = \frac{x^3 - x + 1}{3}$$

cuya gráfica está en la página 77. Vamos a estudiar su concavidad y convexidad.

Para ello calculamos su derivada

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 1}{3}$$

Hemos de estudiar dónde es creciente y dónde es decreciente esta función. Como también es derivable, podemos hacerlo a través de su derivada, que es lo que se conoce como *segunda derivada* de la función  $f$ :

$$f''(x) = 2x.$$

Claramente  $f''(x) < 0$  en  $]-\infty, 0[$  y  $f''(x) > 0$  en  $]0, +\infty[$ . Esto implica que  $f'$  es decreciente en el primer intervalo y creciente en el segundo, luego, tal y como muestra la gráfica,  $f$  es cóncava en el primer intervalo y convexa en el segundo. ■

### 3.4 Derivadas sucesivas, la fórmula de Taylor

**Definición 3.30** Si  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es derivable en un abierto  $D$ , a su derivada  $f'$  se la llama también *primera derivada* de  $f$ , y se representa por  $f^{(1)} : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Si ésta es, a su vez, derivable, su derivada se llama *derivada segunda* de  $f$ , y se representa por  $f^{(2)} : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Diremos que una función es *k-veces derivable* en  $D$  si se pueden calcular de este modo sus derivadas hasta  $f^{(k)} : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Estas derivadas se llaman *derivadas sucesivas* de  $f$ . (Es útil adoptar el convenio de que  $f^{(0)} = f$ .) Diremos que  $f$  es *infinitamente derivable* (o de clase  $C^\infty$ ) en  $D$  si existe  $f^{(k)}$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

Diremos que  $f$  es de clase  $C^k$  en  $D$  si existen las derivadas hasta orden  $k$  y son continuas. (En realidad la cuestión es que sea continua  $f^{(k)}$ , porque las anteriores lo serán por ser derivables.)

De los resultados que hemos visto sobre continuidad y derivabilidad se sigue inmediatamente que la suma y el producto de funciones de clase  $C^k$  es de clase  $C^k$ , así como el cociente, si la función denominador no se anula. La composición de funciones de clase  $C^k$  es de clase  $C^k$ . (Todo esto para  $k \in \mathbb{N}$  y también para  $k = \infty$ .) Si llamamos  $C^k(D)$  al conjunto de las funciones de clase  $C^k$  en  $D$ , tenemos que  $C^k(D)$  es un subanillo de  $C^0(D) = C(D)$ . Claramente contiene a todas las funciones polinómicas.

Si  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función derivable en  $a \in D$ , sabemos que  $f$  toma, cerca de  $a$ , valores muy similares a su recta tangente:

$$t(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Ello se debe esencialmente a que  $f(a) = t(a)$  y  $f'(a) = t'(a)$ . Cabe esperar que, cuantas más derivadas sucesivas tengan en común dos funciones en un punto, más parecidas serán alrededor de dicho punto. Esto no tiene por qué ser necesariamente así, pero cabe investigar en qué condiciones la igualdad de derivadas se traduce en similitud de las gráficas.

Así pues, vamos a estudiar la posibilidad de aproximar funciones con polinomios que compartan derivadas sucesivas en un punto. El punto de partida es el teorema siguiente:

**Teorema 3.31** *Dada una función  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  derivable  $k$  veces en  $D$  y dado un punto  $a \in D$ , existe un único polinomio  $T_a^k f(x)$  de grado  $\leq k$  tal que  $(T_a f)^{(i)}(a) = f^{(i)}(a)$  para  $i = 0, \dots, k$ . Concretamente, es el dado por:*

$$T_a^k f(x) = \sum_{n=0}^k \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n.$$

DEMOSTRACIÓN: Consideremos un polinomio de la forma

$$P(x) = \sum_{n=0}^k c_n (x - a)^n,$$

y vamos a ver que podemos determinar de forma única los coeficientes  $c_n$  para que sus derivadas coincidan con las de  $f$  hasta el orden  $k$ . Si derivamos:

$$P^1(x) = \sum_{n=1}^k n c_n (x-a)^{n-1}, \quad P^1(a) = c_1,$$

$$P^2(x) = \sum_{n=2}^k n(n-1)c_n(x-a)^{n-2}, \quad P^2(a) = 2c_2,$$

$$P^3(x) = \sum_{n=3}^k n(n-1)(n-2)c_n(x-a)^{n-3}, \quad P^3(a) = 3 \cdot 2c_3,$$

y es fácil ver que, en general, ha de ser  $P^n(a) = n!c_n$ . Así pues, para que las derivadas de  $P$  coincidan con las de  $f$  en el punto  $a$ , los coeficientes han de ser necesariamente

$$c_n = \frac{P^n(a)}{n!}.$$

■

**Definición 3.32** Si  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es  $k$ -veces derivable en el abierto  $D$ , llamaremos *polinomio de Taylor* de grado  $k$  de  $f$  en el punto  $a$  al polinomio

$$T_a^k f(x) = \sum_{n=0}^k \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n.$$

Observemos que  $T_a^1 f(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$  es la recta tangente a la gráfica de  $f$  en el punto  $a$ .

Los polinomios de Taylor son útiles para calcular aproximadamente muchas funciones, pero esto requiere tener información sobre el error de la aproximación, es decir, sobre lo que podemos llamar el *resto de Taylor* de orden  $k$  de la función  $f$ :

$$R_a^k f(x) = f(x) - T_a^k f(x)$$

El caso ideal se da cuando  $f$  es de clase  $C^\infty$  en  $D$  y, para todo  $x \in D$ , se cumple que  $\lim_k R_a^k f(x) = 0$ , pues esto significa que podemos expresar la función  $f$  como serie infinita:<sup>8</sup>

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

Esta serie, tanto si converge como si no y, en caso de que converja, tanto si converge a  $f$  como si no, se llama *serie de Taylor* de la función  $f$  alrededor del punto  $a$ .

---

<sup>8</sup>Dada una sucesión  $\{x_n\}_{n \geq 0}$ , su *serie* asociada es la sucesión  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \{S_m\}_{m \geq 0}$ , donde  $S_m = \sum_{n=0}^m x_n = x_0 + \dots + x_m$ . Los términos  $S_m$  se llaman *sumas parciales* de la serie. Cuando la serie es convergente, su límite (llamado *suma*) se representa igualmente por  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ .

**Teorema 3.33** Sea  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función derivable  $k + 1$  veces en un intervalo abierto  $I$  y sea  $a \in I$ . Para todo  $x \in I$ ,  $x \neq a$ , existe un  $c$  estrictamente comprendido entre  $a$  y  $x$  tal que

$$f(x) = T_a^k f(x) + \frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!} (x-a)^{k+1}.$$

DEMOSTRACIÓN: Supongamos, por concretar, que  $a < x$ . Consideremos la función  $F : [a, x] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$F(t) = f(t) + \sum_{n=1}^k \frac{f^{(n)}(t)}{n!} (x-t)^n.$$

Claramente,  $F(x) = f(x)$  y  $F(a) = T_a^k f(x)$ , luego queremos estudiar la diferencia  $F(x) - F(a)$ . Claramente,  $F$  es continua en  $[a, x]$  y derivable en  $]a, x[$ . Observemos que

$$F'(t) = f'(t) + \sum_{n=1}^k \left( \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n - \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!} (x-t)^{n-1} \right).$$

Vemos que se cancelan todos los términos de la suma excepto el último, de modo que

$$F'(t) = \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} (x-t)^k$$

Sea  $G : [a, x] \rightarrow \mathbb{R}$  cualquier función continua en  $[a, x]$  derivable en  $]a, x[$ . Por el teorema de Cauchy 3.25 tenemos que existe  $a < c < x$  tal que

$$G'(c)(F(x) - F(a)) = F'(c)(G(x) - G(a)).$$

Si  $G'$  no se anula en  $]a, x[$ , podemos escribir

$$f(x) - T_a^k f(x) = \frac{G(x) - G(a)}{G'(c)} \frac{f^{(k+1)}(c)}{k!} (x-c)^k.$$

La expresión del enunciado resulta de tomar  $G(t) = (x-t)^{k+1}$ . ■

De aquí se deduce una sencilla condición suficiente para que una función coincida con su serie de Taylor. Necesitamos el resultado siguiente:

**Teorema 3.34** Si  $x \geq 0$  entonces  $\lim_n x^n/n! = 0$ .

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer que  $x$  es estándar. Si  $m$  es un número natural infinito y  $n$  es el menor natural mayor que  $x$ , entonces

$$\frac{x^m}{m!} = \frac{x^n}{n!} \prod_{k=n+1}^{m-1} \frac{x}{k} \cdot \frac{x}{m} \approx 0.$$

En efecto, el primer factor es finito porque es estándar, el segundo también porque todos los términos son menores que 1 y el tercero es infinitesimal. ■

**Teorema 3.35** Sea  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $C^\infty$  en un intervalo abierto  $I$ , sea  $a \in I$  y sea  $x \in I$  tal que las derivadas sucesivas de  $f$  estén uniformemente acotadas en el intervalo de extremos  $a$  y  $x$ , es decir, tal que exista una constante  $M$  de modo que  $|f^{(n)}(t)| \leq M^n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y todo  $t$  en dicho intervalo. Entonces

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n.$$

DEMOSTRACIÓN: Hemos de probar que

$$\lim_k (f(x) - T_a^k f(x)) = 0.$$

Por el teorema 3.33 sabemos que existe un  $c$  entre  $a$  y  $x$  tal que

$$\begin{aligned} |f(x) - T_a^k f(x)| &= \left| \frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!} (x-a)^{k+1} \right| = \frac{|f^{(k+1)}(c)|}{(k+1)!} |x-a|^{k+1} \\ &\leq \frac{(M|x-a|)^{k+1}}{(k+1)!} \approx 0 \end{aligned}$$

cuando  $k$  es infinito, por el teorema anterior. ■

En la sección siguiente veremos algunas aplicaciones de este teorema.

### 3.5 Exponenciales y logaritmos

Vamos a demostrar que, para cada  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ , existe una única función continua  $a^{(\cdot)} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que cumple  $a^1 = a$  y satisface la ecuación funcional

$$a^{x+y} = a^x a^y, \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}.$$

Veamos algunas propiedades que ha de tener esta función exponencial:

- a)  $a^0 = 1$ , pues  $a = a^1 = a^{1+0} = a^1 a^0 = a a^0$ , luego  $a^0 \neq 0$  y, como  $a^0 = a^{0+0} = a^0 a^0$ , ha de ser  $a^0 = 1$ .
- b)  $a^x \neq 0$  y  $a^{-x} = 1/a^x$ , pues  $a^x a^{-x} = a^0 = 1$ .
- c) Si  $m \in \mathbb{Z}$ , entonces  $a^m$  coincide con la exponencial usual para números enteros en un cuerpo. La ecuación funcional implica que esto es así para  $m > 0$ , sabemos que  $a^0 = 1$  y el apartado b) nos da que también es cierto para  $m < 0$ .
- d)  $a^x > 0$ , pues  $a^1 = a > 0$  y, si  $a^x < 0$  para algún  $x$ , la continuidad implica que la exponencial tendría que anularse en algún punto.
- e)  $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$ , para todo  $m/n \in \mathbb{Q}$  ( $n > 0$ ). En efecto, la ecuación funcional implica que  $(a^{m/n})^n = a^m$  y sabemos que  $a^{m/n} > 0$ , luego ha de ser  $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$ .

El apartado e) junto al teorema 3.14, implica que, si existe la función exponencial  $a^x$ , es única.

Mostraremos que la función exponencial  $f(x) = a^x$  es, de hecho, derivable en  $\mathbb{R}$ . Admitiendo que lo es, podemos calcular su derivada: Si  $x \in \mathbb{R}$  es estándar y  $h$  es infinitesimal, tenemos que

$$\frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \frac{a^h - 1}{h} \approx f'(0) a^x.$$

Así pues, si llamamos  $k_a = f'(0)$ , tenemos que  $f'(x) = k_a a^x$ . Esto implica, a su vez, que, si es derivable, la exponencial es de clase  $C^\infty$  en  $\mathbb{R}$ .

Empezaremos demostrando que podemos escoger una base  $e > 0$  tal que la exponencial  $e^x$  existe y cumple  $k_e = 1$ , de modo que coincide con su propia derivada. Esta condición, junto con que  $e^0 = 1$ , determina completamente la función que buscamos. En efecto: Fijado  $x \in \mathbb{R}$ , no nulo, como  $e^x$  ha de ser continua, el teorema 3.10 nos da que ha de estar acotada en el intervalo  $[0, x]$  (o  $[x, 0]$ ), es decir, que existe un  $M$  tal que  $|e^t| \leq M$  para todo  $t \in [0, x]$  (o  $[x, 0]$ ). Como las derivadas de  $e^x$  han de ser ellas mismas, la cota vale para sus infinitas derivadas, y el teorema 3.35 (con  $a = 0$ ) nos da que se ha de cumplir

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Hasta aquí, lo único que hemos demostrado es que, si existe una función  $e^x$  que sea igual a su propia derivada y que cumpla  $e^0 = 1$ , ha de venir dada por el desarrollo en serie que acabamos de indicar. Seguidamente demostramos, para empezar, que dicha serie siempre converge:

**Teorema 3.36** *Para cada  $x \in \mathbb{R}$ , la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  es convergente.*

DEMOSTRACIÓN: Basta probar que converge cuando  $x$  es estándar. A su vez, basta ver que la serie es de Cauchy. Para ello tomamos dos números naturales infinitos  $m < p$  y hemos de ver que  $S_p(x) - S_m(x) \approx 0$ . Ahora bien:<sup>9</sup>

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=m}^p \frac{x^n}{n!} \right| &\leq \sum_{n=m}^p \frac{|x|^n}{n!} = \frac{|x|^m}{m!} \sum_{n=m}^p \frac{|x|^{n-m}}{n!/m!} \\ &\leq \frac{|x|^m}{m!} \sum_{n=m}^p (|x|/m)^{n-m} = \frac{|x|^m}{m!} \frac{1 - (|x|/m)^{p-m+1}}{1 - |x|/m} \approx 0. \end{aligned}$$

Aquí usamos que el segundo factor es finito (teniendo en cuenta el teorema 2.20) y el primero es infinitesimal por el teorema 3.34. ■

<sup>9</sup>La última igualdad se basa en la conocida fórmula para la suma de una serie geométrica finita:

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

**Definición 3.37** Llamaremos *función exponencial* a la función  $e^x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$$

Claramente, se trata de una función estándar y cumple  $e^0 = 1$ . Ahora probamos que cumple la ecuación funcional esperada:

**Teorema 3.38** Para todo par de números reales  $x, y$  se cumple que

$$e^{x+y} = e^x e^y.$$

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer que  $x$  e  $y$  son estándar. Sea  $m \in \mathbb{N}$  infinito. Entonces<sup>10</sup>

$$\begin{aligned} e^x e^y &\approx \sum_{i=0}^m \frac{x^i}{i!} \sum_{j=0}^m \frac{y^j}{j!} = \sum_{n=0}^{2m} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{2m} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{n=0}^{2m} \frac{(x+y)^n}{n!} \approx e^{x+y}. \end{aligned}$$

Como el primer y el último término son estándar, tenemos  $e^{x+y} = e^x e^y$ . ■

Más aún, la función exponencial también cumple la propiedad que nos ha llevado hasta su serie de Taylor:

**Teorema 3.39** La función exponencial es derivable en  $\mathbb{R}$ , y su derivada es ella misma.

DEMOSTRACIÓN: Tomemos  $x \in \mathbb{R}$  estándar y  $h \approx 0$  no nulo. Entonces

$$\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \frac{e^h - 1}{h}.$$

Basta probar que

$$\frac{e^h - 1}{h} \approx 1.$$

Tomamos primero un  $x$  estándar tal que  $0 < |x| < 1$ . Entonces, para todo natural infinito  $m$ , se cumple

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^m}{m!},$$

y así (usando que  $1/x$  es estándar, luego finito)

$$\frac{e^x - 1}{x} - 1 \approx \frac{x}{2!} + \dots + \frac{x^{m-1}}{m!}.$$

<sup>10</sup>Notemos que todos los sumatorios siguientes son sumas finitas, lo cual justifica todas las manipulaciones de índices.

Por consiguiente, usando nuevamente la fórmula de las series geométricas:

$$\left| \frac{e^x - 1}{x} - 1 \right| \approx < |x| + \dots + |x|^{m-2} = \frac{|x| - |x|^{m-1}}{1 - |x|} \approx \frac{|x|}{1 - |x|}$$

y, como los extremos son estándar, tenemos la desigualdad

$$\left| \frac{e^x - 1}{x} - 1 \right| < \frac{|x|}{1 - |x|}.$$

En principio, esto vale para todo  $x$  estándar tal que  $0 < |x| < 1$ , pero por transferencia vale incluso para el infinitésimo  $h$ , es decir,

$$\left| \frac{e^h - 1}{h} - 1 \right| < \frac{|h|}{1 - |h|} \approx 0.$$

■

A partir de aquí ya podemos afirmar que  $e^x$  cumple todas las propiedades que hemos deducido al principio de la sección para  $a$  igual al número<sup>11</sup>

$$e = e^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2.718281828459\dots$$

En particular sabemos que  $e^x > 0$ , y lo mismo vale para su derivada, porque es ella misma. Esto nos permite aplicar el teorema de la función inversa.

**Teorema 3.40** *La función exponencial  $e^x : \mathbb{R} \rightarrow ]0, +\infty[$  es biyectiva y monótona creciente.*

DEMOSTRACIÓN: El teorema de la función inversa nos da que la exponencial es monótona creciente y que biyecta  $\mathbb{R}$  con un intervalo abierto. De la propia definición de la exponencial (mirando los dos primeros términos de la serie) se sigue que, si  $x > 0$ , entonces  $x < 1 + x < e^x$ .

Aplicando esto a  $1/x$ , vemos que  $1/x < e^{1/x} = 1/e^{-1/x}$ , luego, en definitiva,

$$e^{-1/x} < x < e^x.$$

Como la imagen de la exponencial es un intervalo, esto prueba que contiene a todo  $x > 0$ , luego ha de ser  $]0, +\infty[$ . ■

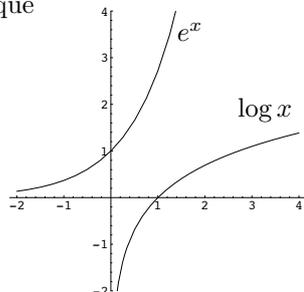
En particular, el teorema de la función inversa que acabamos de aplicarle a la exponencial garantiza que existe la función inversa y es derivable:

**Definición 3.41** Llamaremos *logaritmo* a la función inversa de la función exponencial:

$$\log : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$$

<sup>11</sup>Una regla mnemotécnica para las primeras cifras del número  $e$  es contar las letras de cada palabra de la frase “te ayudaré a recordar la cantidad”.

El logaritmo existe y es derivable por el teorema de la función inversa. Si  $f(x) = \log x$  y llamamos  $y = \log x$ , de modo que  $x = e^y$ , dicho teorema nos da que



$$f'(x) = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}.$$

La figura muestra las gráficas de las funciones exponencial y logaritmo. Las relaciones  $e^0 = 1$  y  $e^1 = e$  se traducen en que  $\log 1 = 0$  y  $\log e = 1$ . A su vez, la ecuación funcional de la exponencial da lugar a otra para el logaritmo:

$$\log xy = \log x + \log y.$$

En efecto, si  $x = e^u$ ,  $y = e^v$ , entonces  $xy = e^{u+v}$ , luego

$$\log xy = u + v = \log x + \log y.$$

De aquí se sigue que, para todo  $n \in \mathbb{Z}$ ,

$$\log x^n = n \log x.$$

En principio se cumple para  $n \geq 0$ , pero la relación  $\log x^{-1} + \log x = \log 1 = 0$  permite extender la relación a todos los enteros.

El teorema siguiente proporciona la que podríamos haber tomado como definición alternativa de la función exponencial. En particular muestra que  $1^\infty$  es una indeterminación.

**Teorema 3.42** Para todo  $x \in \mathbb{R}$  se cumple que

$$e^x = \lim_n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

DEMOSTRACIÓN: Basta probarlo para  $x$  estándar. Como  $\log x$  tiene derivada igual a  $1$  en  $x = 1$ , si  $h \approx 0$ , tenemos que

$$\frac{\log(1+h)}{h} \approx 1.$$

Aplicamos esto a  $h = x/n$ , donde  $n \in \mathbb{N}$  es infinito. Entonces

$$n \log \left(1 + \frac{x}{n}\right) \approx x.$$

Equivalentemente:

$$\log \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \approx x$$

y, como la exponencial es continua en  $x$ , tenemos que

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \approx e^x.$$

■

En particular,

$$e = \lim_n \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n.$$

Ahora ya podemos definir la exponencial para cualquier base  $a > 0$ :

**Definición 3.43** Para cada  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ , definimos la *función exponencial*

$$a^x = e^{x \log a}.$$

Obviamente, la exponencial es continua y cumple  $a^1 = a$ , así como la ecuación funcional  $a^{x+y} = a^x a^y$ . Por la discusión vista al principio de la sección, es la única función con estas propiedades. También es claro que  $f(x) = a^x$  es derivable en  $\mathbb{R}$ , y su derivada es

$$f'(x) = a^x \log a.$$

Observemos que, para  $a = e$ , la exponencial que acabamos de definir es la que ya teníamos definida. Ahora podemos generalizar las propiedades de la exponencial y el logaritmo:

$$(e^x)^y = e^{xy}, \quad \log x^y = y \log x.$$

En efecto, por definición

$$(e^x)^y = e^{y \log e^x} = e^{yx}.$$

Como  $x^y = e^{y \log x}$ , tenemos que  $\log x^y = y \log x$ .

**Ejercicio:** Demostrar que  $a^{(\cdot)} : \mathbb{R} \rightarrow ]0, +\infty[$  es creciente si  $a > 1$ , decreciente si  $a < 1$  y constante si  $a = 1$ . Si  $a \neq 1$ , su inversa viene dada por

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}.$$

**Ejercicio:** Demostrar que la función  $f(x) = x^\alpha$  tiene derivada  $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$  en  $]0, +\infty[$ .

**Teorema 3.44** *El número  $e$  es irracional.*

DEMOSTRACIÓN: Según el teorema 3.33:

$$e - \sum_{n=0}^k \frac{1}{n!} = \frac{e^c}{(k+1)!},$$

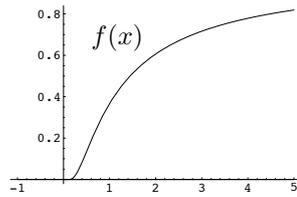
para un cierto número  $0 < c < 1$ . Teniendo en cuenta que  $e^c < e < 3$ , vemos que

$$\frac{1}{(k+1)!} < e - \sum_{n=0}^k \frac{1}{n!} < \frac{3}{(k+1)!},$$

luego

$$0 < \frac{1}{k+1} < k! e - \sum_{n=0}^k \frac{k!}{n!} < \frac{3}{k+1} \leq \frac{3}{4},$$

para  $k \geq 3$ . El sumatorio es un número entero. Si  $e$  fuera racional podríamos tomar  $k$  suficientemente grande como para que  $k! e$  fuera también entero, pero entonces tendríamos un entero  $m$  tal que  $0 < m < 3/4$ , lo cual es absurdo. ■



**Ejemplo** La función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ e^{-1/x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

es de clase  $C^\infty$  y cumple  $f^{(n)}(0) = 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Por lo tanto, no coincide con su serie de Taylor (que es idénticamente nula).

La figura muestra la gráfica de la función  $f$ . Aunque es  $> 0$  para todo  $x > 0$ , vemos que se confunde con el eje horizontal en un intervalo apreciable.

Vamos a probar que las derivadas de  $f$  tienen la forma siguiente:

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ e^{-1/x} \frac{P(x)}{x^{2n}} & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

donde  $P(x)$  es un polinomio de grado  $\leq n$ .

Razonamos por inducción sobre  $n$ . Se cumple claramente para  $n = 0$ . Si es cierto para  $n$ , es obvio que, para  $x < 0$ , existe  $f^{(n+1)}(0) = 0$ . Para  $x > 0$  también es claro que existe la derivada, y es

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= e^{-1/x} \frac{-P(x)}{x^{2n+2}} + e^{-1/x} \frac{P'(x)x^{2n} - 2nP(x)x^{2n-1}}{x^{4n}} \\ &= e^{-1/x} \left( \frac{-P(x)}{x^{2(n+1)}} + \frac{P'(x)x - 2nP(x)}{x^{2n+1}} \right) = e^{-1/x} \frac{-P(x) + P'(x)x^2 - 2nxP(x)}{x^{2(n+1)}}. \end{aligned}$$

Es claro que el numerador es un polinomio de grado  $\leq n + 1$ .

Falta probar que existe  $f^{(n+1)}(0) = 0$ . Para ello basta ver que si  $h > 0$  es infinitesimal, entonces

$$\frac{f^{(n)}(h) - f^{(n)}(0)}{h} = e^{-1/h} \frac{P(h)}{h^{2n+1}} \approx 0.$$

En otras palabras, vamos a probar que, para todo polinomio  $P(x)$  y todo  $n \in \mathbb{N}$ , la función

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ e^{-1/x} \frac{P(x)}{x^{2n+1}} & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

es continua en 0. Como es una propiedad interna, podemos suponer que  $n$  y  $P$  son estándar. Entonces,  $P(h) \approx P(0)$  es finito. Basta probar que

$$\frac{e^{-1/h}}{h^{2n+1}} \approx 0.$$

Ahora bien, del desarrollo en serie de la función exponencial se sigue que, para todo  $x > 0$  y todo  $m \in \mathbb{N}$ , se cumple que

$$\frac{x^m}{m!} \leq e^x.$$

Lo aplicamos a  $x = 1/h$  y a  $m = 2n + 2$ , con lo que obtenemos

$$0 \leq \frac{e^{-1/h}}{h^{2n+1}} \leq (2n + 2)! h \approx 0,$$

lo que concluye la prueba. ■

## 3.6 Límites de funciones

A la hora de describir una función es interesante determinar cómo se comporta cerca de los puntos donde no está definida:

**Definición 3.45** Sea  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función estándar y sea  $x_0 \in \mathbb{R}$  (estándar) un punto de acumulación de su dominio (es decir, un punto que cumpla  $h(x) \cap (D \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ ). Diremos que  $f$  converge a un punto estándar  $l \in \mathbb{R}$  cuando  $x$  tiende a  $x_0$ , y lo representaremos por

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l,$$

si para todo  $x \in D$  tal que  $x \approx x_0$  y  $x \neq x_0$ , se cumple que  $f(x) \approx l$ .

Observemos que una función no puede converger a más de un límite (estándar) en un mismo punto, lo cual justifica que hayamos dado nombre al límite.

En realidad hemos calculado ya muchos límites, sólo que nunca hemos tenido la necesidad de destacarlo. Por ejemplo, es inmediato que una función  $f$  es continua en un punto de acumulación  $x_0$  de su dominio si y sólo si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

y que una función es derivable en un punto interior  $x$  de su dominio si y sólo si existe

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Como en el caso de las sucesiones, podemos definir límites infinitos:

Considerando de nuevo una función estándar  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y un punto de acumulación (estándar)  $x_0$  de su dominio, diremos que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

si cuando  $x \in D$ ,  $x \approx x_0$ ,  $x \neq x_0$ , se cumple que  $f(x) > 0$  es infinito.

Si  $f(x)$  es infinito, pero  $f(x) < 0$ , entonces diremos que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty,$$

si  $f(x)$  es infinito, pero su signo puede depender de  $x$ , entonces diremos que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty.$$

También podemos definir límites en infinito:

**Definición 3.46** Sea  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función estándar cuyo dominio contenga puntos infinitos positivos (resp. negativos) y sea  $l \in \mathbb{R}$  un punto estándar. Diremos que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \quad (\text{resp. } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l)$$

si cuando  $x \in D$  es infinito y  $x > 0$  (resp.  $x < 0$ ) se cumple que  $f(x) \approx l$ .

Dejamos que el lector conjeture el significado obvio de las cuatro variantes (seis —de hecho— si además quitamos el signo al infinito de la derecha)

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty.$$

Todos los resultados algebraicos sobre límites de sucesiones valen igualmente para límites de funciones, con las mismas pruebas. Por poner un ejemplo:

Si una función  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  no se anula en su dominio y  $x_0$  es un punto de acumulación de  $D$ :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} 1/f(x) = \infty.$$

Esto se cumple porque si  $x \in D$  cumple  $x \approx x_0$ ,  $x \neq x_0$ , entonces  $f(x) \approx 0$  si y sólo si  $1/f(x)$  es infinito. ■

La relación entre límites de sucesiones y límites de funciones es también elemental:

**Teorema 3.47** Si  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  cumple que existe

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

y  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  es una sucesión contenida en  $D$  tal que  $\lim_n x_n = x_0$ , entonces

$$\lim_n f(x_n) = l.$$

Esto es válido igualmente si  $x_0 = \pm\infty$  o si  $l = \pm\infty$ .

Veamos algunos ejemplos de límites de interés:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ .

En efecto, de la serie de Taylor de la exponencial se deduce que, para  $x > 0$  se cumple  $1 + x < e^x$ , luego si  $x > 0$  es infinito,  $e^x$  también lo es. Si  $x < 0$  es infinito, entonces  $e^{-x}$  es infinito, luego  $e^x$  es infinitesimal.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log x = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \log x = -\infty$ .

En efecto, si  $x > 0$  es infinito, pero  $\log x$  es finito, entonces podemos acotarlo por números estándar  $m < \log x < M$ , con lo que  $e^m < x < e^M$ , lo que implica que  $x$  es finito, contradicción. (Sabemos que  $\log x > 0$  porque el logaritmo es positivo para números  $x > 1$ .) Igualmente se razona el segundo límite.

- Si  $a > 1$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$ .

Se deduce de lo anterior, teniendo en cuenta que  $\log a > 0$ .

- Si  $a < 1$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$ .

Se deduce del caso anterior, pues  $a^x = (1/a)^{-x}$ .

- Si  $\alpha > 0$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty$ .

Se deduce de la definición de la exponencial y de los casos anteriores.

- Si  $\alpha < 0$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = 0$ .

Basta observar que  $x^\alpha = 1/x^{-\alpha}$ .

- Si  $n \in \mathbb{N}$  es par y no nulo,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$ .

En efecto, si  $n = 2k$  y  $x < 0$  es infinito, entonces  $x^2$  es infinito y positivo, y  $x^{2k} > x^2$  también lo es.

- Si  $n \in \mathbb{N}$  es impar y no nulo,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$ .

En efecto, ahora  $n = 2k + 1$  y, como antes,  $x^{2k} > 0$  es infinito, luego  $x^{2k+1} < 0$  también lo es.

Si tenemos un polinomio (estándar):

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0,$$

podemos expresarlo en la forma

$$P(x) = x^n \left( 1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right).$$

Si  $M$  es una cota estándar para los coeficientes  $a_i$ , tenemos que

$$\left| \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right| \leq \frac{M}{x} \frac{1 - 1/x^n}{1 - 1/x}.$$

Esto vale para todo  $x \neq 0$ . Si  $x$  es infinito, la segunda fracción es finita, y la primera infinitesimal, luego todo el paréntesis de la expresión de  $P(x)$  está infinitamente cerca de 1, luego es finito y positivo, y  $P(x)$  es infinito y tiene el signo de  $x^n$ . Así pues,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ es par,} \\ -\infty & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Notemos que hemos supuesto que el coeficiente director de  $P(x)$  era  $a_n = 1$ . El resultado vale igualmente si  $a_n > 0$ , pero si  $a_n < 0$  hay que invertir todos los signos. (Esto se demuestra expresando  $P(x) = a_n Q(x)$ , donde  $Q(x)$  tiene coeficiente director unitario.)

**Teorema 3.48** *Todo polinomio de grado impar se anula en al menos un punto.*

DEMOSTRACIÓN: No perdemos generalidad si suponemos que su coeficiente director es positivo. Entonces

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = -\infty,$$

luego, si  $x > 0$  es infinito, tenemos que  $P(x) > 0$ ,  $P(-x) < 0$ . El teorema 3.11 implica que existe un  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $P(c) = 0$ . ■

Algunas reglas de derivación se traducen en límites que tienen interés por sí mismos. Por ejemplo, el hecho de que la derivada de  $e^x$  en  $x = 0$  vale  $e^0 = 1$  equivale a que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Similarmente, el hecho de que la derivada de  $\log x$  en  $x = 1$  valga  $1/1 = 1$  equivale a que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{x - 1} = 1.$$

Estos y otros muchos límites pueden obtenerse a partir de una regla general:

**Teorema 3.49 (Regla de L'Hôpital)** *Sean  $f, g : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones derivables tales que  $g$  y  $g'$  no se anulen en  $]a, b[$ . Supongamos que*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow b} f(x) = 0$$

*y que existe*

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

*Entonces existe*

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

DEMOSTRACIÓN: Tomemos cualquier número  $a < t < b$  y consideremos las funciones  $f, g : [a, t] \rightarrow \mathbb{R}$  extendidas a  $a$  con los valores  $f(a) = g(a) = 0$ . Es claro que así son continuas en  $[a, t]$  y derivables en  $]a, t[$ . Podemos aplicar el teorema de Cauchy 3.25, según el cual existe un número  $a < c < t$  tal que

$$(f(t) - f(a))g'(c) = (g(t) - g(a))f'(c).$$

Como  $g'$  no se anula,  $g$  es estrictamente monótona, luego el segundo factor no es nulo. Podemos despejar:

$$\frac{f(t)}{g(t)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Hemos tomado un  $t$  arbitrario. Si lo escogemos  $t \approx a$ , entonces también  $c \approx a$ , con lo que

$$\frac{f(t)}{g(t)} \approx \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

y esto prueba el teorema. ■

Es evidente que la regla de L'hôpital vale igualmente con límites cuando  $x \rightarrow b$  e incluso, combinando los casos  $]a, c[$  y  $]c, b[$ , se demuestra trivialmente esta otra versión:

**Teorema 3.50 (Regla de L'Hôpital)** Sean  $f, g : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones derivables tales que  $g$  y  $g'$  no se anulen en  $]a, b[$  excepto en un punto  $a < c < b$ . Supongamos que  $f(c) = g(c) = 0$  y que existe

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Entonces existe

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

También es fácil deducir una versión para límites en  $\pm\infty$ :

**Teorema 3.51 (Regla de L'Hôpital)** Sean  $f, g : ]a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones derivables tales que  $g$  y  $g'$  no se anulan. Supongamos que existen

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

así como

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Entonces existe

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer  $a > 0$ . Basta considerar las funciones

$$F, G : ]0, 1/a[ \longrightarrow \mathbb{R}$$

dadas por  $F(x) = f(1/x)$ ,  $G(x) = g(1/x)$ . Es claro que son derivables, así como que existe

$$\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0} G(x) = 0,$$

y

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(1/x) \frac{-1}{x^2}}{g'(1/x) \frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(Notemos también que ni  $G$  ni  $G'$  se anulan.) Por la versión ya probada, sabemos que existe

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

pero esto equivale a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

■

De aquí deducimos a su vez una versión para el caso en que las funciones tienden a infinito:

**Teorema 3.52 (Regla de L'Hôpital)** Sean  $f, g : ]a, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$  dos funciones derivables tales que  $g$  y  $g'$  no se anulen en  $]a, +\infty[$ . Supongamos que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \infty$$

y que existe

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Entonces existe

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer que todos los datos son estándar. Sea

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Esto implica que si  $M > a$  es infinito y  $c > M$ , entonces

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} \approx L,$$

luego, en particular,

$$\left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - L \right| < \epsilon.$$

Por transferencia, esto es válido también para todo  $c$  mayor que un cierto  $M > a$  estándar. Sea  $x > a$  un número real infinito. Por el teorema de Cauchy 3.25, existe un número  $M < c < x$  tal que

$$\frac{f(x) - f(M)}{g(x) - g(M)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Notemos que, como  $g'$  no se anula, la función  $g$  es monótona, luego el denominador de la izquierda es no nulo. Observemos ahora que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(M)}{g(x) - g(M)} \frac{f(x)}{f(x) - f(M)} \frac{g(x) - g(M)}{g(x)},$$

y

$$\frac{f(x)}{f(x) - f(M)} = \frac{1}{1 - f(M)/f(x)} \approx 1, \quad \frac{g(x) - g(M)}{g(x)} = 1 - \frac{g(M)}{g(x)} \approx 1,$$

luego

$$\frac{f(x)}{g(x)} \approx \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

donde hemos usado que el cociente de la derecha es finito, tanto si  $c$  es finito como si es infinito. Por consiguiente:

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| < \epsilon.$$

Esto vale para todo  $x$  infinito, luego también vale para todo  $x > x_0$ , donde  $x_0 > a$  es un número estándar que depende de  $\epsilon$ , pero si  $x > 0$  es infinito, cumplirá  $x > x_0$  para cualquier  $x_0$  estándar, luego cumplirá la desigualdad anterior para todo  $\epsilon > 0$  estándar. Así pues,

$$\frac{f(x)}{g(x)} \approx L,$$

luego

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L. \quad \blacksquare$$

Dejamos como ejercicio la prueba de este último caso (que tiene su versión análoga con límites en  $b$  en lugar de en  $a$ ):

**Teorema 3.53 (Regla de L'Hôpital)** Sean  $f, g : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones derivables tales que  $g$  y  $g'$  no se anulen en  $]a, b[$ . Supongamos que

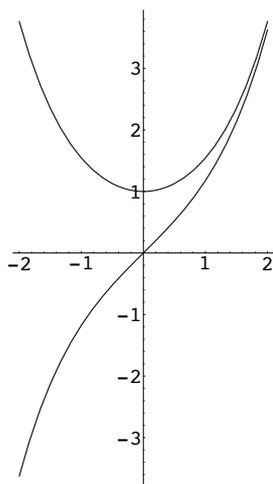
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$$

y que existe

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Entonces existe

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$



**Ejercicio:** Estudiar las funciones *seno hiperbólico* y *coseno hiperbólico*, definidas como sigue:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Demostrar que  $\sinh' x = \cosh x$ ,  $\cosh' x = \sinh x$ , que satisfacen la relación

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

así como que cumplen todas las propiedades que muestran sus gráficas (crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos, concavidad y convexidad, límites en  $\pm\infty$ ).

Demostrar que las restricciones

$$\sinh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \cosh : [0, +\infty[ \longrightarrow [1, +\infty[$$

son biyectivas, por lo que existen las inversas

$$\operatorname{arg} \sinh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \operatorname{arg} \cosh : [1, +\infty[ \longrightarrow [0, +\infty[ ,$$

(llamadas *argumento del seno hiperbólico* y *argumento del coseno hiperbólico*.)

Demostrar que sus derivadas son

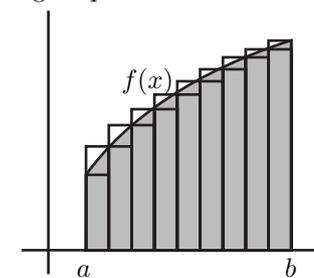
$$\operatorname{arg} \sinh'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \operatorname{arg} \cosh'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

## Capítulo IV

# Cálculo integral de una variable

### 4.1 La integral de Riemann

El concepto de integral de una función nos permite calcular ciertas sumas de infinitos números infinitesimales. Se trata de un esquema muy general que admite interpretaciones muy diversas en contextos muy distintos, de entre las cuales la más simple y la más natural a la hora de presentar la definición es el problema del cálculo de áreas. El área de un rectángulo es —y podemos considerar esto como una definición— el producto de su base por su altura. Vamos a ver que este hecho, junto con algunas propiedades obvias que es natural suponer al concepto de área (por ejemplo, que si una región está contenida en otra mayor, el área de la primera sea menor o igual que la de la segunda) determina completamente un único valor numérico para el área de cualquier región plana razonable.



Concretamente, vamos a ver que la integral de una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  puede interpretarse como el área limitada entre su gráfica y el eje  $x$  (la región sombreada en la figura). En ella hemos dibujado también una familia de rectángulos que tocan a la gráfica de la función y quedan por debajo de ella, y otra que queda por encima. De este modo, la suma de las áreas de los rectángulos “inferiores” ha de ser menor que el área sombreada, y la suma de las áreas de los rectángulos “superiores” ha de ser mayor.

Empezamos describiendo formalmente la construcción que muestra la figura:

**Definición 4.1** Una *partición* de un intervalo  $[a, b]$  es un subconjunto finito  $P$  de  $[a, b]$  tal que  $a, b \in P$ . Si  $P$  tiene  $n + 1$  elementos, podemos numerarlos

unívocamente en la forma

$$P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}.$$

Llamaremos  $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i > 0$ . La *norma* de  $P$  es

$$\|P\| = \max_i \Delta x_i > 0.$$

Una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  está *acotada* si existe un número  $M \in \mathbb{R}$  tal que  $|f(x)| \leq M$  para todo  $x \in [a, b]$ .

Si  $f$  está acotada y  $P$  es una partición de  $[a, b]$ , definimos

$$m_i = \inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \quad M_i = \sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

(Obviamente son conjuntos no vacíos acotados superiormente por cualquier cota  $M$  de  $f$  e inferiormente por  $-M$ , luego tienen supremo e ínfimo.)

Definimos la *suma inferior* y la *suma superior de Riemann* de  $f$  respecto a la partición  $P$  como

$$s(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i, \quad S(f, P) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i.$$

Volviendo a la figura anterior, si  $P$  es la partición del intervalo  $[a, b]$  formada por las bases de los rectángulos que hemos dibujado, entonces los rectángulos inferiores tienen altura  $m_i$  y los superiores  $M_i$ . La suma inferior de Riemann es la suma de las áreas de los rectángulos inferiores y la suma superior es la suma de las áreas de los rectángulos superiores. Por consiguiente, son aproximaciones por defecto y por exceso al área sombreada.<sup>1</sup>

Vamos a demostrar que, para funciones razonables, las aproximaciones se hacen infinitamente buenas cuando tomamos particiones de norma infinitesimal. La clave para ello es el teorema siguiente, que nos permite comparar las sumas calculadas con dos particiones distintas:

**Teorema 4.2** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada y sean  $P \subset P'$  dos particiones de  $[a, b]$ . Entonces

$$s(f, P) \leq s(f, P') \leq s(f, P) + 2Mr\|P\|,$$

$$S(f, P) \geq S(f, P') \geq S(f, P) - 2Mr\|P\|,$$

donde  $M$  es una cota de  $f$  y  $r$  es el número de elementos de  $P' \setminus P$ .

<sup>1</sup>Pero hemos de advertir que si la función  $f$  tomara valores negativos, los valores de  $m_i$  y  $M_i$  en las regiones donde esto sucediera serían también negativos, con lo que la porción de área situada bajo el eje  $X$  se contaría negativamente, de modo que, en realidad, las sumas de Riemann serían aproximaciones a la diferencia entre el área situada sobre el eje  $X$  y el área situada bajo él.

DEMOSTRACIÓN: Vamos a probar el teorema por inducción sobre  $r$ . Supongamos en primer lugar que  $P'$  consta de un único punto más que  $P$ . Llamemos  $x'$  a este punto, que estará entre dos puntos de  $P$ , digamos  $x_{i-1} < x' < x_i$ .

Vamos a llamar  $m'$  y  $m''$  a los ínfimos de  $f$  en los intervalos  $[x_{i-1}, x']$  y  $[x', x_i]$ , mientras que  $m_i$  es el ínfimo en  $[x_{i-1}, x_i]$ .

De la inclusión  $[x_{i-1}, x'] \subset [x_{i-1}, x_i]$  y de la definición de ínfimo se sigue fácilmente que  $m' \geq m_i$ , e igualmente  $m'' \geq m_i$ . Claramente,

$$\begin{aligned} s(f, P') - s(f, P) &= m'(x' - x_{i-1}) + m''(x_i - x') - m_i(x_i - x_{i-1}) \\ &= (m' - m_i)(x' - x_{i-1}) + (m'' - m_i)(x_i - x') \geq 0. \end{aligned}$$

Por otra parte,  $m' - m_i = |m' - m_i| \leq |m'| + |m_i| \leq 2M$ , e igualmente  $m'' - m_i \leq 2M$ . Además  $x' - x_{i-1} \leq x_i - x_{i-1} \leq \|P\|$  y también  $x_i - x' \leq \|P\|$ . Por lo tanto

$$s(f, P') - s(f, P) \leq 2M\|P\|.$$

Esto prueba el teorema para  $r = 1$ . Si es cierto para  $r$  y  $P'$  tiene  $r + 1$  puntos adicionales, consideramos la partición  $P''$  que resulta de eliminar uno de estos puntos. Basta aplicar la hipótesis de inducción y el caso  $r = 1$  ya probado (notemos que  $\|P''\| \leq \|P\|$ ):

$$\begin{aligned} s(f, P) &\leq s(f, P'') \leq s(f, P') \leq s(f, P'') + 2M\|P''\| \\ &\leq s(f, P) + 2Mr\|P\| + 2M\|P\| = s(f, P) + 2M(r + 1)\|P\|. \end{aligned}$$

El caso de las sumas superiores es completamente análogo. ■

En particular tenemos que cualquier suma inferior es menor o igual que cualquier suma superior:

**Teorema 4.3** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada y sean  $P, P'$  particiones de  $[a, b]$ . Entonces

$$s(f, P) \leq S(f, P').$$

DEMOSTRACIÓN: Basta tomar  $P'' = P \cup P'$  y aplicar el teorema anterior:

$$s(f, P) \leq s(f, P'') \leq S(f, P'') \leq S(f, P').$$

Notemos que la desigualdad central se sigue inmediatamente de la definición de las sumas inferiores y superiores. ■

Esto se interpreta como que entre cualquier suma inferior y cualquier suma superior debe encontrarse el área limitada por la función  $f$ .

**Definición 4.4** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada. Definimos la *integral inferior* y la *integral superior de Darboux* como

$$\int_a^b f(x) dx = \sup_P s(f, P), \quad \int_a^b f(x) dx = \inf_P S(f, P),$$

donde  $P$  recorre las particiones de  $[a, b]$ .

Notemos que el supremo de las sumas inferiores existe porque el conjunto de todas ellas es obviamente no vacío y, según el teorema anterior, está acotado superiormente por cualquier suma superior. Igualmente, el conjunto de las sumas superiores está acotado inferiormente por cualquier suma inferior. También es evidente que

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx$$

La integral inferior es el valor al que aproximan las sumas inferiores de Riemann (con más exactitud cuanto menor sea la norma de la partición), mientras que la integral superior es el valor al que aproximan las sumas superiores. Ahora probamos que, para aproximarnos a las integrales inferior y superior mediante sumas de Riemann, no tenemos que preocuparnos de escoger con cuidado la partición que empleamos, sino que nos sirve cualquier partición (de norma) infinitesimal.

**Teorema 4.5** *Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función estándar acotada. Si  $P$  es una partición infinitesimal de  $[a, b]$ , entonces*

$$s(P, f) \approx \int_a^b f(x) dx, \quad S(P, f) \approx \int_a^b f(x) dx.$$

DEMOSTRACIÓN: Sea  $\epsilon > 0$  estándar. Existe una partición  $P'$ , que podemos tomar estándar, tal que

$$\int_a^b f(x) dx - \epsilon < s(P', f) \leq \int_a^b f(x) dx.$$

Sea  $k$  el número de elementos de  $P'$ , que será finito. Sea  $P'' = P \cup P'$ . Entonces, el número de puntos de  $P'' \setminus P$  es  $r \leq k$ . Si  $M$  es una cota (estándar) de  $f$ , el teorema 4.2 nos da que

$$s(P, f) \leq s(P'', f) \leq s(P', f) + 2Mr\|P\|,$$

lo que implica que  $s(P, f) \approx s(P'', f)$ , puesto que  $\|P\|$  es infinitesimal. Por otra parte,

$$\int_a^b f(x) dx - \epsilon < s(P', f) \leq s(P'', f),$$

de donde

$$\int_a^b f(x) dx - \epsilon \leq s(P, f) \leq \int_a^b f(x) dx.$$

Como esto vale para todo  $\epsilon > 0$  estándar, ha de ser

$$s(P, f) \approx \int_a^b f(x) dx.$$

La prueba para sumas superiores es completamente análoga. ■

Equivalentemente, la integral inferior (resp. superior) es la parte estándar de cualquier suma inferior (resp. superior) correspondiente a una partición infinitesimal. En particular, todas las sumas inferiores (resp. superiores) correspondientes a particiones infinitesimales están infinitamente próximas entre sí. Ahora bien, no tiene por qué suceder que las sumas inferiores estén infinitamente próximas a las superiores. En esto consiste precisamente la integrabilidad:

**Definición 4.6** Una función acotada  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es *integrable (Riemann)* si su integral inferior coincide con su integral superior, en cuyo caso, a este valor común se le llama *integral (de Riemann)* de  $f$ , y se representa por

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Así pues,  $f$  es integrable cuando las sumas inferiores y las sumas superiores aproximan ambas a un mismo número real, que se convierte así en el único valor que podemos tomar como definición del área limitada por la gráfica de la función. Insistimos, no obstante, en que la interpretación de una integral como suma de infinitos términos infinitesimales es mucho más amplia, y se aplica en muchos contextos que no tienen ninguna relación directa con el cálculo de áreas.

Por ejemplo, si  $v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es la velocidad de un móvil en cada instante  $t$ , los valores  $m_i$  y  $M_i$  son estimaciones por defecto y por exceso de la velocidad que el móvil ha mantenido a lo largo del periodo  $[t_{i+1}, t_i]$ , con lo que  $m_i \Delta t_i$  y  $M_i \Delta t_i$  son estimaciones por defecto y por exceso del espacio recorrido en dicho periodo, las sumas  $s(v, P)$ ,  $S(v, P)$  son estimaciones por defecto y por exceso del espacio recorrido en el intervalo de tiempo  $[a, b]$ , y lo mismo vale para la integral inferior y la integral superior. Por consiguiente, si  $v$  es integrable, su integral ha de ser exactamente el espacio recorrido por el móvil en  $[a, b]$ .

La siguiente caracterización no estándar de la integrabilidad, cuya prueba es inmediata, es mucho más práctica que la definición (clásica) en términos de integrales inferiores y superiores, es decir, en términos de supremos e ínfimos:

**Teorema 4.7** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función estándar acotada y sea  $P$  una partición de  $[a, b]$  de norma infinitesimal. Entonces, la función  $f$  es integrable si y sólo si  $s(P, f) \approx S(P, f)$ , en cuyo caso, la integral es la parte estándar de estas sumas.

**Ejemplo** La función  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

no es integrable Riemann.

En efecto, basta tener en cuenta que, si  $P$  es cualquier partición de  $[0, 1]$ , es claro que  $s(f, P) = 0$  y  $S(f, P) = 1$ . ■

Notemos que la función del ejemplo anterior es discontinua en todos los puntos. En el extremo opuesto, tenemos el teorema siguiente:

**Teorema 4.8** Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua, entonces es integrable.

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer que  $f$  es estándar. Observemos que  $f$  está acotada por el teorema 3.10. Sea  $P = \{x_0, \dots, x_n\}$  una partición infinitesimal de  $[a, b]$ . De nuevo por el teorema 3.10, existen puntos  $x_{i-1} \leq u_i, v_i \leq x_i$  tales que  $m_i = f(u_i)$ ,  $M_i = f(v_i)$ . Notemos que  $u_i \approx v_i$ , luego ambos tienen la misma parte estándar  $w \in [a, b]$ . Como  $f$  es continua en  $w$ , tenemos que

$$m_i = f(u_i) \approx f(w) \approx f(v_i) = M_i.$$

Por consiguiente,  $\delta = \max_i (M_i - m_i)$  es infinitesimal, y

$$S(f, P) - s(f, P) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i \leq \delta \sum_{i=1}^n \Delta x_i = \delta(b-a) \approx 0,$$

luego  $S(f, P) \approx s(f, P)$ . ■

Veamos ahora las propiedades básicas de las funciones integrables:

**Teorema 4.9** Si  $f$  y  $g$  son funciones integrables en un intervalo  $[a, b]$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$ , también son integrables  $f + g$ ,  $fg$  y  $\alpha f$ . Además:

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx,$$

$$\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx.$$

Si  $f(x) \leq g(x)$  para todo  $x \in [a, b]$ , se cumple que

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer que todos los datos son estándar. Sea  $P$  una partición infinitesimal de  $[a, b]$ . Es fácil comprobar que

$$m_i(f+g) \geq m_i(f) + m_i(g), \quad M_i(f+g) \leq M_i(f) + M_i(g),$$

con lo que

$$s(f, P) + s(g, P) \leq s(f+g, P) \leq S(f+g, P) \leq S(f, P) + S(g, P).$$

Como  $f$  y  $g$  son integrables, los extremos de estas desigualdades son números infinitamente próximos, luego los cuatro términos están infinitamente próximos entre sí. Esto prueba que  $f + g$  es integrable, así como que

$$\int_a^b (f(x)+g(x)) dx \approx S(f+g, P) \approx S(f, P)+S(g, P) \approx \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

Para  $\alpha f$  tenemos que  $m_i(\alpha f) = \alpha m_i(f)$ ,  $M_i(\alpha f) = \alpha M_i(f)$ , y razonamos análogamente.

Ahora vamos a probar que si  $f$  sólo toma valores  $\geq 0$ , entonces  $f^2$  es integrable. Para ello observamos que<sup>2</sup>  $m_i(f^2) = m_i(f)^2$  y  $M_i(f^2) = M_i(f)^2$ , luego

$$\begin{aligned} S(f^2, P) - s(f^2, P) &= \sum_{i=1}^n (M_i(f)^2 - m_i(f)^2) \Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^n (M_i(f) + m_i(f))(M_i(f) - m_i(f)) \Delta x_i \leq 2M(S(f, P) - s(f, P)) \approx 0, \end{aligned}$$

donde  $M$  es una cota (estándar) de  $f$  en  $[a, b]$ . Esto prueba la integrabilidad de la función  $f^2$ .

Ahora veamos que  $f^2$  es integrable incluso aunque tome valores negativos. Para ello observamos que, si  $M$  es una cota de  $f$ , la función  $f + M$  sólo toma valores positivos, y es integrable porque la función constante  $M$  es continua y la suma de funciones integrables es integrable. Por la parte ya probada,  $(f + M)^2 = f^2 + M^2 + 2Mf$  es integrable, pero también hemos probado que  $M^2 + 2Mf$  es integrable, luego  $f^2$  es integrable.

En general, hemos probado que los cuadrados de las funciones integrables son integrables. Por consiguiente:

$$fg = \frac{(f+g)^2 - (f-g)^2}{4},$$

también es integrable.

Por último, si  $f(x) \leq g(x)$  para todo  $x \in [a, b]$ , tenemos que  $(g-f)(x) \geq 0$  para todo  $x \in [a, b]$ , y de la propia definición de integral se sigue que

$$\int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx \geq 0.$$

■

En particular hemos probado que el conjunto de las funciones integrables en  $[a, b]$  es un subanillo de  $F([a, b])$  que contiene a  $C([a, b])$ .

Si  $f$  es una función definida en un intervalo mayor que  $[a, b]$ , diremos que es integrable en  $[a, b]$  cuando lo sea  $f|_{[a, b]}$ .

**Teorema 4.10** *Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada y sea  $a < c < b$ . Entonces  $f$  es integrable en  $[a, b]$  si y sólo si lo es en  $[a, c]$  y en  $[c, b]$ , en cuyo caso*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

---

<sup>2</sup>Probamos, en general, que si  $f : [u, v] \rightarrow [0, +\infty[$  es una función acotada, entonces  $m(f^2) = m(f)^2$ , donde  $m$  representa al ínfimo en  $[u, v]$ . Para ello suponemos que los datos son estándar y observamos que, para todo  $x \in [u, v]$ , se cumple  $0 \leq m(f) \leq f(x)$ , luego  $m(f)^2 \leq f(x)^2$ , luego  $m(f)^2$  es una cota inferior de  $f^2$ . Por otra parte, existe un  $x \in [u, v]$  tal que  $m(f) \approx f(x)$ , luego  $m(f)^2 \approx f(x)^2$ , luego  $m(f)^2$  es el ínfimo de  $f^2$ . Igualmente se razona con los supremos.

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer que los datos son estándar. Tomemos particiones infinitesimales  $P_1$  y  $P_2$  de  $[a, c]$  y  $[c, b]$ , respectivamente, de modo que  $P = P_1 \cup P_2$  es una partición infinitesimal de  $[a, b]$ . Es obvio que

$$s(f|_{[a,c]}, P_1) + s(f|_{[c,b]}, P_2) = s(f, P), \quad S(f|_{[a,c]}, P_1) + S(f|_{[c,b]}, P_2) = S(f, P).$$

Por consiguiente:

$$S(f, P) - s(f, P) = (S(f|_{[a,c]}, P_1) - s(f|_{[a,c]}, P_1)) + (S(f|_{[c,b]}, P_2) - s(f|_{[c,b]}, P_2)).$$

Las tres diferencias de sumas son  $\geq 0$ , luego el miembro izquierdo es infinitesimal si y sólo si los dos sumandos de la derecha lo son. ■

Ahora podemos probar la existencia de funciones integrables discontinuas:

**Teorema 4.11** *Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua salvo a lo sumo en un número finito de puntos, entonces es integrable.*

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer que los datos son estándar. Vamos a suponer en primer lugar que  $f$  es continua excepto en  $b$ . Por el Principio de Idealización II, existe un conjunto finito  $F \subset [a, b]$  que contiene a todos los elementos estándar de  $[a, b]$ . Uniendo  $F$  a una partición infinitesimal de  $[a, b]$ , obtenemos otra partición infinitesimal  $P$  que contiene a  $F$ .

Si  $r \in ]a, b[$  es estándar, consideramos las particiones  $P_r = P \cap [a, r]$  y  $P'_r = P \cap [r, b]$ . Claramente:

$$\begin{aligned} S(f, P) - s(f, P) &= S(f|_{[a,r]}, P_r) - s(f|_{[a,r]}, P_r) + S(f|_{[r,b]}, P'_r) - s(f|_{[r,b]}, P'_r) \\ &\leq S(f|_{[a,r]}, P_r) - s(f|_{[a,r]}, P_r) + 2M(b-r), \end{aligned}$$

donde  $M$  es una cota (estándar) de  $f$  en  $[a, b]$ . Como  $f$  es continua en  $[a, r]$ , sabemos que es integrable, luego la diferencia de sumas de Riemann del último término es infinitesimal. Tomando partes estándar vemos que

$$0 \leq \int_a^{\overline{b}} f(x) dx - \int_a^b f(x) dx \leq 2M(b-r).$$

Como esto es cierto para todo número estándar  $a < r < b$ , la integral superior ha de coincidir con la integral inferior.

El mismo razonamiento es válido si  $f$  es continua salvo en  $a$ . Si  $f$  es continua salvo en  $a$  y en  $b$ , tomamos  $a < c < b$  y concluimos que  $f$  es integrable en  $[a, c]$  y en  $[c, b]$ , luego lo es en  $[a, b]$ .

En general, si  $f$  es continua salvo a lo sumo en un conjunto finito de puntos  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ , entonces tenemos que  $f|_{[x_{i-1}, x_i]}$  es continua salvo quizá en los extremos del intervalo, luego es integrable en  $[x_{i-1}, x_i]$ , y por el teorema anterior es integrable en  $[a, b]$ . ■

**Ejercicio:** Probar que si dos funciones coinciden en un intervalo  $[a, b]$  salvo a lo sumo en un número finito de puntos, entonces una es integrable si y sólo si lo es la otra, y en tal caso las integrales coinciden.

**Ejercicio:** Probar que si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es integrable, también lo es  $|f|$  y

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

(Ayuda: probar que  $M_i(|f|, P) - m_i(|f|, P) \leq M_i(f, P) - m_i(f, P)$ .)

Nos ocupamos ahora del cálculo explícito de integrales. En primer lugar conviene observar que, si sabemos que una función es integrable, su integral se puede aproximar mediante sumas construidas a partir de valores concretos que tome la función en cada intervalo de una partición infinitesimal, sin necesidad de calcular supremos e ínfimos:

**Teorema 4.12** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función estándar integrable en  $[a, b]$ , sea  $P$  una partición infinitesimal (de  $n+1$  elementos) y sea  $\{y_i\}_{i=1}^n$  un conjunto de puntos tales que  $y_i \in [x_{i-1}, x_i]$ . Entonces

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n f(y_i) \Delta x_i.$$

DEMOSTRACIÓN: Es evidente que

$$s(f, P) \leq \sum_{i=1}^n f(y_i) \Delta x_i \leq S(f, P).$$

■

**Teorema 4.13 (Regla de Barrow)** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua en  $[a, b]$  y derivable en  $]a, b[$ . Si  $f'$  es integrable en  $[a, b]$  entonces

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a).$$

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer que  $f$  es estándar. Fijamos una partición infinitesimal y aplicamos el teorema del valor medio a cada intervalo, de modo que encontramos puntos  $y_i \in [x_{i-1}, x_i]$  tales que

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(y_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Entonces

$$\int_a^b f'(x) dx \approx \sum_{i=1}^n f'(y_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) = f(b) - f(a).$$

Como el primer y el último término son estándar, de hecho se tiene la igualdad. ■

Así pues, para calcular la integral de una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  basta encontrar una función  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua en  $[a, b]$  y derivable en  $]a, b[$  tal que  $f = F'$ . Una tal función  $F$  es lo que se conoce como una *primitiva* de  $f$ . El teorema siguiente demuestra que toda función continua tiene una primitiva, aunque la forma de construirla no ayuda mucho a calcular integrales:

**Teorema 4.14** *Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función integrable, entonces la función*

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

*es continua en  $[a, b]$  y, si  $f$  es continua,  $F$  es derivable en  $]a, b[$  y  $F' = f$ .*

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer que  $f$  es estándar. Hemos de entender que, por definición,  $F(a) = 0$ . Tomemos  $x \in [a, b]$  también estándar y consideremos un infinitésimo  $h$  tal que  $x + h \in [a, b]$ . Si  $h > 0$  tenemos que

$$F(x + h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t) dt$$

y la monotonía de la integral implica que

$$h \inf_{t \in [x, x+h]} f(t) \leq F(x + h) - F(x) \leq h \sup_{t \in [x, x+h]} f(t).$$

El supremo y el ínfimo son finitos, luego los extremos de las desigualdades son infinitesimales, luego  $F(x + h) \approx F(x)$ . Si  $h < 0$  tenemos

$$-h \inf_{t \in [x+h, x]} f(t) \leq F(x) - F(x + h) \leq -h \sup_{t \in [x+h, x]} f(t).$$

y llegamos a la misma conclusión. Esto prueba que  $F$  es continua en  $x$ . Supongamos ahora que, además,  $x \in ]a, b[$ ,  $f$  es continua en  $x$  y  $h \neq 0$ . Las expresiones anteriores nos dan

$$\inf_{t \in [x, x+h]} f(t) \leq \frac{F(x + h) - F(x)}{h} \leq \sup_{t \in [x, x+h]} f(t)$$

o bien

$$\inf_{t \in [x+h, x]} f(t) \leq \frac{F(x) - F(x + h)}{h} \leq \sup_{t \in [x+h, x]} f(t).$$

En ambos casos, como  $f$  es continua en  $x$ , el supremo y el ínfimo se alcanzan en puntos del intervalo correspondiente y están infinitamente próximos a  $f(x)$ . Así pues,

$$\frac{F(x + h) - F(x)}{h} \approx f(x),$$

luego existe  $F'(x) = f(x)$ . ■

**Nota** Si adoptamos el convenio de que

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx,$$

en el teorema anterior no es necesario tomar  $a$  como extremo fijo de la integral. En efecto, podemos tomar cualquier número  $a < c < b$  y definir  $F_c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$F_c(x) = \int_c^x f(x) dx.$$

Entonces

$$F_c(x) = \int_a^x f(x) dx - \int_a^c f(x) dx = F(x) - \int_a^c f(x) dx.$$

Así, como  $F_c$  y  $F$  se diferencian en una constante, existe  $F'_c = F' = f$ . ■

No vamos a entrar aquí en las técnicas de cálculo de primitivas. Muchas de ellas se deducen mecánicamente de las reglas de derivación que ya hemos visto. Por ejemplo, del hecho de que la derivada de  $x^n$  es  $nx^{n-1}$ , para todo  $n \in \mathbb{Z}$ , se deduce inmediatamente que

$$\int_a^b x^n dx = \left[ \frac{x^{n+1}}{n+1} \right], \quad \text{para } n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}.$$

**Ejercicio:** Demostrar que

$$\int_a^b \frac{1}{x} = [\ln |x|]_a^b,$$

donde  $0 < a < b$  o bien  $a < b < 0$ .

**Ejercicio:** Demostrar la regla de *integración por partes*:

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b v(x)u'(x) dx.$$

**Teorema 4.15 (Teorema de cambio de variable)** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y  $x : [u, v] \rightarrow [a, b]$  una función biyectiva, continua, derivable en  $]c, d[$  y con derivada positiva. (En particular, se cumplirá que  $a = x(u)$ ,  $b = x(v)$ .) Entonces

$$\int_{x(u)}^{x(v)} f(x) dx = \int_u^v f(x(t))x'(t) dt.$$

DEMOSTRACIÓN: Las hipótesis sobre  $x$  implican que es estrictamente creciente (y, en particular, que  $x(u) = a$ ,  $x(v) = b$ , como se indica en el enunciado). Por lo tanto, si  $\{t_i\}_{i=0}^n$  es una partición infinitesimal de  $[u, v]$  y hacemos  $x_i = x(t_i)$  entonces  $\{x_i\}_{i=0}^n$  es una partición de  $[a, b]$ , y es infinitesimal porque,

al ser  $x$  continua en  ${}^*t_i \approx t_i \approx t_{i-1}$ , tenemos que  $x({}^*t_i) \approx x(t_i) \approx x(t_{i-1})$ . Por el teorema del valor medio existen puntos  $c_i \in ]t_{i-1}, t_i[$  tales que  $\Delta x_i = x'(c_i)\Delta t_i$ . Por lo tanto

$$\int_{x(u)}^{x(v)} f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n f(x(c_i))\Delta x_i = \sum_{i=1}^n f(x(c_i))x'(c_i)\Delta t_i \approx \int_u^v f(x(t))x'(t) dt.$$

Como los dos extremos son estándar, se tiene la igualdad. ■

**Nota** El teorema es válido también si, en lugar de suponer que  $x$  tiene derivada positiva, suponemos que tiene derivada no nula. En tal caso, la única alternativa es que la derivada sea negativa. La prueba es válida igualmente, salvo que ahora  $x$  es decreciente, luego  $x(u) = b$ ,  $x(v) = a$  y  $x_i < x_{i-1}$ . Por lo tanto,  $\{x_i\}_{i=0}^n$  sigue formando una partición infinitesimal de  $[a, b]$ , sólo que está numerada al revés. La forma de numerarla no afecta al cálculo de la integral, pero hemos de tener presente que  $\Delta x_i = x_{i-1} - x_i = -x'(u_i)\Delta t_i$ . La conclusión es que

$$\int_{x(v)}^{x(u)} f(x) dx = - \int_u^v f(x(t))x'(t) dt = \int_v^u f(x(t))x'(t) dt.$$

Para enunciar conjuntamente los dos casos basta llamar  $t_0$  y  $t_1$  a los extremos  $u, v$ , pero ordenados de forma que  $a = x(t_0)$  y  $b = x(t_1)$ . Entonces, en ambos casos podemos escribir que

$$\int_{x(t_0)}^{x(t_1)} f(x) dx = \int_{t_0}^{t_1} f(g(t))g'(t) dt.$$

■

**Formas diferenciales** Vamos a introducir algunos conceptos que permiten expresar más eficientemente algunos de los resultados que hemos visto hasta aquí:

- Llamamos  $L(\mathbb{R})$  al conjunto de todas las *aplicaciones lineales*  $l : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , es decir, las aplicaciones de la forma  $l(u) = au$ , para un cierto  $a \in \mathbb{R}$ . (Observemos que, necesariamente,  $a = l(1)$ .)
- Definimos una suma  $+$  :  $L(\mathbb{R}) \times L(\mathbb{R}) \rightarrow L(\mathbb{R})$  dada por

$$(l + l')(u) = l(u) + l'(u).$$

Se comprueba inmediatamente que, en efecto,  $l + l' \in L(\mathbb{R})$ .

- Si  $D \subset \mathbb{R}$  es abierto, llamamos  $\Lambda(D)$  al conjunto de todas las aplicaciones  $\omega : D \rightarrow L(\mathbb{R})$ . A los elementos de  $\Lambda(D)$  los llamaremos *formas diferenciales* en  $D$ .

- Observemos que, si  $\omega \in \Lambda(D)$ , podemos definir  $f_\omega : D \rightarrow \mathbb{R}$  mediante  $f_\omega(a) = \omega(a)(1)$ , de modo que, para todo  $u \in \mathbb{R}$ , se cumple que

$$\omega(a)(u) = f_\omega(a)u.$$

Así,  $\omega$  está completamente determinada por  $f_\omega$  y, recíprocamente, dada cualquier función  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  podemos definir  $\omega(a)(u) = f(a)u$ . De este modo, los elementos de  $\Lambda(D)$  se corresponden biunívocamente con las funciones de  $F(D)$ . Diremos que una forma es continua, integrable, etc. si lo es su función correspondiente.

- Definimos una suma  $+$  :  $\Lambda(D) \times \Lambda(D) \rightarrow \Lambda(D)$  mediante

$$(\omega + \omega')(a) = \omega(a) + \omega'(a),$$

donde la suma del segundo miembro es la suma de  $L(\mathbb{R})$ . Claramente,  $f_{\omega+\omega'} = f_\omega + f_{\omega'}$ .

- Definimos un producto  $F(D) \times \Lambda(D) \rightarrow \Lambda(D)$  mediante

$$(g\omega)(a)(u) = g(a)\omega(a)(u).$$

Se comprueba inmediatamente que  $g\omega \in \Lambda(D)$ . Claramente,  $f_{g\omega} = gf_\omega$ .

- Si  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  es derivable, definimos su *diferencial* como la forma diferencial  $df \in \Lambda(D)$  dada por  $df(a)(u) = f'(a)u$ , es decir, como la forma determinada por la función  $f'$ .
- En particular, si  $f(x) = x$ , entonces  $f'(x) = 1$ , luego  $dx(a)(u) = u$ . Así, si  $\omega \in \Lambda(D)$  es cualquier forma diferencial, tenemos que

$$\omega(a)(u) = f_\omega(a)u = f_\omega(a)dx(a)(u),$$

luego  $\omega = f_\omega dx$ . En particular, para toda función derivable  $f \in F(D)$ , tenemos que  $df = f' dx$ .

- Si  $f$  es una función derivable, usaremos la notación  $\frac{df}{dx}$  para referirnos a su derivada  $f'$ , de modo que podemos escribir

$$df = \frac{df}{dx} dx.$$

- Si  $D$  contiene a un intervalo  $[a, b]$  y  $\omega$  es integrable en  $[a, b]$  (lo que, por definición, significa que  $f_\omega$  lo es), definimos

$$\int_a^b \omega = \int_a^b \omega(x) = \int_a^b f_\omega(x) dx.$$

Esto significa que, a partir de ahora, la expresión

$$\int_a^b f(x) dx,$$

en lugar de ser considerada como la integral de la función  $f$ , puede ser considerada como la integral de la forma diferencial  $f(x) dx$ . En ambos casos estamos hablando del mismo número real.

Con esta notación, las reglas de derivación se expresan así:

$$d(f + g) = df + dg, \quad d(\alpha f) = \alpha df, \quad d(fg) = f dg + g df.$$

La regla de la cadena afirma que si  $x(t)$  es derivable en  $t_0$  e  $y(x)$  es derivable en  $x_0 = x(t_0)$ , entonces  $y(x(t))$  es derivable en  $t_0$ , y

$$\frac{dy(x(t))}{dt}(t_0) = \frac{dy}{dx}(x_0) \frac{dx}{dt}(t_0).$$

A menudo no se presta a ambigüedad abreviar esta igualdad en la forma

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt},$$

donde hay que entender que la función  $y$  del primer miembro no es  $y(x)$ , sino la función compuesta  $y(x(t))$ .

El teorema de la función inversa afirma que, si tenemos funciones mutuamente inversas  $y = y(x)$  y  $x = x(y)$ , y un punto  $y_0 = y(x_0)$  (o, equivalentemente,  $x_0 = x(y_0)$ ), entonces

$$\frac{dy}{dx}(x_0) = \frac{1}{\frac{dx}{dy}(y_0)}.$$

Nuevamente, es frecuente abreviarlo en la forma:  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ .

Las reglas de integración son:

$$\int_a^b (\omega + \omega') = \int_a^b \omega + \int_a^b \omega', \quad \int_a^b \alpha \omega = \alpha \int_a^b \omega.$$

La regla de Barrow afirma que

$$\int_a^b df = f(b) - f(a).$$

Ahora podemos escribir la fórmula de integración por partes en su forma más conocida:

$$\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du.$$

Más interesante es el caso del teorema de cambio de variable: Si tenemos una integral

$$\int_a^b f(x) dx$$

y el cambio de variable  $x = x(t)$  cumple las hipótesis del teorema, es decir,  $x$  biyecta un intervalo  $[t_0, t_1]$  o  $[t_1, t_0]$  con  $[a, b]$ , donde los nombres  $t_0$  y  $t_1$  se

asignan a los extremos del intervalo de modo que  $a = x(t_0)$ ,  $b = x(t_1)$ , entonces, la igualdad

$$\int_{x(t_0)}^{x(t_1)} f(x) dx = \int_{t_0}^{t_1} f(x(t)) \frac{dx}{dt} dt$$

puede interpretarse como una mera sustitución de la variable  $x$  por la función  $x(t)$  y la forma diferencial  $dx$  por la forma diferencial

$$dx = \frac{dx}{dt} dt.$$

Terminamos la sección con un ejemplo sobre cómo el cálculo integral permite calcular polinomios de Taylor y estimar el error:

**Teorema 4.16** *La función  $f(x) = \log(1+x)$  admite un desarrollo en serie de Taylor*

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$$

que converge para  $-1 < x \leq 1$ .

DEMOSTRACIÓN: Partimos de la fórmula de la suma de una serie geométrica:

$$\sum_{n=0}^m x^n = \frac{1-x^{m+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{m+1}}{1-x}.$$

Esto es válido para todo  $x \in \mathbb{R}$ . En particular, para  $x = -t$ , lo que nos da

$$\frac{1}{1+t} - \sum_{n=0}^m (-1)^n t^n = \frac{(-1)^{m+1} t^{m+1}}{1+t}.$$

Ahora integramos:

$$\log(1+x) - \sum_{n=0}^m \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} = \int_0^x \frac{(-1)^{m+1} t^{m+1}}{1+t} dt.$$

Equivalentemente:

$$\log(1+x) - \sum_{n=1}^{m+1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \int_0^x \frac{(-1)^{m+1} t^{m+1}}{1+t} dt.$$

Vamos a probar que el polinomio del miembro izquierdo es el polinomio de Taylor de grado  $m+1$  de  $f(x)$ . Para ello llamamos  $R(x)$  al miembro izquierdo y, por la unicidad del polinomio de Taylor, basta probar que  $R^{(n)}(0) = 0$  para  $n = 0, \dots, m+1$ . Para ello observamos que

$$R'(x) = \frac{(-1)^{m+1} x^{m+1}}{1+x} = x^m g(x),$$

donde

$$g(x) = \frac{(-1)^{m+1}x}{1+x}$$

es una función de clase  $C^\infty$  en  $\mathbb{R}$  tal que  $g(0) = 0$ . Una simple inducción demuestra que, para  $1 \leq n \leq m+1$ , se cumple que

$$R^n(x) = x^{m+1-n}g_n(x),$$

donde  $g_n$  es una función de clase  $C^\infty$  en  $\mathbb{R}$  tal que  $g_n(x) = 0$ . De aquí se sigue obviamente que  $R^n(0) = 0$  y tenemos calculados los polinomios de Taylor.

Ahora falta probar que, para  $-1 < x \leq 1$  fijo (estándar), la sucesión de restos de Taylor

$$\left\{ \int_0^x \frac{(-1)^{m+1}t^{m+1}}{1+t} dt \right\}_{m \geq 0}$$

converge a 0. Ahora bien, si  $x \geq 0$

$$\left| \int_0^x \frac{(-1)^{m+1}t^{m+1}}{1+t} dt \right| \leq \int_0^x \frac{t^{m+1}}{1+t} dt \leq \int_0^x t^{m+1} dt = \frac{x^{m+2}}{m+2}.$$

Si  $m$  es infinito y  $x < 1$ , entonces  $x^{m+2} \approx 0$ , y si  $x = 1$ , entonces  $x^{m+2} = 1$ . En cualquier caso, el numerador de la última fracción es finito, y el denominador es infinito, luego la fracción es infinitesimal.

Si  $-1 < x < 0$ , acotamos de otro modo:

$$\left| \int_0^x \frac{(-1)^{m+1}t^{m+1}}{1+t} dt \right| \leq \int_x^0 \frac{|t|^{m+1}}{1+t} dt \leq \int_x^0 \frac{|t|^{m+1}}{1+x} dt = \frac{|x|^{m+2}}{(1+x)(m+2)}$$

Desde aquí se concluye igual que en el caso anterior. ■

En particular hemos probado que la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \log 2.$$

**Ejemplo** La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

es *divergente*.

En efecto, basta observar que, para  $n \geq 1$ ,

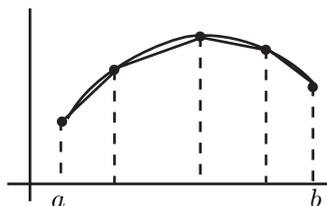
$$\int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{n} dx = \frac{1}{n},$$

luego

$$\log(m+1) = \int_1^{m+1} \frac{1}{x} dx \leq \sum_{n=1}^m \frac{1}{n}$$

Esto prueba que si  $m$  es infinito, la suma de la serie hasta  $m$  es infinita, luego la serie es divergente. ■

## 4.2 Las funciones trigonométricas



Consideremos una función  $f[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua en  $[a, b]$  y derivable en  $]a, b[$ . Su gráfica será una curva y vamos a calcular su longitud. Más precisamente, vamos a dar una definición razonable de longitud de una curva. Para ello consideramos una partición  $P$  de  $[a, b]$  y unimos con segmentos los puntos  $(x_i, f(x_i))$ , de modo que formamos una poligonal, tal y como muestra la figura. Vamos a probar que, si la partición es infinitesimal, la longitud de la poligonal estará infinitamente cerca de un único número estándar independiente de la partición escogida, y será a éste número el que tomaremos como definición de longitud de la curva.

En principio, la longitud de la poligonal es, claramente:

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^n \sqrt{\Delta x_i^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}.$$

Aplicando el teorema del valor medio encontramos puntos  $u_i \in ]x_{i-1}, x_i[$  tales que  $f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(u_i)\Delta x_i$ , con lo que

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + f'(u_i)^2} \Delta x_i \approx \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Naturalmente, esto exige que la función  $\sqrt{1 + f'(x)^2}$  sea integrable, lo que tenemos garantizado si suponemos, por ejemplo, que  $f'$  es continua y acotada en  $]a, b[$ .

**Definición 4.17** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua en  $[a, b]$ , derivable en  $]a, b[$  con derivada continua y acotada. Llamaremos *longitud* de  $f$  a

$$L(f) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Acabamos de probar que  $L(f)$  puede aproximarse por la longitud de una poligonal que coincida con  $f$  en una partición de  $[a, b]$ .

La función  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$  tiene por gráfica un cuarto de circunferencia de radio 1. Su derivada en  $]0, 1[$  es

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}},$$

y

$$1 + f'(x)^2 = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Así pues, la longitud de una circunferencia de radio 1 “debería ser” cuatro veces la integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

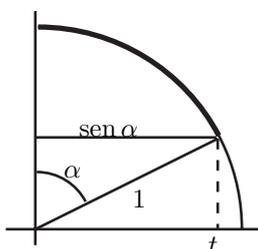
Ahora bien, esto no es correcto, porque el integrando no es una función acotada en  $[0, 1]$ , por lo que la integral anterior no está definida. Tendremos que ir más despacio.

Observamos que función  $f'$  está acotada en cualquier intervalo  $[0, t]$ , con  $0 < t < 1$ , ya que es continua en este intervalo. Esto nos permite definir la integral

$$A(t) = \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Así tenemos definida una función  $A : [0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  que, por el teorema 4.14 es derivable en  $]0, 1[$ . (Para probar que es derivable en  $t$ , aplicamos el teorema en un intervalo  $[0, t']$ , con  $0 < t < t' < 1$ .) Concretamente, su derivada es:

$$A'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}.$$



Reflexionemos sobre el significado de  $A(t)$ . Por construcción, sabemos que  $\alpha = A(t)$  es la longitud del arco destacado en la figura. Vamos a adoptar el convenio de medir un ángulo precisamente por la longitud del arco que determina sobre la circunferencia unidad. Entonces,  $\alpha$  es precisamente el ángulo señalado en la figura y  $t$  es el seno de  $\alpha$ , entendiendo “seno” en su sentido geométrico, es decir la longitud del cateto opuesto a  $\alpha$  en un triángulo rectángulo de hipotenusa igual a 1 y que tenga un ángulo igual a  $\alpha$ .

En definitiva, si  $0 \leq t < 1$ , tenemos que  $A(t)$  es el ángulo cuyo seno es  $t$ .

Ahora conviene hacer una observación técnica. La función  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$  puede considerarse como función  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , lo que a su vez nos permite considerar  $A : ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$ . El teorema 4.14 (véase la nota posterior) garantiza, de hecho, que  $A(t)$  es derivable en todo el intervalo  $] -1, 1[$ .

Esta extensión es trivial en el sentido siguiente: Si  $t > 0$ , el cambio de variable  $[0, t] \rightarrow [-t, 0]$  dado por  $x(u) = -u$ , nos da

$$A(-t) = \int_0^{-t} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^t \frac{-du}{\sqrt{1-u^2}} = -A(t).$$

Así pues, la extensión de  $A(t)$  al intervalo  $] -1, 0[$  sólo supone el convenio de asignar a cada seno negativo  $-t$  el ángulo cuyo seno es  $t$ , pero también con signo negativo.

**Definición 4.18** Llamaremos *arco seno* a la función  $\arcsen : ] -1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\arcsen t = \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

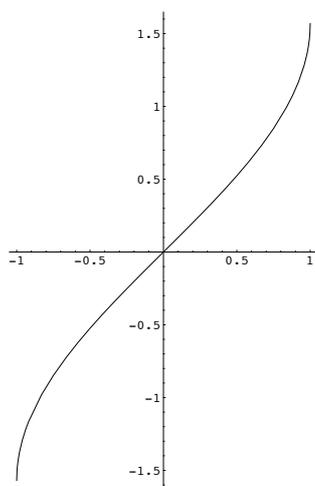
A partir de la definición es inmediato que  $\arcsen 0 = 0$ , hemos comprobado que

$$\arcsen(-t) = -\arcsen t,$$

y del teorema 4.14 se sigue que se trata de una función derivable con derivada

$$\arcsen'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}.$$

También hemos visto que su interpretación geométrica es que  $\alpha = \arcsen t$  (para  $t > 0$ ) es el ángulo cuyo seno es  $t$  o, equivalentemente, la longitud del arco de la circunferencia unidad determinado por el ángulo de seno  $t$ .



La figura nos muestra la gráfica de la función  $\arcsen$ , pero en estos momentos no podemos demostrar todo lo que vemos en ella. Ya hemos justificado su simetría, y también podemos asegurar que es estrictamente creciente, puesto que conocemos su derivada y es positiva. El teorema de la función inversa 3.22 nos da que su imagen es un intervalo, que, dada la simetría, será necesariamente de la forma  $] -p, p[$ , donde, o bien  $p \in \mathbb{R}$ , o bien  $p = +\infty$ .

En la figura vemos que —de hecho—  $p \in \mathbb{R}$  y es un poco mayor que 1.5. También la interpretación geométrica del arco seno exige que  $p$  sea finito, pues ha de ser, concretamente, la longitud de un cuarto de circunferencia. Sin embargo, hasta ahora no tenemos ningún argumento que lo

justifique. En cualquier caso, lo que tenemos es que

$$\arcsen : ]-1, 1[ \longrightarrow ]-p, p[$$

es biyectiva, y podemos considerar su inversa:

**Definición 4.19** Llamaremos función *seno* a la función

$$\text{sen} : ]-p, p[ \longrightarrow ]-1, 1[$$

inversa de la función arco seno.

Su interpretación geométrica es clara:  $\text{sen } \alpha$  es el seno (en el sentido geométrico) del ángulo (que determina en la circunferencia unidad un arco de longitud)  $\alpha$ .

De las propiedades que conocemos del arco seno se deduce inmediatamente que  $\text{sen } 0 = 0$  y que  $\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen } \alpha$ , así como que el seno es estrictamente creciente. Por el teorema de la función inversa sabemos que es derivable y que, si llamamos  $t = \text{sen } \alpha$ , entonces

$$\text{sen}' \alpha = \frac{1}{\arcsen' t} = \sqrt{1-t^2} = \sqrt{1-\text{sen}^2 \alpha}.$$

**Definición 4.20** Llamaremos *coseno* a la función

$$\cos : ]-p, p[ \longrightarrow ]0, 1]$$

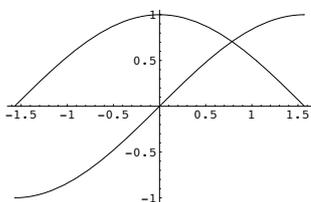
dada por  $\cos \alpha = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha}$ .

De este modo, es claro que

$$\cos 0 = 1, \quad \cos(-\alpha) = \cos \alpha, \quad \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad \operatorname{sen}' \alpha = \cos \alpha.$$

Más aún, como la raíz cuadrada es derivable en  $]0, +\infty[$ , tenemos que el coseno es derivable y su derivada es

$$\cos' \alpha = \frac{-2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{2\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha}} = -\operatorname{sen} \alpha.$$



La figura muestra las gráficas de las funciones seno y coseno. Sabemos que la función seno es monótona creciente y  $\operatorname{sen} 0 = 0$ , luego es negativa para  $\alpha < 0$  y positiva para  $\alpha > 0$ . Por consiguiente, el coseno tiene derivada positiva para  $\alpha < 0$  y derivada negativa para  $\alpha > 0$ . Esto prueba que su aspecto es el que muestra la figura:

es creciente hasta llegar a  $\alpha = 0$  (donde toma su valor máximo  $\cos 0 = 1$ ), y luego es decreciente. Lo único que no sabemos demostrar es que el intervalo  $]-p, p[$  es finito como muestra la figura. Para probarlo haremos uso del teorema siguiente:

**Teorema 4.21** Para todo par de números reales  $\alpha, \beta$  tales que

$$\alpha, \beta, \alpha + \beta \in ]-p, p[$$

se cumple que

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta.$$

DEMOSTRACIÓN: Fijado  $\beta \in ]-p, p[$ , sea  $I = ]-p, p[ \cap ]-p - \beta, p - \beta[$ , donde hemos de entender que, si  $p = +\infty$ , entonces  $-p - \beta = -\infty$ ,  $p - \beta = +\infty$ . Es claro que  $I$  es un intervalo abierto que contiene al 0. Se trata del mayor intervalo tal que, si  $x \in I$ , están definidos  $\operatorname{sen} x$ ,  $\cos x$  y  $\operatorname{sen}(x + \beta)$ .

Llamemos  $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$  a la función dada por

$$g(x) = \operatorname{sen}(x + \beta) - \operatorname{sen} x \cos \beta - \cos x \operatorname{sen} \beta.$$

Su derivada es

$$g'(x) = \cos(x + \beta) - \cos x \cos \beta + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \beta.$$

Vemos que la función  $g'$  también es derivable, y

$$g''(x) = -\operatorname{sen}(x + \beta) + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \beta + \cos x \cos \beta = -g(x).$$

Así pues,

$$(g'(x)^2 + g(x)^2)' = 2g'(x)g''(x) + 2g(x)g'(x) = 2g'(x)(g''(x) + g(x)) = 0,$$

para todo  $x \in I$ , luego la función  $g'(x)^2 + g(x)^2$  es constante en  $I$ . Ahora bien, resulta que en  $x = 0$  toma el valor 0, luego

$$g'(x)^2 + g(x)^2 = 0$$

para todo  $x \in I$ . Esto implica a su vez que  $g(x) = 0$ , luego se cumple la fórmula del enunciado. ■

Ahora podemos probar que  $p$  es finito. En efecto, tenemos que  $\sqrt{2}/2 \in ]0, 1[$ , luego existe un  $\alpha \in ]0, p[$  tal que  $\text{sen } \alpha = \sqrt{2}/2$ , y entonces  $\text{cos } \alpha = \sqrt{2}/2$ . Si  $p$  fuera infinito, se cumpliría que  $-\pi < \alpha + \alpha < p$ , y el teorema anterior nos daría  $\text{sen } 2\alpha = 1$ , lo cual es absurdo, pues la función seno no toma el valor 1 en  $] -p, p[$ .

**Definición 4.22** Llamaremos  $\pi = 2p$ , de modo que

$$\text{sen} : ]-\pi/2, \pi/2[ \longrightarrow ]-1, 1[, \quad \text{cos} : ]-\pi/2, \pi/2[ \longrightarrow ]0, 1].$$

Teniendo en cuenta que el seno es biyectivo en los intervalos indicados, así como que es estrictamente creciente, es inmediato que se extiende a una función biyectiva, estrictamente creciente y continua

$$\text{sen} : [-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow [-1, 1]$$

estableciendo que  $\text{sen}(-\pi/2) = -1$ ,  $\text{sen}(\pi/2) = 1$ . La fórmula  $\text{cos } \alpha = \sqrt{1 - \text{sen}^2 \alpha}$  nos da una extensión continua para el coseno

$$\text{cos} : [-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow [0, 1]$$

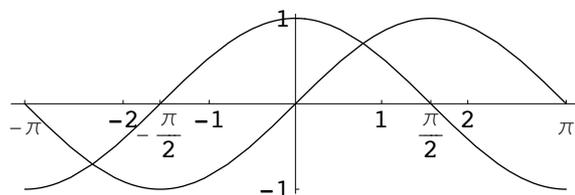
estableciendo que  $\text{cos}(-\pi/2) = \text{cos}(\pi/2) = 0$ .

Ahora definimos extensiones:

$$\text{sen} : [-\pi, \pi] \longrightarrow [-1, 1], \quad \text{cos} : [-\pi, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$$

mediante

$$\text{sen } \alpha = \begin{cases} -\text{sen}(\alpha + \pi) & \text{si } \alpha < -\pi/2, \\ -\text{sen}(\alpha - \pi) & \text{si } \alpha > \pi/2, \end{cases} \quad \text{cos } \alpha = \begin{cases} -\text{cos}(\alpha + \pi) & \text{si } \alpha < -\pi/2, \\ -\text{cos}(\alpha - \pi) & \text{si } \alpha > \pi/2. \end{cases}$$



Es inmediato comprobar que estas extensiones siguen cumpliendo las relación  $\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$ , así como que, para cualquier  $\alpha \in ]-\pi, \pi[$ , tal que  $\alpha \neq \pm\pi/2$ , se sigue cumpliendo que existen

$$\text{sen}' \alpha = \text{cos } \alpha, \quad \text{cos}' \alpha = -\text{sen } \alpha.$$

Esto también es cierto en los dos puntos que hemos exceptuado, y las cuatro comprobaciones son análogas. Vamos a probar, por ejemplo, la derivabilidad del seno en  $\pi/2$ .

Tomemos un infinitésimo  $h > 0$ . Entonces

$$\frac{\text{sen}(\pi/2 - h) - \text{sen}(\pi/2)}{-h} = \frac{\text{cos}(-h) - 1}{-h} \approx \text{cos}'(0) = \text{sen } 0 = 0,$$

$$\frac{\text{sen}(\pi/2 + h) - \text{sen}(\pi/2)}{h} = \frac{-\text{sen}(-\pi/2 + h) - 1}{h} = \frac{\text{cos } h - 1}{h} \approx 0.$$

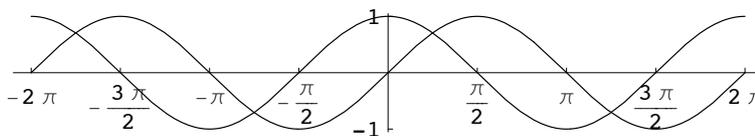
Esto prueba que existe  $\text{sen}'(\pi/2) = 0 = \text{cos}(\pi/2)$ .

Finalmente, dado  $\alpha \in \mathbb{R}$ , existe un único  $k \in \mathbb{Z}$  tal que

$$-\pi + 2k\pi \leq \alpha < -\pi + 2(k+1)\pi,$$

(a saber,  $k = E[(\alpha + \pi)/2\pi]$ ), con lo que  $\alpha = 2k\pi + \alpha'$ , con  $-\pi \leq \alpha' < \pi$ , y tanto  $k$  como  $\alpha'$  están unívocamente determinados por  $\alpha$ . Definimos

$$\text{sen } \alpha = \text{sen } \alpha', \quad \text{cos } \alpha = \text{cos } \alpha'.$$



Dejamos como ejercicio demostrar el teorema siguiente, algunas de cuyas partes ya han sido probadas:

**Teorema 4.23** *Las funciones*

$$\text{sen} : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1], \quad \text{cos} : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$$

*cumplen las propiedades siguientes:*

- $\text{sen } \alpha = \text{sen}(\alpha + 2k\pi)$ ,  $\text{cos } \alpha = \text{cos}(\alpha + 2k\pi)$ , para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$  y todo  $k \in \mathbb{Z}$ .
- $\text{sen} : [-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow [-1, 1]$  es creciente.
- $\text{cos} : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$  es decreciente.
- Son derivables y  $\text{sen}' \alpha = \text{cos } \alpha$ ,  $\text{cos}' \alpha = -\text{sen } \alpha$ .
- $\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$ .
- $\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen } \alpha \text{cos } \beta + \text{cos } \alpha \text{sen } \beta$ .
- $\text{cos}(\alpha + \beta) = \text{cos } \alpha \text{cos } \beta - \text{sen } \alpha \text{sen } \beta$ .

**Nota** La prueba más corta del apartado f) consiste en observar que la prueba del teorema 4.21 sigue siendo válida sin más cambio que eliminar toda restricción sobre los dominios. (La función  $g$  definida en la prueba está ahora definida sobre  $I = \mathbb{R}$ .) El apartado g) se deduce de f) sin más que derivar la fórmula como función de  $\alpha$ , considerando a  $\beta$  constante.

A partir de este teorema ya es posible demostrar sin dificultad cualquiera de las propiedades de las funciones seno y coseno que se aprecian en las gráficas. Por ejemplo, vemos que ambas gráficas son idénticas salvo un “desfase” de  $\pi/2$ , y esto se deduce del apartado g):

$$\cos(\alpha + \pi/2) = \text{sen } \alpha.$$

**Ejercicio:** Probar que  $\text{sen}(\pi/4) = \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$ .

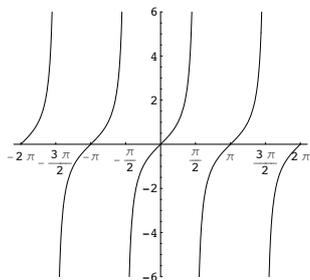
**Ejercicio:** Probar que, para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tal que  $x^2 + y^2 = 1$ , existe un único  $\alpha \in [0, 2\pi[$  tal que  $(x, y) = (\cos \alpha, \text{sen } \alpha)$ .

Las funciones seno y coseno cumplen las hipótesis del teorema 3.35, por lo que podemos desarrollarlas en serie de Taylor. Es inmediato comprobar que los desarrollos son:

$$\text{sen } x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.$$

**Definición 4.24** Llamaremos *función tangente* a la función

$$\tan x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}.$$



Está definida en todos los números reales excepto los que anulan al coseno, que son los de la forma  $\pi/2 + 2k\pi$ , con  $k \in \mathbb{Z}$ . En particular, está definida en el intervalo  $]-\pi/2, \pi/2[$ . También es obvio que

$$\tan(x) = \tan(x + 2k\pi),$$

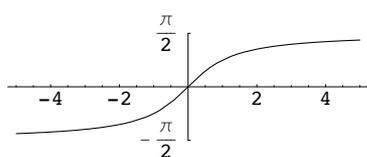
para todo  $x$  donde está definida y todo  $k \in \mathbb{Z}$ . Donde está definida es derivable, y su derivada es

$$\tan' x = \frac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Como la derivada es positiva, la tangente es creciente en  $]-\pi/2, \pi/2[$ , y es inmediato que tiende a  $\infty$  en los extremos, por lo que

$$\tan : ]-\pi/2, \pi/2[ \longrightarrow \mathbb{R}$$

es biyectiva y creciente.



Llamaremos *arco tangente* a la función inversa

$$\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow ]-\pi/2, \pi/2[.$$

Por el teorema de la función inversa, si  $\alpha = \arctan x$ , entonces

$$\arctan' x = \frac{1}{\tan' \alpha} = \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Aquí hemos usado que, como  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ , al dividir entre  $\cos^2 \alpha$  queda

$$\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}.$$

La regla de Barrow nos da una expresión integral para el arco tangente:

$$\arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}.$$

De ella podemos deducir el desarrollo en serie de Taylor:

**Teorema 4.25** *La función arco tangente admite un desarrollo en serie de Taylor*

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1},$$

que converge cuando  $|x| \leq 1$

DEMOSTRACIÓN: La prueba es análoga a la del teorema 4.16. Como allí, partimos de la fórmula

$$\sum_{n=0}^m x^n = \frac{1-x^{m+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{m+1}}{1-x},$$

pero ahora sustituimos  $x = -t^2$ , lo que nos da

$$\frac{1}{1+t^2} - \sum_{n=0}^m (-1)^n t^{2n} = \frac{(-1)^{m+1} t^{2m+1}}{1+t^2}.$$

Al integrar obtenemos:

$$\arctan x - \sum_{n=0}^m \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \int_0^x \frac{(-1)^{m+1} t^{2(m+1)}}{1+t^2} dt.$$

La prueba de que el polinomio del miembro izquierdo es el polinomio de Taylor de grado  $2m+1$  de la función arcotangente sigue el mismo argumento empleado en 4.16. (Notemos que, del hecho de que los polinomios de Taylor de grado  $2m+1$  tengan esta forma, se sigue que el polinomio de Taylor de grado  $2m$  es el mismo que el de grado  $2m-1$ .)

Ahora falta probar que, para  $|x| \leq 1$  fijo, la sucesión de restos de Taylor

$$\left\{ \int_0^x \frac{(-1)^{m+1} t^{2(m+1)}}{1+t^2} dt \right\}_{m \geq 0}$$

converge a 0. Ahora bien:

$$\left| \int_0^x \frac{(-1)^{m+1} t^{2(m+1)}}{1+t^2} dt \right| \leq \int_0^{|x|} \frac{t^{2(m+1)}}{1+t^2} dt \leq \int_0^{|x|} t^{2(m+1)} dt = \frac{|x|^{2m+3}}{2m+3}.$$

Y basta observar que el último término es infinitesimal cuando  $m$  es infinito. ■

Ahora observamos que

$$\tan \frac{\pi}{4} = \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{4}}{\operatorname{cos} \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = 1,$$

luego

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

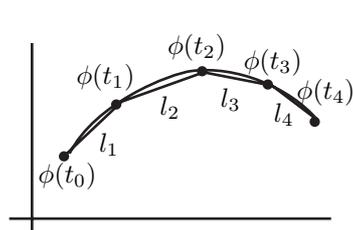
Hemos obtenido así una de las muchas expresiones que permiten calcular aproximaciones de

$$\pi = 3.1415926535897932384626433\dots$$

Ésta no es de las que convergen más rápidamente (sumando los primeros 100.000 términos sólo obtenemos la aproximación 3.14160, donde la cuarta cifra decimal ya es incorrecta), pero no vamos a entrar en cuestiones de cálculo numérico.

### 4.3 Cálculo de longitudes, áreas y volúmenes

**Longitudes de curvas** En la sección anterior hemos dado una fórmula para calcular la longitud de un arco de curva. Conviene generalizarla para admitir que la curva venga expresada de forma paramétrica, es decir, como una aplicación



$$\phi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

que será de la forma  $\phi(t) = (x(t), y(t))$ , para ciertas funciones  $x, y$ . Notemos que la gráfica de una función  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  es el caso particular en que  $\phi(t) = (t, f(t))$ , es decir, el caso particular en que  $x(t) = t$ .

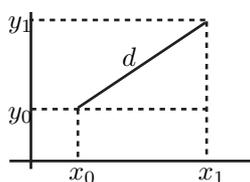
Definiremos la longitud de  $\phi$  con el mismo criterio que en la sección anterior: consideramos una partición  $P$  de  $[a, b]$ , la cual da lugar a un número finito de puntos sobre la curva, puntos que unimos por una línea poligonal de  $n$  segmentos

de longitudes  $l_1, \dots, l_n$ . Vamos a probar que, si  $\phi$  cumple algunas condiciones de derivabilidad, la suma

$$L(\phi, P) = \sum_{i=1}^n l_i$$

converge a un número (estándar)  $L$ , en el sentido de que, cuando la partición es infinitesimal,  $L(\phi, P) \approx L$ , y éste número  $L$  será el que tomaremos como definición de la longitud de  $\phi$ .

Vamos a suponer que las funciones  $x(t)$ ,  $y(t)$  son dos veces derivables, y que la segunda derivada está acotada en  $]a, b[$  por un número (estándar)  $M$ . Esto se cumple, por ejemplo, si ambas funciones son de clase  $C^2$  en un abierto que contenga al intervalo  $[a, b]$ .



Como vamos a trabajar en  $\mathbb{R}^2$ , necesitamos un hecho elemental de la geometría de  $\mathbb{R}^2$  del que nos ocuparemos con más detalle en el capítulo VI: la distancia entre dos puntos  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_1, y_1)$  viene dada por

$$d((x_0, y_0), (x_1, y_1)) = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}.$$

Definimos la *recta tangente* a  $\phi$  en un punto  $t_0 \in ]a, b[$  como la recta en forma paramétrica  $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$T(t) = (x(t_0) + x'(t_0)(t - t_0), y(t_0) + y'(t_0)(t - t_0)).$$

Claramente, se trata de una recta que pasa por el punto  $\phi(t_0)$ . Vamos a probar que el nombre de “recta tangente” está justificado. Para ello aplicamos el teorema de Taylor, que nos da que, si  $t \in ]a, b[$ , se cumple que

$$x(t) = x(t_0) + x'(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}x''(c)(t - t_0)^2,$$

$$y(t) = y(t_0) + y'(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}y''(d)(t - t_0)^2,$$

donde  $c$  y  $d$  son números entre  $t$  y  $t_0$ . Si  $2M$  es una cota para las segundas derivadas, tenemos que

$$|x(t) - T_x(t)| \leq M(t - t_0)^2, \quad |y(t) - T_y(t)| \leq M(t - t_0)^2,$$

luego

$$d(\phi(t), T(t)) = \sqrt{(x(t) - T_x(t))^2 + (y(t) - T_y(t))^2} \leq M(t - t_0)^2.$$

Esto implica en particular que si  $t \approx t_0$ , entonces  $d(\phi(t), T(t)) \approx 0$ , es decir, que la curva y la recta tangente están infinitamente próximas para valores de  $t$  infinitamente próximos, pero debemos insistir en que esta observación no tiene valor alguno: cualquier recta que pase por el punto  $\phi(t_0)$  cumplirá esta propiedad, por la mera continuidad de  $\phi$  y de la recta.

Para enunciar la característica que distingue a la recta tangente de cualquier otra recta, consideramos una homotecia  $H_r : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de radio  $r$  y centro  $\phi(t_0)$ . Explícitamente:

$$H(x, y) = (x(t_0) + r(x - x(t_0)), y(t_0) + r(y - y(t_0))).$$

Llamemos  $H_r(\phi)$  y  $H_r(T)$  a las composiciones de  $\phi$  y  $T$  con  $H_r$ , es decir:

$$H_r(\phi)(t) = (x(t_0) + r(x(t) - x(t_0)), y(t_0) + r(y(t) - y(t_0))),$$

$$H_r(T)(t) = (x(t_0) + rx'(t_0)(t - t_0), y(t_0) + ry'(t_0)(t - t_0)).$$

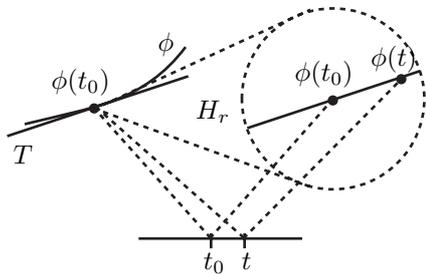
Observemos que las coordenadas de  $H_r(T)(t)$  son finitas si y sólo si  $r(t - t_0)$  es finito (lo que, en particular, exige que  $t \approx t_0$ ). Para estos valores de  $t$ , también es finito  $H_r(\phi)(t)$ , debido al siguiente hecho general: cualquier homotecia de radio  $r$  cumple que

$$d(H_r(x), H_r(y)) = rd(x, y).$$

Esto se debe a que una homotecia se calcula efectuando una traslación (que no altera las distancias), multiplicando por  $r$  (que multiplica las distancias por  $r$ ) y luego efectuando otra traslación (que no altera las distancias). Por consiguiente,

$$d(H_r(\phi)(t), H_r(T)(t)) \leq Mr|t - t_0|^2,$$

luego  $H_r(\phi)(t)$ , no sólo es finito cuando  $r(t - t_0)$  es finito, sino que permanece infinitamente cerca de  $H_r(T)(t)$ .



La figura<sup>3</sup> ilustra lo que hemos demostrado: Los valores  $t \approx t_0$  que cumplen que  $r(t - t_0)$  es finito son los que tienen imágenes finitas<sup>4</sup> al aplicar la homotecia  $H_r$ . La gráfica de  $H_r(T)$  es la misma recta  $T$  (aunque ahora se recorre toda ella con parámetros infinitamente próximos a  $t_0$ ), mientras que la gráfica de  $H_r(\phi)$  resulta ser indistinguible de  $T$ .

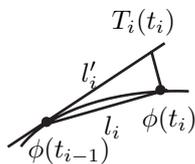
En principio, la recta  $T$  no es la única que cumple esto, pues lo cumplirá también cualquier otra recta cuya pendiente esté infinitamente próxima a la de  $T$ , pero si el punto  $t_0$  es estándar (cosa que no hemos necesitado suponer en todo el razonamiento), entonces  $T$  será también estándar y es la única recta estándar que aproxima a  $\phi$  de esta forma.

Volvemos ahora al problema de calcular la longitud de  $\phi$ . Para ello, vamos a ver que en lugar de considerar la longitud  $l_i$  del segmento que va de  $\phi(t_{i-1})$  a

<sup>3</sup>El punto marcado con  $\phi(t)$  dentro de la “lupa” es en realidad  $H_r(\phi)(t)$ , pero no hay confusión posible si omitimos  $H_r$  del nombre de toda imagen vista a través de una “lupa”. Lo mismo vale, en principio, para  $\phi(t_0)$ , pero en este caso  $H_r(\phi)(t_0) = \phi(t_0)$ .

<sup>4</sup>Esto es exacto para  $H_r(T)$ , pero puede ocurrir que  $H(\phi)(t)$  tome valores finitos cuando  $r(t - t_0)$  sea infinito, por ejemplo, porque  $\phi$  tenga forma de ocho y vuelva a pasar por  $\phi(t_0)$  para otro valor  $t > t_0$ , pero tales puntos podrían eliminarse reduciendo el dominio  $[a, b]$  de  $\phi$ .

$\phi(t_i)$ , podemos considerar la recta tangente  $T_i$  en  $t_{i-1}$  y considerar la longitud  $l'_i$  del segmento que va de  $\phi(t_{i-1})$  a  $T_i(t_i)$ .



Observemos que la figura no representa una ampliación homotética de la curva (es decir, que no está “a escala”, porque, si lo fuera, los dos segmentos y la gráfica de  $\phi$  deberían estar representados por un mismo segmento de recta, ya que, según hemos visto,  $H_r(\phi)(t_i) \approx \phi(t_i)$ . Precisamente ésta es la razón por la que podremos cambiar  $l_i$  por  $l'_i$ .

Muchos libros, especialmente de física, argumentan con infinitésimos y, en situaciones similares a ésta, afirman que podemos tomar  $l'_i$  en lugar de  $l_i$  simplemente porque  $l_i \approx l'_i$ , pero esto no es un argumento válido. Nuestra intención es sumar los infinitos valores de  $l_i$ , y al cambiarlos por los  $l'_i$  estamos introduciendo un error infinitesimal en cada sumando. El problema, es que al sumar infinitos errores infinitesimales, el error total puede ser apreciable, y en tal caso la sustitución no es válida. Hemos de probar que no se da el caso. Ahora bien, es claro que  $l'_i \leq l_i + d(T_i(t_i) - \phi(t_i))$  y también  $l_i \leq l'_i + d(T_i(t_i) - \phi(t_i))$ , lo que nos da:

$$|l_i - l'_i| \leq d(T_i(t_i) - \phi(t_i)) \leq M\Delta t_i^2 \leq M\|P\|\Delta t_i.$$

Por lo tanto,

$$\left| \sum_{i=1}^n l_i - \sum_{i=1}^n l'_i \right| \leq M\|P\| \sum_{i=1}^n \Delta t_i = M(b-a)\|P\|,$$

que es infinitesimal para cualquier partición infinitesimal  $P$ . Así pues, si probamos que  $\sum_{i=1}^n l'_i$  permanece infinitamente próximo a un número fijo (estándar)  $L$  sea cual sea la partición infinitesimal  $P$ , habremos probado que lo mismo vale para la suma de los  $l_i$ .

En definitiva, vemos que si podemos sustituir  $l_i$  por  $l'_i$  no es porque  $l_i \approx l'_i$ , sino porque la diferencia sigue siendo infinitesimal cuando se divide entre  $\Delta t_i$  o, equivalentemente, entre la norma de la partición. Los matemáticos antiguos expresaban esto diciendo que  $l_i - l'_i$  es un infinitésimo de orden superior a  $\Delta t_i$ . La interpretación geométrica es, precisamente, que el infinitésimo  $l_i - l'_i$  se mantiene infinitesimal al aplicar cualquier homotecia que vuelva apreciable (es decir, finito, pero no infinitesimal) el incremento  $\Delta t_i$ .

Ahora observamos que

$$T_i(t_i) = (x(t_{i-1}) + x'(t_{i-1})\Delta t_i, y(t_{i-1}) + y'(t_{i-1})\Delta t_i),$$

por lo que

$$l'_i = d(\phi(t_i), T_i(t_i)) = \sqrt{x'(t_{i-1})^2 + y'(t_{i-1})^2} \Delta t_i,$$

luego

$$\sum_{i=1}^n l_i \approx \sum_{i=1}^n l'_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{x'(t_{i-1})^2 + y'(t_{i-1})^2} \Delta t_i \approx \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

En definitiva:

**Definición 4.26** Si  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  es una función con coordenadas<sup>5</sup> de clase  $C^1$  en un intervalo abierto que contenga a  $[a, b]$ , definimos la *longitud* de  $\phi$  como

$$L(\phi) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

Notemos que la definición 4.17 es el caso particular de ésta que resulta de tomar  $x(t) = t$ .

**Ejemplo** Podemos parametrizar una circunferencia de radio  $r$  mediante la función

$$\phi(t) = (r \cos t, r \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Por consiguiente, la longitud de la circunferencia es

$$\int_0^{2\pi} r \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt = \int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r.$$

■

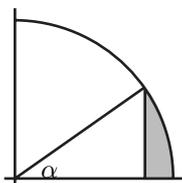
**El área de un círculo** La función  $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$  deja bajo su gráfica un semicírculo de radio  $r$ , luego el área de un círculo de radio  $r$  es

$$A = 2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx.$$

Para calcular esta integral usamos el cambio de variable (estrictamente creciente)  $x : [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow [-r, r]$  dado por  $x = r \sin t$ . Así:<sup>6</sup>

$$\begin{aligned} A &= 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 t} r \cos t dt = 2r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t dt \\ &= 2r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = r^2 \left[ t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pi r^2. \end{aligned}$$

■



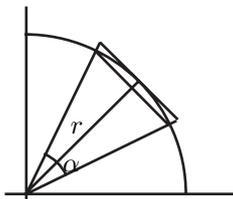
**Ejercicio:** Modificar el ejemplo anterior para calcular el área de la región sombreada en la figura. Sumándola al área del triángulo adyacente, calcular el área del sector circular en función de  $\alpha$ .

En el ejemplo anterior hemos calculado el área del círculo a partir de la interpretación de la integral como área comprendida bajo la gráfica de una función. El cálculo no ha sido

<sup>5</sup>Para que  $L(\phi)$  esté bien definida no es necesario suponer que las coordenadas de  $\phi$  admitan segundas derivadas. La discusión precedente prueba que, cuando las tienen y están acotadas,  $L(\phi)$  es lo que pretendemos que sea. Puede probarse que lo mismo es cierto bajo las meras hipótesis de la definición, pero ello exige algunos tecnicismos adicionales en el argumento.

<sup>6</sup>Usamos que  $\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t = 2 \cos^2 t - 1$ .

especialmente sencillo: hemos necesitado un cambio de variable y transformar un integrando mediante una identidad trigonométrica. Vamos a llegar al mismo resultado de un modo conceptualmente más simple y, de hecho, más clásico.

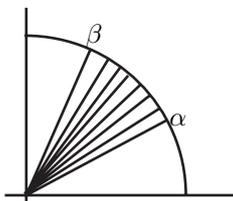


Consideremos un sector circular de radio  $r$  y amplitud  $\alpha$ . Su área está comprendida entre los dos triángulos isósceles que muestra la figura. El menor es unión de dos triángulos rectángulos de base  $r \cos(\alpha/2)$  y altura  $r \sin(\alpha/2)$ , luego su área es

$$s = r^2 \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{r^2}{2} \sin \alpha.$$

El mayor es unión de dos triángulos rectángulos de base  $r$  y altura  $r \tan(\alpha/2)$ , luego su área es

$$S = r^2 \tan \frac{\alpha}{2}$$



Ahora consideramos el sector circular comprendido entre dos ángulos  $\alpha$  y  $\beta$ . Tomamos una partición  $P = \{\alpha_i\}_{i=0}^n$  de  $[\alpha, \beta]$ , que divide el sector dado en  $n$  pequeños sectores. Usando las estimaciones anteriores, el área del sector completo estará acotada de este modo:

$$\frac{r^2}{2} \sum_{i=1}^n \sin \Delta\alpha_i \leq A \leq r^2 \sum_{i=1}^n \tan \frac{\Delta\alpha_i}{2}.$$

El teorema del valor medio aplicado al intervalo  $[0, \Delta\alpha_i]$  nos da que existe  $0 < c_i < \Delta\alpha_i \leq \|P\|$  tal que

$$\sin \Delta\alpha_i = \Delta\alpha_i \cos c_i \geq \Delta\alpha_i \cos \|P\|.$$

Así pues,

$$A \geq \frac{r^2}{2} \cos \|P\| \sum_{i=1}^n \Delta\alpha_i = \frac{r^2(\beta - \alpha)}{2} \cos \|P\|.$$

Igualmente,

$$\tan \frac{\Delta\alpha_i}{2} = \frac{1}{\cos^2 d_i} \frac{\Delta\alpha_i}{2} \leq \frac{1}{\cos^2 \|P\|} \frac{\Delta\alpha_i}{2},$$

con  $0 < d_i < \Delta\alpha_i/2 \leq \|P\|$ , luego

$$A \leq \frac{r^2}{\cos^2 \|P\|} \sum_{i=1}^n \Delta\alpha_i = \frac{r^2(\beta - \alpha)}{2 \cos^2 \|P\|}.$$

En total:

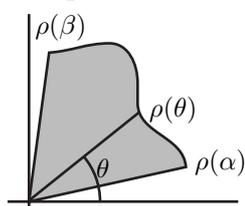
$$\frac{r^2(\beta - \alpha)}{2} \cos \|P\| \leq A \leq \frac{r^2(\beta - \alpha)}{2 \cos^2 \|P\|}.$$

Esto es válido para cualquier partición  $P$ . Si la tomamos infinitesimal resulta que  $\cos \|P\| \approx 1$ , luego ha de ser

$$A = \frac{r^2}{2}(\beta - \alpha).$$

En particular, si  $[\alpha, \beta] = [0, 2\pi]$ , el área del círculo completo es  $A = \pi r^2$ . ■

**Coordenadas polares** Consideremos ahora una curva en  $\mathbb{R}^2$  que esté determinada por una función  $\rho : [\alpha, \beta] \rightarrow ]0, +\infty[$  del modo siguiente: la recta que pasa por  $(0, 0)$  y forma un ángulo  $\theta$  con el vector  $(1, 0)$  corta a la curva en un único punto a distancia  $\rho(\theta)$  de  $(0, 0)$ .

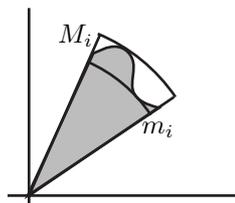


Entonces, una parametrización de la curva es la aplicación  $\phi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$\phi(t) = (\rho(\theta) \cos \theta, \rho(\theta) \operatorname{sen} \theta).$$

Esto nos permite calcular su longitud:

$$\begin{aligned} L(\phi) &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\rho'(\theta) \cos \theta - \rho(\theta) \operatorname{sen} \theta)^2 + (\rho'(\theta) \operatorname{sen} \theta + \rho(\theta) \cos \theta)^2} d\theta \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho'^2(\theta) + \rho^2(\theta)} d\theta \end{aligned}$$



Ahora vamos a calcular el área sombreada en la figura. Para ello tomamos una partición  $P = \{\theta_i\}_{i=0}^n$  de  $[\alpha, \beta]$ . Si  $m_i$  y  $M_i$  son, como de costumbre, el ínfimo y el supremo de  $\rho$  en  $[\theta_{i-1}, \theta_i]$ , la porción de superficie contenida en el ángulo  $[\theta_{i-1}, \theta_i]$  contiene al sector circular de radio  $m_i$  y está contenida en el sector circular de radio  $M_i$ . Por lo tanto,

$$\sum_{i=1}^n \frac{m_i^2}{2} \Delta\theta_i \leq A \leq \sum_{i=1}^n \frac{M_i^2}{2} \Delta\theta_i.$$

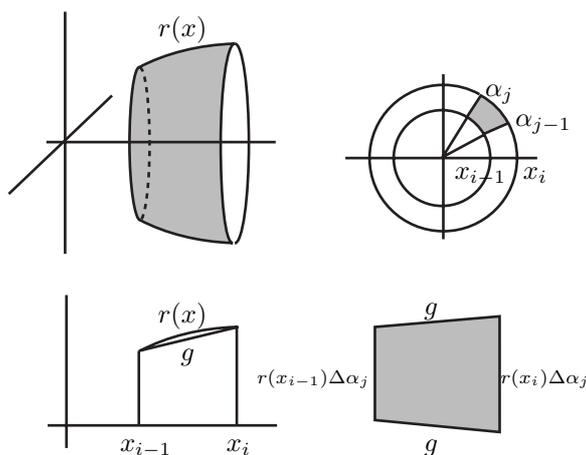
Los extremos son una suma inferior y una suma superior de la integral

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\theta) d\theta,$$

que, por consiguiente, ha de ser el área que buscamos. ■

**Superficies de revolución** Vamos a calcular el área de una superficie de revolución, es decir, de la superficie generada cuando giramos alrededor del eje  $X$  la gráfica de una función  $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  que no tome valores negativos, tal y como se muestra en la primera figura.

Para ello tomamos una partición infinitesimal  $P = \{x_i\}_{i=1}^n$  de  $[a, b]$  y otra  $Q = \{\alpha_j\}_{j=1}^m$  de  $[0, 2\pi]$ . La partición  $P$  divide la superficie en “rodajas” circulares de longitud  $\Delta x_i$  (que en la segunda figura vemos desde arriba) y la partición  $Q$  subdivide cada rodaja en cuadriláteros.



No es difícil ver que las particiones pueden refinarse (añadiéndoles puntos) para que los cocientes  $\Delta x_i / \Delta \alpha_j$  sean finitos, lo que nos permite considerar una homotecia  $H_r$  de radio infinito que vuelva apreciables simultáneamente los incrementos  $\Delta x_i$  y  $\Delta \alpha_j$ .

Al estudiar las longitudes de curvas hemos visto que, si a un arco de longitud infinitesimal le aplicamos una homotecia que vuelve apreciable la diferencia entre sus extremos, el arco permanece infinitamente cerca del segmento que une dichos extremos. Así pues, al aplicar  $H_r$ , el cuadrilátero infinitesimal abombado de la segunda figura se transforma en un cuadrilátero finito indistinguible de un cuadrilátero plano como el representado en la cuarta figura.

La longitud  $g$  será (ampliada  $r$  veces) la longitud del segmento que une los puntos  $(x_{i-1}, r(x_{i-1}))$  y  $(x_i, r(x_i))$ , es decir:

$$g = \sqrt{\Delta x_i^2 + (r(x_i) - r(x_{i-1}))^2}.$$

Aplicando el teorema del valor medio:  $r(x_i) - r(x_{i-1}) = r'(c_i)\Delta x_i$ , para cierto punto  $x_{i-1} < c_i < x_i$ , luego

$$g = \sqrt{1 + r'(c_i)^2} \Delta x_i.$$

Si  $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ , la altura en  $x$  del cuadrilátero es un arco de circunferencia de radio  $r(x)$  y de amplitud  $\Delta \alpha_j$ , luego su longitud es  $r(x)\Delta \alpha_j$ . Al aplicar  $H_r$ ,

las diferencias de longitud para distintos valores de  $x$  pueden ser apreciables (como se refleja en la cuarta figura, donde el cuadrilátero tiene forma trapezoidal). Por lo tanto, el producto

$$r(d_i)\sqrt{1+r'(c_i)^2}\Delta x_i\Delta\alpha_j, \quad x_{i-1} \leq d_i \leq x_i,$$

será una aproximación por defecto o por exceso al área del cuadrilátero según que  $d_i$  corresponda a la máxima longitud  $r(x)\Delta\alpha_j$  o a la mínima. Sin embargo, vamos a ver que diferentes elecciones para  $d_i$  sólo producen variaciones infinitesimales en la suma

$$S = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n r(d_i)\sqrt{1+r'(c_i)^2}\Delta x_i\Delta\alpha_j = 2\pi \sum_{i=1}^n r(d_i)\sqrt{1+r'(c_i)^2}\Delta x_i,$$

con lo que ésta será una estimación razonable del área que queremos calcular. En efecto, si tomamos otros valores  $e_i \in [x_{i-1}, x_i]$ , podemos aplicar el teorema del valor medio:

$$|r(d_i) - r(e_i)| = |r'(f_i)||e_i - d_i| \leq M\Delta x_i \leq M\|P\|$$

donde  $M$  es una cota (estándar) de  $r'$  en  $[a, b]$ . Por lo tanto,

$$|S(\{d_i\}) - S(\{e_i\})| \leq 2\pi M\|P\| \sum_{i=1}^n \sqrt{1+r'(c_i)^2}\Delta x_i \approx 0,$$

porque  $\|P\|$  es infinitesimal y el sumatorio es finito, ya que está infinitamente próximo a la integral

$$\int_a^b \sqrt{1+r'(x)^2} dx.$$

En particular, tomando  $e_i = c_i$ , vemos que, sea cual sea  $d_i$ , se cumple que

$$S \approx 2\pi \sum_{i=1}^n r(c_i)\sqrt{1+r'(c_i)^2}\Delta x_i \approx 2\pi \int_a^b r(x)\sqrt{1+r'(x)^2} dx.$$

**Definición 4.27** Llamaremos<sup>7</sup> *área* de la superficie de revolución generada por la curva  $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  al valor

$$A = 2\pi \int_a^b r(x)\sqrt{1+r'(x)^2} dx.$$

<sup>7</sup>Observemos que el razonamiento precedente no puede considerarse una demostración de que el área es la que hemos calculado, ya que no partimos de ninguna definición previa de área. Tan sólo puede verse como un razonamiento heurístico que explica por qué la definición que hemos dado es la que va a comportarse como cabe esperar que se comporte un área. En el contexto de la geometría diferencial es posible dar una definición general de área de una superficie y, con respecto a dicha definición, sí que es posible demostrar esta fórmula. (Ahora bien, la definición general de área se justifica por un razonamiento heurístico similar al que hemos visto aquí.)

**Ejemplo** Para calcular el área de una esfera de radio  $R$  consideramos la función  $r(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ , definida en  $[-R, R]$ , con lo que obtenemos

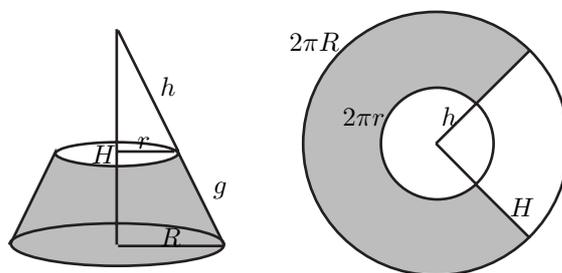
$$A = 2\pi \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} dx = 2\pi \int_{-R}^R R dx = 4\pi R^2.$$

■

**Ejercicio:** Demostrar que la superficie lateral de un tronco de cono es

$$A = 2\pi \frac{r + R}{2} g.$$

Demostrarlo mediante la fórmula para superficies de revolución y también desarrollando el cono y usando la fórmula para el área de un sector circular.



(Nótese que, por el teorema de Tales,  $rH = Rh$ .)

**Volúmenes de revolución** Un razonamiento más simple que el del apartado anterior nos permite deducir una fórmula para el volumen  $V$  del sólido de revolución determinado por una función  $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Basta observar que, si  $P$  es una partición de  $[a, b]$ ,

$$\sum_{i=1}^n \pi m_i^2 \Delta x_i \leq V \leq \sum_{i=1}^n \pi M_i^2 \Delta x_i,$$

donde  $m_i$  y  $M_i$  son, como de costumbre, el ínfimo y el supremo de  $r$  en  $[x_{i-1}, x_i]$ . En efecto, cada sumando es el volumen del cilindro de altura  $\Delta x_i$  y radio  $m_i$  o  $M_i$ . Es obvio que la unión de los cilindros pequeños está contenida en el sólido de revolución, que a su vez está contenido en la unión de los cilindros grandes, lo que nos da las desigualdades. Si la función  $r$  es continua,  $m_i^2$  y  $M_i^2$  son el ínfimo y el supremo de la función  $r^2$  en  $[x_{i-1}, x_i]$ , luego, cuando  $P$  es infinitesimal, ambas sumas están infinitamente próximas a

$$V = \pi \int_a^b r(x)^2 dx.$$

**Ejercicio:** Razonar (sin usar la fórmula anterior) que, tal y como hemos afirmado para deducirla, el volumen de un cilindro de radio  $r$  y altura  $h$  ha de ser  $V = \pi r^2 h$ .

**Ejemplo** El volumen de una esfera de radio  $R$  es

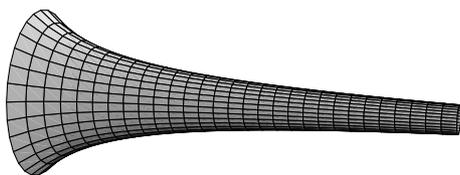
$$V = \pi \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx = \pi \left[ R^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-R}^R = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

■

**Ejemplo** El volumen del hiperboloide de revolución que resulta de girar la hipérbola  $f : [1, t] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = 1/x$  es

$$V_t = \pi \int_1^t \frac{1}{x^2} dx = \pi \left[ -\frac{1}{x} \right]_1^t = \pi(1 - 1/t).$$

Observamos que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} V_t = \pi$ , lo que se interpreta como que en una copa hiperbólica infinita cuya boca tenga dos unidades de diámetro, caben sólo  $\pi$  unidades cúbicas de champán.



Esto es especialmente curioso si observamos que la copa, aunque tiene volumen finito, tiene superficie infinita:

**Ejercicio:** Comprobar que la superficie del hiperboloide de revolución en  $[1, t]$  viene dada por

$$\begin{aligned} A_t &= 2\pi \int_1^t \frac{\sqrt{1+x^4}}{x^3} dx = \pi \left[ \operatorname{arg\,senh} x^2 - \frac{\sqrt{1+x^4}}{x^2} \right]_1^t \\ &= \pi \left( \operatorname{arg\,senh} t^2 - \frac{\sqrt{1+t^4}}{t^2} - \operatorname{arg\,senh} 1 + \sqrt{2} \right) \end{aligned}$$

(Para calcular la integral, realizar sucesivamente los cambios de variable  $u = x^2$  y  $u = \operatorname{senh} v$ , y tener en cuenta que  $(\cosh v / \operatorname{senh} v)' = -1/\operatorname{senh}^2 v$ .) Concluir que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} A_t = +\infty.$$

Así pues, tal y como habíamos afirmado, la copa hiperbólica infinita tiene volumen finito, pero área infinita.



# Capítulo V

## Series infinitas

Ya hemos visto que algunas funciones admiten desarrollos en serie de Taylor, de la forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Observemos que estas expresiones son en realidad familias de series, en el sentido de que determinan una serie distinta para cada  $x$ , de modo que pueden ser convergentes para unos valores de  $x$  y divergentes para otros. En la primera sección de este capítulo estudiaremos las series numéricas propiamente dichas, es decir, series de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n,$$

donde  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  es una sucesión de números reales; en la segunda sección estudiaremos las sucesiones de funciones, para analizar aquellas propiedades que no dependen de que las funciones en cuestión sean series; y finalmente estudiaremos las series de funciones, centrándonos especialmente en las series de potencias, que son las series de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

es decir, las que tienen la misma estructura que las series de Taylor.

### 5.1 Series numéricas

Recordemos que la serie numérica asociada a una sucesión  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  de números reales es la sucesión  $\{S_N\}_{N \geq 0}$  dada por

$$S_N = \sum_{n=0}^N a_n.$$

Es costumbre representar a esta sucesión, al igual que a su límite, si es que existe, como

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Los términos  $S_N$  de la sucesión se llaman *sumas parciales*. Ya hemos tenido ocasión de probar la convergencia de algunas series no triviales, como:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$$

o

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \log 2.$$

Y también hemos visto que series como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

son divergentes.

Lo más elemental que podemos decir a la hora de distinguir las series convergentes de las divergentes es lo siguiente:

**Teorema 5.1** *Si una serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  es convergente, entonces  $\lim_n a_n = 0$ .*

DEMOSTRACIÓN: Basta observar que

$$a_n = S_n - S_{n-1},$$

luego, si la serie converge a un número  $L$ , se cumple que

$$\lim_n a_n = \lim_n S_n - \lim_n S_{n-1} = L - L = 0.$$

■

Sin embargo, debemos tener bien presente que, aunque el término general  $a_n$  converja a 0, la serie puede diverger, como muestra el ejemplo previo al teorema anterior.

**Ejemplo** *La serie geométrica converge a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$$

*converge si y sólo si  $|r| < 1$ , y diverge en caso contrario.*

En efecto, si  $|r| \geq 1$  es claro que el término general no converge a 0, luego la serie es divergente. Si  $|r| < 1$  (estándar) y  $N$  es infinito:

$$\sum_{n=0}^N r^n = \frac{1 - r^{N+1}}{1 - r} \approx \frac{1}{1 - r}.$$

Esto prueba la convergencia. ■

Las propiedades de los límites implican inmediatamente el teorema siguiente:

**Teorema 5.2** Sean  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  y  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  dos series convergentes y  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Entonces también convergen

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \quad \text{y} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Otro hecho obvio es el siguiente:

**Teorema 5.3** Si  $n_0 \in \mathbb{N}$ , una serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  es convergente si y sólo si lo es la serie  $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ .

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer que  $n_0$  es estándar, y entonces basta observar que, para  $N$  infinito,

$$\sum_{n=0}^N a_n = \sum_{n=0}^{n_0-1} a_n + \sum_{n=n_0}^N a_n.$$

El miembro izquierdo tendrá una parte estándar independiente de  $N$  si y sólo si lo tiene el término de la derecha. ■

Una serie plantea dos problemas distintos: determinar si es o no convergente y, en caso de que lo sea, calcular su suma. A menudo el primero es más sencillo que el segundo. Desde un punto de vista teórico, el problema es más simple en el caso de series de términos positivos, es decir, series en las que  $a_n \geq 0$  para todo índice  $n$ :

**Teorema 5.4** Una serie de términos positivos es convergente si y sólo si sus sumas parciales están acotadas superiormente.

DEMOSTRACIÓN: Basta observar que las series de términos positivos son sucesiones monótonas crecientes. En particular, sus sumas parciales siempre están acotadas inferiormente (por la primera de ellas) y, por consiguiente, decir que están acotadas superiormente es lo mismo que decir que están acotadas. Basta aplicar entonces el teorema 2.62. (Recíprocamente, es obvio que toda sucesión convergente ha de estar acotada.) ■

Explícitamente, la condición del teorema anterior es que exista un número  $M > 0$  tal que

$$\sum_{n=0}^N a_n \leq M$$

para todo  $N \in \mathbb{N}$  o, para series estándar, que el miembro izquierdo sea finito siempre que  $N$  es infinito.

**Ejemplo** *La serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

converge si y sólo si  $\alpha > 1$ .

En efecto, podemos suponer que  $\alpha$  es estándar. Si  $\alpha > 1$  y  $n > 1$ , tenemos que

$$\frac{1}{n^{\alpha}} \leq \int_{n-1}^n \frac{dx}{x^{\alpha}},$$

luego

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^{\alpha}} \leq 1 + \int_1^N \frac{dx}{x^{\alpha}} = 1 + \left[ \frac{-1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}} \right]_1^N = 1 + \frac{1}{\alpha-1} - \frac{1}{(\alpha-1)N^{\alpha-1}}.$$

Si  $N$  es infinito, el último término es infinitesimal, luego la suma parcial es finita. Esto prueba que la serie es convergente.

Si  $\alpha \leq 0$  la serie es divergente porque su término general no tiende a 0. Ya hemos observado que la serie también diverge cuando  $\alpha = 1$ . Falta probar que también es divergente cuando  $0 < \alpha < 1$ . En tal caso:

$$\int_n^{n+1} \frac{dx}{x^{\alpha}} \leq \frac{1}{n^{\alpha}},$$

luego

$$\int_1^{N+1} \frac{dx}{x^{\alpha}} \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^{\alpha}}.$$

Al calcular la integral resulta:

$$\frac{(N+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^{\alpha}}.$$

Cuando  $N$  es infinito, el primer término también lo es, luego la serie es divergente. ■

Igual que acabamos de comparar series con integrales, también podemos comparar unas series con otras cuya convergencia o divergencia conozcamos:

**Teorema 5.5** Sean  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  y  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  dos series estándar de términos positivos tales que, cuando  $n$  es infinito,  $a_n \leq b_n$ . Entonces, si la segunda converge, la primera también converge.

DEMOSTRACIÓN: Fijemos un número natural infinito  $n_0$ . Entonces, para todo  $N \geq n_0$  se cumple que

$$\sum_{n=n_0}^N a_n \leq \sum_{n=n_0}^N b_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} b_n,$$

luego la serie  $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$  es convergente (por estar acotada) y lo mismo vale para la serie desde  $n = 0$ . ■

**Teorema 5.6** Si una serie de términos positivos no nulos  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  cumple que

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1,$$

entonces es convergente.

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer que la sucesión es estándar. Si  $L$  es el límite del enunciado, podemos tomar  $L < r < 1$  estándar. Así, si  $n$  es infinito, se cumple que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < r.$$

Fijado  $n_0$  infinito, para todo  $n \geq n_0$  tenemos que

$$a_n \leq a_{n_0} r^{n-n_0} = \frac{a_{n_0}}{r^{n_0}} r^n.$$

Como la serie geométrica  $\sum_{n=n_0}^{\infty} r^n$  es convergente, también lo es  $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ , y también la serie sumada desde  $n = 0$ . ■

**Ejemplo** Si  $0 < r < 1$ , se cumple que

$$\sum_{n=1}^{\infty} nr^n = \frac{r}{(1-r)^2}$$

En efecto, para probar la convergencia basta observar que, si  $n$  es infinito,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n} r \approx r,$$

luego se cumple el teorema anterior con cualquier  $r'$  que cumpla  $r < r' < 1$ .

Ahora observamos que

$$\begin{aligned} S_N &= r + 2r^2 + 3r^3 + \cdots + Nr^N, \\ rS_{N-1} &= r^2 + 2r^3 + \cdots + (N-1)r^N. \end{aligned}$$

Por consiguiente:

$$S_N - rS_{N-1} = r + r^2 + \cdots + r^N = \frac{r - r^{N+1}}{1-r} \approx \frac{r}{1-r}$$

Si  $N$  es infinito, como sabemos que la serie es convergente, podemos asegurar que  $S_N \approx S_{N-1}$ , luego

$$S_N - rS_N \approx \frac{r}{1-r},$$

luego

$$S_N \approx \frac{r}{(1-r)^2}.$$

■

La serie anterior aparece en un problema clásico de la teoría de la probabilidad:

**Ejemplo** *Vamos a calcular el número de veces que cabe esperar que haya que tirar un dado hasta que salga un seis.*

Más en general, supongamos que un fenómeno aleatorio se produce con probabilidad  $1/n$ , donde  $n$  es un número natural ( $n = 6$  en el caso de sacar un seis —o cualquier otro número prefijado— con un dado). Por simplicidad, hablaremos en términos de un dado, pero trabajaremos con un  $n$  genérico.

Si repetimos muchas veces el experimento de lanzar sucesivamente un dado hasta obtener un 6, lo conseguiremos en la primera tirada aproximadamente  $1/n$  de las veces (si no fuera así, eso significaría, por definición, que el dado está trucado).

En cambio,  $(n-1)/n$  de las veces, el primer resultado no sería un 6. De entre todos estos casos, aproximadamente  $1/n$  de ellos, es decir,  $(n-1)/n^2$  del total de los experimentos, obtendríamos el 6 al segundo intento, mientras que en  $(n-1)/n$  de ellos, es decir, en  $(n-1)^2/n^2$  del total, no conseguiríamos el 6 al segundo intento.

De entre todos estos  $(n-1)^2/n^2$  segundos intentos fallidos, en aproximadamente  $1/n$  de los casos, es decir,  $(n-1)^2/n^3$  del total, conseguiremos el 6 al tercer intento, y así sucesivamente.

En definitiva, la fracción de intentos en que conseguiremos el 6 al  $k$ -ésimo intento será

$$\frac{(n-1)^{k-1}}{n^k} = \frac{1}{n-1} \left( \frac{n-1}{n} \right)^k.$$

Si el número total de experimentos es  $N$ , la media del número de intentos necesarios para obtener el 6 se calculará multiplicando por  $k$  el número de experimentos en que hemos necesitado  $k$  intentos, lo que nos da

$$Nk \frac{1}{n-1} \left( \frac{n-1}{n} \right)^k,$$

sumando para todo  $k$  y dividiendo entre el total  $N$ , lo que nos da la serie

$$\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{\infty} k \left( \frac{n-1}{n} \right)^k.$$

Según el ejemplo anterior, la suma es

$$\frac{1}{n-1} \frac{\frac{n-1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2} = n.$$

Así pues, si repetimos  $N$  veces el experimento de tirar un dado hasta que salga un seis, la media del número de intentos necesarios tenderá a 6 cuando  $N$  tienda a infinito. ■

Estos criterios, que en principio valen para series de términos positivos, pueden aplicarse para estudiar la convergencia de series arbitrarias debido al teorema siguiente. Primero necesitamos una definición:

**Definición 5.7** Diremos que una serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  es *absolutamente convergente* si la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$  es convergente.

**Teorema 5.8** *Toda serie absolutamente convergente es convergente. Además:*

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|.$$

DEMOSTRACIÓN: Consideremos una serie (estándar)  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ , sea  $S_N$  su suma parcial  $N$ -sima y sea  $S'_N$  la suma parcial correspondiente a la serie con valores absolutos. Si ésta es convergente y  $M < N$  son números naturales infinitos, tenemos que

$$|S_N - S_M| = \left| \sum_{n=M}^N a_n \right| \leq \sum_{n=M}^N |a_n| = S'_N - S'_M \approx 0,$$

luego  $S_M \approx S_N$ , lo que significa que la serie dada es una sucesión de Cauchy, luego es convergente. Además, teniendo en cuenta que una serie de términos positivos (como sucesión monótona) converge al supremo de sus sumas parciales, tenemos que

$$-\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \leq -\sum_{n=0}^N |a_n| \leq \sum_{n=0}^N a_n \leq \sum_{n=0}^N |a_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|.$$

Esto vale para todo  $N$ . En particular, vale para  $N$  infinito, y sigue siendo cierto al tomar la parte estándar del término central, es decir:

$$-\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|.$$

Esto equivale a la desigualdad del enunciado. ■

Así pues, para probar la convergencia de una serie podemos tratar de aplicar los criterios que hemos visto a la serie correspondiente con valores absolutos. Ahora bien, hemos de tener presente que una serie puede ser convergente sin ser absolutamente convergente. Un ejemplo es la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log 2.$$

Hay un criterio muy sencillo que justifica la convergencia de series como ésta, en la que los términos alternan en signo:

**Teorema 5.9 (Criterio de Leibniz)** Sea  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  una sucesión monótona decreciente y convergente a 0. Entonces, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$

es convergente.

DEMOSTRACIÓN: Observemos que las sumas parciales pares:

$$S_{2N} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2N-1} - a_{2N})$$

forman una sucesión monótona creciente, ya que los términos entre paréntesis son positivos. Similarmente, las sumas parciales impares:

$$S_{2N+1} = a_1 + (-a_2 + a_3) + (-a_4 + a_5) + \cdots + (-a_{2N} + a_{2N+1})$$

forman una sucesión monótona decreciente, ya que todos los términos entre paréntesis son negativos. Más aún, ambas sucesiones están distribuidas de esta forma:

$$S_2 < S_4 < S_6 < \cdots < S_5 < S_3 < S_1$$

En efecto:  $S_2 < S_1$  porque  $S_2$  resulta de sumarle a  $S_1$  un número negativo, luego,  $S_2 < S_3 < S_1$  porque  $S_3$  resulta de sumarle a  $S_2$  un número positivo y ya hemos visto que la sucesión de sumas impares es decreciente, luego,  $S_2 < S_4 < S_3$  porque ya hemos visto que la sucesión de las sumas pares es creciente y  $S_4$  resulta de sumarle a  $S_3$  un número negativo, etc.

En definitiva, las series de sumas pares es una sucesión monótona creciente y acotada por  $S_1$ , luego es convergente, y la serie de sumas impares es una sucesión monótona decreciente y acotada por  $S_2$ , luego es convergente. Ahora bien, si  $M$  y  $N$  son números infinitos, tenemos que

$$S_{2N+1} - S_{2M} \approx S_{2N+1} - S_{2N} = a_{2N+1} \approx 0,$$

luego todas las sumas parciales  $S_N$  (tanto si  $N$  es par o impar) tienen la misma parte estándar  $S$ , de modo que  $S_N \approx S$  para todo  $N$  infinito, luego la serie es convergente. ■

La convergencia absoluta es crucial para generalizar a series infinitas propiedades obvias de las series finitas, como el hecho de que una suma (finita) es independiente del orden de los sumandos. Esto es consecuencia de la siguiente caracterización de la convergencia de una serie de términos positivos:

**Teorema 5.10** Una serie (estándar) de términos positivos  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  converge a un número (estándar)  $S$  si y sólo si para todo conjunto finito  $I \subset \mathbb{N}$  que contenga a todos los números finitos, se cumple que

$$\sum_{n \in I} a_n \approx S.$$

DEMOSTRACIÓN: Si la serie converge a  $S$  e  $I \subset \mathbb{N}$  es un conjunto finito que contenga a todos los números finitos, la finitud de  $I$  implica que existe un máximo  $M$  y un mínimo  $N$  tales que

$$\{0, \dots, M\} \subset I \subset \{0, \dots, N\}.$$

Como  $M+1 \notin I$ ,  $M$  ha de ser infinito. Como la serie es de términos positivos,

$$S \approx \sum_{n=0}^M a_n \leq \sum_{n \in I} a_n \leq \sum_{n=0}^N a_n \approx S,$$

luego  $\sum_{n \in I} a_n \approx S$ .

Recíprocamente, si se cumple esta condición y  $N$  es un número natural infinito, tomando  $I = \{0, \dots, N\}$ , tenemos que

$$\sum_{n=0}^N a_n = \sum_{n \in I} a_n \approx S,$$

lo que significa que la serie converge a  $S$ . ■

Como consecuencia:

**Teorema 5.11** *Si la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  es absolutamente convergente y  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  es una aplicación biyectiva, entonces la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_{f(n)}$  también es absolutamente convergente, y su suma es la misma.*

DEMOSTRACIÓN: Llamemos

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n & \text{si } a_n \geq 0, \\ 0 & \text{si } a_n < 0, \end{cases} \quad a_n^- = \begin{cases} 0 & \text{si } a_n \geq 0, \\ -a_n & \text{si } a_n < 0. \end{cases}$$

De este modo,  $a_n = a_n^+ - a_n^-$ . Como  $|a_n^+| \leq |a_n|$  y  $|a_n^-| \leq |a_n|$ , el teorema 5.5 implica que las series

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n^-$$

son absolutamente convergentes, y

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=0}^{\infty} a_n^-.$$

Es claro que (como sucesiones, no como límites, que no sabemos si existen)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{f(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{f(n)}^+ - \sum_{n=0}^{\infty} a_{f(n)}^-.$$

Por lo tanto, si probamos que las dos series de la derecha son convergentes y que su suma es la misma que la de las series correspondientes sin permutar los sumandos, tendremos probado el teorema. Ahora bien, ambas series son de

términos positivos, luego concluimos que basta probar el teorema para series de términos positivos. Supongamos, pues que  $a_n \geq 0$  para todo  $n$ . También podemos suponer que todos los datos, incluida  $f$  son estándar.

Entonces, si  $N$  es un número natural infinito, el conjunto

$$I = \{f(n) \mid n \leq N\}$$

es finito y contiene a todos los números naturales finitos, porque, como  $f$  es estándar, todo  $m \in \mathbb{N}$  estándar es de la forma  $m = f(m')$ , con  $m'$  estándar, luego  $m' < N$ , luego  $m \in I$ . Además

$$\sum_{n=0}^N a_{f(n)} = \sum_{n \in I} a_n \approx S,$$

luego

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{f(n)} = S.$$

■

El teorema es falso para series no absolutamente convergentes.

**Ejemplo** Sabemos que

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots = \ln 2.$$

Por lo tanto:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots = \frac{\ln 2}{2}.$$

Es claro entonces que

$$0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{10} + 0 - \frac{1}{12} + \dots = \frac{\ln 2}{2}.$$

Sumando esta serie y la original obtenemos que

$$1 + 0 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + 0 + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots = \frac{3 \ln 2}{2}.$$

Eliminando los ceros:

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} - \frac{1}{8} + \dots = \frac{3 \ln 2}{2}.$$

La última serie es claramente una reordenación de la primera, y tiene una suma diferente. ■

## 5.2 Sucesiones funcionales

Estudiamos ahora las sucesiones de funciones de la forma  $\{f_n\}_{n \geq 0}$ , donde  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ , para un intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ . El concepto más sencillo de convergencia que podemos definir para estas sucesiones es el siguiente:

**Definición 5.12** Diremos que una sucesión funcional  $\{f_n\}_{n \geq 0}$  en un intervalo  $I \subset \mathbb{R}$  converge puntualmente a una función  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  si para todo  $x \in I$  existe

$$\lim_n f_n(x) = f(x).$$

Este límite no tiene por qué existir, pero es evidente que una sucesión funcional no puede converger a dos límites distintos.

**Ejemplo** La sucesión  $f_n(x) = \sqrt[n]{x}$ , definida en  $[0, +\infty[$ , es convergente, y su límite es la función constante 1:

$$\lim_n \sqrt[n]{x} = 1.$$

En efecto, si  $x \geq 0$  es estándar, se cumple que  $\sqrt[n]{x} = x^{1/n} = e^{(\log x)/n}$ , luego si  $n$  es infinito se cumple que  $(\log x)/n \approx 0$ , luego  $\sqrt[n]{x} \approx 1$ . ■

Observemos que si una sucesión numérica estándar  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  converge a un límite  $l$ , entonces  $x_n$  es finito siempre que  $n$  es infinito, y  $l = {}^*x_n$ . Podemos enunciar un hecho análogo para límites funcionales, para lo cual necesitamos la definición siguiente:

**Definición 5.13** Una función  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  (no necesariamente estándar) definida en un intervalo estándar  $I \subset \mathbb{R}$  es *casi estándar* si cuando  $x \in I$  es estándar, entonces  $f(x)$  es finito. En tal caso, definimos su *estandarización* como la función

$$\tilde{f} = {}^S\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I, y \approx f(x)\}.$$

**Teorema 5.14** Si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  es una función casi estándar, entonces su estandarización  $\tilde{f} : I \rightarrow \mathbb{R}$  es la única función estándar tal que, para todo  $x \in I$  estándar, cumple  $\tilde{f}(x) = {}^*f(x)$ .

DEMOSTRACIÓN: Sucesivas aplicaciones del principio de transferencia prueban que  $\tilde{f} : I \rightarrow \mathbb{R}$ . En efecto, como todo elemento estándar de  $\tilde{f}$  es un par de números reales con primera componente en  $I$ , podemos afirmar que todo elemento de  $\tilde{f}$  es un par ordenado de números reales con primera componente en  $I$ . Como para todo  $x \in I$  estándar existe un único  $y \in \mathbb{R}$  tal que  $(x, y) \in \tilde{f}$  (concretamente  $y = {}^*f(x)$ ), concluimos que para todo  $x \in I$  existe un único  $y \in \mathbb{R}$  tal que  $(x, y) \in \tilde{f}$ . Esto significa que  $\tilde{f} : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Más aún, según acabamos de observar, para todo  $x \in I$  estándar se cumple que

$$\tilde{f}(x) = {}^*f(x),$$

y esta propiedad determina completamente a  $\tilde{f}$ , ya que cualquier otra función estándar  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  que cumpla esto tiene los mismos elementos estándar que  $\tilde{f}$ , a saber, los pares  $(x, *f(x))$ , con  $x \in I$  estándar. Por consiguiente,  $g = \tilde{f}$ . ■

La estandarización de una función representa el mismo papel en la convergencia funcional que la parte estándar en la convergencia numérica:

**Teorema 5.15** *Una sucesión estándar  $\{f_n\}_{n \geq 0}$  converge puntualmente en un intervalo  $I$  a una función  $f$  si y sólo si para todo  $n$  infinito la función  $f_n$  es casi estándar, y  $f = \tilde{f}_n$ .*

DEMOSTRACIÓN: Si la sucesión converge y  $x \in I$  es estándar y  $n$  es infinito, entonces  $f_n(x) \approx f(x)$ . Esto prueba que  $f_n$  es casi estándar y, por el teorema anterior,  $f = \tilde{f}_n$ .

Recíprocamente, si se cumple la condición del enunciado, para todo  $x \in I$  estándar tenemos que  $f_n(x) \approx *f_n(x) = \tilde{f}_n(x) = f(x)$ , luego

$$\lim_n f_n(x) = f(x),$$

y por transferencia, lo mismo vale para todo  $x \in I$ , no necesariamente estándar. ■

Los ejemplos siguientes muestran que la convergencia puntual es deficiente en muchos aspectos.

**Ejemplo** Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función dada por

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ nx & \text{si } 0 \leq x \leq 1/n, \\ 1 & \text{si } x \geq 1/n. \end{cases}$$

Entonces  $\{f_n\}_{n \geq 0}$  converge puntualmente a la función dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

En efecto, si  $x \in \mathbb{R}$  es un punto estándar y  $n$  es un número natural infinito, o bien  $x \leq 0$  y  $f_n(x) = 0 = f(x)$ , o bien  $x > 0$  y  $f_n(x) = 1 = f(x)$ , pues  $1/n \approx 0 < x$ . Esto prueba que

$$\lim_n f_n(x) = f(x)$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$  estándar y, por transferencia, para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Tenemos así un ejemplo de sucesión de funciones continuas que converge puntualmente a una función discontinua. ■

**Ejemplo** Consideremos la sucesión funcional en  $[0, 1]$  dada por

$$f_n(x) = nx(1 - x^2)^n$$

Si  $x \in [0, 1]$ , tenemos que

$$\lim_n nx(1 - x^2)^n = 0.$$

Esto es obvio si  $x = 0$  o si  $x = 1$  y, en otro caso, se cumple porque, llamando  $r = (1 - x^2)$ , la serie de término general  $nr^n$  es convergente, como hemos visto en el ejemplo de la página 157.

Por otra parte

$$\int_0^1 f_n(x) dx = -\frac{n}{2} \left[ \frac{(1 - x^2)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{n}{2(n+1)}.$$

Así pues, existe

$$\lim_n \int_0^1 f_n(x) dx = \frac{1}{2} \neq 0 = \int_0^1 \lim_n f_n(x) dx$$

En definitiva, tenemos un ejemplo de sucesión convergente cuya sucesión de integrales no converge a la integral del límite. ■

Estos y otros muchos fenómenos no suceden si, en lugar de considerar la convergencia puntual, consideramos la convergencia uniforme que vamos a definir a continuación. Para destacar la diferencia, observemos que una sucesión estándar  $\{f_n\}_{n \geq 0}$  converge puntualmente a una función  $f_n$  (en un intervalo  $I$ ) si y sólo si para todo  $x \in I$  estándar y todo  $n \in \mathbb{N}$  infinito, se cumple que  $f_n(x) \approx f(x)$ .

**Definición 5.16** Diremos que una sucesión estándar  $\{f_n\}_{n \geq 0}$  converge uniformemente en un intervalo  $I$  a una función  $f$  si para todo  $x \in I$  y todo  $n \in \mathbb{N}$  infinito, se cumple que  $f_n(x) \approx f(x)$ .

La diferencia con la convergencia puntual es, pues, que en la convergencia uniforme la aproximación  $f_n(x) \approx f(x)$  es válida para todo  $x \in I$  no necesariamente estándar. Es obvio que la convergencia uniforme implica la convergencia puntual, pero el recíproco no es cierto, como muestra el ejemplo siguiente:

**Ejemplo** Las sucesiones de los dos ejemplos anteriores no convergen uniformemente a sus límites.

En el primer caso, si tomamos  $x = 1/2n$ , donde  $n$  es un número natural infinito, entonces

$$f_n(x) = \frac{1}{2} \not\approx 1 = f(x).$$

En el segundo caso, si  $x = 1/n$ , donde  $n$  es un número natural infinito,

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \approx ee^{-1} = 1 \not\approx 0 = f(x),$$

donde hemos usado el teorema 3.42. ■

**Ejemplo** La sucesión dada por  $f_n(x) = x/n$  converge uniformemente a la función  $f = 0$  en el intervalo  $[0, 1]$ , mientras que en  $\mathbb{R}$  converge puntualmente, pero no uniformemente, a dicha función.

En efecto, si  $x \in [0, 1]$  y  $n$  es infinito, entonces  $f_n(x) = x/n \approx 0 = f(x)$ , luego la convergencia es uniforme. En cambio, si  $x$  puede variar en  $\mathbb{R}$ , el argumento anterior vale para todo  $x$  finito, en particular para todo  $x$  estándar, luego  $\{f_n\}_{n \geq 0}$  converge puntualmente a 0 en  $\mathbb{R}$ . Sin embargo, tomando  $x = n$ , donde  $n$  es un natural infinito, tenemos que  $f_n(x) = 1 \not\approx 0 = f(x)$ , luego la convergencia no es uniforme. ■

La convergencia uniforme tiene la siguiente interpretación clásica: Si tenemos que  $\lim_n f_n(x) = f(x)$  y la convergencia es uniforme en un intervalo  $I$ , dado  $\epsilon > 0$  estándar, como, para todo  $n$  infinito, se cumple que, para todo  $x \in I$ ,  $|f_n(x) - f(x)| \approx 0$ , en particular  $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$  y, como esto vale para todo  $n \geq n_0$ , donde  $n_0$  es un número natural infinito cualquiera, por transferencia ha de existir un natural finito  $n_0$  que cumpla lo mismo, es decir, tal que, para todo  $n \geq n_0$  y todo  $x \in I$ , se cumple  $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ .

Así pues, la convergencia uniforme se traduce en que podemos conseguir que  $f_n$  y  $f$  se diferencien en menos de  $\epsilon$  a la vez en todos los puntos  $x \in I$ , mientras que en el caso de la convergencia puntual, para conseguir que la diferencia entre  $f_n$  y  $f$  se haga menor que  $\epsilon$ , puede hacer falta un  $n_0$  distinto en cada punto  $x$ , de modo que un mismo  $n_0$  no valga a la vez para todos ellos.

Probamos ahora que la convergencia uniforme resuelve los dos problemas que habíamos detectado en la convergencia puntual:

**Teorema 5.17** Si  $\{f_n\}_{n \geq 0}$  es una sucesión de funciones continuas  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  que converge uniformemente a una función  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces  $f$  también es continua.

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer que todos los datos son estándar. Para probar que  $f$  es continua en  $I$  basta ver que lo es en un punto estándar  $x_1 \in I$ . Tomamos  $x_2 \in I$  tal que  $x_1 \approx x_2$  y hemos de ver que  $f(x_1) \approx f(x_2)$ . En caso contrario, existe un  $\epsilon > 0$  estándar tal que  $|f(x_1) - f(x_2)| > \epsilon$ .

Si  $n$  es un número natural infinito, tenemos que, para todo  $x \in I$ , se cumple  $f_n(x) \approx f(x)$ , luego en particular,  $|f(x) - f_n(x)| < \epsilon/2$ . Como esta afirmación es interna, podemos aplicar el principio de transferencia, que nos da que existe un  $n$  estándar que cumple lo mismo. En particular,  $|f(x_1) - f_n(x_1)| < \epsilon/2$  y  $|f(x_2) - f_n(x_2)| < \epsilon/2$ . Ahora bien, como  $f_n$  es continua en  $x_1$  (y estándar), podemos afirmar que  $f_n(x_1) \approx f_n(x_2)$ , luego también  $|f(x_1) - f_n(x_2)| < \epsilon/2$

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - f_n(x_2)| + |f_n(x_2) - f(x_2)| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon,$$

contradicción. ■

Similarmente ocurre con los límites de integrales:

**Teorema 5.18** Sea  $\{f_n\}_{n \geq 0}$  una sucesión de funciones integrables en un intervalo  $[a, b]$  que converja uniformemente a una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Entonces  $f$  es integrable en  $[a, b]$  y

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_n \int_a^b f_n(x) dx.$$

DEMOSTRACIÓN: Observemos en primer lugar que  $f$  está acotada. En efecto, si  $n$  es un número natural infinito, tenemos que  $f_n$  está acotada, porque es integrable, lo cual significa que  $|f_n(x)| \leq M$  para todo  $x \in [a, b]$  (y un cierto número  $M$ , que no podemos asegurar que sea finito porque  $f_n$  no es estándar). Como  $f(x) \approx f_n(x)$ , resulta que  $|f(x)| \leq M + 1$  para todo  $x \in [a, b]$ , pero esto significa que  $f$  está acotada.

Si  $n$  es un número natural infinito, la función  $|f - f_n|$  está acotada en  $[a, b]$  y sólo toma valores infinitesimales. Por lo tanto, su supremo  $K$  ha de ser infinitesimal. Si  $P$  es cualquier partición de  $[a, b]$  en  $k$  intervalos, tenemos que

$$|S(f, P) - S(f_n, P)| \leq \sum_{i=1}^k |M_i(f) - M_i(f_n)| \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^k K \Delta x_i = K(b-a) \approx 0.$$

Igualmente,  $|s(f, P) - s(f_n, P)| \approx 0$ . Si  $\epsilon > 0$  es estándar, tenemos que

$$|S(f, P) - S(f_n, P)| < \epsilon \quad \text{y} \quad |s(f, P) - s(f_n, P)| < \epsilon \quad \text{para toda } P$$

y esto es una propiedad interna que se cumple para cualquier  $n$  infinito. Por transferencia, existe un  $n$  finito que cumple lo mismo. Para dicho  $n$ , la función  $f_n$  es estándar e integrable, luego, si  $P$  es una partición infinitesimal, tenemos además que  $s(f_n, P) \approx S(f_n, P)$ . Uniendo los tres hechos, concluimos que

$$|S(f, P) - s(f, P)| < 2\epsilon,$$

y esto vale para todo  $\epsilon > 0$  estándar. Por consiguiente,  $S(f, P) \approx s(f, P)$ , lo que prueba que  $f$  es integrable en  $[a, b]$ . Además,

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b f_n(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)| dx \leq \int_a^b K dx = K(b-a) \approx 0,$$

luego

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b f_n(x) dx.$$

Esto prueba la convergencia de la sucesión de integrales. ■

**Nota** En la prueba del teorema anterior hemos visto que, si  $P$  es una partición infinitesimal y  $n$  es un número natural infinito, entonces

$$S(f_n, P) \approx S(f, P) \approx \int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b f_n(x) dx,$$

e igualmente con sumas inferiores. En resumen, si una sucesión  $\{f_n\}_{n \geq 0}$  de funciones integrables converge uniformemente, tenemos que

$$S(f_n, P) \approx \int_a^b f_n(x) dx \approx s(f_n, P)$$

para todo número natural  $n$ , finito o infinito. Cuando  $n$  es finito se trata simplemente de la definición de integrabilidad, pero para  $n$  infinito es un hecho que no es obvio, puesto que la función  $f_n$ , aunque es integrable, no es estándar, luego no tiene por qué cumplir la definición de integrabilidad más que indirectamente, a través del principio de estandarización.

Lo mismo es válido para la continuidad: si una sucesión  $\{f_n\}_{n \geq 0}$  de funciones continuas en un intervalo  $I$  converge uniformemente a una función  $f$ , entonces, si  $x_0 \in I$  es estándar y  $x \in I$  cumple  $x \approx x_0$ , se cumple que  $f_n(x) \approx f_n(x_0)$ . Esto es porque  $f$  es continua en  $x_0$  (y estándar):  $f_n(x) \approx f(x) \approx f(x_0) \approx f_n(x_0)$ .

En resumen: si una sucesión  $\{f_n\}_{n \geq 0}$  de funciones continuas converge uniformemente, todas las funciones  $f_n$  (para  $n$  finito o infinito) cumplen explícitamente la definición de continuidad, aunque no sean funciones estándar. ■

La relación entre la derivabilidad y la convergencia es más delicada, como muestra el ejemplo siguiente:

**Ejemplo** *La sucesión de funciones dada por*

$$f_n(x) = \frac{\text{sen}(nx)}{n}$$

*converge uniformemente a  $f = 0$  en  $\mathbb{R}$ , todas ellas son de clase  $C^\infty$ , y el límite también lo es, pero*

$$f'_n(x) = \cos(nx)$$

*no converge a  $f' = 0$ , ni a ninguna otra función, ni siquiera puntualmente.*

En cambio, como veremos enseguida, la convergencia uniforme de las derivadas (y poco más) sí que implica la convergencia (casi) uniforme de las funciones, donde “casi” tiene el sentido siguiente:

**Definición 5.19** Diremos que una sucesión estándar de funciones  $\{f_n\}_{n \geq 0}$  converge *casi uniformemente* en un intervalo  $I$  si cuando  $n$  es infinito se cumple  $f_n(x) \approx f(x)$  para todo  $x \in I$  que sea finito y tal que  $*x \in I$ .

Es obvio que la convergencia uniforme en un intervalo implica la convergencia casi uniforme y que ésta implica a su vez la convergencia puntual.

Más concretamente, la relación entre la convergencia uniforme y la casi uniforme es muy simple: la definición anterior equivale a que la sucesión converja uniformemente en cada intervalo  $[u, v] \subset I$ .

En efecto, si se da la convergencia casi uniforme, podemos tomar el intervalo estándar, y entonces, si  $x \in [u, v] \subset I$ , se cumple que  $x$  es finito y  $*x \in [u, v] \subset I$ , luego la sucesión converge uniformemente en  $[u, v]$ .

Recíprocamente, si tenemos la convergencia uniforme en los intervalos  $[u, v]$  y  $x \in I$  es finito y cumple  $*x \in I$ , digamos  $x^* < x$ , como existe un  $x \in I$  tal que  $x > *x$ , también existe un  $v \in I$  estándar tal que  $v > *x$ , y entonces  $x \in [*x, v] \subset I$ . Igualmente se razona si  $x < *x$ . Si  $x = *x$ , tomamos el intervalo  $[*x, *x]$ . En cualquier caso, tenemos un intervalo estándar tal que  $x \in [u, v] \subset I$ , por lo que podemos afirmar que  $f_n(x) \approx f(x)$ . ■

**Ejercicio:** Comprobar que la sucesión  $f_n(x) = x/n$  converge casi uniformemente en  $\mathbb{R}$  a la función nula.

**Teorema 5.20** *Sea  $\{f_n\}_{n \geq 0}$  una sucesión de funciones de clase  $C^1$  en un intervalo abierto  $I$  tal que exista un punto  $x_0 \in I$  para el que exista  $\lim_n f_n(x_0) = y_0$ . Si la sucesión  $\{g'_n\}_{n \geq 0}$  converge uniformemente a una función  $g$ , entonces  $\{f_n\}_{n \geq 0}$  converge casi uniformemente a una función  $f$  de clase  $C^1$  tal que  $f' = g$ .*

**DEMOSTRACIÓN:** Podemos suponer que todos los datos son estándar. Observemos en primer lugar que, si  $n$  es un número natural infinito, entonces la función  $f_n$  es casi estándar. En efecto, si  $x \in I$  es estándar, en virtud del teorema del valor medio,

$$f_n(x) - f_n(x_0) = f'_n(c)(x - x_0),$$

donde  $c$  es un punto (finito) entre  $x$  y  $x_0$ . Tenemos que

$$f_n(x_0) \approx y_0, \quad f'_n(c) \approx g(c) \approx g(*c),$$

donde hemos usado que  $*c \in I$  precisamente porque  $c$  está entre  $x$  y  $x_0$ , así como que  $g$  es continua por ser límite uniforme de funciones continuas. Por consiguiente,  $f_n(x_0)$  y  $f'_n(c)$  son finitos, y lo mismo vale para  $f_n(x)$ .

Esto nos permite considerar la estandarización  $f = \tilde{f}_n$ . Observemos que, en principio,  $f$  depende del número natural infinito  $n$  que hemos escogido, pero luego veremos que, en realidad,  $f$  es el mismo para todos los  $n$ . Notemos también que  $f(x_0) = *f_n(x_0) = y_0$ .

Vamos a probar que  $f$  es derivable en  $I$ . Como es una función estándar, basta probarlo en un punto estándar  $p \in I$ . Si  $h \approx 0$ ,  $h \neq 0$ , el teorema del valor medio nos da un punto  $c$  entre  $p$  y  $p+h$  (en particular  $c \approx p$ ) tal que

$$\frac{f_n(p+h) - f_n(p)}{h} = f'_n(c) \approx g(c) \approx g(p),$$

donde hemos usado que  $g$  es continua en  $p$ . Fijemos un  $\epsilon > 0$  estándar. Si  $\delta > 0$  es cualquier infinitésimo y  $n_0$  es un número infinito, hemos probado que, si  $|h| < \delta$ ,  $h \neq 0$  y  $n \geq n_0$ , se cumple

$$\left| \frac{f_n(p+h) - f_n(p)}{h} - g(p) \right| < \epsilon.$$

Como la afirmación es interna, existen un  $\delta$  y un  $n_0$  estándar que cumplen lo mismo. Si fijamos un  $h$  estándar que cumpla  $|h| < \delta$ ,  $h \neq 0$ , se cumple la desigualdad anterior, pero el denominador es ahora apreciable, por lo que si lo aplicamos al  $n$  infinito que hemos tomado en un principio y cambiamos  $f_n$  por  $f$ , el numerador se altera en un infinitésimo, y la fracción entera también. Así pues:

$$\left| \frac{f(p+h) - f(p)}{h} - g(p) \right| < \epsilon.$$

Esto vale para todo  $h$  estándar que cumpla  $|h| < \delta$ , pero, por transferencia, vale para todo  $h$  estándar o no. En particular vale para todo infinitésimo  $h$  y para todo  $\epsilon > 0$  estándar. Por consiguiente, si  $h \approx 0$ ,  $h \neq 0$ , concluimos que

$$\frac{f(p+h) - f(p)}{h} \approx g(p).$$

Esto significa que existe  $f'(p) = g(p)$ . Como además  $f(x_0) = y_0$ , resulta que la función  $f$  está unívocamente determinada. (Dos funciones con la misma derivada se diferencian a lo sumo en una constante, pero si toman el mismo valor en un punto, han de ser iguales.) Así pues,  $f$  no depende de  $n$ , como anticipábamos, y esto significa que  $\{f_n\}_{n \geq 0}$  converge puntualmente a  $f$ .

Para probar que la convergencia es, en realidad, casi uniforme, tomamos un  $x \in I$  finito tal que  $*x \in I$ . Hemos visto antes que

$$\frac{f_n(x) - f(*x)}{x - *x} \approx g(*x),$$

luego

$$f_n(x) \approx f(*x) \approx f(x).$$

■

El concepto de sucesión de Cauchy puede trasladarse a sucesiones funcionales, de modo que podemos asegurar la convergencia de una sucesión sin necesidad de conocer su límite de antemano:

**Definición 5.21** Una sucesión estándar  $\{f_n\}_{n \geq 0}$  de funciones definidas en un intervalo  $I \subset \mathbb{R}$  es *puntualmente* (resp. *uniformemente*, resp. *casi uniformemente*) *de Cauchy* en  $I$  si para todo  $x \in I$  estándar (resp. para todo  $x \in I$ , resp. para todo  $x \in I$  finito tal que  $*x \in I$ ) y todos los números naturales infinitos  $m$  y  $n$  se cumple que  $f_m(x) \approx f_n(x)$ .

**Teorema 5.22** Una sucesión de funciones definidas en un intervalo es *puntualmente*, *uniformemente* o *casi uniformemente* convergente si y sólo si tiene la correspondiente propiedad de Cauchy.

**DEMOSTRACIÓN:** Es evidente que toda sucesión convergente es de Cauchy (del tipo correspondiente a la convergencia).

Supongamos ahora que  $\{f_n\}_{n \geq 0}$  es una sucesión estándar puntualmente de Cauchy en un intervalo  $I$ . Entonces, para cada  $x \in I$  estándar, la sucesión

$\{f_n(x)\}_{n \geq 0}$  es una sucesión de Cauchy en  $\mathbb{R}$ , luego es convergente. En particular,  $f_n(x)$  es finito cuando  $n$  es infinito, luego la función  $f_n$  es casi estándar y podemos considerar su estandarización  $\tilde{f}_n$ . Si  $m$  y  $n$  son dos números infinitos, tenemos que  $f_m(x) \approx f_n(x)$ , luego  $\tilde{f}_m(x) = \tilde{f}_n(x)$ , luego  $\tilde{f}_m = \tilde{f}_n$ . En definitiva, todas las funciones  $f_n$  tienen la misma estandarización  $f$ , luego la sucesión converge puntualmente a  $f$ .

Si la sucesión es uniformemente de Cauchy, entonces también es puntualmente de Cauchy, luego todo lo dicho anteriormente sigue siendo válido y tenemos que la sucesión converge puntualmente a  $f$ . Vamos a probar que la convergencia es uniforme.

Fijemos  $\epsilon > 0$  estándar. Si  $n_0$  es un número natural infinito, tenemos que, para todo  $m, n \geq n_0$  y todo  $x \in I$ , se cumple que  $|f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon$ . Como la propiedad es interna, existe un  $n_0$  finito que cumple lo mismo.

Esto vale en particular para cualquier  $x$  estándar y para todo  $m$  y  $n \geq n_0$ . Tomando  $m$  infinito tenemos que  $f_m(x) \approx f(x)$ , luego  $|f(x) - f_n(x)| < \epsilon$ . Esto vale para todo  $x$  estándar y para todo  $n \geq n_0$ , luego, por transferencia, vale para todo  $x \in I$ .

El  $n_0$  finito a partir del cual se cumple esto depende de  $\epsilon$ , pero si  $n$  es infinito, cumplirá esto cualquiera que sea  $n_0$ , es decir, para todo  $\epsilon > 0$  estándar. Esto prueba que si  $n$  es infinito, entonces  $f(x) \approx f_n(x)$ , para todo  $x \in I$ . Así pues, la convergencia es uniforme.

Si la sucesión es casi uniformemente de Cauchy, entonces es uniformemente de Cauchy en cada intervalo estándar  $[u, v] \subset I$ , luego la convergencia a  $f$  es uniforme en cada uno de estos intervalos, luego la convergencia es casi uniforme en  $I$ . ■

Veamos una aplicación de la caracterización de la convergencia en términos de la propiedad de Cauchy al caso de las series funcionales:

**Definición 5.23** La *serie funcional* asociada a una sucesión de funciones  $\{f_n\}_{n \geq 0}$  definidas en un intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ , representada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n,$$

es la sucesión funcional de sumas parciales  $\{S_k\}_{k \geq 0}$ , donde

$$S_k = \sum_{n=0}^k f_n.$$

Diremos que la serie converge *absoluta y puntualmente*, *absoluta y uniformemente* o *absoluta y casi uniformemente* si lo hace la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|.$$

Notemos que esto implica respectivamente la convergencia puntual, uniforme o casi uniforme de la serie, ya que (suponiendo la serie estándar) si  $x \in I$  y  $k \leq r$

son números naturales infinitos, tenemos que

$$|S_r(x) - S_k(x)| = \left| \sum_{n=k}^r f_n(x) \right| \leq \sum_{n=k}^r |f_n(x)|,$$

y el último término es infinitesimal para  $x \in I$  estándar, para todo  $x \in I$  o para todo  $x \in I$  finito tal que  $*x \in I$ , según el tipo de convergencia, ya que la serie con valores absolutos es puntualmente, uniformemente o casi uniformemente de Cauchy en  $I$ , luego la serie dada tiene la misma propiedad, luego converge con el mismo tipo de convergencia.

**Teorema 5.24 (Criterio de mayoración de Weierstrass)** Sea  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$  una serie funcional estándar en un intervalo  $I \subset \mathbb{R}$  y sea  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  una serie numérica convergente tal que, para todo  $n \in \mathbb{N}$  infinito y todo  $x \in I$ , se cumpla que  $|f_n(x)| \leq a_n$ . Entonces la serie funcional converge absoluta y uniformemente en  $I$ .

DEMOSTRACIÓN: Tenemos que, si  $k \leq r$  son infinitos y  $x \in I$ , entonces

$$|S_r(x) - S_k(x)| = \left| \sum_{n=k}^r f_n(x) \right| \leq \sum_{n=k}^r |f_n(x)| \leq \sum_{n=k}^r a_n \approx 0$$

Esto prueba que  $S_r(x) \approx S_k(x)$ , luego la sucesión  $\{S_k\}_{k \geq 0}$  es uniformemente de Cauchy, luego la serie funcional converge uniformemente. ■

Como aplicación vamos a construir una función continua que no es derivable en ningún punto. Necesitamos una caracterización de la derivabilidad:

**Teorema 5.25** Una función estándar  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  es derivable en un punto estándar  $p \in ]a, b[$  si y sólo si existe un número estándar  $f'(p)$  tal que para todo par de números reales tales que  $x \leq p \leq y$ ,  $x \approx y$ ,  $x \neq y$ , se cumple

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \approx f'(p).$$

DEMOSTRACIÓN: Si se cumple esta condición, tomando  $x = p$  tenemos la definición de derivada. Recíprocamente, si  $f$  es derivable en  $p$ , existen infinitésimos  $\xi_1$  y  $\xi_2$  tales que

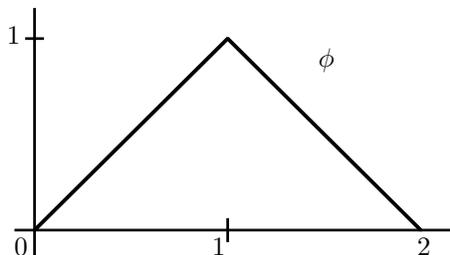
$$\begin{aligned} f(y) - f(p) &= f'(p)(y - p) + (y - p)\xi_1, \\ f(p) - f(x) &= f'(p)(p - x) + (p - x)\xi_2. \end{aligned}$$

Sumando y dividiendo entre  $y - x$  queda

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(p) + \frac{y - p}{y - x} \xi_1 + \frac{p - x}{y - x} \xi_2 \approx f'(p),$$

pues las fracciones del segundo miembro son menores que 1. ■

**Ejemplo (Una función continua no derivable)** Consideremos la función  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por la figura siguiente y extendida periódicamente a  $\mathbb{R}$ .



Es claro que  $\phi$  es continua en  $\mathbb{R}$  y es derivable en todo  $\mathbb{R}$  excepto en los números enteros. Además,  $\phi$  es *derivable por la derecha* en todo  $\mathbb{R}$ , lo cual significa que existe un número real estándar  $\phi'^+(x)$  tal que, para todo infinitésimo  $h > 0$ , se cumple que

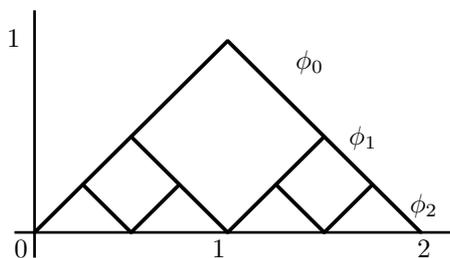
$$\frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h} \approx \phi'^+(x).$$

Más concretamente, se cumple que  $\phi'^+(x) = \pm 1$ .

Para cada natural  $n$  definimos

$$\phi_n(x) = \frac{1}{2^n} \phi(2^n x).$$

La figura siguiente muestra las gráficas de estas funciones para los primeros valores de  $n$ :



Es fácil ver que  $\phi_n$  es continua en  $\mathbb{R}$  y es derivable en todo  $\mathbb{R}$  menos en los puntos de la forma  $k/2^n$ , con  $k \in \mathbb{Z}$ , y en cualquier punto existe  $\phi_n'^+(x) = \pm 1$ .

Finalmente, definimos  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  como la función dada por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(x).$$

Como  $|\phi(x)| \leq 1$ , tenemos que  $|\phi_n(x)| \leq 1/2^n$ , luego el criterio de mayoración de Weierstrass implica que la serie converge uniformemente en  $\mathbb{R}$ , por lo que la suma  $f$  es una función continua. Llamemos

$$f_m(x) = \sum_{n=0}^m \phi_n(x).$$

Es claro que si  $n > m$  y  $k \in \mathbb{Z}$  entonces  $\phi_n(k/2^m) = 0$ , luego vemos que  $f(k/2^m) = f_m(k/2^m)$ .

Supongamos que  $f$  es derivable en un punto  $p$  (que podemos tomar estándar). Tomemos un número natural infinito  $m$  y sea  $n \in \mathbb{Z}$  tal que

$$x = \frac{n}{2^m} \leq p < \frac{n+1}{2^m} = y.$$

Claramente  $x \approx y$ , luego por el teorema anterior

$$f'(p) \approx \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \frac{f_n(y) - f_m(x)}{y - x} = f'_m(p).$$

En el último paso hemos usado que  $f_m$  es lineal en el intervalo  $[x, y]$ . Ahora bien, esto vale para todo número natural infinito  $m$ , en particular para  $m+1$ , con lo que

$$f'_m(p) \approx f'_{m+1}(p) = f'_m(p) + \phi'_{m+1}(p) = f'_m(p) \pm 1,$$

lo cual es absurdo. Por consiguiente  $f$  no es derivable en ningún punto. ■

### 5.3 Series de potencias

Los resultados de la sección anterior se aplican en particular a las series de potencias, es decir, a las sucesiones funcionales de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n,$$

donde  $x_0 \in \mathbb{R}$  y  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  es una sucesión de números reales.

Vamos a probar que toda serie de potencias converge en un intervalo centrado en  $x_0$  (que en el peor de los casos se reduce al propio  $x_0$  y en el mejor de los casos es todo  $\mathbb{R}$ ). Para ello necesitamos el concepto siguiente:

**Definición 5.26** Si  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  es una sucesión estándar de números reales acotada superiormente, definimos su *límite superior* como

$$\overline{\lim}_n x_n = \sup \{x_n \mid n \in \mathbb{N} \text{ es infinito}\}.$$

Observemos que si existe  $\lim_n x_n = l$ , entonces

$$\{x_n \mid n \in \mathbb{N} \text{ es infinito}\} = \{l\},$$

luego

$$\overline{\lim}_n x_n = \lim_n x_n.$$

**Ejercicio:** Dar una definición análoga de límite inferior y demostrar que una sucesión acotada tiene límite si y sólo si su límite inferior coincide con su límite superior.

**Teorema 5.27** Sea  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$  una serie de potencias.

- a) Si la sucesión  $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}_{n \geq 0}$  no está acotada, entonces la serie sólo converge en  $x = x_0$ .
- b) En caso contrario, si  $L = \overline{\lim}_n \sqrt[n]{|a_n|} \neq 0$  y  $r = 1/L$ , entonces la serie converge absoluta y casi uniformemente en el intervalo  $]x_0 - r, x_0 + r[$  y diverge fuera del intervalo  $[x_0 - r, x_0 + r]$ .
- c) Si  $L = 0$ , entonces la serie converge absoluta y casi uniformemente en  $\mathbb{R}$ .

DEMOSTRACIÓN: a) Si  $x \neq x_0$  es estándar, existe un  $n$  infinito tal que  $\sqrt[n]{|a_n|}$  es infinito, luego también lo son  $\sqrt[n]{|a_n|}|x-x_0|$  y  $a_n(x-x_0)^n$ , luego el término general de la serie numérica

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

no tiende a 0, luego la serie diverge.

b) Todo intervalo estándar  $[u, v] \subset ]x_0 - r, x_0 + r[$  está contenido en un intervalo de la forma  $[x_0 - s, x_0 + s]$ , donde  $0 < s < r$  es estándar. Tenemos que  $sL < 1$ , luego podemos tomar un número estándar  $sL < \rho < 1$ . Así, si  $|x-x_0| \leq s$  tenemos que

$$L < \frac{\rho}{s} \leq \frac{\rho}{|x-x_0|}.$$

Si  $n$  es infinito, entonces  $\sqrt[n]{|a_n|} \leq L$ , luego

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{\rho}{|x-x_0|},$$

luego

$$|a_n||x-x_0|^n < \rho^n.$$

Por el criterio de mayoración de Weierstrass, concluimos que la serie converge absoluta y uniformemente en  $[x_0 - s, x_0 + s]$ , luego converge absoluta y casi uniformemente en  $]x_0 - r, x_0 + r[$ .

En cambio, si  $|x-x_0| > r$ , con  $x$  estándar, tenemos que

$$\frac{1}{|x-x_0|} < L,$$

luego existe un  $n$  infinito tal que

$$\frac{1}{|x-x_0|} < \sqrt[n]{|a_n|},$$

luego

$$\frac{1}{|x-x_0|} < \sqrt[n]{|a_n|},$$

luego

$$|a_n||x - x_0|^n > 1,$$

luego el término general de la serie numérica correspondiente a  $x$  no tiende a 0, luego la serie diverge en  $x$ .

c) Es una ligera variante del caso anterior, tomando  $s > 0$  y  $0 < \rho < 1$  arbitrarios. ■

En la práctica, podemos definir el *radio de convergencia* de una serie de potencias como el número  $r$  del apartado b) del teorema anterior, o bien como  $r = +\infty$  si se da el caso c) o  $r = 0$  si se da el caso a). De este modo, la serie converge casi uniformemente en el *intervalo de convergencia*  $]x_0 - r, x_0 + r[$ , entendiéndose que este intervalo es  $\mathbb{R}$  cuando  $r = +\infty$  y es  $\emptyset$  cuando  $r = 0$ .

Observemos que el teorema anterior no afirma nada sobre la convergencia o divergencia de la serie en los puntos  $x_0 - r$  y  $x_0 + r$ . La situación en estos puntos depende de cada serie en concreto.

También es interesante observar que el teorema anterior permite determinar el radio de convergencia de una serie analizando su convergencia puntual, pero, en cualquier caso, la convergencia de una serie de potencias siempre es casi uniforme en un intervalo de convergencia.

Ahora podemos aplicar los resultados de la sección anterior:

**Teorema 5.28** Sea  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$  una serie de potencias con radio de convergencia no nulo. Entonces la función  $f$  es derivable en su intervalo de convergencia, y su derivada viene dada por

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}.$$

Además, la serie que define a la derivada tiene el mismo radio de convergencia.

DEMOSTRACIÓN: Sea  $L = \overline{\lim}_n \sqrt[n]{|a_n|}$ . En la página 72 hemos visto que, si  $n$  es infinito, entonces  $\sqrt[n]{n} \approx 1$ , luego  $\sqrt[n]{|a_n|} \approx \sqrt[n]{n|a_n|}$ , de donde se sigue que  $L = \overline{\lim}_n \sqrt[n]{n|a_n|}$ , luego la serie dada tiene el mismo radio de convergencia que

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^n.$$

A su vez, es claro que el radio de convergencia de esta serie es el mismo que el de

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$$

Ahora sólo tenemos que atar cabos: Las sumas parciales de esta última serie son las derivadas de las sumas parciales de la serie del enunciado. Esta serie converge uniformemente en cualquier intervalo estándar  $[u, v]$  contenido en el intervalo de convergencia, luego el teorema 5.20 nos da que esta serie converge

en  $[u, v]$  (luego en todo el intervalo de convergencia) a la derivada de la serie del enunciado. ■

Aplicando sucesivamente el teorema anterior podemos decir mucho más:

**Teorema 5.29** Sea  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$  una serie de potencias con radio de convergencia no nulo. Entonces, la función  $f$  es de clase  $C^\infty$  en su intervalo de convergencia y es su propia serie de Taylor, es decir,

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

DEMOSTRACIÓN: Aplicando el teorema anterior vemos que

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(x-x_0)^{n-k},$$

y evaluando en  $x_0$  queda que

$$f^{(k)}(x_0) = n! a_n.$$

■

**Ejemplos** El radio de convergencia de la serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

es  $r = 1$ , como puede deducirse de la fórmula para la suma de un número finito de términos de una serie geométrica o bien observando que

$$\lim \sqrt[n]{1} = 1.$$

Así pues, el intervalo de convergencia es  $] -1, 1[$  y es claro que la serie no converge ni en  $-1$  ni en  $1$ . Esto puede parecer “lógico” porque la función suma no puede extenderse continuamente a  $x = 1$ . Sin embargo, el radio de convergencia de

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}$$

es también  $r = 1$ , como se deduce haciendo el cambio de variable  $x = -t^2$  en la serie anterior o bien porque, la sucesión de coeficientes de la serie es

$$a_n = \begin{cases} (-1)^k & \text{si } n = 2k, \\ 0 & \text{si } n = 2k + 1, \end{cases}$$

luego, si  $n$  es infinito,  $\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} 0, \\ 1, \end{cases}$  luego

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = 1.$$

En cambio, en este caso la función suma se extiende a una función de clase  $C^\infty$  en  $\mathbb{R}$ .

Según el teorema 4.16, la serie

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$$

converge en  $] -1, 1 ]$ , y es claro que diverge en  $x = -1$ , luego su radio de convergencia es  $r = 1$  y la serie sólo converge en uno de los dos extremos de su intervalo de convergencia. ■

## Capítulo VI

# Cálculo diferencial de varias variables

### 6.1 Espacios métricos y espacios normados

El principal objeto de estudio de este capítulo será el espacio  $\mathbb{R}^n$ , es decir, el conjunto de todas las  $n$ -tuplas de números reales  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . En  $\mathbb{R}^n$  podemos definir una suma y un producto por números reales:

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n),$$

$$\alpha(x_1, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n).$$

Con estas operaciones, es fácil ver que  $\mathbb{R}^n$  cumple la definición siguiente:

**Definición 6.1** Un *espacio vectorial*  $V$  sobre un cuerpo  $K$  es un conjunto  $V$  dotado de una suma  $+: V \times V \rightarrow V$  y un producto escalar  $\cdot: K \times V \rightarrow V$  que cumplen las propiedades siguientes: (Se entiende que las letras griegas representan elementos de  $K$ .)

**Asociativa**  $(v + w) + x = v + (w + x)$ ,  $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$ ,

**Conmutativa**  $v + w = w + v$ ,

**Elemento neutro** Existe  $0 \in V$  tal que  $0 + v = v$ ,  $1 \cdot v = v$ ,

**Elemento simétrico** Para cada  $v \in V$ , existe  $-v \in V$  tal que  $v + (-v) = 0$ .

**Distributiva**  $\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w$ ,  $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$ .

En lo sucesivo, siempre que hablemos de espacios vectoriales, se entenderá que son espacios vectoriales sobre el cuerpo  $\mathbb{R}$  de los números reales.

La generalización a  $\mathbb{R}^n$  de los conceptos que en los temas anteriores hemos estudiado para  $\mathbb{R}$  se basará en la siguiente definición de la distancia entre dos puntos de  $\mathbb{R}^n$ :

**Definición 6.2** La *distancia euclídea* entre dos puntos  $x, y \in \mathbb{R}^n$  es

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

El teorema de Pitágoras justifica que esta definición es la usual en  $\mathbb{R}^2$  y en  $\mathbb{R}^3$ , y para  $\mathbb{R}^n$  es su generalización natural.

A la hora de demostrar analíticamente las propiedades de esta distancia, sin tener que recurrir a consideraciones geométricas, conviene “descomponerla” en varias partes. En primer lugar definimos la *norma euclídea* de un vector  $x \in \mathbb{R}^n$  como

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2},$$

de modo que la distancia euclídea puede expresarse como

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

A su vez, la norma puede expresarse en términos del *producto escalar*:

$$x \cdot y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

En estos términos,  $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$ . Deduiremos las propiedades de la distancia a partir de las de la norma, y éstas a partir de las del producto escalar.

**Definición 6.3** Un *producto escalar* en un espacio vectorial  $V$  es una aplicación  $\cdot : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  que cumpla las propiedades siguientes:

- a)  $v \cdot w = w \cdot v$ ,
- b)  $(v + w) \cdot x = v \cdot x + w \cdot x$ ,
- c)  $(\alpha v) \cdot w = \alpha(v \cdot w)$ ,
- d)  $v \cdot v \geq 0$  y  $v \cdot v = 0$  si y sólo si  $v = 0$ .

Es evidente que el producto escalar que hemos definido cumple esta definición.

**Definición 6.4** Una *norma* en un espacio vectorial  $V$  es una aplicación  $\| \cdot \| : V \rightarrow [0, +\infty[$  que cumple las propiedades siguientes:

- a)  $\|v\| = 0$  si y sólo si  $v = 0$ .
- b)  $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$ .
- c)  $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ .

La tercera propiedad recibe el nombre de *desigualdad triangular*.

Un *espacio normado* es un espacio vectorial dotado de una norma.

**Teorema 6.5** Si  $V$  es un espacio vectorial dotado de un producto escalar, la aplicación  $\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\|v\| = \sqrt{v \cdot v}$  es una norma, y cumple además la desigualdad de Schwarz:  $|x \cdot y| \leq \|x\| \|y\|$ .

DEMOSTRACIÓN: Probemos en primer lugar la desigualdad de Schwarz. Sea  $\alpha = \pm 1$ , de modo que  $|x \cdot y| = \alpha(x \cdot y)$ . Para todo número real  $r$ , se cumple

$$0 \leq (x - r\alpha y) \cdot (x - r\alpha y) = x \cdot x - 2r\alpha(x \cdot y) + r^2 y \cdot y.$$

Así pues,

$$\|x\|^2 - 2|x \cdot y|r + \|y\|^2 r^2 \geq 0$$

para todo  $r \in \mathbb{R}$ . Si  $\|y\| = 0$ , ha de ser  $x \cdot y = 0$ , o de lo contrario la desigualdad sería falsa para  $r$  grande. Si  $\|y\| > 0$ , tomamos  $r = |x \cdot y|/\|y\|^2$  y obtenemos  $|x \cdot y|^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$ .

La aplicación  $\| \cdot \|$  cumple claramente todas las propiedades de la definición de norma salvo quizá la desigualdad triangular. Pero, por la propiedad que acabamos de probar, tenemos que

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y) \cdot (x + y) = x \cdot x + 2(x \cdot y) + y \cdot y \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ . ■

En particular, ahora sabemos que la norma euclídea que hemos definido anteriormente cumple la definición de norma.

**Definición 6.6** Una *distancia* en un conjunto  $M$  es una aplicación

$$d : M \times M \rightarrow [0, +\infty[$$

que cumpla las propiedades siguientes:

- a)  $d(x, y) = 0$  si y sólo si  $x = y$ .
- b)  $d(x, y) = d(y, x)$ .
- c)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

La tercera propiedad se conoce como *desigualdad triangular*.

Un *espacio métrico* es un par  $(M, d)$ , donde  $M$  es un conjunto y  $d$  una distancia en  $M$ .

Si  $V$  es un espacio normado, es inmediato comprobar que la aplicación

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

es una distancia en  $V$ . En particular, ahora sabemos que la distancia euclídea en  $\mathbb{R}^n$  cumple la definición general de distancia.

Observemos que si  $M$  es un espacio métrico y  $N \subset M$ , entonces la distancia en  $M$  se restringe a una distancia en  $N$ , luego podemos considerar también a  $N$  como espacio métrico. Así pues, tenemos definida una estructura de espacio métrico en cada subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ . En lo sucesivo, siempre consideraremos a los subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$  como espacios métricos con la distancia euclídea.

**Definición 6.7** Si  $M_1, \dots, M_n$  son espacios métricos (con distancias  $d_1, \dots, d_n$ ), definimos en el producto  $M_1 \times \dots \times M_n$  la distancia

$$d(x, y) = \sqrt{d_1(x_1 - y_1)^2 + \dots + d_n(x_n - y_n)^2}.$$

Del hecho de que la distancia euclídea es una distancia en  $\mathbb{R}^n$  se sigue fácilmente que esta *distancia producto* es una distancia en  $M_1 \times \dots \times M_n$ . En lo sucesivo consideraremos a los productos de espacios métricos como espacios métricos con esta distancia.

Observemos que la distancia euclídea en  $\mathbb{R}$  es  $d(x, y) = \sqrt{(x - y)^2} = |x - y|$ , y que la distancia euclídea en  $\mathbb{R}^n$  es el producto de la distancia euclídea en  $\mathbb{R}$  por sí misma.

A partir de aquí ya podemos extender fácilmente a  $\mathbb{R}^n$  muchos conceptos que conocemos para el caso de  $\mathbb{R}$ :

**Definición 6.8** Sea  $M$  un espacio métrico estándar. Un punto  $x \in M$  es *finito* si está a una distancia finita de un punto estándar. En caso contrario se dice *remoto*. Diremos que dos puntos  $x, y \in M$  están *infinitamente próximos*, y lo representaremos por  $x \approx y$ , si la distancia entre ellos es infinitesimal.

Puesto que la distancia entre dos puntos estándar ha de ser estándar y, por consiguiente, finita, observamos que un punto finito de un espacio métrico está a distancia finita de *todos* los puntos estándar del espacio. La desigualdad triangular implica que todo punto que esté a una distancia finita de un punto finito es también finito. También es evidente que la relación de proximidad infinita es una relación de equivalencia.

Un punto  $x \in M$  es *casi estándar* si está infinitamente cerca de un punto estándar, en cuyo caso es claramente único y lo llamaremos *parte estándar* de  $x$ , y lo representaremos por  $*x$ .

El *halo* de un punto  $x \in M$  es el conjunto (en general externo)  $h(x)$  de todos los puntos infinitamente próximos a  $x$ .

Es inmediato que, en el caso de  $\mathbb{R}$  con la distancia euclídea, todos estos conceptos coinciden con los que ya teníamos definidos. El teorema siguiente nos permitirá generalizar a  $\mathbb{R}^n$  algunos hechos que conocemos para  $\mathbb{R}$ :

**Teorema 6.9** Sea  $M = M_1 \times \dots \times M_n$  un producto de espacios métricos estándar (con  $n$  también estándar).

- a) Un punto  $x \in M$  es finito si y sólo si todas sus coordenadas lo son.
- b) Dos puntos  $x, y \in M$  cumplen  $x \approx y$  si y sólo si todas sus coordenadas cumplen  $x_i \approx y_i$ .
- c) Un punto  $x \in M$  es casi estándar si y sólo si todas sus coordenadas lo son.

DEMOSTRACIÓN: Observemos que, por el principio de transferencia, un punto  $x \in M$  es estándar si y sólo si todas sus coordenadas son estándar.

a) Si  $x$  es finito, existe  $y \in M$  estándar tal que  $d(x, y)$  es finita. Claramente,  $0 \leq d_i(x_i, y_i) \leq d(x, y)$ , luego  $d_i(x_i, y_i)$  también es finita, luego  $x_i$  es finito.

Recíprocamente, si las coordenadas de  $x$  son finitas, para cada  $i$  existe un punto  $y_i \in M_i$  estándar tal que  $d_i(x_i, y_i)$  es finita. Los puntos  $y_i$  forman un punto estándar  $y \in M$ , y es claro que  $d(x, y)$  es finita, luego  $x$  es finito.

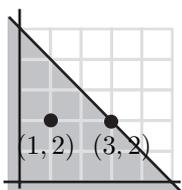
La prueba de b) es completamente análoga y c) se sigue de b). ■

En particular, esto se aplica a  $\mathbb{R}^n$  (con  $n$  estándar), visto como producto de  $\mathbb{R}$  por sí mismo: un punto de  $\mathbb{R}^n$  es finito si y sólo si todas sus coordenadas son números reales finitos, etc.

Como primera aplicación tenemos el teorema siguiente, que es inmediato, ya que sabemos que  $\mathbb{R}$  tiene la propiedad considerada:

**Teorema 6.10** *Un punto de  $\mathbb{R}^n$  es casi estándar si y sólo si es finito.*

## 6.2 Elementos de topología



Consideremos el conjunto

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leq 5\} \subset \mathbb{R}^2$$

representado en la figura. En él podemos distinguir dos clases de puntos, los puntos “interiores” como el  $(1, 2)$  que están totalmente rodeados por puntos del conjunto, y los puntos “frontera”, como  $(3, 2)$ , que están rodeados por puntos de dentro y de fuera del conjunto. En esta sección vamos a introducir algunas definiciones que describen situaciones como ésta y otras similares.

**Definición 6.11** Sea  $M$  un espacio métrico,  $S \subset M$  y  $x \in S$ , todos ellos estándar. Diremos que  $S$  es un *entorno* de  $x$  si  $h(x) \subset S$ . También diremos que  $x$  es un *punto interior* de  $S$ . Diremos que  $S$  es *abierto* si es un entorno de todos sus puntos.

Por ejemplo, el punto  $(1, 2)$  es un punto interior del conjunto  $C$  de la figura, ya que si  $(x, y) \approx (1, 2)$ , entonces  $x \approx 1$  e  $y \approx 2$ , luego  $x + y \approx 3 < 5$ , luego  $x + y < 5$ , luego  $(x, y) \in C$ .

Sin embargo,  $C$  no es un conjunto abierto, ya que no es entorno de algunos de sus puntos, como el  $(3, 2)$ . Basta considerar  $(x, y) \approx (3, 2)$  con  $x > 3$ ,  $y > 2$ . Entonces  $x + y > 5$ , luego  $(x, y) \notin C$ .

Si que es abierto, en cambio, el conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y < 5\},$$

pues cualquier punto  $(a, b) \in A$  es interior. En efecto, podemos suponer que  $(a, b)$  es estándar y, dado  $(x, y) \approx (a, b)$ , tenemos que  $x + y \approx a + b < 5$ , luego  $x + y < 5$ , luego  $(x, y) \in A$ .

**Definición 6.12** Sea  $M$  un espacio métrico,  $S \subset M$  y  $x \in M$ , todos ellos estándar. Diremos que  $x$  es *adherente* a  $S$  si existe  $x' \in S$  tal que  $x' \approx x$ . Diremos que  $x$  es un *punto frontera* de  $S$  si es adherente a  $S$  y a  $M \setminus S$ .

Por ejemplo, el punto  $(3, 2)$  es un punto frontera tanto del conjunto  $C$  como del conjunto  $A$  de los ejemplos anteriores. En efecto, si tomamos  $(x, y) \approx (3, 2)$  tal que  $x < 3$ ,  $y < 2$  se cumple que  $(x, y) \in A \subset C$ , mientras que si lo tomamos con  $x > 3$ ,  $y > 2$ , entonces  $(x, y) \in M \setminus C \subset M \setminus A$ .

**Definición 6.13** Si  $M$  es un espacio métrico y  $S \subset M$ , diremos que  $S$  es *cerrado* si  $M \setminus S$  es abierto.

Por ejemplo, el conjunto  $C$  del ejemplo anterior es cerrado, porque su complementario es

$$\mathbb{R}^2 \setminus C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y > 5\},$$

y se prueba que es abierto exactamente igual que hemos visto que lo era el conjunto  $A$ .

El teorema siguiente clarifica los conceptos de abierto y cerrado:

**Teorema 6.14** Sea  $M$  un espacio métrico y  $S \subset M$ . Entonces:

- a)  $S$  es abierto si y sólo si no contiene a ninguno de sus puntos frontera.
- b)  $S$  es cerrado si y sólo si contiene a todos sus puntos frontera.
- c)  $S$  es cerrado si y sólo si contiene a todos sus puntos adherentes.

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer que  $S$  es estándar. a) Si  $S$  es abierto y contiene un punto frontera  $x \in M$ , podemos tomarlo estándar. Existe  $y \in M \setminus S$  tal que  $y \approx x$ , pero esto es absurdo, porque  $y \in h(x) \subset S$ .

Recíprocamente si  $S$  no contiene ningún punto frontera, tomemos  $x \in S$  y veamos que es interior. Podemos suponerlo estándar. Si no fuera interior, existiría un  $y \in M \setminus S$  tal que  $y \approx x$ , pero esto significa que  $x$  es adherente a  $M \setminus S$ , y también es adherente a  $S$ , porque  $x \in S$ , luego  $x$  es un punto frontera de  $S$ , contradicción.

b) Observemos que los puntos frontera de  $S$  son los mismos que los de  $M \setminus S$ . Por lo tanto,  $S$  es cerrado si y sólo si  $M \setminus S$  es abierto, si y sólo si  $M \setminus S$  no contiene ningún punto frontera de  $S$  (por a) si y sólo si  $S$  contiene a todos sus puntos frontera.

c) Si  $S$  contiene a todos sus puntos adherentes, en particular contiene a todos sus puntos frontera, luego es cerrado. Recíprocamente, si  $S$  es cerrado y  $x \in M \setminus S$  es un punto adherente, que podemos suponer estándar, entonces  $x$  también es adherente a  $M \setminus S$ , luego es un punto frontera de  $S$ , luego debería estar en  $S$  por b), contradicción. ■

**Definición 6.15** Si  $M$  es un espacio métrico,  $x \in M$  y  $r > 0$ , definimos la *bola abierta* y la *bola cerrada* de centro  $x$  y radio  $r$  como

$$B_r(x) = \{y \in M \mid d(x, y) < r\}, \quad B_r^*(x) = \{y \in M \mid d(x, y) \leq r\}.$$

Por ejemplo, en  $\mathbb{R}^2$  con la distancia euclídea, es claro que las bolas son círculos de radio  $r$ . La diferencia entre las bolas abiertas y las bolas cerradas es que las primeras no contienen a su “borde”, es decir, a la circunferencia de radio  $r$ , y las segundas sí. Esto hace que, ciertamente, las bolas abiertas sean abiertas y las bolas cerradas sean cerradas.

En efecto (suponiendo todos los datos estándar): si tomamos un punto estándar  $y \in B_r(x)$  y un  $z \approx x$  en su halo, tenemos que

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \approx d(x, y) < r,$$

luego  $d(x, z) < r$ . Esto prueba que  $h(z) \subset B_r(x)$ , luego la bola abierta es abierta.

**Ejercicio:** Demostrar que las bolas cerradas son cerradas.

El teorema siguiente nos da caracterizaciones internas de los conceptos que hemos introducido hasta ahora:

**Teorema 6.16** Sea  $M$  un espacio métrico,  $S \subset M$  y  $x \in M$ .

- a)  $x$  es un punto interior de  $S$  si y sólo si existe una bola abierta  $B_r(x) \subset S$ .
- b)  $x$  es un punto adherente de  $S$  si y sólo si todo entorno de  $x$  corta a  $S$ .
- c)  $x$  es un punto frontera de  $S$  si y sólo si todo entorno de  $x$  corta a  $S$  y a  $M \setminus S$ .

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer los datos estándar. a) Si existe una bola  $B_r(x) \subset S$ , podemos tomar el radio estándar, en cuyo caso  $h(x) \subset B_r(x) \subset S$ , luego  $S$  es entorno de  $x$ .

Recíprocamente, si  $S$  es entorno de  $x$ , tomando  $r > 0$  infinitesimal, se cumple que  $x \in B_r(x) \subset h(x) \subset S$ .

b) Si  $x$  es un punto adherente y  $A$  es un entorno de  $x$ , entonces  $h(x) \subset A$ , pero  $h(x)$  contiene un punto de  $S$ , luego  $A \cap S \neq \emptyset$ .

Recíprocamente, si  $x$  no es adherente a  $S$ , entonces  $h(x) \subset M \setminus S$ , luego, tomando  $r > 0$  infinitesimal, tenemos que  $B_r(x)$  es un entorno de  $x$  que no corta a  $S$ .

c) es consecuencia inmediata de b). ■

**Paradoja 6.17** Vamos a probar que si  $M$  es un espacio métrico y  $F$  es una familia de subconjuntos abiertos de  $M$ , entonces la intersección

$$\bigcap_{C \in F} C$$

es abierta. En efecto, podemos suponer que el espacio y  $F$  son estándar. Tomamos un punto  $x$  en la intersección y observamos que, para todo  $C \in F$ , se cumple que  $h(x) \subset C$ , luego  $h(x)$  está contenido en la intersección, lo que prueba que ésta es entorno de  $x$  y, por transferencia, es entorno de todos sus puntos, luego es abierta.

Por otra parte, lo que acabamos de probar es falso, como se ve sin más que tomar como  $F$  el conjunto de todos los intervalos abiertos  $] -1/n, +\infty[ \subset \mathbb{R}$ , cuya intersección es el intervalo cerrado  $[0, +\infty[$ , que no es abierto, porque no es entorno de 0.

**SOLUCIÓN:** El contraejemplo es correcto, y muestra que la intersección de abiertos no es necesariamente abierta. Lo que está mal es la “demostración”. Podemos tomar  $F$  estándar, pero eso no impide que  $F$  contenga elementos no estándar (los tendrá, de hecho, siempre que  $F$  sea infinito). Si  $C \in F$  no es estándar, no podemos asegurar que  $h(x) \subset C$ , pues la definición de entorno sólo vale explícitamente para conjuntos estándar.

Observemos que, para probar que “para todo  $C \in F$ , se cumple  $h(x) \subset C$ ”, no podemos aplicar el principio de transferencia (y suponer que  $C$  es estándar) porque la afirmación “ $h(x) \subset C$ ” no es interna.

Esto se ve en el contraejemplo: todos los intervalos  $] -1/n, +\infty[$  son abiertos, pero, aunque la familia  $F$  formada por todos ellos es estándar, contiene intervalos no estándar (los correspondientes a  $n$  infinito) y, aunque  $] -1/n, +\infty[$  es abierto aun si  $n$  es infinito, no es cierto que  $h(0) \subset ] -1/n, +\infty[$ , pues, por ejemplo, el intervalo no contiene al infinitésimo  $-1/(n-1) \in h(0)$ .

No obstante, hemos observado que el argumento de la paradoja es válido si la familia de abiertos es finita. ■

**Ejercicio:** Demostrar que, en un espacio métrico, toda unión de conjuntos abiertos es abierta, y toda intersección finita de conjuntos abiertos es abierta. Por consiguiente, toda intersección de conjuntos cerrados es cerrada y toda unión finita de conjuntos cerrados es cerrada.

**Definición 6.18** Si  $M$  es un espacio métrico y  $S \subset M$ , llamaremos *interior* de  $S$  a la unión  $\overset{\circ}{S}$  de todos los abiertos en  $M$  contenidos en  $S$ . La *clausura* de  $S$  es la intersección  $\overline{S}$  de todos los cerrados en  $M$  que contienen a  $S$ .

Es claro que  $\overset{\circ}{S} \subset S \subset \overline{S}$ . Más aún,  $\overset{\circ}{S}$  es abierto, y es el mayor abierto contenido en  $S$ , y  $\overline{S}$  es cerrado, y es el menor cerrado que contiene a  $S$ .

**Teorema 6.19** Si  $M$  es un espacio métrico y  $S \subset M$ , entonces  $\overset{\circ}{S}$  es el conjunto de los puntos interiores de  $S$ , y  $\overline{S}$  es el conjunto de los puntos adherentes de  $S$ .

**DEMOSTRACIÓN:** Podemos suponer todos los datos estándar. Todo  $x \in \overset{\circ}{S}$  estándar cumple  $h(x) \subset \overset{\circ}{S} \subset S$ , luego  $x$  es interior a  $S$  y, si  $x$  es interior a  $S$ , entonces  $x \in B_r(x) \subset S$ , para cierto  $r > 0$ , luego  $x \in \overset{\circ}{S}$  por definición de interior, ya que la bola es abierta.

Similarmente, si  $x$  (estándar) es adherente a  $S$ , también es adherente a  $\overline{S}$  y, como la clausura es cerrada, entonces  $x \in \overline{S}$ . Recíprocamente, si  $x$  es estándar pero no es adherente a  $S$ , entonces  $h(x) \subset M \setminus S$ , luego, tomando  $r > 0$  infinitesimal,  $B_r(x) \subset M \setminus S$ , luego  $x \notin \overline{M \setminus S}$ , que es un cerrado que contiene a  $S$ , luego  $x \notin \overline{S}$ . ■

**Definición 6.20** Si  $M$  es un espacio métrico y  $S \subset M$ , llamaremos *frontera* de  $S$  al conjunto  $\partial S$  de todos los puntos frontera de  $S$ .

**Ejercicio:** Probar que  $\partial S = \overline{S} \cap \overline{M \setminus S}$ ,  $\overset{\circ}{S} = S \setminus \partial S$ ,  $\overline{S} = S \cup \partial S$ .

Si tenemos dos espacios métricos estándar  $N \subset M$ , conviene comparar en ambos espacios los conceptos que acabamos de definir:

- Si  $x \in N$ , la relación entre los halos es que  $h_N(x) = h_M(x) \cap M$ .
- Un conjunto  $C \subset N$  es cerrado en  $N$  si y sólo si es de la forma  $C = C' \cap N$ , donde  $C'$  es un cerrado en  $M$ . En efecto, es claro que los conjuntos de esta forma son cerrados en  $N$ . Si  $C$  es cerrado, basta tomar  $C' = \overline{C}$ . En efecto, (suponiendo los datos estándar) si  $x \in \overline{C} \cap N$  es estándar, existe un  $y \in C$  tal que  $x \approx y$ . Como  $C$  es cerrado en  $N$ , esto implica que  $x \in C$ . Esto prueba que  $\overline{C} \cap N \subset C$ , y la otra inclusión es obvia.
- Un conjunto  $A \subset N$  es abierto en  $N$  si y sólo si es de la forma  $A = A' \cap N$ , donde  $A'$  es un abierto en  $M$ . En efecto, si  $A$  es abierto en  $N$ , entonces  $N \setminus A$  es cerrado en  $N$ , luego  $N \setminus A = C' \cap N$ , donde  $C'$  es cerrado en  $M$ , luego  $A = (M \setminus C') \cap N$ .

Vemos así que las nociones de abierto o cerrado son *relativas* al espacio en que consideremos contenido un conjunto. Por ejemplo si  $N \subset M$ , entonces, como espacio métrico,  $N$  es trivialmente abierto y cerrado en sí mismo, pero puede serlo o no en  $M$ .

**Ejemplo** Probar que el intervalo  $N = [1, 2[$  no es ni abierto ni cerrado en  $M = \mathbb{R}$ ; es abierto, pero no cerrado, en  $M = [1, 3]$ ; es cerrado, pero no abierto en  $M = [0, 2[$ ; es abierto y cerrado en  $M = [1, 2[ \cup [3, 4]$ ; y es abierto y cerrado en  $M = N$ .

**Espacios compactos** Si  $N \subset M$  son espacios métricos estándar, un punto  $x \in N$  es finito como punto de  $N$  si y sólo si es finito como punto de  $M$ . En efecto,  $N$  ha de contener un punto estándar  $p$ , y  $x$  será finito en  $M$  o en  $N$  si y sólo si  $d(x, y)$  es finita. Esto convierte en absoluto el concepto siguiente:

**Definición 6.21** Un espacio métrico estándar  $M$  es *acotado* si todos sus puntos son finitos.

Así, si tenemos  $A \subset M$  y ambos son estándar, decir que  $A$  es acotado en  $M$  es lo mismo que decir que  $A$  es acotado en sí mismo, como espacio métrico. Significa que los puntos de  $A$  son finitos, tanto en  $A$  como en  $M$ . No obstante, es interesante la siguiente caracterización relativa de la acotación de un subconjunto en un espacio mayor:

**Teorema 6.22** *Un subconjunto estándar de un espacio métrico estándar está acotado si y sólo si está contenido en una bola de centro finito y radio finito.*

DEMOSTRACIÓN: Evidentemente, si  $A \subset B_r(x)$  con  $x$  y  $r$  finitos, entonces todo punto  $y \in A$  cumple  $d(x, y) < r$ , luego  $y$  es finito, y  $A$  está acotado.

Recíprocamente, vamos a ver que si  $A$  está acotado, entonces está contenido en una bola de radio estándar y centro cualquier punto estándar  $x \in M$  prefijado.

En caso contrario, para todo  $r > 0$  estándar, tendríamos que  $A$  no estaría contenido en  $B_r(x)$ , luego, por transferencia,  $A$  no estaría contenido en ninguna bola de cualquier radio (estándar o no). Tomando un  $r > 0$  infinito, esto implica que existe  $y \in A$  tal que  $d(x, y) \geq r$ , luego  $y$  es remoto, en contradicción con la hipótesis de que  $A$  está acotado. ■

En particular, es claro que toda bola de centro finito y radio finito está acotada. También es obvio que todo subconjunto de un conjunto acotado está acotado.

**Ejercicio:** Demostrar que un subconjunto  $A$  de un espacio métrico  $M$  está acotado si y sólo si existe un  $C \in \mathbb{R}$  tal que  $d(x, y) \leq C$ , para todo par de puntos  $x, y \in A$ .

Si en lugar de considerar puntos finitos consideramos puntos casi estándar, la situación es algo más delicada, pues si tenemos  $A \subset M$ , ambos estándar, un punto  $x \in A$  puede ser casi estándar en  $M$  y no serlo en  $A$  (porque  $*x$  no pertenezca a  $A$ ).

**Definición 6.23** Un espacio métrico estándar  $M$  es *compacto* si todos sus puntos son casi estándar.

Según la observación precedente, si  $A \subset M$  son estándar, debemos tener presente que  $A$  es compacto (como espacio métrico), no cuando todos sus puntos son casi estándar en  $M$ , sino cuando lo son en  $A$ . Explícitamente:

*$A$  es compacto si y sólo si todo  $x \in A$  es casi estándar (en  $M$ ) y  $*x \in A$ .*

La compacidad es el concepto más abstracto (y artificial) de todos cuantos vamos a estudiar, pero también uno de los más útiles. En el caso de  $\mathbb{R}^n$  su interpretación es muy simple:

**Teorema 6.24** *Si  $M$  es un espacio métrico y  $C \subset M$  es compacto, entonces es cerrado y acotado. Si  $M = \mathbb{R}^n$ , entonces todo subconjunto cerrado y acotado es compacto.*

DEMOSTRACIÓN: Si  $C$  es compacto todos sus puntos son casi estándar, luego son finitos. Esto prueba que está acotado. Por otra parte,  $C$  cumple trivialmente la definición de cerrado.

Si  $C \subset \mathbb{R}^n$  es cerrado y acotado, todo punto  $x \in C$  es finito (por ser acotado), luego casi-estándar (esto es cierto en  $\mathbb{R}^n$ , por 6.10), y  $*x \in C$  por ser cerrado, luego  $C$  es compacto. ■

Otra relación básica entre compactos y cerrados es la siguiente:

**Teorema 6.25** *Si  $M$  es un espacio métrico compacto y  $C \subset M$  es cerrado, entonces  $C$  es compacto.*

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer los datos estándar. Si  $x \in C$ , entonces  $x$  es casi estándar en  $M$ , pero, como  $C$  es cerrado,  $*x \in C$ , luego  $C$  es compacto. ■

El teorema siguiente es trivial en términos no estándar, aunque con técnicas clásicas cuesta un poco de probar:

**Teorema 6.26 (Tychonoff)** *Si  $M_1, \dots, M_n$  son espacios métricos compactos, entonces  $M_1 \times \dots \times M_n$  es compacto.*

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer que los datos son estándar. Si tomamos  $x \in M_1 \times \dots \times M_n$ , sus coordenadas  $x_i$  son casi estándar, porque los factores son compactos, luego  $x$  es casi estándar por el teorema 6.9. ■

## 6.3 Funciones continuas

Ahora estamos en condiciones de generalizar a espacios métricos los resultados de continuidad que conocemos para funciones reales de variable real.

**Definición 6.27** Una función estándar  $f : M \rightarrow N$  entre dos espacios métricos estándar es *continua* en un punto estándar  $x \in M$  si para todo punto  $y \in M$  tal que  $x \approx y$ , se cumple que  $f(x) \approx f(y)$ . Diremos que  $f$  es continua en un conjunto  $A \subset M$  si lo es en todos los puntos de  $A$ .

Es evidente que esta definición generaliza a la que teníamos para funciones en  $\mathbb{R}$ . También es claro que si  $f : M \rightarrow N$  es continua,  $M' \subset M$  y  $N \subset N'$ , entonces  $f|_{M'} : M' \rightarrow N'$  también es continua.

Seguidamente vamos a demostrar unos cuantos resultados que nos proporcionen numerosos ejemplos de funciones continuas. El primero es obvio:

**Teorema 6.28** *Si  $f : M \rightarrow N$  y  $g : N \rightarrow P$  son funciones entre espacios métricos tales que  $f$  es continua en un punto  $x \in M$  y  $g$  es continua en  $f(x)$ , entonces  $f \circ g$  es continua en  $x$ . En particular, si  $f$  y  $g$  son continuas (en sus dominios),  $f \circ g$  también lo es.*

Los tres teoremas siguientes son consecuencias inmediatas de 6.9:

**Teorema 6.29** Si  $M_1, \dots, M_n$  son espacios métricos, la proyección

$$p_i : M_1 \times \cdots \times M_n \longrightarrow M_i$$

que a cada punto  $x$  le asigna su coordenada  $i$ -ésima,  $p_i(x) = x_i$ , es continua.

**Teorema 6.30** Si  $f_i : M_i \longrightarrow N_i$  son aplicaciones continuas entre espacios métricos, la aplicación

$$f_1 \times \cdots \times f_n : M_1 \times \cdots \times M_n \longrightarrow N_1 \times \cdots \times N_n$$

dada por  $(f_1 \times \cdots \times f_n)(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1), \dots, f_n(x_n))$  es continua.

**Teorema 6.31** Si  $f_i : M \longrightarrow N_i$  son funciones continuas entre espacios métricos, también es continua la aplicación  $(f_1, \dots, f_n) : M \longrightarrow N_1 \times \cdots \times N_n$  dada por  $(f_1, \dots, f_n)(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ .

**Teorema 6.32** Si  $N$  es un espacio normado, la suma  $+: N \times N \longrightarrow N$  y el producto  $\cdot : \mathbb{R} \times N \longrightarrow N$  son continuos.

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer que  $N$  es estándar. Hemos de probar que si  $(x, y) \in N \times N$  es un punto estándar y  $(x', y') \approx (x, y)$ , entonces se cumple que  $x' + y' \approx x + y$ . Ahora bien,

$$\begin{aligned} d(x' + y', x + y) &= \|x' + y' - x - y\| = \|(x' - x) + (y' - y)\| \\ &\leq \|x' - x\| + \|y' - y\| = d(x', x) + d(y', y) \approx 0, \end{aligned}$$

luego  $x' + y' \approx x + y$ .

Para el producto, partimos de  $(\alpha, x) \in \mathbb{R} \times N$  estándar, tomamos otro par  $(\alpha', x') \approx (\alpha, x)$ , y hemos de ver que  $\alpha'x' \approx \alpha x$ .

En efecto:

$$\begin{aligned} d(\alpha'x', \alpha x) &= \|\alpha'x' - \alpha x\| = \|\alpha'x' - \alpha'x + \alpha'x - \alpha x\| \\ &\leq |\alpha'| \|x' - x\| + |\alpha' - \alpha| \|x\| \approx 0. \end{aligned}$$

■

Observemos ahora que, si  $M$  es un espacio métrico y  $N$  es un espacio normado, en el conjunto  $F(M, N)$  de todas las aplicaciones  $M \longrightarrow N$ , tenemos definida (puntualmente) una suma y un producto por números reales:

$$(f + g)(m) = f(m) + g(m), \quad (\alpha f)(m) = \alpha f(m).$$

Si  $f, g \in F(M, \mathbb{R})$ , también podemos definir puntualmente su producto:

$$(fg)(m) = f(m)g(m).$$

Ahora es inmediato que si  $f$  y  $g \in F(M, N)$  son continuas, también lo son  $f + g$  y  $\alpha f$ . En efecto,  $f + g$  puede verse como la composición

$$M \xrightarrow{(f,g)} N \times N \xrightarrow{+} N,$$

y ambas funciones son continuas, por los teoremas anteriores. Similarmente,  $\alpha f$  se descompone como

$$M \xrightarrow{(\alpha,f)} \mathbb{R} \times N \xrightarrow{\cdot} N,$$

donde, en la primera parte,  $\alpha$  representa a la función constante  $\alpha$ , que obviamente es continua.

El teorema anterior prueba en particular la continuidad de la aplicación producto  $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , luego, si  $f$  y  $g \in F(M, \mathbb{R})$  son continuas, también es continua  $fg$ , ya que se expresa como

$$M \xrightarrow{(f,g)} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{\cdot} \mathbb{R}$$

En definitiva, ahora es obvio el teorema siguiente:

**Teorema 6.33** *Si  $M$  es un espacio normado y  $N$  es un espacio métrico, el conjunto  $C(M, N)$  de todas las funciones continuas en  $M$  en  $N$  es un espacio vectorial con la suma y el producto definidos puntualmente. El espacio  $C(M, \mathbb{R})$  es también un anillo con el producto definido puntualmente.*

**Ejemplo** *La función  $x^2yz - 7z^3 \in F(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$  es continua.*

En efecto, las funciones  $x, y, z$  son las proyecciones cuya continuidad afirma el teorema 6.29. La función dada se obtiene a partir de ellas mediante sumas, productos y productos por números, luego es continua por el teorema anterior. ■

En general, es claro que el espacio  $C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  contiene al anillo  $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$  de todos los polinomios de  $n$  variables.

**Ejemplo** *La función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $f(t) = (\sin t, \cos t)$  es continua.*

En efecto, sabemos que lo son las funciones  $\sin t$  y  $\cos t$  y basta aplicar el teorema 6.31. ■

Las aplicaciones continuas nos permiten reconocer fácilmente muchos conjuntos abiertos y cerrados, gracias al teorema siguiente:

**Teorema 6.34** *Sea  $f : M \rightarrow N$  una aplicación entre espacios métricos. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

- a)  $f$  es continua.
- b) Para todo abierto  $A \subset N$ , se cumple que  $f^{-1}[A]$  es abierto en  $M$ .
- c) Para todo cerrado  $A \subset N$ , se cumple que  $f^{-1}[A]$  es cerrado en  $M$ .

DEMOSTRACIÓN: b) y c) son claramente equivalentes, pues si suponemos b) y  $A$  es cerrado, entonces  $N \setminus A$  es abierto, y  $f^{-1}[N \setminus A] = M \setminus f^{-1}[A]$ , luego  $f^{-1}[A]$  es abierto y  $f^{-1}[A]$  es cerrado. Igualmente se prueba que c) implica b).

Supongamos que todos los datos son estándar. Si  $f$  es continua y  $A$  es abierto, tomamos un punto estándar  $x \in f^{-1}[A]$  y un  $y \in M$  tal que  $y \approx x$ . Entonces  $f(y) \approx f(x) \in A$ , luego  $f(y) \in A$ , luego  $y \in f^{-1}[A]$ . Esto prueba que  $h(x) \subset f^{-1}[A]$ , luego  $f^{-1}[A]$  es abierto.

Recíprocamente, si se cumple b), tomamos  $x \in M$  estándar y un  $y \approx x$ . Si  $f(y) \not\approx f(x)$ , entonces hay un número estándar  $0 < r < d(x, y)$ , luego tenemos que  $f(y) \notin B_r(f(x))$  y, por consiguiente,  $y \notin f^{-1}[B_r(f(x))]$ . Este conjunto (estándar) debería ser abierto, pero contiene a  $x$  y no a  $y$ , luego no contiene al halo de  $x$ . Esto es una contradicción. ■

**Ejemplo** *El conjunto*

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x^2 + 5y^2 + 8z^2 = 20\}$$

*es compacto.*

En efecto, es la antiimagen del cerrado  $\{20\}$  por el polinomio  $2x^2 + 5y^2 + 8z^2$ , que es una aplicación continua. Por lo tanto, es cerrado. Además es acotado, pues si  $(x, y, z) \in C$ , entonces  $|x| \leq 20$ ,  $|y| \leq 20$ ,  $|z| \leq 20$ , luego las tres coordenadas son finitas, luego  $(x, y, z)$  es finito. Esto significa que  $C$  es acotado. ■

**Ejemplo** *El conjunto*

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z > 3\}$$

*es abierto.*

Pues es la antiimagen del intervalo  $]3, +\infty[$  por el polinomio  $x - 2y + z$ . ■

**Ejemplo** *Si una aplicación  $g : M \rightarrow N$  entre dos espacios métricos es biyectiva y continua, su inversa  $g^{-1} : N \rightarrow M$  no es necesariamente continua.*

En efecto, sea  $N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$  y consideremos la aplicación  $f : [0, 2\pi] \rightarrow N$  dada por  $f(t) = (\cos t, \sin t)$ . Claramente es continua, aunque no es biyectiva, porque  $f(0) = f(2\pi) = (1, 0)$ . Sin embargo, si  $M = [0, 2\pi[$ , la restricción  $g : M \rightarrow N$  sí que es biyectiva y continua. No obstante, si  $h > 0$  es infinitesimal, se cumple que  $g(2\pi - h) = f(2\pi - h) \approx f(2\pi) = f(0) = g(0)$ .

Así pues, tenemos dos puntos en  $N$  (los puntos  $g(2\pi - h)$  y  $g(0)$ ) que están infinitamente próximos, pero sus imágenes en  $M$  por  $g^{-1}$  (los puntos  $0$  y  $2\pi - h$ ) no están infinitamente próximos. Esto prueba que  $g^{-1}$  no es continua en  $(1, 0)$ . ■

**Definición 6.35** Un *homeomorfismo*  $g : M \rightarrow N$  entre dos espacios métricos es una aplicación biyectiva, continua con inversa continua.

**Teorema 6.36** Si  $f : M \rightarrow N$  es una aplicación continua y suprayectiva entre espacios métricos y  $M$  es compacto, entonces  $N$  también es compacto.

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer que los datos son estándar. Tomemos  $x \in N$ . Existe un  $y \in M$  tal que  $f(y) = x$ . Como  $M$  es compacto, existe  $*y \in M$ . Entonces  $f(*y) \approx f(y) = x$  y  $f(*y)$  es estándar, luego  $x$  es casi estándar. Esto prueba que  $N$  es compacto. ■

Ahora es inmediata la generalización del primer teorema de Weierstrass:

**Teorema 6.37** Si  $M$  es un espacio métrico compacto y  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  es una aplicación continua, entonces  $f$  toma en  $M$  un valor máximo y un valor mínimo.

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema anterior  $f[M] \subset \mathbb{R}$  es compacto, luego es cerrado y acotado. Por ser acotado, existe el supremo  $s$  y el ínfimo  $i$ . El teorema 2.57 afirma que  $s$  e  $i$  son adherentes a  $f[M]$ . Como es cerrado, resulta que  $s, i \in f[M]$ , es decir,  $s = f(u)$ ,  $i = f(v)$ . Obviamente,  $u$  y  $v$  son los puntos donde  $f$  alcanza su máximo y su mínimo. ■

**Espacios conexos** Para generalizar el segundo teorema de Weierstrass necesitamos un nuevo concepto:

**Definición 6.38** Un espacio métrico  $M$  es *conexo* si no puede expresarse como unión de dos abiertos disjuntos no vacíos.

La relación con el segundo teorema de Weierstrass nos la proporcionan los dos teoremas siguientes:

**Teorema 6.39** Si  $f : M \rightarrow N$  es una aplicación continua y suprayectiva entre espacios métricos y  $M$  es conexo, entonces  $N$  también lo es.

DEMOSTRACIÓN: Si  $N$  no fuera conexo, lo podríamos descomponer como  $N = A \cup B$ , donde  $A$  y  $B$  son abiertos disjuntos no vacíos. Entonces, también  $M = f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B]$ , donde los dos conjuntos son abiertos disjuntos no vacíos, es decir,  $M$  no es conexo. ■

**Teorema 6.40** Un subconjunto de  $\mathbb{R}$  es conexo si y sólo si es un intervalo.

DEMOSTRACIÓN: Sea  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo y supongamos que  $I = A \cup B$ , donde  $A$  y  $B$  son abiertos disjuntos no vacíos. Entonces, la aplicación  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in A, \\ 1 & \text{si } x \in B, \end{cases}$$

es claramente continua en  $I$ , pero toma los valores 0 y 1 y no toma ningún valor intermedio, en contradicción con el segundo teorema de Weierstrass.

Supongamos ahora que  $I \subset \mathbb{R}$  es conexo y vamos a probar que es un intervalo. Por el teorema 2.64, basta tomar  $a, b \in I$ , digamos  $a < b$ , y hemos de probar que  $]a, b[ \subset I$ . En caso contrario, existe un número  $a < c < b$  tal que  $c \notin I$ , pero entonces  $A = I \cap ]-\infty, c[$  y  $B = ]c, +\infty[$  son abiertos disjuntos en  $I$  tales que  $I = A \cup B$ . Esto prueba que  $I$  no es conexo. ■

La generalización del segundo teorema de Weierstrass es:

**Teorema 6.41** *Si  $M$  es un espacio métrico conexo y  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  es una aplicación continua y  $x, y \in M$ , entonces  $f$  toma todos los valores comprendidos entre  $f(x)$  y  $f(y)$ .*

DEMOSTRACIÓN: Tenemos que  $f[M] \subset \mathbb{R}$  es conexo, luego es un intervalo, y contiene a  $f(x)$  y  $f(y)$ , luego contiene a todos los valores intermedios. ■

La prueba del teorema 6.40 contiene una caracterización útil de la conexión:

**Teorema 6.42** *Un espacio métrico  $M$  es conexo si y sólo si toda aplicación continua  $f : M \rightarrow \{0, 1\}$  es constante.*

DEMOSTRACIÓN: Si  $M$  es conexo pero  $f$  no fuera constante, entonces sería suprayectiva, luego  $\{0, 1\}$  debería ser conexo, cuando claramente no lo es (ya que  $\{0\}$  y  $\{1\}$  son ambos abiertos en  $\{0, 1\}$ ). Si  $M$  no es conexo, podemos descomponerlo como  $M = A \cup B$ , donde  $A$  y  $B$  son abiertos disjuntos no vacíos. La aplicación  $f : M \rightarrow \{0, 1\}$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in A, \\ 1 & \text{si } x \in B, \end{cases}$$

es continua y no es constante. ■

**Teorema 6.43** *Si  $M_1, \dots, M_n$  son espacios métricos conexos, entonces el producto  $M_1 \times \dots \times M_n$  es conexo.*

DEMOSTRACIÓN: Basta probarlo para dos factores y, por inducción, vale para todo  $n$ . Tomemos una función continua  $f : M_1 \times M_2 \rightarrow \{0, 1\}$  y veamos que es constante.

Fijemos un punto  $(x, y) \in M_1 \times M_2$ . La aplicación  $g_1 : M_1 \rightarrow M_1 \times M_2$  dada por  $g_1(m_1) = (m_1, y)$  es continua, luego su imagen es conexa, luego

$$f(m_1, y) = f(x, y)$$

para todo  $m_1 \in M$ . Fijado  $m_1 \in M$ , la aplicación  $g_2 : M_2 \rightarrow M_1 \times M_2$  dada por  $g_2(m_2) = (m_1, m_2)$  es continua, luego su imagen es conexa, luego

$$f(m_1, m_2) = f(m_1, y) = f(x, y),$$

para todo  $(m_1, m_2) \in M_1 \times M_2$ . ■

**Ejercicio:** Probar que si  $M$  es un espacio métrico y  $A, B \subset M$  son conexos y  $A \cap B \neq \emptyset$ , entonces  $A \cup B$  es conexo.

## 6.4 Derivadas y diferenciales

La generalización más simple del concepto de derivada de una función de una variable es la siguiente:

**Definición 6.44** Sea  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función estándar definida en un abierto  $D$  y sea  $p \in D$ . Diremos que  $f$  es *derivable* en  $p$  respecto a la variable  $x_i$  si existe un número estándar

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_p$$

tal que, para todo infinitésimo no nulo  $h \in \mathbb{R}$ , se cumple que

$$\frac{f(p_1, \dots, p_i + h, \dots, p_n) - f(p)}{h} \approx \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_p.$$

Es obvio que, si existe un número que satisface la definición anterior, es único, y se llama *derivada parcial* de  $f$  respecto a  $x_i$  en el punto  $p$ . Si  $f$  es derivable respecto de  $x_i$  en todos los puntos de  $D$ , tenemos definida la *función derivada parcial*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}.$$

Es claro que esta definición generaliza a la definición que ya conocíamos de derivada de una función de una variable. Más aún, los resultados conocidos sobre derivadas de funciones de una variable se generalizan automáticamente a resultados análogos sobre derivadas parciales gracias a la observación siguiente: en las condiciones de la definición anterior,

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_p = \left. \frac{df_{p,i}}{dx} \right|_{p_i},$$

donde  $f_{p,i} : D_i \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es la función dada por

$$f_{p,i}(x) = f(p_1, \dots, x, \dots, p_n),$$

y  $D_i = \{x \in \mathbb{R} \mid (p_1, \dots, x, \dots, p_n) \in D\}$ . La igualdad ha de entenderse como que existe una derivada si y sólo si existe la otra.

En otras palabras: la derivada parcial de  $f$  en  $p$  respecto de  $x_i$  es la derivada en  $p_i$  de la función (de una variable) que resulta de fijar  $x_j = p_j$  en  $f$  para  $j \neq i$ .

Así, ahora es evidente que el teorema 3.18 es válido en general para derivadas parciales. Por ejemplo, dadas dos funciones  $f$  y  $g$ , es claro que

$$(f + g)_{p,i} = f_{p,i} + g_{p,i},$$

luego la suma será derivable respecto de  $x_i$  en  $p$  si y sólo si lo son ambos sumandos y, en tal caso, la derivada de la suma será la suma de las derivadas.

**Ejemplo** La función  $f(x, y) = x^2y + y^3$  es derivable respecto de ambas variables en todo  $\mathbb{R}^2$  y sus derivadas son

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 3y^2.$$

En efecto, para cualquier  $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ , se cumple que  $f_{p,1}(x) = x^2y + y^3$ ,  $f_{p,2}(y) = x^2y + y^3$ , y sólo hemos de aplicar las reglas de derivación usuales para funciones de una variable. ■

Sin embargo, la noción de derivada parcial no puede considerarse el equivalente en varias variables a la noción de derivada de una función de una variable, pues las propiedades básicas no se generalizan. Por ejemplo, no es cierto que toda función que admita derivadas parciales sea continua:

**Ejercicio:** Probar que la función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } xy = 0, \\ 1 & \text{si } xy \neq 0. \end{cases}$$

no es continua en  $(0, 0)$ , pero existen

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(0,0)} = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(0,0)} = 0.$$

La razón de la patología que muestra el ejercicio anterior es clara: las derivadas parciales nos dan información sobre el efecto que tiene la variación infinitesimal una variable en una función manteniendo las demás constantes, pero no nos dicen nada del efecto que tiene una variación infinitesimal de todas las variables simultáneamente. Para relacionar con las derivadas tales variaciones simultáneas necesitamos el concepto de aplicación lineal:

**Definición 6.45** Una *aplicación lineal*  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es una aplicación de la forma

$$\phi(x) = (a_{11}x_1 + \cdots + a_{n1}x_n, \dots, a_{1m}x_1 + \cdots + a_{nm}x_n),$$

para ciertos  $a_{ij} \in \mathbb{R}$ .

La matriz

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

se llama *matriz asociada* a la aplicación lineal  $\phi$ . Es obvio que cada aplicación lineal  $\phi$  está determinada por su matriz y que ésta es única, ya que su  $i$ -ésima fila es necesariamente  $\phi(e_i)$ , donde  $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$  es el vector que tiene el 1 en la coordenada  $i$ -ésima. A su vez, esto prueba que  $\phi$  está completamente determinada por los vectores  $\phi(e_i)$ , para  $i = 1, \dots, n$ .

Llamaremos  $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  al conjunto de todas las aplicaciones lineales de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^m$ .

**Ejercicio:** Probar que toda aplicación lineal  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  cumple las relaciones  $\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y)$  y  $\phi(\alpha x) = \alpha\phi(x)$ , para todo  $x, y \in \mathbb{R}^n$  y todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

En general, las *funciones coordenadas* de una aplicación  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ , son las composiciones  $f_i = f \circ p_i$ , donde  $p_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es la proyección  $i$ -ésima. Es claro que una función  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es lineal si y sólo si lo son sus funciones coordenadas.

**Definición 6.46** Una función estándar  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  definida en un abierto  $D$  es *diferenciable* en un punto  $p \in D$  si existe una aplicación lineal estándar  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  tal que, para cada vector  $h \in \mathbb{R}^n$ ,  $h \approx 0$ ,  $h \neq 0$ , se cumple que

$$\frac{f(p+h) - f(p) - \phi(h)}{\|h\|} \approx 0.$$

Vamos a probar que, si  $f$  es diferenciable en este sentido, entonces la aplicación  $\phi$  está completamente determinada por  $f$  y por  $p$ . Para ello basta ver que están determinados los valores  $\phi(e_i)$ , para  $i = 1, \dots, n$ . En efecto, tomamos un infinitésimo no nulo  $h \in \mathbb{R}$  y aplicamos la definición anterior a  $he_i$ , con lo que obtenemos que

$$\frac{f(p+he_i) - f(p) - \phi(he_i)}{|h|} \approx 0.$$

Ahora observamos que  $|h|/h = \pm 1$  es finito, luego podemos multiplicar el cociente por esta expresión sin que deje de ser infinitesimal:

$$\frac{f(p+he_i) - f(p) - h\phi(e_i)}{h} \approx 0.$$

Equivalentemente:

$$\frac{f(p+he_i) - f(p)}{h} \approx \phi(e_i).$$

Ambos miembros son vectores de  $\mathbb{R}^m$ , y sabemos que sus coordenadas han de estar infinitamente próximas, es decir, para todo  $j = 1, \dots, m$ , tenemos que

$$\frac{f_j(p+he_i) - f_j(p)}{h} \approx \phi_j(e_i).$$

Pero esto significa que la función  $f_j : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tiene derivada parcial respecto de  $x_i$  en  $p$ , y que

$$\left. \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right|_p = \phi_j(e_i).$$

Esto prueba que, en efecto,  $\phi(e_i)$  está unívocamente determinado.

**Definición 6.47** Si  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es una función diferenciable en un punto  $p \in D$ , llamaremos *diferencial* de  $f$  en  $p$  a la única aplicación lineal que cumple la definición precedente. La representaremos por  $d_p f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ .

Hemos demostrado lo siguiente:

**Teorema 6.48** Si  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es una función diferenciable en un punto  $p \in D$ , entonces sus funciones coordenadas  $f_j : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tienen derivadas parciales en  $p$  y, para  $i = 1, \dots, n$ , se cumple que

$$d_p f(e_i) = \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \Big|_p, \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i} \Big|_p \right)$$

Más en general:

**Definición 6.49** Si  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es una función cuyas funciones coordenadas tienen derivadas parciales en un punto  $p \in D$ , llamaremos *matriz jacobiana* de  $f$  en  $p$  a la matriz

$$Jf(p) = \left( \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right).$$

En el caso  $m = 1$ , la traspuesta de matriz jacobiana se llama también *vector gradiente* de  $f$  en  $p$ , y se representa por

$$\nabla f(p) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \Big|_p \right).$$

Hemos probado que si  $f$  es diferenciable en  $p$ , entonces  $d_p f$  es la aplicación lineal asociada a la matriz jacobiana  $Jf(p)$ .

De la propia definición de diferenciability se sigue el teorema siguiente, que nos permitirá a menudo restringirnos al caso de funciones con valores en  $\mathbb{R}$ :

**Teorema 6.50** Una función  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es diferenciable en un punto  $p \in D$  si y sólo si todas sus funciones coordenadas son diferenciables en  $p$  y, en tal caso,

$$d_p f(v) = (d_p f_1(v), \dots, d_p f_m(v)).$$

Ahora, si  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable en un punto  $p \in D$ , la propia definición de matriz de una aplicación lineal nos da que, para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$d_p f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_p x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Big|_p x_n.$$

Observemos ahora que, de la definición de diferenciability se sigue inmediatamente que toda aplicación lineal es diferenciable, y que su diferencial coincide con ella misma. En particular, las proyecciones  $p_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  (es decir, las aplicaciones  $p_i(x) = x_i$  o, simplemente,  $x_i$ ) son lineales, luego  $d_p p_i(x) = x_i$ . Esto nos permite escribir la igualdad anterior como

$$d_p f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_p d_p x_1(x) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Big|_p d_p x_n(x)$$

o, también, como igualdad de funciones,

$$d_p f = \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_p d_p x_1 + \cdots + \left. \frac{\partial f}{\partial x_n} \right|_p d_p x_n.$$

Si  $f$  es diferenciable en todos los puntos  $p \in D$ , esta igualdad es válida para todo  $p$ , y se traduce en una igualdad de formas diferenciales. Esto requiere generalizar la definición de forma diferencial que hemos visto en el caso de funciones de una variable:

- Llamamos  $L(\mathbb{R}^n)$  al conjunto de las aplicaciones lineales  $l : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .
- Definimos una suma  $+$  :  $L(\mathbb{R}^n) \times L(\mathbb{R}^n) \rightarrow L(\mathbb{R}^n)$  dada por

$$(l + l')(u) = l(u) + l'(u).$$

Se comprueba inmediatamente que, en efecto,  $l + l' \in L(\mathbb{R}^n)$ .

- Si  $D \subset \mathbb{R}^n$  es abierto, llamamos  $\Lambda(D)$  al conjunto de todas las aplicaciones  $\omega : D \rightarrow L(\mathbb{R}^n)$ . A los elementos de  $\Lambda(D)$  los llamaremos *formas diferenciales* en  $D$ . Si  $p \in D$ , escribiremos  $\omega_p$  en lugar de  $\omega(p)$ .
- Observemos que, si  $\omega \in \Lambda(D)$ , podemos definir  $f_{\omega,i} : D \rightarrow \mathbb{R}$  mediante  $f_{\omega,i}(p) = \omega(p)(e_i)$ , de modo que, para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ , se cumple que

$$\omega_p(x) = f_{\omega,1}(p)x_1 + \cdots + f_{\omega,n}(p)x_n.$$

Así,  $\omega$  está completamente determinada por las aplicaciones  $f_{\omega,i}$  y, recíprocamente, dadas funciones cualesquiera  $f_i : D \rightarrow \mathbb{R}$  podemos definir

$$\omega_p(x) = f_1(p)x_1 + \cdots + f_n(p)x_n,$$

de modo que  $f_{\omega,i} = f_i$ .

- Definimos una suma  $+$  :  $\Lambda(D) \times \Lambda(D) \rightarrow \Lambda(D)$  mediante

$$(\omega + \omega')_p = \omega_p + \omega'_p,$$

donde la suma del segundo miembro es la suma de  $L(\mathbb{R}^n)$ . Claramente,  $f_{\omega+\omega',i} = f_{\omega,i} + f_{\omega',i}$ .

- Definimos un producto  $F(D) \times \Lambda(D) \rightarrow \Lambda(D)$  mediante

$$(g\omega)_p(u) = g(p)\omega_p(u).$$

Se comprueba inmediatamente que  $g\omega \in \Lambda(D)$ . Claramente,  $f_{g\omega,i} = gf_{\omega,i}$ .

En estos términos, si  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función diferenciable en el abierto  $D$  (es decir, diferenciable en todos los puntos de  $D$ ), podemos considerar la forma diferencial  $df \in \Lambda(D)$  que a cada  $p \in D$  le asigna la aplicación lineal  $d_p f \in L(\mathbb{R}^n)$ .

En general, si  $\omega \in \Lambda(D)$ , tenemos que

$$\omega_p(x) = f_{\omega,1}(p)x_1 + \cdots + f_{\omega,n}(p)x_n = f_{\omega,1}(p)d_px_1(x) + \cdots + f_{\omega,n}(p)d_px_n(x),$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ , luego

$$\omega_p = f_{\omega,1}(p)d_px_1 + \cdots + f_{\omega,n}(p)d_px_n,$$

luego

$$\omega = f_{\omega,1}dx_1 + \cdots + f_{\omega,n}dx_n.$$

En definitiva, tenemos que cada  $\omega \in \Lambda(D)$  se expresa de forma única como

$$\omega = f_1dx_1 + \cdots + f_ndx_n,$$

para ciertas funciones  $f_i : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Concretamente, si  $f$  es una función diferenciable en  $D$ , tenemos la igualdad de formas diferenciales:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n.$$

En contra de lo que esta expresión pueda sugerir, la mera existencia de derivadas parciales no garantiza la diferenciabilidad. Será fácil dar un ejemplo si tenemos en cuenta el teorema siguiente:

**Teorema 6.51** *Toda función diferenciable en un punto  $p$  es continua en  $p$ .*

DEMOSTRACIÓN: Sea  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  una función (estándar) definida en un abierto  $D$  y supongamos que es diferenciable en un punto estándar  $p \in D$ . De la definición de diferenciabilidad se sigue que

$$f(p+h) \approx f(p) + d_pf(h) \approx f(p),$$

ya que las funciones lineales son claramente continuas. Esto vale para todo  $h \in \mathbb{R}^n$  infinitesimal no nulo, pero también es trivialmente cierto si  $h = 0$ . Por consiguiente, si  $x \in D$  cumple  $x \approx p$ , tenemos que  $f(x) \approx f(p)$ , y esto prueba la continuidad en  $p$ . ■

**Ejemplo** *La función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

*tiene derivadas parciales en  $\mathbb{R}^2$ , pero no es continua, luego tampoco diferenciable, en  $(0,0)$ .*

En efecto,  $f$  no es continua en  $(0,0)$  porque, si tomamos  $x = y \approx 0$  no nulos, entonces

$$f(x,y) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \not\approx 0 = f(0,0).$$

La existencia de derivadas parciales en todo punto  $(x, y) \neq (0, 0)$  es consecuencia de las reglas usuales de derivabilidad. En el punto  $(0, 0)$  aplicamos la definición de derivada parcial:

$$\frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0, \quad \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = 0,$$

luego

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(0,0)} = \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(0,0)} = 0.$$

■

**Ejercicio:** Probar que una función  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es derivable en un punto  $p \in D$  si y sólo si es diferenciable en  $p$ .

Para dar una condición suficiente de diferenciabilidad conviene introducir primero algunos conceptos:

**Definición 6.52** Si  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función definida en un abierto  $D$ , representaremos por

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

a la función que resulta de derivar  $k$  veces la función  $f$ , primero respecto de  $x_{i_1}$ , luego respecto de  $x_{i_2}$ , etc. (supuesto que sea posible).

Diremos que  $f$  es de clase  $C^k$  en  $D$  (donde  $k \geq 1$ ) si existen todas las derivadas  $k$ -ésimas y todas ellas son continuas en  $D$ .

Diremos que  $f$  es de clase  $C^\infty$  en  $D$  si es de clase  $C^k$  para todo  $k \geq 1$ .

Diremos que una función  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es de clase  $C^k$  en  $D$  (para  $k = 1, 2, \dots, \infty$ ) si lo son todas sus funciones coordenadas.

Diremos que una función estándar  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es *estrictamente diferenciable* en  $p \in D$  si existe una aplicación lineal estándar  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  tal que, para todo par de puntos distintos  $x \approx p \approx y$ , se cumple que

$$\frac{f(x) - f(y) - \phi(x - y)}{\|x - y\|} \approx 0.$$

Haciendo  $y = p$  en la definición anterior vemos que toda función estrictamente diferenciable en  $p$  es diferenciable en  $p$ , y que la aplicación lineal  $\phi$  ha de ser necesariamente  $d_p f$ . También es obvio que  $f$  es estrictamente diferenciable en  $p$  si y sólo si lo son todas sus funciones coordenadas.

**Teorema 6.53** Una función  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es de clase  $C^1$  en un abierto  $D$  si y sólo si es estrictamente diferenciable en  $D$ .

DEMOSTRACIÓN: Como  $f$  es estrictamente diferenciable o de clase  $C^1$  si y sólo si lo son sus funciones coordenadas, no perdemos generalidad si suponemos que  $m = 1$ . También podemos suponer que todos los datos son estándar.

Supongamos en primer lugar que  $f$  es de clase  $C^1$  y tomemos un punto estándar  $p \in D$ . Definimos

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_p x_i$$

y tomamos dos puntos distintos  $x \approx p \approx y$ . Vamos a calcular

$$f(x) - f(y) - \phi(x - y).$$

Para ello definimos  $F_i = f(x_1, \dots, x_i, y_{i+1}, \dots, y_n)$ , donde hemos de entender que  $F_0 = f(y)$ ,  $F_n = f(x)$ . Es claro entonces que:

$$f(x) - f(y) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_p (x_i - y_i) = \sum_{i=1}^n \left( F_i - F_{i-1} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_p (x_i - y_i) \right).$$

Ahora aplicamos el teorema del valor medio a la función

$$g_i(t) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, y_i + t(x_i - y_i), y_{i+1}, \dots, y_n)$$

en el intervalo  $[0, 1]$ . Notemos que el punto en el que calculamos  $f$  está infinitamente próximo a  $p$ , luego está en  $D$ . Claramente  $g_i$  es continua en  $[0, 1]$  y el hecho de que  $f$  tenga derivada parcial respecto de  $x_i$  implica que  $g_i$  es derivable en  $]0, 1[$ . Por consiguiente, aplicando la regla de la cadena para funciones de una variable:

$$F_i - F_{i-1} = g_i(1) - g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{c_i} (x_i - y_i),$$

donde  $c_i \approx p$ . Así pues:

$$|f(x) - f(y) - \phi(x - y)| \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{c_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_p \right| |x_i - y_i| \leq \delta \|x - y\|,$$

donde

$$\delta = n \max_i \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{c_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_p \right|$$

La continuidad en  $p$  de las derivadas de  $f$  implica que los valores absolutos son infinitesimales, luego el máximo también es infinitesimal y, como  $n$  es finito,  $\delta \approx 0$ . En definitiva, concluimos que

$$\frac{f(x) - f(y) - \phi(x - y)}{\|x - y\|} \approx 0,$$

luego  $f$  es estrictamente diferenciable en  $p$ .

Recíprocamente, supongamos ahora que  $f$  es estrictamente diferenciable en el abierto  $D$ . En particular, esto implica que  $f$  tiene derivadas parciales en  $D$ . Tomemos un punto estándar  $p \in D$  y vamos a ver que

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

es continua en  $p$ .

Si  $x \in D$  es estándar y  $h \in \mathbb{R}$  es un infinitésimo no nulo, tenemos que

$$\frac{f(x + he_i) - f(x)}{h} \approx \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_x.$$

En particular, si  $\epsilon > 0$  es estándar, existe un  $\delta > 0$  (por ejemplo cualquier infinitésimo) tal que si  $0 < |h| < \delta$  se cumple

$$\left| \frac{f(x + he_i) - f(x)}{h} - \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_x \right| < \epsilon.$$

Esto vale para todo  $x \in D$  y todo  $\epsilon > 0$  estándar, luego por transferencia vale para todo  $x \in D$  y todo  $\epsilon > 0$ . Tomemos concretamente  $x \approx p$  y  $\epsilon$  infinitesimal. Encontramos entonces un  $h \neq 0$ , que podemos tomar infinitesimal, tal que

$$\frac{f(x + he_i) - f(x)}{h} - \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_x = h' \approx 0.$$

Equivalentemente,

$$f(x + he_i) - f(x) = h \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_x + hh'.$$

Por otra parte, aplicando la definición de diferenciabilidad estricta en  $p$  obtenemos que

$$\frac{f(x + he_i) - f(x) - hd_p f(e_i)}{h} = h'' \approx 0.$$

Equivalentemente,

$$f(x + he_i) - f(x) = h \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_p + hh''.$$

Igualando las dos expresiones que hemos obtenido queda que

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_x - \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_p = h'' - h' \approx 0,$$

lo que prueba la continuidad en  $p$  de la derivada parcial. ■

Para probar que todas las funciones usuales son diferenciables, sólo nos falta la generalización de la regla de la cadena:

**Teorema 6.54 (Regla de la cadena)** Si  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es una función diferenciable en  $p \in D$  y  $g : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  es diferenciable en  $f(p) \in E$ , entonces  $f \circ g$  es diferenciable en  $p$  y

$$d_p(f \circ g) = d_p f \circ d_{f(p)} g.$$

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer que todos los datos son estándar. Sea  $h \in \mathbb{R}^n$  un infinitésimo. Como  $f$  es diferenciable en  $p$ , es continua en  $p$ , luego  $h' = f(p+h) - f(p)$  es infinitesimal. La diferenciable de  $f$  implica que existe un vector infinitesimal  $h_1 \in \mathbb{R}^m$  tal que

$$h' = f(p+h) - f(p) = d_p f(h) + \|h\| h_1.$$

Igualmente, de la diferenciable de  $g$  se sigue que existe  $h_2 \in \mathbb{R}^k$  infinitesimal tal que

$$\begin{aligned} g(f(p+h)) &= g(f(p) + h') = g(f(p)) + d_{f(p)} g(h') + \|h'\| h_2 \\ &= g(f(p)) + d_{f(p)} g(d_p f(h)) + \|h\| d_{f(p)} g(h_1) + \|h'\| h_2. \end{aligned}$$

Llamemos  $\phi = d_p f \circ d_{f(p)} g$ , que es una aplicación lineal (ver las observaciones posteriores a este teorema). Tenemos que

$$\frac{(f \circ g)(p+h) - (f \circ g)(p) - \phi(h)}{\|h\|} = d_{f(p)} g(h_1) + \frac{\|h'\|}{\|h\|} h_2 \approx 0,$$

donde hemos usado que

$$\frac{h'}{\|h\|} = d_p f\left(\frac{h}{\|h\|}\right) + h_1$$

es finito. Esto prueba que  $f \circ g$  es diferenciable en  $p$  y que  $d_p(f \circ g) = \phi$ . ■

En la prueba del teorema anterior hemos usado que la composición de aplicaciones lineales es lineal. Más concretamente, si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  y  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$  son dos aplicaciones lineales determinadas respectivamente por las matrices  $A = (a_{ij})$  y  $B = (b_{jk})$ , entonces es fácil ver que  $f \circ g$  es la aplicación lineal determinada por la matriz  $C = (c_{il})$  dada por

$$c_{il} = \sum_{j=1}^m a_{ij} b_{jl}.$$

De esta expresión deducimos en particular una fórmula para las derivadas parciales de una función compuesta:

**Teorema 6.55** Si  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es una función diferenciable en un punto  $p \in D$  y  $g : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable en  $f(p) \in E$ , entonces

$$\frac{\partial(f \circ g)}{\partial x_i} \Big|_p = \sum_{j=1}^m \frac{\partial g}{\partial x_j} \Big|_{f(p)} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \Big|_p.$$

Basta tener en cuenta la expresión de la matriz jacobiana de una función diferenciable. La fórmula anterior se enuncia de forma más natural si llamamos a las funciones  $y(x)$  (en lugar de  $f$ ) y  $z(y)$  (en lugar de  $g$ ), de modo que la función compuesta es  $z(x) = z(y(x))$ . La regla de la cadena afirma entonces que

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial z}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_i},$$

donde las derivadas de  $z(x)$  e  $y_j(x)$  se evalúan en un punto  $x \in D$  y las de  $z(y)$  se evalúan en  $y = y(x)$ .

En particular, la regla de la cadena implica que la composición de funciones de clase  $C^1$  es de clase  $C^1$ , pues la relación entre las derivadas parciales muestra que las derivadas de la función compuesta también son continuas. Un razonamiento inductivo muestra ahora que la composición de funciones de clase  $C^k$  es de clase  $C^k$  (ya que, obviamente, una función es de clase  $C^{k+1}$  si y sólo si tiene derivadas parciales de clase  $C^k$ , y la suma y el producto de funciones de clase  $C^k$  es obviamente de clase  $C^k$ ). Finalmente, esto implica que la composición de funciones de clase  $C^\infty$  es de clase  $C^\infty$ .

**Teorema 6.56 (Teorema de Schwarz)** *Si  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función de clase  $C^2$  en un punto  $p \in D$ , entonces*

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right|_p = \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right|_p \quad \text{para } i, j = 1, \dots, n.$$

DEMOSTRACIÓN: No perdemos generalidad si suponemos que  $n = 2$ . Sea  $p = (a, b)$ . Llamamos

$$\Delta^2 f(h) = f(a+h, b+h) - f(a, b+h) - f(a+h, b) + f(a, b).$$

Basta probar que si  $h > 0$  es un infinitésimo entonces

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|_{(a,b)} \approx \frac{\Delta^2 f(h)}{h^2}.$$

Si  $G(x) = f(x, b+h) - f(x, b)$ , tenemos que  $\Delta^2 f(h) = G(a+h) - G(a)$ . Podemos aplicar el teorema del valor medio a  $G$ , de modo que existe un infinitésimo  $0 < h_1 < h$  tal que

$$\Delta^2 f(h) = hG'(a+h_1) = h \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(a+h_1, b+h)} - h \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(a+h_1, b)}.$$

Si ahora aplicamos el teorema del valor medio a la función  $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(a+h_1, x)}$  obtenemos un infinitésimo  $0 < h_2 < h$  tal que

$$\Delta^2 f(h) = h^2 \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|_{(a+h_1, b+h_2)}.$$

Así pues, usando la continuidad de la derivada segunda,

$$\frac{\Delta^2 f(h)}{h^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{(a+h_1, b+h_2)} \approx \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{(a, b)}.$$

■

Terminamos la sección demostrando la versión para funciones de varias variables del teorema 3.22. La prueba que vamos a dar requiere el concepto de norma de una aplicación lineal:

Si  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una aplicación lineal, claramente es continua, y también lo es  $|\phi|$  y la restricción de  $|\phi|$  a la esfera unitaria

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}.$$

Como la esfera es compacta, el teorema 6.37 nos da que existe un punto en  $S$  donde  $|\phi|$  toma su valor máximo. Llamaremos *norma* de  $\phi$  a este valor máximo, y lo representaremos por  $\|\phi\|$ .

De este modo, si  $x \in \mathbb{R}^n$  es un vector arbitrario no nulo, se cumple que  $x/\|x\| \in S$ , luego  $|\phi(x/\|x\|)| \leq \|\phi\|$ . Como  $\phi$  es lineal, esto equivale a que  $|\phi(x)|/\|x\| \leq \|\phi\|$  o, equivalentemente, a:

$$|\phi(x)| \leq \|\phi\| \|x\|.$$

Evidentemente, esta desigualdad es válida para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ , incluido  $x = 0$ .

**Teorema 6.57 (De la función inversa)** *Sea  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una aplicación estrictamente diferenciable en un punto  $p \in D$ . Si  $d_p f$  es biyectiva entonces existe un entorno  $U$  de  $p$  contenido en  $D$  tal que  $f[U]$  es un entorno de  $f(p)$ , la restricción de  $f$  a  $U$  es biyectiva y su inversa es estrictamente diferenciable en  $f(p)$ .*

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer que  $f$  y  $p$  son estándar. Veamos que  $f$  biyecta el halo de  $p$  con el halo de  $f(p)$ . De aquí se sigue ya la existencia de  $U$  (en principio un entorno contenido en  $h(p)$ , que por transferencia podemos convertir en un entorno estándar). Sólo quedará demostrar la diferenciable de la inversa.

En primer lugar, si  $x, x' \in h(p)$  son distintos, la diferenciable estricta implica que

$$\frac{f(x) - f(x')}{\|x - x'\|} \approx \frac{d_p f(x - x')}{\|x - x'\|}. \quad (6.1)$$

Como el vector  $\frac{x-x'}{\|x-x'\|}$  tiene norma 1 y  $d_p f$  es biyectiva (y su inversa es una aplicación lineal, luego continua), su imagen no puede ser infinitesimal, luego  $f(x) \neq f(x')$ .

Tomemos ahora  $y \in h(f(p))$  y veamos que tiene antiimagen en  $h(p)$ . Para ello definimos la sucesión

$$x_0 = p, \quad x_{n+1} = x_n + d_p f^{-1}(y - f(x_n)).$$

Para que esta sucesión esté bien definida es necesario que cada  $x_n$  esté en el dominio de  $f$ . De hecho  $x_n \in h(p)$ , pues, si vale para  $n$ , tenemos que

$$\|x_{n+1} - x_n\| = \|d_p f^{-1}(y - f(x_n))\| \leq \|d_p f^{-1}\| \|y - f(x_n)\|, \quad (6.2)$$

luego también vale para  $n + 1$ .

Si  $f(x_n) = y$  para algún  $n$ , ya tenemos una antiimagen para  $y$ . Podemos suponer que no se da el caso, con lo que  $x_{n+1} \neq x_n$ . Vamos a demostrar la relación siguiente:

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq \frac{1}{2^n} \|d_p f^{-1}\| \|y - f(p)\|.$$

En efecto, tenemos que  $y = f(x_n) + d_p f(x_{n+1} - x_n)$ , luego

$$\frac{\|f(x_{n+1}) - y\|}{\|f(x_n) - y\|} = \frac{\|f(x_{n+1}) - f(x_n) - d_p f(x_{n+1} - x_n)\|}{\|x_{n+1} - x_n\|} \frac{\|x_{n+1} - x_n\|}{\|d_p f(x_{n+1} - x_n)\|}.$$

El primer cociente es infinitesimal por la diferenciabilidad estricta de  $f$  en  $p$ , el segundo es finito porque es el inverso de la norma del valor de  $d_p f$  sobre un vector de norma 1. Por consiguiente el miembro izquierdo es infinitesimal. En particular

$$\|f(x_{n+1}) - y\| \leq \frac{1}{2} \|f(x_n) - y\|.$$

Usando (6.2) llegamos a que

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_n\| &\leq \|d_p f^{-1}\| \|y - f(x_n)\| \leq \frac{1}{2} \|d_p f^{-1}\| \|y - f(x_{n-1})\| \leq \dots \\ &\leq \frac{1}{2^n} \|d_p f^{-1}\| \|y - f(p)\|. \end{aligned}$$

De esta relación se sigue claramente que la sucesión  $\{x_n\}$  es de Cauchy, luego converge a un punto  $x$ . Tomando límites en la definición de  $x_n$  queda que  $y = f(x)$ .

Ahora sabemos que  $f$  es inyectiva en un entorno estándar de  $p$ , por lo que tiene una inversa estándar  $f^{-1}$ , que podemos considerar de nuevo restringida sobre el halo de  $f(p)$ .

Para probar que  $f^{-1}$  es estrictamente diferenciable en  $f(p)$  tomamos dos puntos  $y, y' \in h(f(p))$ , que serán de la forma  $y = f(x), y' = f(x')$ . Según (6.1) tenemos que

$$\frac{y - y'}{\|x - x'\|} \approx \frac{d_p f(x - x')}{\|x - x'\|}.$$

De aquí se sigue en particular que el cociente

$$\frac{\|x - x'\|}{\|y - y'\|}$$

es finito, pues su inverso es  $d_p f$  actuando sobre un vector unitario. Además

$$\frac{(d_p f)^{-1}(y - y')}{\|x - x'\|} \approx \frac{x - x'}{\|x - x'\|},$$

luego

$$\frac{(d_p f)^{-1}(y - y')}{\|y - y'\|} \approx \frac{x - x'}{\|y - y'\|} = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y')}{\|y - y'\|},$$

lo que prueba la diferenciabilidad estricta de  $f^{-1}$  en  $f(p)$  (con diferencial igual a  $(d_p f)^{-1}$ ). ■

En las condiciones del teorema anterior, si suponemos además que  $f$  es de clase  $C^1$  en  $D$ , en particular es de clase  $C^1$  en  $U$ , luego estrictamente diferenciable en todos los puntos de  $U$ . Si  $d_p f$  es biyectiva en todos los puntos de  $U$ , el teorema anterior puede aplicarse en todos ellos para concluir que  $f^{-1}$  es estrictamente diferenciable en todo  $f[U]$ , luego es de clase  $C^1$  en  $f[U]$ .

## 6.5 El teorema de la función implícita

En esta sección y en la siguiente demostraremos algunos resultados que requieren que el lector esté familiarizado con los resultados básicos del álgebra lineal (espacios vectoriales, bases, matrices, determinantes, etc.)

Como una primera muestra elemental de las posibilidades de aplicar el álgebra lineal al cálculo diferencial, observamos que la condición de que  $d_p f$  sea biyectiva en el teorema de la función implícita equivale a que el *determinante jacobiano* de  $f$  en  $p$ , es decir, el determinante de la matriz jacobiana  $|Jf(p)|$  sea no nulo.

Si suponemos que  $f$  es de clase  $C^1$  en su dominio, entonces  $|Jf(x)|$  es una función continua, por lo que el hecho de que sea no nula en un punto implica que es no nula en un entorno de dicho punto, luego siempre podemos encontrar un entorno  $U$  que cumple el teorema de la función inversa (para un punto dado  $p$ ) tal que el teorema es aplicable en todos los puntos de  $U$ , de modo que, tal y como indicábamos al final de la sección anterior, la función inversa  $f^{-1}$  es de clase  $C^1$  en todo el abierto  $f[U]$ .

Más aún, aplicando la regla de la cadena a la composición  $f \circ f^{-1} = I$  (donde  $I$  representa la función identidad en  $\mathbb{R}^n$ ), obtenemos que, si  $y = f(x)$ ,

$$Jf(x) \cdot Jf^{-1}(y) = I_n,$$

donde  $I_n$  es la matriz identidad o, lo que es lo mismo:

$$Jf^{-1}(y) = (Jf(x))^{-1},$$

para todo  $x \in U$  (o, equivalentemente, para todo  $y \in f[U]$ ). Más explícitamente,

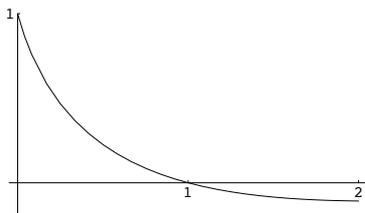
$$Jf^{-1}(y) = \frac{1}{|Jf(f^{-1}(y))|} \widetilde{Jf}^t(f^{-1}(y)),$$

donde la tilde representa la matriz adjunta, cuyos coeficientes dependen polinómicamente de los coeficientes de  $Jf$ . Esto prueba que las derivadas parciales de  $f^{-1}$  se expresan en cada punto  $y \in f[U]$  como cociente de polinomios en las derivadas parciales de  $f$  (compuestas con  $f^{-1}$ ). Por consiguiente, si  $f$  es de clase  $C^k$ , sus derivadas parciales son de clase  $C^{k-1}$ , luego las derivadas parciales de  $f^{-1}$  también son de clase  $C^{k-1}$ , luego  $f^{-1}$  es de clase  $C^k$ . Obviamente, esto es igualmente válido si  $f$  es de clase  $C^\infty$ . En definitiva, tenemos la siguiente variante del teorema de la función inversa:

**Teorema 6.58 (De la función inversa)** *Sea  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una aplicación de clase  $C^k$  en el abierto  $D$ . Si  $p \in D$  cumple que  $d_p f$  es biyectiva, entonces existe un entorno  $U$  de  $p$  contenido en  $D$  tal que  $f[U]$  es un entorno de  $f(p)$ , la restricción de  $f$  a  $U$  es biyectiva y su inversa es de clase  $C^k$  en  $f[U]$ .*

Veamos un ejemplo que ilustra el resultado central de esta sección:

**Ejemplo** Consideremos la ecuación  $xe^y + ye^x = 1$ .



La figura muestra los puntos que cumplen la ecuación (para  $0 \leq x \leq 2$ ). Vemos que, para cada valor de  $x$ , existe un único valor  $y(x)$  tal que el punto  $(x, y(x))$  cumple la ecuación. En estas circunstancias, se dice que la ecuación define a  $y$  como *función implícita* de  $x$ .

Si la ecuación hubiera sido, por ejemplo,  $xy = 1$ , entonces la función  $y(x)$  sería  $y(x) = 1/x$ , es decir, la función que resulta de despejar  $y$  en la ecuación. Teóricamente, la situación es la misma, salvo que en la práctica no es posible despejar  $y$  en la ecuación dada. Por ello, sin apoyarnos en la figura, no sabemos, en principio, cómo justificar la existencia de la función  $y(x)$  y, aun admitiendo su existencia, no sabemos cómo justificar, por ejemplo, que es derivable.

El teorema de la función inversa nos permite resolver estos problemas, con la ayuda de un truco: consideramos la función  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$F(x, y) = (x, xe^y + ye^x - 1).$$

Claramente es de clase  $C^\infty$  en  $\mathbb{R}^2$  y su matriz jacobiana es

$$JF = \begin{pmatrix} 1 & e^y + ye^x \\ 0 & xe^y + e^x \end{pmatrix}.$$

Podemos aplicarle el teorema de la función inversa, por ejemplo, en el punto  $(1, 0)$ , donde  $|JF(1, 0)| = 1 + e \neq 0$ . Observemos que  $F(1, 0) = (1, 0)$ . Esto nos

da una función inversa  $G(u, v) = (G_1(u, v), G_2(u, v))$  de clase  $C^\infty$  en un entorno  $U$  de  $(1, 0)$ . Así pues,  $F(G(u, v)) = (u, v)$  para todo  $(u, v) \in U$ . Explícitamente:

$$G_1(u, v) = u, \quad G_1(u, v)e^{G_2(u, v)} + G_2(u, v)e^{G_1(u, v)} - 1 = v.$$

En particular, esto vale para los puntos  $(u, v) = (x, 0)$  con  $x \approx 1$ , lo que nos da

$$xe^{G_2(x, 0)} + G_2(x, 0)e^x = 1.$$

Si llamamos  $y(x) = G_2(x, 0)$  tenemos una función (estándar) definida para todo  $x \approx 1$ , de clase  $C^\infty$ , tal que  $xe^{y(x)} + y(x)e^x = 1$ . Por transferencia,  $y$  está definida en un entorno estándar de 1, y es, obviamente, la función cuya gráfica hemos mostrado antes. Ahora sabemos que es de clase  $C^\infty$  (en un entorno de 1).

Observemos que si  $(x, y) \approx (1, 0)$  cumple la ecuación, entonces  $(x, y) \in G[U]$ , luego existe un  $(u, v) \in U$  tal que  $(x, y) = G(u, v)$ , luego  $F(x, y) = (u, v)$ , luego  $u = x$  y  $v = xe^y + ye^x - 1 = 0$ , luego  $y = G_2(x, 0) = y(x)$ .

Esto significa que la gráfica de  $y$  contiene a todos los puntos que cumplen la ecuación dada y que están infinitamente próximos a  $(1, 0)$ . Por transferencia, contiene a todos los puntos que cumplen la ecuación dada y que están en un entorno (estándar) de  $(1, 0)$ . ■

El teorema de la función implícita es la generalización del ejemplo anterior al caso de un número arbitrario de ecuaciones:

**Teorema 6.59 (Teorema de la función implícita)** *Consideremos una función  $f : D \subset \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$  de clase  $C^k$  en el abierto  $D$ , sea  $(x_0, y_0) \in D$  tal que  $f(x_0, y_0) = 0$  (donde se ha de entender que  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $y_0 \in \mathbb{R}^m$ ). Supongamos que el determinante de las filas de la matriz jacobiana  $Jf(x_0, y_0)$  correspondientes a las coordenadas  $y_0$  es no nulo. Entonces existen:*

- a) un abierto  $U \subset \mathbb{R}^n$  que contiene a  $x_0$ ,
- b) un abierto  $V \subset \mathbb{R}^{n+m}$  que contiene a  $(x_0, y_0)$ ,
- c) una función  $y : U \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$  de clase  $C^k$  en  $U$ ,

de modo que

$$\{(x, y) \in V \mid f(x, y) = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m} \mid x \in U, y = y(x)\}.$$

DEMOSTRACIÓN: Consideramos la función  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$  dada por  $F(x, y) = (x, f(x, y))$ . Es claro que es de clase  $C^k$  y que su matriz jacobiana en  $(x_0, y_0)$  es de la forma

$$JF(x_0, y_0) = \left( \begin{array}{c|c} I_n & A \\ \hline 0 & B \end{array} \right),$$

donde los bloques  $A$  y  $B$  son la matriz  $Jf(x_0, y_0)$  y, concretamente,  $B$  es la matriz cuyo determinante es no nulo por hipótesis. Las propiedades de los determinantes implican que  $|JF(x_0, y_0)| \neq 0$ .

El teorema de la función inversa nos da un abierto  $V$  que contiene a  $(x_0, y_0)$  tal que  $W = F[V]$  es abierto, contiene a  $F(x_0, y_0) = (x_0, 0)$ ,  $F : V \rightarrow W$  es biyectiva y su inversa  $G : W \rightarrow V$  es de clase  $C^k$  en  $W$ .

Definimos  $U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x, 0) \in W\}$ , que es un abierto en  $\mathbb{R}^n$  porque es la antiimagen de  $W$  por la aplicación continua  $x \mapsto (x, 0)$ . Como  $(x_0, 0) \in W$ , tenemos que  $x_0 \in U$ . Definimos  $y : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  mediante  $y(x) = G_2(x, 0)$ . Claramente  $y$  es de clase  $C^k$  en  $U$ .

Ahora comprobamos que se cumple todo lo que indica el enunciado:

Si  $x \in U$  e  $y = y(x)$ , por definición de  $U$  tenemos que  $(x, 0) \in W$ , luego  $G(x, 0) \in V$ , pero

$$G(x, 0) = (x, G_2(x, 0)) = (x, y(x)) = (x, y).$$

Además  $(x, 0) = F(G(x, 0)) = F(x, y) = (x, f(x, y))$ , luego  $f(x, y) = 0$ .

Recíprocamente, si  $(x, y) \in V$  y  $f(x, y) = 0$  entonces

$$F(x, y) = (x, f(x, y)) = (x, 0) \in W,$$

luego  $x \in U$  y  $(x, y) = G(F(x, y)) = G(x, 0) = (x, G_2(x, 0)) = (x, y(x))$ , con lo que  $y(x) = y$ . ■

En otros términos, si llamamos

$$S = \{(x, y) \in D \mid f(x, y) = 0\},$$

tenemos un conjunto definido por un sistema de  $m$  ecuaciones de clase  $C^k$ , y lo que afirma el teorema anterior es que si un punto  $(x_0, y_0) \in S$  cumple la hipótesis, entonces existe un entorno abierto de  $(x_0, y_0)$  en  $S$  (el conjunto  $S \cap V$ , con la notación del teorema) que es la gráfica de una función de clase  $C^k$ , la *función implícita* definida por el sistema de ecuaciones (para una determinada elección de variables).

A menudo sucede que no importa cuáles son concretamente las variables  $y$  que se ponen en función de las variables  $x$ . En tal caso, observamos que la condición de que la matriz jacobiana  $Jf(p)$  contenga un determinante no nulo (sin especificar cuál) equivale a que la matriz tenga rango  $m$  o, lo que es lo mismo, a que la diferencial  $d_p f : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$  sea suprayectiva. Esto nos lleva a la definición siguiente:

**Definición 6.60** Sea  $f : D \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$  una función de clase  $C^k$  en un abierto  $D$ , donde  $d > m$  y sea  $S = \{x \in D \mid f(x) = 0\}$ . Diremos que un punto  $p \in S$  es *regular* si  $d_p f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$  es suprayectiva. Diremos que  $S$  es *regular* si lo es en todos sus puntos.

Si  $p$  es regular en  $S$ , el teorema de la función implícita nos asegura que existe un entorno de  $p$  en  $S$  que es la gráfica de una función de clase  $C^k$  con  $n = m - d$  variables.

## 6.6 Optimización clásica

Consideremos dos funciones  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  y un  $b \in \mathbb{R}^m$ . El problema de *optimización clásica* determinado por estos datos consiste en encontrar los puntos donde la *función objetivo*  $f$  toma su valor máximo o mínimo sobre el *conjunto de oportunidades*

$$S = \{x \in D \mid g(x) = b\}.$$

A menudo se formula como

$$\begin{array}{ll} \text{Opt.} & f(x) \\ \text{s.a} & g_1(x) = b_1, \\ & \dots \\ & g_m(x) = b_m, \end{array}$$

(léase *optimizar* la función  $f(x)$  *sujeta a las restricciones*  $g_i(x) = b_i$ ).

Usamos la palabra *óptimo* para referirnos a máximos y mínimos indistintamente. Cuando, específicamente, se busca el máximo o el mínimo de la función objetivo, se habla de *maximizar* o *minimizar*  $f(x)$ , respectivamente.

Vamos a dar condiciones necesarias que un punto  $x \in D$  sea un óptimo de  $f$  sobre  $S$ . En general, las condiciones no serán suficientes, ya que, por ejemplo, las cumplirá cualquier punto que sea meramente un *óptimo local*, en el sentido que definimos a continuación:

**Definición 6.61** Si  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  es una función estándar definida sobre un espacio métrico  $M$ , diremos que  $f$  tiene un *máximo local* (resp. un *mínimo local*) en un punto estándar  $p \in M$  si  $f(p) \geq f(x)$  (resp.  $f(p) \leq f(x)$ ) para todo  $x \in M$  tal que  $x \approx p$ .

Obviamente, si  $f$  alcanza en  $M$  un valor máximo o mínimo (global), éste será en particular un máximo o mínimo local.

Es inmediato que si  $M$  es un abierto en  $\mathbb{R}^n$  y  $f$  es derivable, una condición necesaria para que  $f$  pueda tener un extremo local en  $p$  es que  $\nabla f(p) = 0$ , ya que si, por ejemplo,

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_p > 0,$$

tomando un infinitésimo  $h > 0$ , el punto  $x = (p_1, \dots, p_i + h, \dots, p_n) \in M$  cumpliría  $x \approx p$  y  $f(x) > f(p)$ , luego  $f$  no tendría un máximo local en  $p$ , y el punto  $x' = (p_1, \dots, p_i - h, \dots, p_n) \in M$  cumpliría  $x' \in M$  y  $f(x') < f(p)$ , luego  $f$  tampoco tendría un mínimo local en  $p$ . Si la derivada fuera negativa se invertirían las desigualdades, pero la conclusión es la misma.

El teorema de la función implícita nos permite generalizar esta condición necesaria al caso en que  $M$  es un conjunto definido por una o varias restricciones:

**Teorema 6.62** Sea  $g : D \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$  una función de clase  $C^1$  en un abierto  $D$ , donde  $d > m$ , sea  $S = \{x \in D \mid g(x) = 0\}$ , sea  $p \in D$  un punto regular y sea  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $C^1$ . Entonces, si  $f$  tiene un óptimo local en el punto  $p$ , existe un  $\lambda \in \mathbb{R}^m$  tal que

$$\nabla f(p) = \lambda_1 \nabla g_1(p) + \cdots + \lambda_m \nabla g_m(p).$$

DEMOSTRACIÓN: Como  $p$  es regular, existe una función  $y : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  de clase  $C^1$  y un abierto  $V \subset D$ , de modo que  $p = (x_0, y_0) \in V$ ,  $x_0 \in U$ ,  $y_0 = y(x_0)$  y

$$S \cap V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m} \mid x \in U, y = y(x)\}.$$

Si  $x \approx x_0$ , entonces  $x \in U$ , luego  $(x, y(x)) \in S$ ,  $(x, y(x)) \approx (x_0, y_0) = p$ , luego  $f(x, y(x)) \leq f(p) = f(x_0, y(x_0))$  (si es que  $f$  tiene un máximo local en  $p$ ) o  $f(x, y(x)) \geq f(p) = f(x_0, y(x_0))$  (si es que  $f$  tiene un mínimo local en  $p$ ). En cualquiera de los dos casos, vemos que la función  $f(x, y(x))$  tiene un óptimo local en  $x_0$ , luego, por la discusión previa al teorema, sus derivadas son nulas. Las calculamos con la regla de la cadena:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_p + \sum_{j=1}^m \left. \frac{\partial f}{\partial y_j} \right|_p \left. \frac{dy_j}{dx_i} \right|_{x_0} = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Equivalentemente,  $\nabla f(p)$  es solución del sistema  $n$  de ecuaciones lineales con  $m + n$  incógnitas cuya matriz es

$$\left( I_n \mid \left. \frac{dy_j}{dx_i} \right|_{x_0} \right).$$

Como la matriz tiene rango  $n$ , sus soluciones forman un subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^{n+m}$  de dimensión  $m$ . Por otra parte, todo  $x \in U$  cumple  $g(x, y(x)) = 0$ . Derivando esta igualdad con la regla de la cadena obtenemos

$$\left. \frac{\partial g_k}{\partial x_i} \right|_p + \sum_{j=1}^m \left. \frac{\partial g_k}{\partial y_j} \right|_p \left. \frac{dy_j}{dx_i} \right|_{x_0} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, m.$$

Equivalentemente los vectores  $\nabla g_k(p)$  también son soluciones del mismo sistema de ecuaciones que  $\nabla f(p)$ , pero la regularidad de  $p$  equivale a que estos  $m$  vectores son linealmente independientes, luego forman una base del espacio de soluciones del sistema de ecuaciones, por lo que  $\nabla f(p)$  ha de ser combinación lineal de ellos, tal y como indica el enunciado. ■

En la práctica, la condición del teorema anterior puede aplicarse a un problema de optimización clásica

$$\begin{aligned} \text{Opt.} \quad & f(x) \\ \text{s.a} \quad & g_1(x) = b_1, \\ & \dots \\ & g_m(x) = b_m, \end{aligned}$$

tomando como función  $g(x)$  la que tiene por funciones coordenadas las funciones  $g_j(x) - b_j$ . A menudo es útil reformularla en términos de la llamada *función lagrangiana* del problema, definida como

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^m \lambda_j (b_j - g_j(x)).$$

Un *punto crítico* del problema es un punto  $p \in D$  para el que existe un vector  $\lambda \in \mathbb{R}^m$  que cumpla las *condiciones de Lagrange*:

$$\nabla L(p, \lambda) = 0.$$

Decimos “condiciones”, en plural, porque habitualmente se expresan en términos de las derivadas parciales de la función lagrangiana. Observemos que las condiciones

$$\left. \frac{\partial L}{\partial \lambda_j} \right|_{(p, \lambda)} = 0, \quad j = 1, \dots, m,$$

equivalen a  $b_j - g_j(p) = 0$ , es decir, a que  $p$  pertenezca al conjunto de oportunidades, mientras que las condiciones

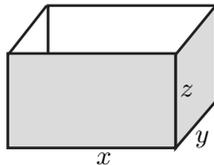
$$\left. \frac{\partial L}{\partial x_i} \right|_{(p, \lambda)} = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

equivalen a que  $\nabla f(p)$  sea combinación lineal de los vectores  $\nabla g_j(p)$  (con coeficientes  $\lambda_j$ ). Así pues, el teorema anterior puede enunciarse como sigue:

**Teorema 6.63 (Condiciones necesarias de Lagrange)** *Dado un problema de optimización clásica definido por funciones de clase  $C^1$ , si  $p$  es un punto regular de su conjunto de oportunidades y es un extremo local del problema, entonces es un punto crítico, es decir, satisface las condiciones de Lagrange.*

Alternativamente, si tenemos un problema de optimización clásica cuyo conjunto de oportunidades es regular, entonces sus extremos locales son necesariamente puntos críticos del problema.

**Ejemplo** *Determinar las dimensiones que ha de tener una caja (sin tapa) para que tenga el volumen máximo de entre todas las posibles con una misma superficie dada.*



Llamemos  $x, y, z$  a las dimensiones de la caja, de modo que su volumen será  $xyz$  y su superficie  $xy + 2xz + 2yz$ . El problema que queremos resolver es maximizar el volumen sujeto a que la superficie sea igual a un valor fijo  $S$ , es decir:

$$\begin{aligned} \text{Max.} \quad & xyz \\ \text{s.a} \quad & xy + 2xz + 2yz = S. \end{aligned}$$

Consideramos las funciones definidas en  $D = ]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$ . El conjunto de oportunidades es regular, pues el gradiente de la restricción es

$$\nabla g = (y + 2z, x + 2z, 2x + 2y),$$

que no se anula en ningún punto de  $D$ . Por lo tanto, las dimensiones que maximizan el volumen han de ser un punto crítico del problema. La función lagrangiana es

$$L(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda(S - xy - 2xz - 2yz),$$

luego las condiciones de Lagrange son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= yz - \lambda(y + 2z) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= xz - \lambda(x + 2z) = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial z} &= xy - 2\lambda(x + y) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= S - xy - 2xz - 2yz = 0. \end{aligned}$$

De las dos primeras ecuaciones obtenemos:

$$\lambda = \frac{yz}{y + 2z} = \frac{xz}{x + 2z},$$

de donde  $xyz + 2yz^2 = xyz + 2xz^2$ , luego  $x = y$ . Similarmente, de la primera y la tercera deducimos

$$\lambda = \frac{yz}{y + 2z} = \frac{xy}{2x + 2y},$$

luego  $2xyz + 2y^2z = xy^2 + 2xyz$ , luego  $x = 2z$ . Con esto, la última ecuación se reduce a  $12z^2 = S$ , luego las dimensiones de la caja resultan ser:

$$(x, y, z) = \left( \sqrt{\frac{S}{3}}, \sqrt{\frac{S}{3}}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{3}} \right).$$

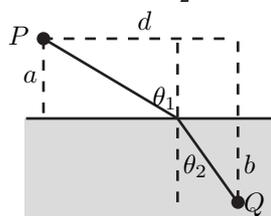
En esencia: *La caja ha de tener base cuadrada y altura igual a la mitad del lado de la base.*

Observemos que, por el planteamiento del problema, es evidente que ha de haber una caja de volumen máximo, luego este máximo ha de ser el punto crítico que hemos obtenido. No obstante, vamos a justificar formalmente que el punto es un máximo. Para ello consideramos el conjunto

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy + 2xz + 2yz = S, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}.$$

Claramente es compacto, luego la función continua  $f(x, y, z) = xyz$  debe alcanzar su valor máximo en un punto  $p$  de este conjunto, y dicho máximo no puede tener ninguna coordenada nula, pues en tal caso  $f(p) = 0$  y hay puntos de  $S$  donde  $f$  es positiva. Así pues,  $p \in S \cap D$ , que es el conjunto de oportunidades del problema que hemos resuelto, luego ha de ser un máximo local de  $f$  en  $S \cap D$ , luego ha de ser el punto crítico que hemos encontrado. ■

**Ejemplo** La luz se mueve a una velocidad distinta a través de cada sustancia que atraviesa. La línea horizontal de la figura representa la frontera entre dos sustancias, de modo que la luz se mueve a una velocidad  $v_1$  en la primera y a una velocidad  $v_2$  en la segunda.



Un rayo de luz se mueve desde  $P$  hasta  $Q$ . Al pasar de una sustancia a otra se desvía por refracción. Llamamos  $\theta_1$  al ángulo de incidencia (el ángulo que forma el rayo incidente con la vertical) y  $\theta_2$  al ángulo de refracción (el ángulo que forma el ángulo refractado con la vertical). Deducir la relación

$$\frac{\text{sen } \theta_1}{v_1} = \frac{\text{sen } \theta_2}{v_2}$$

a partir del principio según el cual la luz viaja de  $P$  a  $Q$  por el camino que minimiza el tiempo necesario para ello.

La distancia desde  $P$  hasta el punto donde se produce la refracción es  $a/\cos \theta_1$ , y la distancia de éste a  $Q$  es  $b/\cos \theta_2$ , luego el tiempo que tarda la luz en llegar desde  $P$  hasta  $Q$  es

$$\frac{a}{v_1 \cos \theta_1} + \frac{b}{v_2 \cos \theta_2}.$$

Para que los ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$  lleven desde  $P$  hasta  $Q$  hay que exigir que  $a \tan \theta_1 + b \tan \theta_2 = d$ . Por lo tanto, el camino que minimiza el tiempo es solución del problema:

$$\begin{aligned} \text{Min.} \quad & \frac{a}{v_1 \cos \theta_1} + \frac{b}{v_2 \cos \theta_2} \\ \text{s.a.} \quad & a \tan \theta_1 + b \tan \theta_2 = d, \end{aligned}$$

donde consideramos las funciones definidas en  $]0, \pi/2[ \times ]0, \pi/2[$ . El conjunto de oportunidades es regular, pues el gradiente de la restricción es

$$\left( \frac{a}{\cos^2 \theta_1}, \frac{b}{\cos^2 \theta_2} \right),$$

que no se anula en ningún punto. La función lagrangiana es

$$L(\theta_1, \theta_2, \lambda) = \frac{a}{v_1 \cos \theta_1} + \frac{b}{v_2 \cos \theta_2} + \lambda(d - a \tan \theta_1 - b \tan \theta_2).$$

Las condiciones de Lagrange son:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = \frac{a \text{sen } \theta_1}{v_1 \cos^2 \theta_1} - \frac{a \lambda}{\cos^2 \theta_1} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = \frac{b \text{sen } \theta_2}{v_2 \cos^2 \theta_2} - \frac{b \lambda}{\cos^2 \theta_2} = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = d - a \tan \theta_1 - b \tan \theta_2 = 0.$$

Las dos primeras ecuaciones nos dan

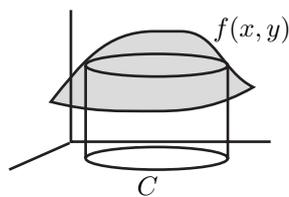
$$\frac{\operatorname{sen} \theta_1}{v_1} = \lambda = \frac{\operatorname{sen} \theta_2}{v_2},$$

como había que probar. ■



## Capítulo VII

# Cálculo integral de varias variables



la integral

En este capítulo definiremos la integral de una función de varias variables, cuya interpretación es análoga a la que ya conocemos para funciones de una variable. Por ejemplo, si  $f(x, y)$  es una función de dos variables cuya gráfica es la que muestra la figura y  $C$  es el círculo (contenido en su dominio) también representado en la figura, queremos definir

$$\int_C f(x, y) \, dx dy$$

de modo que sea igual al volumen comprendido entre el círculo y la gráfica (la suma del volumen del cilindro y de la “cúpula” que la gráfica forma sobre él).

### 7.1 Resultados básicos

La definición de la integral de Riemann de una función de varias variables es la generalización obvia de la que hemos visto en el capítulo IV para funciones de una variable. La teoría básica es completamente análoga, salvo que la notación es un poco más farragosa. En esta primera sección expondremos esta teoría básica que sigue de cerca los resultados del capítulo IV, mientras que en las secciones siguientes nos ocuparemos de los resultados específicos del cálculo integral de varias variables.

En lugar de integrar funciones en intervalos, aquí vamos a integrar funciones en cubos:

Un *cubo* en  $\mathbb{R}^d$  es un producto de intervalos

$$Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d] \subset \mathbb{R}^d.$$

Su volumen es

$$v(Q) = \prod_{j=1}^d (b_j - a_j).$$

Una partición  $P$  de un cubo  $Q$  es una  $d$ -tupla  $P = (P_1, \dots, P_d)$ , donde cada

$$P_j = \{a_j = x_{0j} < x_{1j} < \dots < x_{n_j, j} = b_j\}$$

es una partición de  $[a_j, b_j]$ . El conjunto de los *multiíndices* asociados a  $P$  será el conjunto

$$I_P = \{(i_1, \dots, i_d) \in \mathbb{N}^d \mid 1 \leq i_j \leq n_j \text{ para todo } j = 1, \dots, d\}.$$

Para cada  $i \in I_P$ , definimos

$$Q_i = [x_{i_1-1,1}, x_{i_1,1}] \times \dots \times [x_{i_d-1,d}, x_{i_d,d}].$$

De este modo, la partición  $P$  divide a  $Q$  en  $n_1 \dots n_d$  cubos  $Q_i$ . Cada punto de  $Q$  pertenece a lo sumo a  $2^d$  de los cubos  $Q_i$ .

Si  $i \in I_P$ , definimos  $\Delta x_{ij} = x_{i_j, j} - x_{i_j-1, j}$ . Convenimos también que

$$\Delta x_i = \Delta x_{i_1} \dots \Delta x_{i_d} = v(Q_i).$$

La norma de la partición  $P$  es el máximo  $\|P\|$  de las longitudes  $\Delta x_{ij}$ , para  $i \in I_P$ ,  $j = 1, \dots, d$ . Una partición es *infinitesimal* si su norma es infinitesimal.

Sea  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada, es decir, (en caso de que sea estándar estándar) tal que sólo toma valores finitos o (en general) tal que su imagen está contenida en un intervalo acotado  $[m, M]$ .

Para cada  $i \in I_P$ , podemos definir  $m_i$  y  $M_i$  como el ínfimo y el supremo, respectivamente, de los valores que toma  $f$  sobre el cubo  $Q_i$ .

Definimos las *sumas de Riemann*:

$$s(f, P) = \sum_{i \in I_P} m_i \Delta x_i, \quad S(f, P) = \sum_{i \in I_P} M_i \Delta x_i.$$

Si  $P$  y  $P'$  son dos particiones de  $Q$  escribiremos  $P \subset P'$  en el sentido de que, para todo  $j = 1, \dots, d$ , se cumple que  $P_j \subset P'_j$ .

Empezaremos generalizando el teorema 4.2:

**Teorema 7.1** *Sea  $f : Q \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada sobre un cubo y sean  $P \subset P'$  dos particiones de  $Q$ . Sea  $r$  el número de puntos de las particiones de  $P'$  que no están en la partición correspondiente de  $P$ . Entonces*

$$s(f, P) \leq s(f, P') \leq s(f, P) + Kr\|P\|,$$

$$S(f, P) \geq S(f, P') \geq S(f, P) - Kr\|P\|,$$

donde  $K$  es una constante que sólo depende de  $Q$  y de  $f$ .

DEMOSTRACIÓN: Lo probamos por inducción sobre  $r$ . Supongamos primeramente que  $r = 1$ , es decir, que sólo una de las particiones  $P'_j$  difiere de la partición correspondiente de  $P$ , y que difiere en un único punto. Por simplicidad supondremos que  $j = d$ , de modo que  $P'_d = P_d \cup \{x\}$  y, más concretamente,  $x_{i_0-1,d} < x < x_{i_0,d}$ .

Entonces, los cubos en que  $P$  divide a  $Q$  son los mismos determinados por  $P'$ , salvo en el caso de los correspondientes a los multiíndices  $i \in I_P$  tales que  $i_d = i_0$ . Para estos multiíndices, el cubo  $Q_i$  se corresponde con dos cubos de  $P'$ , que, abandonando la notación estándar que hemos introducido, podemos llamar  $Q_i = Q_i^1 \cup Q_i^2$ , de modo que

$$Q_i^1 = [x_{i_1-1,1}, x_{i_1,1}] \times \cdots \times [x_{i_{d-1}-1,d-1}, x_{i_{d-1},1}] \times [x_{i_d-1,d}, x],$$

$$Q_i^2 = [x_{i_1-1,1}, x_{i_1,1}] \times \cdots \times [x_{i_{d-1}-1,d-1}, x_{i_{d-1},1}] \times [x, x_{i_d,d}].$$

De este modo,  $s(f, P') - s(f, P) =$

$$\sum_{i_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{i_{d-1}=1}^{n_{d-1}} \Delta x_{i_1} \cdots \Delta x_{i_{d-1}} (m_i^1(x - x_{i_0-1,d}) + m_i^2(x_{i_0,d} - x) - m_i(x_{i_0,d} - x_{i_0-1,d})).$$

Como los cubos  $Q_i^k$  son menores, es claro que los ínfimos  $m_i^k$  son mayores o iguales que  $m_i$ , luego

$$m_i^1(x - x_{i_0-1,d}) + m_i^2(x_{i_0,d} - x) - m_i(x_{i_0,d} - x_{i_0-1,d}) \geq 0,$$

de donde también  $s(f, P') - s(f, P) \geq 0$ . Por otra parte,

$$\begin{aligned} m_i^1(x - x_{i_0-1,d}) + m_i^2(x_{i_0,d} - x) - m_i(x_{i_0,d} - x_{i_0-1,d}) = \\ (m_i^1 - m_i)(x - x_{i_0-1,d}) + (m_i^2 - m_i)(x_{i_0,d} - x) \leq 2M\|P\|, \end{aligned}$$

donde  $M$  es una cota de  $f$  en  $Q$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} s(f, P') - s(f, P) &\leq \sum_{i_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{i_{d-1}=1}^{n_{d-1}} \Delta x_{i_1} \cdots \Delta x_{i_{d-1}} 2M\|P\| \\ &\leq (b_1 - a_1) \cdots (b_{d-1} - a_{d-1}) 2M\|P\| \leq K\|P\|, \end{aligned}$$

donde

$$K = 2M \prod_{j=1}^d \max\{b_j - a_j, 1\}.$$

A partir de aquí, la conclusión es idéntica a la del teorema 4.2.  $\blacksquare$

La prueba de 4.3 es válida sin cambio alguno, de modo que toda suma inferior de  $f$  es menor o igual que toda suma superior de  $f$  (aunque las particiones sean distintas).

**Definición 7.2** Sea  $f : Q \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada en un cubo. Definimos la *integral inferior* y la *integral superior de Darboux* como

$$\int_Q f(x) dx = \sup_P s(f, P), \quad \overline{\int}_Q f(x) dx = \inf_P S(f, P).$$

Las integrales inferior y superior existen, porque el conjunto de las sumas inferiores está acotado superiormente por cualquier suma superior, y viceversa, lo que implica también que

$$\int_{\underline{Q}} f(x) dx \leq \int_{\overline{Q}} f(x) dx.$$

El teorema siguiente se demuestra exactamente igual que 4.5:

**Teorema 7.3** Sea  $f : Q \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  una función estándar acotada en un cubo  $Q$ . Si  $P$  es una partición infinitesimal de  $Q$ , entonces

$$s(P, f) \approx \int_{\underline{Q}} f(x) dx, \quad S(P, f) \approx \int_{\overline{Q}} f(x) dx.$$

**Definición 7.4** Una función  $f : Q \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  acotada en un cubo  $Q$  es *integrable (Riemann)* si su integral inferior coincide con su integral superior, en cuyo caso, a este valor común se le llama *integral (de Riemann)* de  $f$ , y se representa por

$$\int_Q f(x) dx = \int_{\underline{Q}} f(x) dx = \int_{\overline{Q}} f(x) dx.$$

Evidentemente:

**Teorema 7.5** Sea  $f : Q \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  una función estándar acotada en un cubo  $Q$  y sea  $P$  una partición infinitesimal de  $Q$ . Entonces, la función  $f$  es integrable si y sólo si  $s(P, f) \approx S(P, f)$ , en cuyo caso, la integral es la parte estándar de estas sumas.

Los resultados siguientes se prueban esencialmente igual que los vistos en el capítulo 4 para funciones de una variable:

**Teorema 7.6** Si  $f$  y  $g$  son funciones integrables en un cubo  $Q$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$ , también son integrables  $f + g$ ,  $fg$ ,  $\alpha f$  y  $|f|$ . Además:

$$\int_Q (f(x) + g(x)) dx = \int_Q f(x) dx + \int_a^b g(x) dx,$$

$$\int_Q \alpha f(x) dx = \alpha \int_Q f(x) dx,$$

$$\left| \int_Q f(x) dx \right| \leq \int_Q |f(x)| dx.$$

Si  $f(x) \leq g(x)$  para todo  $x \in [a, b]$ , se cumple que

$$\int_Q f(x) dx \leq \int_Q g(x) dx.$$

**Teorema 7.7** Sea  $f : Q \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  una función estándar integrable en un cubo  $Q$ , sea  $P$  una partición infinitesimal y sea  $\{y_i\}_{i \in I_P}$  un conjunto de puntos tales que  $y_i \in Q_i$ . Entonces

$$\int_Q f(x) dx \approx \sum_{i \in I_P} f(y_i) \Delta x_i.$$

También es fácil probar que toda función continua es integrable, pero vamos a necesitar resultados más finos, de los que nos ocuparemos en la sección siguiente.

## 7.2 Dominios de integración

Hasta ahora hemos definido la integral de una función sobre un cubo, pero esto no incluye, por ejemplo, el caso considerado al principio del capítulo, en el que hablábamos de la integral de una función  $f$  sobre un círculo. En realidad, esto se reduce al caso que ya conocemos sin más que considerar la función  $F$  que coincide con  $f$  dentro del círculo y vale 0 fuera de él, pero el problema es que  $F$  ya no es continua, aunque  $f$  lo sea, y por ello no nos basta con probar que toda función continua es integrable. Necesitamos un criterio de integrabilidad más general.

**Definición 7.8** Sea  $f : D \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada sobre un dominio acotado  $D$ . Es claro entonces que existe un cubo  $Q$  tal que  $D \subset Q \subset \mathbb{R}^d$ . Diremos que  $f$  es *integrable Riemann* (en  $D$ ) si la función  $F : Q \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in D, \\ 0 & \text{si } x \in Q \setminus D \end{cases}$$

es integrable Riemann (en  $Q$ ), en cuyo caso definimos

$$\int_D f(x) dx = \int_Q F(x) dx.$$

Es fácil ver que la integrabilidad de  $f$  y, en su caso, el valor de la integral, no dependen de la elección del cubo  $Q$ . En efecto, si  $D \subset Q_1 \cap Q_2$ , entonces  $Q_1 \cap Q_2$  también es un cubo, luego basta ver que si  $D \subset Q_1 \subset Q_2$ , entonces  $D$  es integrable respecto a  $Q_1$  si y sólo si lo es respecto de  $Q_2$ . Ahora bien, suponiendo los datos estándar y tomando una partición infinitesimal  $P$  de  $Q_1$ , podemos extenderla a una partición infinitesimal  $P'$  de  $Q_2$ , y es claro que las sumas de Riemann de las correspondientes funciones  $F_{Q_1}$  y  $F_{Q_2}$  son iguales.

Diremos que un conjunto acotado  $D \subset \mathbb{R}^d$  es un *dominio de integración* si la función constante igual a 1 es integrable en  $D$ . En tal caso, definimos el *volumen* de  $D$  como

$$v(D) = \int_D dx.$$

Es fácil ver que si  $D$  es un cubo, entonces el volumen así definido es el mismo que ya teníamos definido antes.

Diremos que un dominio de integración  $D$  es *nulo*<sup>1</sup> si  $v(D) = 0$ .

Conviene definir la *función característica* de un conjunto  $D \subset \mathbb{R}^d$  como la función  $\chi_D : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\chi_D(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in D, \\ 0 & \text{si } x \notin D. \end{cases}$$

En estos términos,  $D$  es un dominio de integración si y sólo si  $\chi_D$  es integrable en cualquier cubo que contenga a  $D$ .

El resultado fundamental sobre dominios de integración es el siguiente:

**Teorema 7.9** *Un conjunto acotado  $D \subset \mathbb{R}^d$  es un dominio de integración si y sólo si su frontera es nula.*

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer los datos estándar. Tomemos un cubo (estándar) tal que  $D \subset Q \subset \mathbb{R}^d$ . Podemos tomar el cubo suficientemente grande como para que  $D \subset \overset{\circ}{Q}$ . Esto implica que la frontera de  $D$  en  $Q$  es la misma que la frontera de  $D$  en  $\mathbb{R}^d$ .

Sea  $P$  una partición infinitesimal de  $Q$ . Ésta divide a  $Q$  en una familia finita de cubos  $\{Q_i\}_{i \in I_P}$ . Sea  $I \subset I_P$  el conjunto de los multiíndices  $i \in I_P$  tales que  $Q_i \cap \partial D \neq \emptyset$ .

Observemos que  $Q = \overset{\circ}{D} \cup \partial D \cup Q \setminus \overline{D}$  luego, si  $i \in I_P \setminus I$ , tenemos que  $Q_i = (Q_i \cap \overset{\circ}{D}) \cup (Q_i \setminus \overline{D})$  y ambos conjuntos son abiertos disjuntos en  $Q_i$ . Como los cubos son conexos, o bien  $Q_i \subset \overset{\circ}{D} \subset D$ , o bien  $Q_i \subset Q \setminus \overline{D} \subset Q \setminus D$ . En ambos casos, la función  $\chi_D$  es constante en  $Q_i$ , luego  $m_i = M_i$ . Por consiguiente,

$$S(\chi_D, P) - s(\chi_D, P) = \sum_{i \in I} (M_i - m_i) \Delta x_i.$$

Si  $x \in \partial D$ , entonces existe un  $i \in I$  tal que  $x \in Q_i \cap \partial D$ . Supongamos que  $Q_i \subset D$ . En tal caso,  $x \in \partial Q_i$ , ya que si  $Q_i$  fuera un entorno de  $x$ , debería cortar a  $Q \setminus D$ .

Notemos que la unión de todos los cubos  $Q_i$  que contienen a  $x$  forma un cubo mayor que tiene a  $x$  en su interior. Por lo tanto, debe cortar a  $Q \setminus D$ . En definitiva, existe otro cubo  $Q_{i'}$  que también contiene a  $x$  pero que corta a  $Q \setminus D$ .

Similarmente, si hubiéramos partido de que  $Q_i \subset Q \setminus D$  habríamos llegado igualmente a otro cubo  $Q_{i'}$  que también contendría a  $x$  pero cortando a  $D$ .

Sea  $I' \subset I$  el conjunto de los multiíndices  $i'$  tales que  $Q_{i'}$  corta a  $D$  y a  $Q \setminus D$ . Acabamos de probar que

$$\partial D \subset \bigcup_{i \in I'} Q_i.$$

<sup>1</sup>Notemos que este concepto de conjunto nulo no coincide con el usual, en términos de la medida de Lebesgue. Por ejemplo,  $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$  es un conjunto numerable que no es nulo en este sentido, mientras que todo conjunto numerable es nulo para la medida de Lebesgue.

Para  $i \in I'$ , tenemos que  $M_i - m_i = 1 - 0 = 1$ , luego

$$S(\chi_D, P) - s(\chi_D, P) \geq \sum_{i \in I'} \Delta x_i \geq 0.$$

Si  $D$  es un dominio de integración, el miembro izquierdo es infinitesimal, luego la suma intermedia también lo es. Ahora bien, todo  $i \in I$  corresponde a un cubo  $Q_i$  que toca a un cubo  $Q_{i'}$  con  $i' \in I'$ , y cada cubo toca exactamente a  $3^d - 1$  cubos. Como la partición  $P$  la hemos elegido arbitrariamente, podemos suponer que todos los cubos  $Q_i$  tienen el mismo volumen. Así

$$\sum_{i \in I} \Delta x_i \leq 3^d \sum_{i \in I'} \Delta x_i \approx 0.$$

Por lo tanto,

$$0 \leq S(\chi_{\partial D}, P) - s(\chi_{\partial D}, P) \leq \sum_{i \in I} \Delta x_i \approx 0,$$

lo que prueba que  $\partial D$  es un dominio de integración. Más aún,

$$0 \leq s(\chi_{\partial D}, P) \leq \sum_{i \in I} \Delta x_i \approx 0,$$

luego  $\partial D$  es nulo.

Recíprocamente, si  $\partial D$  es nula,

$$\sum_{i \in I} \Delta x_i = S(\chi_{\partial D}, P) \approx 0,$$

luego

$$S(\chi_D, P) - s(\chi_D, P) = \sum_{i \in I} (M_i - m_i) \Delta x_i \leq \sum_{i \in I} \Delta x_i \approx 0,$$

luego  $\chi_D$  es integrable.  $\blacksquare$

Como consecuencia tenemos el único criterio de integración que necesitaremos en la práctica:

**Teorema 7.10** *Toda función continua y acotada sobre un dominio de integración es integrable.*

DEMOSTRACIÓN: Sea  $D \subset \mathbb{R}^d$  un dominio de integración y  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y acotada. Podemos suponer todos los datos estándar. Sea  $Q$  un cubo estándar tal que  $D \subset Q \subset \mathbb{R}^d$  y sea  $F : Q \rightarrow \mathbb{R}$  la extensión de  $f$  a  $Q$  que vale 0 en  $Q \setminus D$ . Sea  $P$  una partición infinitesimal de  $Q$  y sea  $I$  el conjunto de los multiíndices  $i \in I_P$  tales que  $Q_i \cap \partial D \neq \emptyset$ . Como  $\partial D$  es nulo, tenemos que

$$\sum_{i \in I} \Delta x_i = S(\chi_{\partial D}, P) \approx 0,$$

Fijado un número estándar  $\epsilon > 0$ , el sumatorio es  $< \epsilon$ , luego, por transferencia, existe una partición estándar  $P'$  de  $Q$  tal que, si  $I'$  es el conjunto análogo a  $I$  pero para  $P'$ , se cumple que

$$\sum_{i' \in I'} \Delta x_{i'} < \epsilon.$$

Ahora tomamos como partición infinitesimal  $P$  un refinamiento de  $P'$ , de modo que todo cubo  $Q_i$  determinado por  $P$  está contenido en un cubo de  $P'$ .

Sea  $D' \subset D$  la unión de todos los cubos  $Q'_{i'}$  (respecto de  $P'$ ) contenidos en  $D$ . Se trata de un conjunto compacto estándar.

Si  $Q_i$  es un cubo infinitesimal determinado por  $P$  y  $Q_i \cap D' \neq \emptyset$ , entonces, o bien  $Q_i \subset D'$ , o bien  $Q_i$  está contenido en uno de los cubos estándar determinados por  $P'$  que corta a  $\partial D$ . Llamemos  $I_1$  e  $I_2$  a los conjuntos de multiíndices que están en uno y otro caso, respectivamente.

Si  $i \in I_1$  y  $x_1, x_2 \in Q_i$  son los puntos donde  $F$  toma su valor máximo y mínimo, por compacidad tenemos que  $*x_1 = *x_2 \in D' \subset D$ , luego  $F$  es continua en este punto, luego  $M_i = F(x_1) \approx F(*x_1) = F(*x_2) \approx F(x_2) = m_i$ . Sea

$$\delta = \min_{i \in I_1} (M_i - m_i) \approx 0.$$

Llamando  $M$  a una cota de  $F$  en  $D$ :

$$\begin{aligned} S(F, P) - s(F, P) &= \sum_{i \in I_1} (M_i - m_i) \Delta x_i + \sum_{i \in I_2} (M_i - m_i) \Delta x_i \\ &\leq \delta \sum_{i \in I_1} \Delta x_i + 2M \sum_{i' \in I'} \Delta x'_{i'} < \delta v(Q) + 2M\epsilon < (2M + 1)\epsilon. \end{aligned}$$

Así, para todo  $\epsilon > 0$  estándar, hemos demostrado que existe una partición  $P$  tal que  $S(F, P) - s(F, P) < (2M + 1)\epsilon$ , luego, por transferencia, esto vale también para  $\epsilon \approx 0$ , en cuyo caso tenemos que  $s(F, P) \approx S(F, P)$ , luego  $F$  es integrable. ■

La parte delicada del problema es reconocer los dominios de integración. En primer lugar probamos algunas propiedades generales:

**Teorema 7.11** *Si  $D_1$  y  $D_2$  son dominios de integración en  $\mathbb{R}^d$ , también lo son  $D_1 \cap D_2$ ,  $D_1 \cup D_2$  y  $D_1 \setminus D_2$ .*

DEMOSTRACIÓN: Basta observar que

$$\chi_{D_1 \cap D_2} = \chi_{D_1} \chi_{D_2}, \quad \chi_{D_1 \setminus D_2} = \chi_{D_1} (1 - \chi_{D_2}), \quad \chi_{D_1 \cup D_2} = \chi_{D_2} + \chi_{D_1 \setminus D_2}.$$

■

**Teorema 7.12** *Todo subconjunto de un conjunto nulo es nulo.*

DEMOSTRACIÓN: Sea  $D_1$  un conjunto nulo y  $D_2 \subset D_1$ . Podemos suponerlos estándar. Sea  $Q$  un cubo tal que  $D_2 \subset D_1 \subset Q$  y sea  $P$  una partición infinitesimal de  $Q$ . Entonces

$$0 \leq s(\chi_{D_2}, P) \leq S(\chi_{D_2}, P) \leq S(\chi_{D_1}, P) \approx 0,$$

luego  $D_2$  es nulo. ■

**Teorema 7.13** Sean  $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}^d$  dos dominios de integración y consideremos una función acotada  $f : D_1 \cup D_2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

a) Si  $D_1$  es nulo, entonces  $f$  es integrable en  $D_1$  y

$$\int_{D_1} f(x) dx = 0.$$

b) Si  $D_1 \subset D_2$  y  $f$  es integrable en  $D_2$ , también lo es en  $D_1$ .

c)  $f$  es integrable en  $D_1 \cup D_2$  si y sólo si lo es en  $D_1$  y en  $D_2$ .

d) Si además  $D_1 \cap D_2$  es nulo, entonces

$$\int_{D_1 \cup D_2} f(x) dx = \int_{D_1} f(x) dx + \int_{D_2} f(x) dx.$$

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer todos los datos estándar. Tomemos un cubo estándar  $Q \subset \mathbb{R}^d$  que contenga a todos los dominios considerados. No perdemos generalidad si suponemos que la función  $f$  está definida sobre todo  $Q$  (extendiéndola con el valor 0).

a) Sea  $P$  una partición infinitesimal de  $Q$  y sea  $M$  una cota estándar de  $f$ . Entonces

$$0 \leq s(f\chi_{D_1}, P) \leq S(f\chi_{D_1}, P) \leq MS(\chi_{D_1}, P) \approx 0,$$

luego  $f\chi_{D_1}$  es integrable en  $Q$ , lo que equivale por definición a que  $f$  es integrable en  $D_1$ , y la integral es nula.

b) Si  $f$  es integrable en  $D_2$ , entonces  $f\chi_{D_2}$  es integrable en  $Q$ , luego

$$f\chi_{D_1} = (f\chi_{D_2})\chi_{D_1}$$

también es integrable en  $Q$ , luego  $f$  es integrable en  $D_1$ .

c) Si  $f$  es integrable en  $D_1 \cap D_2$ , entonces es integrable en  $D_1$  y  $D_2$  por el apartado anterior. Si  $f$  es integrable en  $D_1$  y  $D_2$ , entonces también es integrable en  $D_2 \setminus D_1$  por el apartado anterior y, como

$$f\chi_{D_1 \cup D_2} = f\chi_{D_1} + f\chi_{D_2 \setminus D_1},$$

concluimos que  $f$  es integrable en  $D_1 \cup D_2$ .

d) Tenemos que

$$\int_{D_1 \cup D_2} f(x) dx = \int_Q (f\chi_{D_1 \cup D_2})(x) dx = \int_Q (f\chi_{D_1})(x) dx + \int_Q (f\chi_{D_2 \setminus D_1})(x) dx.$$

Similarmente,

$$\int_Q (f\chi_{D_2})(x) dx = \int_Q (f\chi_{D_2 \setminus D_1})(x) dx + \int_Q (f\chi_{D_1 \cap D_2})(x) dx,$$

y la última integral es nula por a), luego

$$\begin{aligned} \int_{D_1 \cup D_2} f(x) dx &= \int_Q (f\chi_{D_1})(x) dx + \int_Q (f\chi_{D_2})(x) dx \\ &= \int_{D_1} f(x) dx + \int_{D_2} f(x) dx. \end{aligned}$$

■

De estas propiedades se deducen en particular propiedades análogas sobre volúmenes, como, por ejemplo, que si la intersección  $D_1 \cap D_2$  es nula, entonces  $v(D_1 \cup D_2) = v(D_1) + v(D_2)$ , etc.

**Ejercicio:** Probar que si  $D_1$  y  $D_2$  son dominios de integración, entonces

$$v(D_1 \cup D_2) = v(D_1) + v(D_2) - v(D_1 \cap D_2).$$

Ahora podemos generalizar ligeramente el teorema 7.10:

**Teorema 7.14** *Sea  $D \subset \mathbb{R}^d$  un dominio de integración y  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada que sea continua en  $D$  salvo a lo sumo en un conjunto nulo de puntos. Entonces  $f$  es integrable en  $D$ .*

DEMOSTRACIÓN: Sea  $E \subset D$  un conjunto nulo tal que  $f$  sea continua en  $D \setminus E$ . Entonces  $f$  es integrable en  $E \setminus D$  por el teorema 7.10 y es integrable en  $E$  por el teorema anterior, luego  $f$  es integrable en  $D$ , también por el teorema anterior. ■

A veces es útil la caracterización siguiente de los conjuntos nulos:

**Teorema 7.15** *Un conjunto estándar acotado es nulo si y sólo si está contenido en un dominio de integración de volumen infinitesimal.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que  $E \subset D$ , donde  $E$  es un conjunto estándar acotado y  $D$  es un dominio de integración de volumen infinitesimal. Sea  $Q$  un cubo estándar tal que  $E \subset D \subset Q$  y sea  $P$  una partición infinitesimal de  $P$ .

Fijado  $\epsilon > 0$  estándar, por transferencia existe un dominio de integración estándar  $D_\epsilon$  de modo que  $E \subset D_\epsilon \subset Q$  y  $v(D_\epsilon) < \epsilon$ . Entonces  $\chi_E \leq \chi_{D_\epsilon}$ , luego

$$S(\chi_E, P) \leq S(\chi_{D_\epsilon}, P) \approx v(D_\epsilon) < \epsilon,$$

luego

$$S(\chi_E, P) < \epsilon,$$

para todo  $\epsilon > 0$  estándar, luego  $S(\chi_E, P) \approx 0$ , luego  $E$  es nulo. ■

Observemos que hasta ahora no tenemos ningún criterio práctico para reconocer si un conjunto dado es un dominio de integración. Por ejemplo, no sabemos si el círculo del ejemplo del principio del capítulo lo es. (Sabemos que la condición necesaria y suficiente es que la circunferencia sea nula.) Vamos a ocuparnos de ello.

**Teorema 7.16** Sea  $f : K \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^d$  una función de clase  $C^1$  en un conjunto compacto  $K$  (en el sentido de que es de clase  $C^1$  en un abierto que contiene a  $K$ ). Entonces existe una constante  $C$  tal que, para todo  $x, y \in K$ ,

$$d(f(x), f(y)) \leq C d(x, y).$$

DEMOSTRACIÓN: Dados dos puntos  $x, y \in K$ , consideramos las funciones  $g_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por  $g_i(t) = f_i(x + t(y - x))$ , para  $i = 1, \dots, d$ .

Claramente es derivable en  $]0, 1[$  y continua en  $[0, 1]$ , luego podemos aplicar el teorema del valor medio, según el cual existe un número  $0 < t_i < 1$  tal que

$$f_i(y) - f_i(x) = f'(t_i) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \Big|_{c_i} (y_j - x_j),$$

para cierto punto  $c_i \in K$ . Como las derivadas parciales son continuas en  $K$ , podemos encontrar una constante  $C'$  tal que

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \Big|_x \right| \leq C'$$

para todo  $x \in K$ . De este modo,

$$|f_i(y) - f_i(x)| \leq \sum_{j=1}^m C' (y_j - x_j) \leq mC' d(x, y),$$

luego

$$d(f(x), f(y)) = \sqrt{\sum_{j=1}^m (f_i(y) - f_i(x))^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^m m^2 C'^2 d(x, y)^2} = Cd(x, y),$$

donde la constante  $C$  no depende de  $x$  e  $y$ . ■

Ahora obtenemos un primer criterio práctico para reconocer conjuntos nulos:

**Teorema 7.17** Sea  $g : Q \subset \mathbb{R}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}^d$  una función de clase  $C^1$  en un cubo  $Q$ . Entonces  $g[Q]$  es un conjunto nulo.

DEMOSTRACIÓN: Es fácil definir una aplicación biyectiva  $[0, 1]^{d-1} \rightarrow Q$  de clase  $C^\infty$  (lineal, de hecho), luego podemos suponer que  $Q = [0, 1]^{d-1}$ . Dividamos el intervalo  $[0, 1]$  en  $n$  partes infinitesimales iguales, lo que nos da una partición de  $Q$  en  $n^{d-1}$  cubos iguales de arista  $1/n$ .

Sea  $R \subset \mathbb{Q}$  el conjunto de los  $(n+1)^{d-1}$  vértices de los cubos  $Q_i$ . Es fácil ver que dos puntos cualesquiera de un cubo de arista  $1/n$  distan a lo sumo  $\sqrt{d-1}/n$ . Por lo tanto, cada punto de  $Q$  dista a lo sumo  $\sqrt{d-1}/n$  de un punto de  $R$ . Si  $C$  es la constante dada por el teorema anterior y llamamos  $C' = C\sqrt{d-1}$ , tenemos que cada punto de  $g[Q]$  dista de un punto de  $R' = g[R]$  en menos de  $C'/n$ .

Para cada punto  $x \in R'$ , consideramos el cubo

$$Q_x = \prod_{i=1}^d [x_i - C'/n, x_i + C'/n],$$

que contiene a la bola abierta de centro  $x$  y radio  $C'/n$ , luego

$$g[Q] \subset \bigcup_{x \in R'} Q_x = U.$$

El volumen de  $Q_x$  es  $(2C'/n)^d = C''/n^d$  y hay a lo sumo  $(n+1)^{d-1}$  cubos. El conjunto  $U$  es un dominio de integración, porque es una unión finita de cubos, y cada cubo lo es. En general, si  $D_1$  y  $D_2$  son dominios de integración, se cumple que

$$\int_{D_1 \cup D_2} dx = \int_{D_1} dx + \int_{D_2 \setminus D_1} dx \leq \int_{D_1} dx + \int_{D_2} dx,$$

luego, aplicando esto varias veces, vemos que

$$0 \leq \int_U dx \leq \sum_{x \in R'} \int_{Q_x} dx = (n+1)^{d-1} \frac{C''}{n^d} \leq \frac{2^{d-1} C''}{n} \approx 0.$$

Fijemos un cubo  $Q' \subset \mathbb{R}^d$  que contenga a  $U$  y a  $g[Q]$  (esto es posible porque  $g[Q]$  es compacto, luego acotado) y sea  $P'$  una partición infinitesimal de  $Q'$ . Entonces

$$0 \leq s(\chi_{g[Q]}, P') \leq S(\chi_{g[Q]}, P') \leq S(\chi_U, P') \approx \int_U dx \approx 0,$$

luego  $g[Q]$  es nulo. ■

De aquí obtenemos una condición sencilla:

**Teorema 7.18** Si  $g : D \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  es una aplicación de clase  $C^1$  en un abierto  $D$  y el conjunto  $S = \{x \in D \mid g(x) = 0\}$  es regular, entonces todo subconjunto compacto de  $S$  es nulo.

DEMOSTRACIÓN: Si  $p \in S$ , (reordenando las variables si es necesario) el teorema de la función implícita nos da una función  $x_d : U \subset \mathbb{R}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1$ , donde  $U$  es abierto, y un abierto  $V \subset \mathbb{R}^d$  tal que  $p \in V$  (podemos suponer que  $V \subset D$ ), de modo que

$$V \cap S = \{x \in \mathbb{R}^d \mid (x_1, \dots, x_{d-1}) \in U, x_d = x_d(x_1, \dots, x_{d-1})\},$$

es decir, que  $V \cap S$  es la gráfica de la función  $x_d$ . Sea  $h : U \rightarrow \mathbb{R}^d$  la función dada por

$$h(x_1, \dots, x_{d-1}) = (x_1, \dots, x_{d-1}, x_d(x_1, \dots, x_{d-1})).$$

Claramente entonces,  $h$  es una función de clase  $C^1$  y podemos verla también como función continua  $h : U \rightarrow V \cap S$ . Es biyectiva, y su inversa es la

proyección sobre las primeras  $d - 1$  componentes, luego la inversa también es continua. Sea  $p' = (p_1, \dots, p_{d-1}) \in U$ . Podemos tomar un cubo tal que

$$p' \in \overset{\circ}{Q} \subset Q \subset U,$$

de modo que

$$p \in h[\overset{\circ}{Q}] \subset h[Q] \subset S.$$

El conjunto  $V_p = h[\overset{\circ}{Q}]$  es abierto en  $S$  (porque la inversa de  $h$  es continua), y es nulo porque está contenido en  $h[Q]$ , que es nulo por el teorema anterior. Además  $p \in V_p$ .

Consideremos ahora un subconjunto compacto  $C \subset S$  y sea  $F \subset C$  un subconjunto finito que contenga a todos sus puntos estándar. Entonces

$$C = \bigcup_{p \in F} (C \cap V_p),$$

ya que si  $x \in C$ , por la compacidad sabemos que existe  $p = *x \in C$ , luego  $p \in F$  y, como  $V_p$  es abierto y  $x \approx p \in V_p$ , ha de ser  $x \in C \cap V_p$ .

Esto prueba que  $C$  es nulo, pues lo hemos expresado como unión de un número finito de conjuntos nulos. ■

**Ejemplo** *Las esferas son conjuntos nulos, luego las bolas abiertas y cerradas son conjuntos integrables.*

En efecto, una esfera en  $\mathbb{R}^d$  es de la forma

$$S_r(p) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid (x_1 - p_1)^2 + \dots + (x_d - p_d)^2 = r^2\},$$

y es un conjunto regular, pues el gradiente de la función es

$$(2(x_1 - p_1), \dots, 2(x_d - p_d)),$$

que no es idénticamente nulo excepto en el punto  $x = p \notin S_r(p)$ . Como, además, las esferas son compactas, son nulas por el teorema anterior, y las bolas son integrables porque sus fronteras son esferas. ■

Observemos que hemos enunciado el teorema anterior para conjuntos definidos por una sola ecuación. Si un conjunto está definido por varias ecuaciones, estará contenido en los conjuntos que resultan de eliminarlas todas menos una, y basta probar que uno cualquiera de ellos es nulo, lo que a menudo puede hacerse con el teorema anterior.

## 7.3 Cálculo de integrales

El resultado fundamental para calcular explícitamente integrales de funciones de varias variables es el teorema siguiente, que lo reduce al cálculo de integrales sucesivas de funciones de una variable. Para enunciarlo en general

necesitamos contemplar una situación que no se presentará habitualmente en la práctica, y es la necesidad de integrar una función que puede no estar definida en un conjunto nulo.

Observemos que si  $D \subset \mathbb{R}^d$  es un dominio de integración,  $E \subset D$  es un conjunto nulo y  $f : D \setminus E \rightarrow \mathbb{R}$  es una función integrable en  $D \setminus E$ , entonces cualquier extensión de  $f$  a  $D$  será integrable en  $D$  (porque  $f|_E$  será siempre integrable con integral nula), y además

$$\int_D f(x) dx = \int_{D \setminus E} f(x) dx.$$

Esto significa que podemos definir la integral de  $f$  en  $D$  como la integral de cualquier extensión de  $f$  a  $D$ , sin que importe cómo la definimos en  $E$ . En otros términos: podemos hablar de la integral sobre  $D$  de una función definida en  $D$  salvo a lo sumo en un conjunto nulo de puntos.

**Teorema 7.19** Sean  $Q \subset \mathbb{R}^d$ ,  $Q' \subset \mathbb{R}^{d'}$  dos cubos y  $f : Q \times Q' \rightarrow \mathbb{R}$  una función integrable. Para cada  $x \in Q$ , llamemos  $f_x : Q' \rightarrow \mathbb{R}$  a la función dada por  $f_x(y) = f(x, y)$ . Entonces, el conjunto

$$E = \{x \in Q \mid f_x \text{ no es integrable en } Q'\}$$

es nulo, la función

$$g(x) = \int_{Q'} f_x(y) dy$$

es integrable en  $Q$  y

$$\int_{Q \times Q'} f(x, y) dx dy = \int_Q \left( \int_{Q'} f_x(y) dy \right) dx.$$

DEMOSTRACIÓN: Observemos ante todo que, de acuerdo con el enunciado, la función  $g$  no está definida sobre el conjunto  $E$ . De acuerdo con la observación previa al teorema, podemos considerarla definida en  $E$  con el valor 0, aunque esto es irrelevante.

Es claro que sendas particiones infinitesimales  $P$  y  $P'$  de  $Q$  y  $Q'$  determinan una partición infinitesimal  $P \times P'$  de  $Q \times Q'$ . Si  $i \in I_P$ ,  $j \in I_{P'}$  y  $c_i \in Q_i$ , tenemos que

$$m_{ij}(f) \leq m_j(f_{c_i}) \leq M_j(f_{c_i}) \leq M_{ij}(f).$$

Por lo tanto, fijado  $i$ ,

$$\sum_{j \in I_{P'}} m_{ij}(f) \Delta y_j \leq s(f_{c_i}, P') \leq S(f_{c_i}, P') \leq \sum_{j \in I_{P'}} M_{ij}(f) \Delta y_j,$$

luego

$$\sum_{i,j} m_{ij}(f) \Delta x_i \Delta y_j \leq \sum_i s(f_{c_i}, P') \Delta x_i \leq \sum_i S(f_{c_i}, P') \Delta x_i \leq \sum_{i,j} M_{ij}(f) \Delta x_i \Delta y_j.$$

Como  $f$  es integrable, esto implica que

$$\sum_{i \in I_P} (S(f_{c_i}, P') - s(f_{c_i}, P')) \Delta x_i \approx 0.$$

Llamemos  $I_0 = \{i \in I_P \mid E \cap Q_i \neq \emptyset\}$ . Para cada  $i \in I_0$ , tomemos  $c_i \in E \cap Q_i$ . Sea  $k = \min_{i \in I_0} (S(f_{c_i}, P') - s(f_{c_i}, P')) \not\approx 0$ . Entonces

$$0 \leq k \sum_{i \in I_0} \Delta x_i \leq \sum_{i \in I_0} (S(f_{c_i}, P') - s(f_{c_i}, P')) \Delta x_i \approx 0,$$

luego

$$S(\chi_E, P) = \sum_{i \in I_0} \Delta x_i \approx 0,$$

lo que prueba que  $E$  es nulo. Por otra parte,

$$\sum_{i \in I_0, j \in I_{P'}} \Delta x_i \Delta y_j = \sum_{i \in I_0} \Delta x_i \sum_{j \in I_{P'}} \Delta y_j = v(Q') \sum_{i \in I_0} \Delta x_i \approx 0,$$

con lo que  $E \times Q'$  también es nulo.

Podemos modificar  $f$  en  $E \times Q'$ , asignándole el valor 0, sin que ello modifique su integrabilidad ni el valor de la integral. Equivalentemente, podemos suponer que  $E = \emptyset$ . Entonces,

$$\sum_{j \in I_{P'}} m_{ij}(f) \Delta y_j \leq \int_{Q'} f_{c_i}(y) dy \leq \sum_{j \in I_{P'}} M_{ij}(f) \Delta y_j.$$

Como esto vale para todo  $c_i \in Q_i$ , resulta que

$$\sum_{j \in I_{P'}} m_{ij}(f) \Delta y_j \leq m_i(g) \leq M_i(g) \leq \sum_{j \in I_{P'}} M_{ij}(f) \Delta y_j,$$

luego

$$\sum_{i,j} m_{ij}(f) \Delta x_i \Delta y_j \leq s(g, P) \leq S(g, P) \leq \sum_{i,j} M_{ij}(f) \Delta x_i \Delta y_j.$$

La integrabilidad de  $f$  implica entonces que  $g$  también es integrable, así como la igualdad de las integrales del enunciado. ■

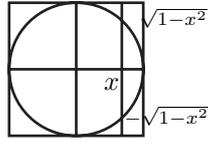
**Ejemplo** Vamos a calcular el volumen de un cilindro cortado en bisel por un plano. Supongamos, concretamente, que la base es un círculo de radio 1 y que la máxima altura es también igual a 1. Más concretamente, podemos tomar como base el círculo unitario



$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\},$$

de modo que la altura en cada punto  $(x, y)$  es  $f(x, y) = (x + 1)/2$ . Por consiguiente, el volumen que queremos calcular es

$$\int_C \frac{x+1}{2} dx dy.$$



Consideramos  $C \subset [-1, 1]^2$ . Para cada  $x \in [-1, 1]$ , tenemos que

$$f_x(y) = \begin{cases} \frac{x+1}{2} & \text{si } -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \int_C \frac{x+1}{2} dx dy &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (x+1) dy dx \\ \frac{1}{2} \int_{-1}^1 [xy + y]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int_{-1}^1 (x\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-x^2}) dx \\ &= \left[ -\frac{1}{2}(1-x^2)^{3/2} \right]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \pi/2, \end{aligned}$$

ya que la última integral está calculada en el ejemplo de la página 145. ■

Conviene destacar un caso particular del teorema 7.19:

**Teorema 7.20** Sea  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  un intervalo y  $Q \subset \mathbb{R}^{d-1}$  un cubo. Consideremos un dominio de integración  $D \subset [a, b] \times Q \subset \mathbb{R}^d$  y, para cada  $x \in [a, b]$ , sea  $D_x = \{y \in Q \mid (x, y) \in D\}$ . Entonces, el conjunto

$$E = \{x \in [a, b] \mid Q_x \text{ no es un dominio de integración}\}$$

es nulo y  $v(D) = \int_a^b v(Q_x) dx$ .

La prueba consiste simplemente en aplicar 7.19 a la función  $\chi_D$ .

**Ejercicio:** Deducir del teorema anterior la fórmula para el volumen de un sólido de revolución que dedujimos en la página 150.

El teorema siguiente es un caso particular de 7.19, excepto por que proporciona un criterio de integrabilidad:

**Teorema 7.21** Sean  $f_i : D_i \subset \mathbb{R}^{d_i} \rightarrow \mathbb{R}$ , para  $i = 1, 2$  funciones integrables sobre dos dominios de integración  $D_1$  y  $D_2$ . Entonces  $D_1 \times D_2$  es un dominio de integración, la función  $f_1 \otimes f_2 : D_1 \times D_2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$(f_1 \otimes f_2)(x_1, x_2) = f_1(x_1)f_2(x_2)$$

es integrable en  $D_1 \times D_2$  y

$$\int_{D_1 \times D_2} (f_1 \otimes f_2)(x) dx = \left( \int_{D_1} f_1(x) dx \right) \left( \int_{D_2} f_2(x) dx \right).$$

DEMOSTRACIÓN: Consideremos primero el caso en que  $D_1$  y  $D_2$  son cubos, de modo que  $D_1 \times D_2$  es también un cubo y, por lo tanto, un dominio de integración.

Observemos que si  $Q_1 \subset D_1$  y  $Q_2 \subset D_2$  son cubos y  $M_i$  es el supremo de  $f_i$  en  $Q_i$ , entonces el supremo de  $f_1 \otimes f_2$  en  $Q_1 \times Q_2$  es  $M_1 M_2$ . En efecto, podemos suponer que todos los datos son estándar y, entonces, si  $(x_1, x_2) \in Q_1 \times Q_2$ , tenemos que  $f_i(x_i) \leq M_i$ , luego  $(f_1 \otimes f_2)(x_1, x_2) = f_1(x_1)f_2(x_2) \leq M_1 M_2$ .

Por otra parte, existe  $x_i \in Q_i$  tal que  $f_i(x_i) \approx M_i$ , luego  $(f_1 \otimes f_2)(x_1, x_2) = f_1(x_1)f_2(x_2) \approx M_1 M_2$ . Esto prueba que  $M_1 M_2$  es el supremo de  $f_1 \otimes f_2$ . Lo mismo es válido cambiando supremos por ínfimos.

Si  $P_i$  es una partición infinitesimal de  $D_i$ , entonces podemos formar una partición infinitesimal  $P_1 \times P_2$  de  $D_1 \times D_2$ , de modo que, por lo que acabamos de probar,

$$m_{ij}(f_1 \otimes f_2) = m_i(f_1)m_j(f_2), \quad M_{ij}(f_1 \otimes f_2) = M_i(f_1)M_j(f_2).$$

Por consiguiente,

$$s(f_1 \otimes f_2, P_1 \times P_2) = \sum_{i,j} m_i(f_1)m_j(f_2)\Delta x_{1,i}\Delta x_{2,j} = s(f_1, P_1)s(f_2, P_2),$$

e igualmente  $S(f_1 \otimes f_2, P_1 \times P_2) = S(f_1, P_1)S(f_2, P_2)$ . La integrabilidad de las funciones  $f_i$  equivale a que  $s(f_i, P_i) \approx S(f_i, P_i)$ , de donde se sigue que

$$s(f_1 \otimes f_2, P_1 \times P_2) \approx S(f_1 \otimes f_2, P_1 \times P_2),$$

y, por consiguiente,  $f_1 \otimes f_2$  es integrable. La fórmula para la integral es inmediata.

Consideremos ahora el caso en que  $D_1$  y  $D_2$  son dominios de integración arbitrarios. Tomemos cubos  $D_i \subset Q_i$ . Basta observar que

$$\chi_{D_1 \times D_2} = \chi_{D_1} \otimes \chi_{D_2},$$

con lo que la parte ya probada nos da que  $D_1 \times D_2$  es un dominio de integración. Similarmente, la extensión de  $f_1 \otimes f_2$  a  $Q_1 \times Q_2$  con el valor 0 fuera de  $D_1 \times D_2$  es el producto de las extensiones correspondientes, luego es integrable por la parte ya probada. ■

En particular, el teorema anterior implica que si  $D_1$  y  $D_2$  son dominios de integración, entonces  $v(D_1 \times D_2) = v(D_1)v(D_2)$ .

## 7.4 El teorema de la media

Demostramos aquí una propiedad de la integral de Riemann que necesitaremos más adelante. En primer lugar, un hecho elemental:

**Teorema 7.22** Sea  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua sobre un dominio de integración  $D$ . Si  $f \geq 0$  y  $\int_D f(x) dx = 0$ , entonces  $f = 0$ .

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer todos los datos estándar. Supongamos que  $f \neq 0$ , es decir, que existe un punto (estándar)  $x_0 \in D$  tal que  $f(x_0) > 0$ . Si  $P$  es una partición infinitesimal de un cubo que contenga a  $D$ , entonces  $x_0$  pertenecerá a uno de los cubos  $Q_i$  determinados por la partición y, para cada  $x \in Q_i$ , tenemos que  $f(x) \approx f(x_0) > 0$ , luego  $m_i > 0$ . Por lo tanto,

$$0 < m_i \Delta x_i \leq s(f, P) \leq \int_D f(x) dx,$$

contradicción. ■

**Teorema 7.23 (Teorema de la media)** *Sea  $f : D \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  una función integrable sobre un dominio de integración no nulo  $D$ . Sean  $m$  y  $M$  el ínfimo y el supremo de  $f$  en  $D$ , respectivamente. Entonces*

$$m \leq \frac{\int_D f(x) dx}{v(D)} \leq M.$$

*El cociente se llama valor medio de  $f$  en  $D$ . Si  $D$  es conexo y  $f$  es continua en  $D$ , entonces existe un  $x \in D$  tal que*

$$\frac{\int_D f(x) dx}{v(D)} = f(x).$$

DEMOSTRACIÓN: Como  $m \leq f(x) \leq M$ , para todo  $x \in D$ , es claro que

$$m v(D) = \int_D m dx \leq \int_D f(x) dx \leq \int_D M dx = M v(D),$$

de donde se sigue la primera parte del enunciado. Bajo las hipótesis adicionales de la segunda parte, tenemos que  $]m, M[ \subset f[D] \subset [m, M]$ . El único caso en el que la conclusión no está clara es si el valor medio de  $f$  coincide con  $m$  o con  $M$ . Supongamos que coincide con  $M$ , es decir, que

$$\int_D f(x) dx = M \int_D dx.$$

Entonces  $\int_D (M - f(x)) dx = 0$  y el integrando  $M - f \geq 0$  es una función continua. Por el teorema anterior,  $f$  es constante igual a  $M$ , luego cualquier  $x \in D$  cumple el teorema. Si el valor medio es  $m$  se razona análogamente. ■

Demostramos ahora que el teorema de la media, junto con otras propiedades elementales, caracteriza las integrales de una función continua:

**Teorema 7.24** *Sea  $D_0 \subset \mathbb{R}^d$  un dominio de integración, sea  $f : D_0 \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y acotada en  $D_0$  y sea  $I$  una función con valores en  $\mathbb{R}$  definida sobre el conjunto de todos los dominios de integración  $D \subset D_0$  que cumpla las propiedades siguientes:*

- a) *Si  $D \cap D'$  es nulo, entonces  $I(D \cup D') = I(D) + I(D')$ .*

b) Existe una constante  $M$  tal que, para todo dominio de integración  $D \subset D_0$ , se cumple que

$$|I(D)| \leq Mv(D)$$

c) Si  $Q \subset D_0$  es un cubo infinitesimal, existe un  $x \in Q$  tal que

$$\frac{I(Q)}{v(Q)} \approx f(x).$$

Entonces, para todo dominio de integración  $D \subset D_0$ , se cumple que

$$I(D) = \int_D f(x) dx.$$

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer que todos los datos son estándar. Tomemos un cubo  $Q$  que contenga a  $D_0$  y tomemos una partición infinitesimal  $P$  de  $Q$ . Para cada cubo infinitesimal  $Q_i \subset D$ , tenemos que existe un  $x_i \in Q_i$  tal que

$$\frac{I(Q_i)}{\Delta x_i} \approx f(x_i).$$

Por consiguiente, para cualquier  $\epsilon > 0$  estándar,

$$I(Q_i) - \epsilon \Delta x_i < f(x_i) \Delta x_i < I(Q_i) + \Delta x_i.$$

Sumando para todos los cubos contenidos en  $D$ , obtenemos que

$$I(K) - \epsilon \sum_i \Delta x_i < \sum_i f(x_i) \Delta x_i < I(K) + \epsilon \sum_i \Delta x_i,$$

donde  $K \subset Q_i$  es la unión de los cubos  $Q_i \subset D$ . Ahora observamos que  $D \setminus K$  está contenido en la unión de los cubos tales que  $Q_i \cap \partial D \neq \emptyset$ , pero esta unión tiene volumen infinitesimal, porque  $\partial D$  es nulo, luego

$$I(D \setminus K) \leq Mv(D \setminus K) \approx 0,$$

luego  $I(D) = I(K) + I(D \setminus K) \approx I(K)$ . Teniendo en cuenta también 7.7, las desigualdades anteriores nos dan que

$$I(D) - \epsilon v(D) \leq \int_D f(x) dx \leq I(D) + \epsilon v(D),$$

luego

$$\left| I(D) - \int_D f(x) dx \right| \leq \epsilon v(D) \leq \epsilon v(D_0).$$

Como esto es válido para todo  $\epsilon > 0$  estándar, también vale si  $\epsilon \approx 0$ , y entonces implica que

$$I(D) = \int_D f(x) dx.$$

■

## 7.5 El teorema de cambio de variable

En esta sección demostraremos la versión para funciones de varias variables del teorema 4.15. Primeramente necesitamos algunas propiedades sencillas de los volúmenes. La primera es que son invariantes por traslaciones:

**Teorema 7.25** Sea  $v \in \mathbb{R}^d$  y consideremos la traslación  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  dada por  $f(x) = v + x$ . Si  $D \subset \mathbb{R}^d$  es un dominio de integración, también lo es  $f[D]$ , y además  $v(f[D]) = v(D)$ .

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer que todos los datos son estándar. Tomemos un cubo  $D \subset Q$ . Entonces  $f[Q]$  es un cubo que contiene a  $f[D]$ . Es claro que una partición infinitesimal  $P$  de  $Q$  se traslada a una partición infinitesimal  $P' = f[P]$  de  $f[Q]$ , con el mismo conjunto de multiíndices  $I_P = I_{P'}$ . Además, los volúmenes de los cubos correspondientes son iguales:

$$\Delta x'_i = (v_1 + x_{i_1,1} - v_1 - x_{i_1-1,1}) \cdots (v_d + x_{i_d,d} - v_d - x_{i_d-1,d}) = \Delta x_i.$$

Por último, un cubo  $Q_i$  corta a  $D$  (o está contenido en  $D$ ) si y sólo si  $f[Q_i] = f[Q]_i$  corta a  $f[D]$  (o está contenido en  $f[D]$ ). Esto quiere decir que  $m_i(\chi_D) = m_i(\chi_{f[D]})$ ,  $M_i(\chi_D) = M_i(\chi_{f[D]})$ . Por lo tanto,

$$s(f[\chi_D], f[P]) = \sum_i m_i(\chi_{f[D]}) \Delta x'_i = \sum_i m_i(\chi_D) \Delta x_i = s(\chi_D, P).$$

Lo mismo sucede con las sumas superiores, luego  $\chi_D$  es integrable si y sólo si lo es  $\chi_{f[D]}$ , y en tal caso las integrales coinciden. ■

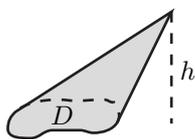
Ahora mostramos el efecto sobre el volumen de las homotecias:

**Teorema 7.26** Sea  $r > 0$  y consideremos la homotecia  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  dada por  $f(x) = rx$ . Si  $D \subset \mathbb{R}^d$  es un dominio de integración, también lo es  $rD = f[D]$ , y además  $v(rD) = r^d v(D)$ .

DEMOSTRACIÓN: La prueba es idéntica a la del teorema anterior, salvo que ahora no es cierto que los cubos de la partición  $P$  tengan el mismo volumen que los de  $P'$ , sino que

$$\Delta x'_i = (rx_{i_1,1} - rx_{i_1-1,1}) \cdots (rx_{i_d,d} - rx_{i_d-1,d}) = r^d \Delta x_i.$$

■



**Ejemplo** Consideremos un dominio de integración arbitrario  $D \subset \mathbb{R}^2$  y sea  $C$  un cono arbitrario de base  $D$  y altura  $h$ , tal y como el que muestra la figura. Vamos a probar que su volumen es  $v(D) = \frac{1}{3}v(D)h$ .

Por comodidad podemos situarlo de forma que el vértice sea el punto  $(0, 0, 0)$  y la base esté en el plano  $z = h$ . De este modo, si  $0 < z < h$ , es fácil ver que

$(x, y) \in C_z$  si y sólo si  $(x, y, z) \in C$  si y sólo si  $(hx/z, hy/z, h) \in C$ , si y sólo si  $(hx/z, hy/z) \in D$ , si y sólo si  $(x, y) \in (z/h)D$ .

Así pues,  $C_z = (z/h)D$ , y el teorema anterior nos da que

$$v(C_z) = \frac{z^2}{h^2}v(D).$$

Aplicando 7.20 concluimos que

$$\begin{aligned} v(C) &= \int_0^h v(C_z) dz = \int_0^h \frac{z^2}{h^2}v(D) dz = \frac{v(D)}{h^2} \int_0^h z^2 dz \\ &= \frac{v(D)}{h^2} \frac{h^3}{3} = \frac{1}{3}f(D)h. \end{aligned}$$

■

Consideremos ahora una aplicación lineal biyectiva  $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ . Observemos que si  $Q \subset \mathbb{R}^d$  es un cubo, entonces  $\phi[Q]$  es un dominio de integración. En efecto,  $\phi$  es un homeomorfismo, luego  $\partial\phi[Q] = \phi[\partial Q]$ . La frontera de  $Q$  es la unión de  $2d$  cubos de dimensión  $d-1$  o, con más precisión, es la unión de las imágenes de  $2d$  cubos en  $\mathbb{R}^{d-1}$  por aplicaciones de clase  $C^1$  (composiciones de traslaciones y aplicaciones lineales). Por consiguiente, la frontera de  $\phi[Q]$  también es unión de las imágenes de  $2d$  cubos en  $\mathbb{R}^{d-1}$  por aplicaciones de clase  $C^1$  (las que recorren la frontera de  $Q$  compuestas con  $\phi$ ), luego  $\partial\phi[Q]$  es nulo por el teorema 7.17.

Llamemos  $V$  al volumen de la imagen por  $\phi$  del cubo unitario  $Q_1 = [0, 1]^d$  y sea  $Q = [a_1, a_1 + r] \times \cdots \times [a_d, a_d + r]$  un cubo arbitrario de arista  $r > 0$ . Vamos a calcular el volumen de  $\phi[Q]$ . Para ello observamos que, si  $A$  es la matriz de  $\phi$ , entonces

$$\phi(x) = xA = r((r^{-1}(x-a))A) + aA.$$

Esto significa que  $\phi$  se puede expresar como composición de las aplicaciones siguientes:

- la traslación  $x \mapsto x - a$  (que transforma  $Q$  en el cubo  $[0, r]^d$ ),
- la homotecia  $x \mapsto r^{-1}x$  (que transforma  $[0, r]^d$  en  $Q_1$ ),
- $\phi$  (que transforma  $Q_1$  en  $\phi[Q_1]$ , de volumen  $V$ ),
- la homotecia  $x \mapsto rx$  (que transforma  $\phi[Q_1]$  en un dominio de integración de volumen  $r^dV$ ),
- la traslación  $x \mapsto x + aA$  (que transforma el dominio anterior en  $\phi[Q]$  sin alterar el volumen).

Así pues,  $v(\phi[Q]) = r^dV = Vv(Q)$ .

Ahora vamos a probar que si  $D \subset \mathbb{R}^d$  es un dominio de integración, entonces  $\phi[D]$  también lo es, y  $v(\phi[D]) = Vv(D)$ . Lo tenemos probado cuando  $D$  es un cubo de arista  $r$ .

Fijemos un cubo que contenga a  $D$  de la forma  $Q = [a, b]^d$ . Así una partición de  $[a, b]$  en intervalos infinitesimales de la misma longitud determina una partición infinitesimal  $P$  de  $Q$  cuyos cubos  $Q_i$  tienen todos una misma arista  $r$ , por lo que sabemos que  $\phi[Q_i]$  tiene volumen  $Vr^d$ .

Llamamos  $I$  al conjunto de los multiíndices  $i \in I_P$  tales que  $Q_i \cap \partial D \neq \emptyset$ . Como  $\partial D$  es nulo, sabemos que el conjunto

$$U = \bigcup_{i \in I} Q_i$$

tiene volumen

$$v(U) = \sum_{i \in I} \Delta x_i \approx 0.$$

Como  $\phi$  es un homeomorfismo,

$$\partial\phi[D] = \phi[\partial D] \subset \phi[U] = \bigcup_{i \in I} \phi[Q_i],$$

y

$$v(\phi[U]) = \sum_{i \in I} v(\phi[Q_i]) = V \sum_{i \in I} \Delta x_i \approx 0.$$

Por el teorema 7.15, concluimos que la frontera  $\partial\phi[D]$  es nula, luego  $\phi[D]$  es un dominio de integración.

Sea  $J_1$  el conjunto de los multiíndices tales que  $Q_i \subset D$  y sea  $J_2$  el conjunto de los multiíndices tales que  $Q_i \cap D \neq \emptyset$ . De este modo,

$$\bigcup_{i \in J_1} Q_i \subset D \subset \bigcup_{i \in J_2} Q_i,$$

luego

$$\bigcup_{i \in J_1} \phi[Q_i] \subset \phi[D] \subset \bigcup_{i \in J_2} \phi[Q_i].$$

Ahora bien,

$$v\left(\bigcup_{i \in J_1} Q_i\right) = s(\chi_D, P) \approx S(\chi_D, P) = v\left(\bigcup_{i \in J_2} Q_i\right)$$

y

$$v\left(\bigcup_{i \in J_1} \phi[Q_i]\right) = Vs(\chi_D, P) \approx VS(\chi_D, P) = v\left(\bigcup_{i \in J_2} \phi[Q_i]\right)$$

$$v\left(\bigcup_{i \in J_1} \phi[Q_i]\right) \leq v(\phi[D]) \leq v\left(\bigcup_{i \in J_2} \phi[Q_i]\right),$$

de donde se concluye que

$$v(\phi[D]) \approx Vs(\chi_D, P) = Vv(D),$$

luego  $v(\phi[D]) = Vv(D)$ .

El teorema siguiente contiene lo que acabamos de demostrar y un poco más:

**Teorema 7.27** Sea  $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  una aplicación lineal de determinante  $\Delta$ . Para todo dominio de integración  $D \subset \mathbb{R}^d$ , se cumple que  $\phi[D]$  es un dominio de integración, y  $v(\phi[D]) = |\Delta|v(D)$ .

DEMOSTRACIÓN: Recordemos que el determinante de una aplicación lineal es el determinante de su matriz en cualquier base. Si  $\phi$  no es biyectiva, el teorema es trivial, ya que, por una parte,  $\Delta = 0$  y, por otra parte,  $\phi[D]$  está contenido en un subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^n$  de dimensión menor que  $d$ , luego está contenido en un conjunto de la forma

$$S = \{x \in \mathbb{R}^d \mid a_1x_1 + \cdots + a_dx_d = 0\},$$

luego  $v(\phi[D]) = 0$  por el teorema 7.18.

Supongamos ahora que  $\phi$  es biyectiva. Ya tenemos probado el teorema salvo que falta por ver que la constante que relaciona los dos volúmenes es precisamente  $|\Delta|$ . (Lo hemos probado con la constante  $V$  igual al volumen de la imagen del cubo unitario.)

El álgebra lineal demuestra que toda aplicación lineal biyectiva se puede expresar como composición de un número finito de aplicaciones lineales  $g$  de uno de los tipos siguientes:

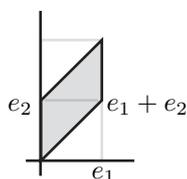
- $g$  permuta los vectores  $e_1, \dots, e_d$  de la base canónica de  $\mathbb{R}^d$ .
- $g(e_1) = re_1$  y  $g(e_i) = e_i$  para  $i > 1$ , donde  $r \in \mathbb{R}$  es no nulo.
- $g(e_1) = e_1 + e_2$  y  $g(e_i) = e_i$ , para  $i > 1$ .

Por comodidad para el lector damos la prueba en un apéndice al final del capítulo. Teniendo en cuenta que el determinante de una composición de aplicaciones es el producto de los determinantes, basta probar el teorema en el caso en que  $f$  sea de uno de los tres tipos anteriores. Más concretamente, si  $Q = [0, 1]^d$ , basta probar que, si  $f$  es de uno de los tres tipos anteriores, entonces  $v[\phi[Q]] = |\Delta|$ .

En el primer caso es fácil ver que  $|\Delta| = 1$  y que  $\phi[Q] = Q$ , luego, ciertamente,  $v(\phi[Q]) = v(Q) = 1 = |\Delta|$ . En el segundo caso,  $\Delta = r$  y

$$\phi[Q] = \begin{cases} [0, r] \times [0, 1]^{d-1} & \text{si } r > 0, \\ [r, 0] \times [0, 1]^{d-1} & \text{si } r < 0. \end{cases}$$

Por lo tanto,  $v(\phi[Q]) = |r| = |\Delta|$ .



En el tercer caso  $\Delta = 1$  y

$$\phi[Q] = D \times [0, 1]^{d-2},$$

donde  $D$  es el dominio de integración indicado en la figura. Es fácil ver que  $v(D) = 1$ , bien por integración, bien observando que  $D$  se descompone en unión de dos triángulos y que, trasladando el superior (lo cual no modifica el área) obtenemos el cuadrado  $[0, 1]^2$ , que tiene área igual a 1. El teorema 7.21 implica entonces que  $v(\phi[Q]) = 1 = |\Delta|$ . ■

El teorema anterior nos da una interpretación geométrica del determinante de una aplicación lineal (o, mejor dicho, de su valor absoluto): la aplicación multiplica por  $|\Delta|$  el volumen de cualquier dominio de integración. Ahora vamos a extender este resultado a aplicaciones no necesariamente lineales. La clave para ello es la posibilidad de aproximar una aplicación por su diferencial.

En el teorema siguiente consideramos un homeomorfismo  $f : U \rightarrow V$  de clase  $C^1$  entre dos abiertos de  $\mathbb{R}^d$ . Si  $p \in U$  es un punto estándar, podemos considerar la diferencial  $d_p f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ , que es una aplicación lineal que aproxima a  $f$  cerca de  $p$ . Si  $Q \subset U$  es un cubo, entonces  $f[Q]$  y  $d_p f[Q]$  son “cubos deformados”. Lo que vamos a probar es que si  $Q$  es infinitesimal y está infinitamente cerca de  $p$ , entonces  $f[Q]$  y  $d_p f[Q]$  son muy parecidos, no ya en el sentido obvio de que ambos son infinitesimales, sino, más aún, porque si les aplicamos una homotecia infinita para volverlos apreciables, la diferencia entre ambos sigue siendo inapreciable y, a su vez, esto implica que los volúmenes de estas ampliaciones son indistinguibles.

En realidad, para que esto tenga sentido necesitamos suponer que todas las aristas de  $Q$  tienen la misma longitud, ya que, en otro caso, una homotecia que volviera apreciable una de ellas, podría hacer infinita, o dejar infinitesimal a otra.

**Teorema 7.28** *Sea  $f : U \rightarrow V$  un homeomorfismo estándar de clase  $C^1$  entre dos abiertos  $U$  y  $V$  de  $\mathbb{R}^d$ . Sea  $p \in U$  un punto estándar, sea*

$$Q = [a_1, a_1 + r] \times \cdots \times [a_d, a_d + r] \subset U$$

*un cubo de arista infinitesimal  $r$  tal que  $a \approx p$ , sea  $\phi = d_p f$  y supongamos además que  $\phi$  es biyectiva. Entonces,*

$$\frac{v(f[Q])}{v(\phi[Q])} \approx 1.$$

DEMOSTRACIÓN: Ante todo, observemos que  $f[Q]$  es un dominio de integración. En efecto,  $\partial Q$  es la unión de  $2d$  imágenes de cubos de  $\mathbb{R}^{d-1}$  por aplicaciones de clase  $C^1$ , luego lo mismo vale para  $\partial f[Q] = f[\partial Q]$ . El teorema 7.17 nos da entonces que la frontera  $\partial f[Q]$  es nula, luego  $f[Q]$  es un dominio de integración. Consideremos la aplicación

$$\bar{f}(x) = \frac{f(a + rx) - f(a)}{r}.$$

Está definida en un abierto que contiene al cubo unitario  $Q_1 = [0, 1]^d$ . Cuando  $x$  recorre  $Q_1$ , tenemos que  $a + rx$  recorre el cubo  $Q$ , luego  $\bar{f}[Q_1]$  resulta de aplicar a  $f[Q]$  la traslación  $x \mapsto x - f(a)$  y luego la homotecia  $x \mapsto x/r$ . Teniendo en cuenta los teoremas 7.25 y 7.26, concluimos que

$$v(\bar{f}[Q_1]) = r^d v(f[Q]).$$

Lo mismo es válido para  $\phi$  y la aplicación

$$\bar{\phi}(x) = \frac{\phi(a + rx) - \phi(a)}{r},$$

pero, como  $\phi$  es lineal, resulta que  $\bar{\phi} = \phi$ . Así pues,

$$v(\phi[Q_1]) = r^d v(\phi[Q]).$$

Por consiguiente, el teorema se reduce a probar que

$$\frac{v(\bar{f}[Q_1])}{v(\phi[Q_1])} \approx 1.$$

Como  $v(\phi[Q_1]) = |\Delta| \neq 0$ , donde  $\Delta$  es el determinante de  $\phi$  (que es estándar, porque  $\phi$  lo es), la relación anterior es equivalente a  $v(\bar{f}[Q_1]) \approx v(\phi[Q_1])$ .

En términos de la discusión previa al teorema, tenemos que  $\bar{f}[Q_1]$  y  $\phi[Q_1]$  son el resultado de aplicar a  $f[Q]$  y  $\phi[Q]$  una homotecia de centro  $a$  para hacerlos apreciables y una traslación para que ambos tengan un vértice en el origen. Ahora vamos a probar que estas ampliaciones son indistinguibles:

Como  $f$  es de clase  $C^1$ , es estrictamente diferenciable en  $p$ . Si  $x \in Q_1$ , entonces  $rx \approx 0$ , y la definición de diferenciabilidad estricta nos da que

$$\frac{f(a+rx) - f(a) - \phi(rx)}{r\|x\|} \approx 0.$$

Equivalentemente:

$$\frac{\bar{f}(x)}{\|x\|} \approx \frac{\phi(x)}{\|x\|}.$$

Esto implica que  $\bar{f}(x) \approx \phi(x)$ . En otras palabras: cada punto de  $\bar{f}[Q_1]$  está infinitamente cerca de un punto de  $\phi[Q_1]$ , y viceversa.

Ahora podemos hacer una simplificación: como  $\phi^{-1}$  es continua en  $^* \phi(x)$ , la aproximación que hemos obtenido equivale a que  $\phi^{-1}(\bar{f}(x)) \approx x$ . Por otra parte, en virtud del teorema anterior, la relación  $v(\bar{f}[Q_1]) \approx v(\phi[Q_1])$  que queremos probar equivale a  $v(\phi^{-1}[\bar{f}[Q_1]]) \approx v(Q_1) = 1$ .

Por lo tanto, si llamamos  $g = \bar{f} \circ \phi^{-1}$ , tenemos que  $g$  es un homeomorfismo definido sobre un abierto que contiene a  $Q_1$  en otro abierto que contiene a  $K = g[Q_1]$ , hemos probado que  $g(x) \approx x$  para todo  $x \in Q_1$ , y queremos probar que  $v(K) \approx 1$ .

Para ello vemos que si  $\epsilon > 0$  es estándar, entonces  $K \subset Q_\epsilon^+ = ]-\epsilon, 1 + \epsilon[^d$ , ya que todo elemento de  $K$  es de la forma  $g(x) \approx x \in Q_1$ , y si no estuviera en  $Q_\epsilon^+$  estaría a una distancia  $> \epsilon$  de cualquier punto de  $Q_1$ . Por lo tanto  $v(K) \leq v(Q_\epsilon^+) = (1 + 2\epsilon)^d$ , de donde se sigue fácilmente que  $^*v(K) \leq 1$ .

La otra desigualdad será inmediata también si demostramos la inclusión  $Q_\epsilon^- = [\epsilon, 1 - \epsilon]^d \subset K$ , pues entonces  $(1 - 2\epsilon)^d \leq v(K)$  y esto implica que  $^*v(K) \geq 1$ .

A su vez, para probar la inclusión basta probar que todo punto  $x \in Q_1 \setminus K$  está infinitamente próximo a un punto de  $\partial Q_1$ , ya que entonces ningún punto de  $Q_\epsilon^- \subset Q_1$  podrá estar en  $Q_1 \setminus K$ .

En efecto, tenemos que  $x \approx g(x) \in K$ . El segmento  $S$  que une  $x$  y  $g(x)$  es un espacio topológico conexo, pues es la imagen del intervalo (conexo)  $[0, 1]$  por la aplicación continua  $u(t) = (1-t)x + tg(x)$ .

La restricción a  $S$  de  $\chi_K$  no puede ser continua, ya que, como  $\chi_K(x) = 0$ ,  $\chi_K(g(x)) = 1$ , su imagen es el espacio disconexo  $\{0, 1\}$ , y la imagen de un espacio conexo por una función continua ha de ser conexa.

Así pues, existe un punto  $y \in S$  donde  $\chi_K$  es discontinua, y es fácil ver que esto equivale a que  $y \in \partial K$ . Como  $x \approx g(x)$ , también  $x \approx y$ . Por otra parte, como  $g$  es un homeomorfismo,  $\partial K = g[\partial Q_1]$ , luego  $y = g(z)$ , con  $z \in \partial Q_1$ , y así  $z \approx y \approx x$ .

En definitiva:  $*v(K) = 1$  o, lo que es lo mismo  $v(K) \approx 1$ . ■

Ahora ya podemos demostrar el teorema general:

**Teorema 7.29 (Teorema de cambio de variable)** *Sea  $x : U \rightarrow V$  una aplicación biyectiva de clase  $C^1$  entre dos dominios de integración abiertos en  $\mathbb{R}^d$ . Para cada  $t \in U$ , sea  $\Delta(t)$  el determinante de la matriz jacobiana  $(Jx)(t)$  (que es una función continua en  $U$ ). Supongamos que  $\Delta(t)$  no se anula y está acotado en  $U$ . Sea  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y acotada. Entonces*

$$\int_V f(x) dx = \int_U f(x(t)) |\Delta(t)| dt.$$

DEMOSTRACIÓN: En primer lugar, observamos que, por el teorema de la función inversa, la aplicación  $x^{-1} : V \rightarrow U$  también es de clase  $C^1$ . Llamemos a esta inversa  $t(x)$ , de modo que, en cada punto  $x \in V$ , se cumple que  $d_x t = (d_{t(x)} x)^{-1}$  y su determinante es  $\Delta(t(x))^{-1}$ .

Fijemos un  $\epsilon > 0$  estándar, sea  $Q'$  un cubo tal que  $U \subset Q' \subset \mathbb{R}^d$  y sea  $P'$  una partición infinitesimal de  $Q'$ . Como la frontera  $\partial U$  es nula, la suma de los volúmenes de los cubos  $Q_i$  que cortan a  $\partial U$  es infinitesimal, luego, en particular, es  $< \epsilon$ . Por transferencia, existe una partición estándar  $P'_0$  con esta misma propiedad. Sea  $K'$  la unión de los cubos correspondientes a la partición  $P'_0$  contenidos en  $U$ . De este modo,  $K' \subset U$  es un dominio de integración compacto estándar tal que  $v(U \setminus K') < \epsilon$ .

Ahora tomamos un cubo  $Q = [a, b]^d$  tal que  $V \subset Q \subset \mathbb{R}^d$ . Consideramos una partición de  $[a, b]$  en  $n$  segmentos iguales de longitud infinitesimal  $r = (b-a)/n$ , la cual determina una partición  $P$  de  $Q$  en cubos infinitesimales de arista  $r$ . Nuevamente, la suma de los volúmenes de los cubos  $Q_i$  que cortan a  $\partial V$  es infinitesimal (en particular  $< \epsilon$ ), pero podemos decir más: ninguno de ellos corta a  $t[K']$ .

En efecto, si  $Q_i$  corta a la vez a  $\partial V$  y a  $x[K']$ , entonces existen  $x \in \partial V$ ,  $x' \in x[K']$  tales que  $x \approx x'$ . Como  $x[K']$  es compacto, existe  $*x \in x[K']$ , luego, cambiando  $x$  por  $*x$ , podemos suponer que  $x$  es estándar. Entonces, la relación  $x \approx x'$  implica que  $x$  está en la clausura de  $\partial V$ , que es el propio  $\partial V$ , porque la frontera es cerrada, pero esto es absurdo, porque  $x \in x[K'] \subset U$  y  $U$  es abierto, luego no contiene a los puntos de  $\partial U$ .

Por transferencia, podemos encontrar un número natural estándar  $n_0$  tal que, si partimos  $[a, b]$  en  $n_0$  intervalos de la misma longitud, la partición correspondiente  $P_0$  de  $Q$  tiene la propiedad de que la suma de los volúmenes de los cubos que cortan a  $\partial V$  es menor que  $\epsilon$  y ninguno de ellos corta a  $x[K']$ .

Llamemos  $K$  a la unión de los cubos determinados por  $P_0$  y que están contenidos en  $V$ . Así,  $x[K'] \subset K \subset V$ , el conjunto  $K$  es un dominio de integración compacto estándar y  $v(V \setminus K) < \epsilon$ .

Como  $U \setminus t[K] \subset U \setminus K'$ , tenemos también que  $v(U \setminus t[K]) < \epsilon$ .

Ahora consideramos de nuevo una partición infinitesimal de  $[a, b]$  en  $n$  segmentos de longitud  $r = (b-a)/n$ , pero tomamos  $n$  múltiplo de  $n_0$ , de modo que, si consideramos la partición  $P$  de  $Q$  y llamamos  $I$  al conjunto de los multiíndices  $i \in I_P$  tales que  $Q_i \subset K$ , tenemos que

$$K = \bigcup_{i \in I} Q_i.$$

Si  $i \in I$  y  $Q_i = [a_1, a_1 + r] \times \cdots \times [a_d, a_d + r]$ , entonces  $a \in K$ , luego  $p = *a \in K \subset V$ , porque  $K$  es compacto, luego podemos aplicar el teorema anterior, en virtud del cual

$$\frac{v(t[Q_i])}{v(d_p t[Q_i])} = \frac{|\Delta(t(p))| v(t[Q_i])}{v(Q_i)} \approx 1.$$

En particular, tenemos que  $t[Q_i]$  es un dominio de integración. El teorema de la media nos da que

$$\frac{\int_{t[Q_i]} f(x(t)) |\Delta(t)| dt}{v(t[Q_i])} = f(x(t_i)) |\Delta(t_i)|,$$

para un cierto  $t_i \in t[Q_i]$ , que será de la forma  $t_i = t(x_i)$ , con  $x_i \in Q_i$ .

Como  $x_i \approx p$ , también  $t(x_i) \approx t(p)$ , luego  $|\Delta(t_i)| \approx |\Delta(t(p))|$ , y, como  $\Delta(t(p))$  es estándar,

$$\frac{|\Delta(t_i)|}{|\Delta(t(p))|} \approx 1.$$

A partir de aquí vamos a seguir de cerca el razonamiento que hemos empleado en la prueba del teorema 7.24. Para cada dominio de integración  $D \subset V$ , definimos

$$I(D) = \int_{t[D]} f(x(t)) |\Delta(t)| dt.$$

Para que  $I(D)$  esté bien definido es necesario que  $t[D]$  sea un dominio de integración. Hemos visto que  $I(Q_i)$  está bien definido, y además

$$\frac{I(Q_i)}{v(t[Q_i])} = f(x(t_i)) |\Delta(t_i)|,$$

luego

$$\frac{|\Delta(t(p))| v(t[Q_i])}{v(Q_i)} \frac{|\Delta(t_i)|}{|\Delta(t(p))|} \frac{I(Q_i)}{v(t[Q_i])} \approx f(x(t_i)) |\Delta(t_i)|,$$

o, equivalentemente,

$$\frac{I(Q_i)}{\Delta x_i} \approx f(x_i),$$

para cierto  $x_i \in Q_i$ .

Razonando como en 7.24, tenemos que

$$I(Q_i) - \epsilon \Delta x_i < f(x_i) \Delta x_i < I(Q_i) + \Delta x_i,$$

de donde, sumando para  $i \in I$ , obtenemos que

$$I(K) - \epsilon \sum_i \Delta x_i < \sum_i f(x_i) \Delta x_i < I(K) + \epsilon \sum_i \Delta x_i.$$

Notemos que  $I(K)$  está definido porque  $t[K]$  es un dominio de integración, ya que es la unión de los dominios  $t[Q_i]$ . Sin embargo, ahora no es cierto que  $V \setminus K$  tenga volumen infinitesimal. Lo que tenemos es que  $v(V \setminus K) < \epsilon$  y  $v(U \setminus t[K]) < \epsilon$ .

Tomando partes estándar en las desigualdades anteriores, llegamos a que

$$I(K) - \epsilon v(K) \leq \int_K f(x) dx \leq I(K) + \epsilon v(K),$$

luego

$$\left| I(K) - \int_K f(x) dx \right| \leq \epsilon v(K) \leq \epsilon v(V).$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \left| \int_U f(x(t)) |\Delta(t)| dt - \int_V f(x) dx \right| &\leq \left| I(K) - \int_K f(x) dx \right| \\ &\quad + |I(V \setminus K)| + \left| \int_{V \setminus K} f(x) dx \right| \\ &\leq \epsilon v(V) + M_1 v(U \setminus t[K]) + M_2 v(V \setminus K) \leq M \epsilon, \end{aligned}$$

donde  $M_1$  es una cota de  $f(x(t)) |\Delta(t)|$  en  $U$ ,  $M_2$  es una cota de  $f(x)$  en  $V$  y  $M = v(V) + M_1 + M_2$ . Como esto vale para todo  $\epsilon > 0$  estándar, tenemos la igualdad del enunciado. ■

**Coordenadas polares** Un cambio de variables que a menudo resulta útil es el determinado por las coordenadas polares. Llamemos

$$A = ]0, +\infty[ \times ]-\pi, \pi[, \quad B = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0\}$$

y consideremos la aplicación  $p : A \rightarrow B$  dada por

$$p(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \theta).$$

Es fácil ver que es biyectiva y de clase  $C^\infty$ . Su matriz jacobiana es

$$Jp(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta \\ -\rho \text{sen } \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix}$$

y su determinante jacobiano es  $\Delta(\rho, \theta) = \rho$ . Por el teorema de la función inversa, la inversa de  $p$  es también de clase  $C^\infty$ . Si  $U \subset A$  y  $V = p[U]$  son dominios de integración y  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua y acotada, el teorema de cambio de variables nos da que

$$\int_V f(x, y) \, dx dy = \int_U f(\rho \cos \theta, \rho \text{sen } \theta) \rho \, d\rho d\theta.$$

■

**Ejemplo** Vamos a calcular de nuevo la integral del ejemplo de la página 233:

$$\int_C \frac{x+1}{2} \, dx dy,$$

donde  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

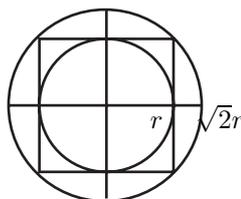
Es equivalente calcularla sobre

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\} \setminus \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0\},$$

pues hemos quitado un conjunto nulo. Este conjunto es la imagen por el cambio de coordenadas polares del cubo  $]0, 1[ \times ]-\pi, \pi[$ . Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \int_C \frac{x+1}{2} \, dx dy &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 \frac{\rho \cos \theta + 1}{2} \rho \, d\rho d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \frac{\rho^3}{6} \cos \theta + \frac{\rho^2}{4} \right]_0^1 d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{\cos \theta}{6} + \frac{1}{4} \right) d\theta = \left[ \frac{\text{sen } \theta}{6} + \frac{\theta}{4} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

■



**Ejemplo** Sean  $C_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < r\}$  y  $Q_r = ]-r, r[^2$ . Claramente,  $C_r \leq Q_r \leq C_{\sqrt{2}r}$ , como muestra la figura. Dado que la función  $e^{(x^2+y^2)/2}$  es siempre positiva, es claro que

$$\int_{C_r} e^{(x^2+y^2)/2} \, dx dy \leq \int_{Q_r} e^{(x^2+y^2)/2} \, dx dy \leq \int_{C_{\sqrt{2}r}} e^{(x^2+y^2)/2} \, dx dy.$$

Por el teorema 7.21:

$$\begin{aligned} \int_{Q_r} e^{(x^2+y^2)/2} \, dx dy &= \int_{Q_r} e^{x^2/2} e^{y^2/2} \, dx dy \\ &= \left( \int_{-r}^r e^{x^2/2} \, dx \right) \left( \int_{-r}^r e^{y^2/2} \, dy \right) = \left( \int_{-r}^r e^{x^2/2} \, dx \right)^2. \end{aligned}$$

Por otra parte, cambiando a coordenadas polares:

$$\int_{C_r} e^{(x^2+y^2)/2} dx dy = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^r e^{-\rho^2/2} \rho d\rho = \int_{-\pi}^{\pi} \left[ -e^{-\rho^2/2} \right]_0^r d\theta = 2\pi(1 - e^{-r^2/2}).$$

Así pues,

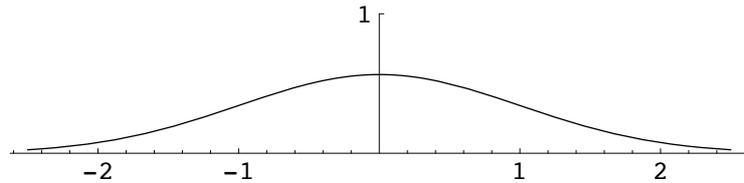
$$2\pi(1 - e^{-r^2/2}) \leq \left( \int_{-r}^r e^{x^2/2} dx \right)^2 \leq 2\pi(1 - e^{-r^2}),$$

luego

$$\sqrt{1 - e^{-r^2/2}} \leq \int_{-r}^r \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{x^2/2} dx \leq \sqrt{1 - e^{-r^2}}$$

Con esto podemos calcular el límite cuando  $r$  tiende a  $+\infty$  de la integral, que habitualmente se representa como

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{x^2/2} dx = 1.$$



El integrando se conoce como *campana de Gauss*, y es una de las distribuciones de probabilidad más importantes en estadística. Puede probarse que no admite una primitiva expresable en términos de las funciones usuales, a partir de la cual calcular la integral. ■

**Coordenadas cilíndricas** Un cambio de variable útil para trabajar con sólidos de revolución es el correspondiente a las coordenadas cilíndricas:

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \operatorname{sen} \theta, \quad z = z.$$

Se comprueba inmediatamente que, como en el caso de las coordenadas polares, el determinante jacobiano es  $\rho$ . Un sólido de revolución está determinado por una función  $\rho = r(z)$  que determina la distancia al eje  $z$  de la superficie del sólido a cada altura  $z$ . Es claro entonces que su volumen (es decir, la integral de su función característica) en coordenadas cilíndricas viene dado por

$$V = \int_a^b \int_0^{r(z)} \int_{-\pi}^{\pi} \rho d\theta d\rho dz = 2\pi \int_a^b \left[ \frac{\rho^2}{2} \right]_0^{r(z)} dz = \pi \int_a^b r^2(z) dz,$$

que es la misma fórmula obtenida en la página 150 mediante un razonamiento *ad hoc*. ■

Terminamos esta sección destacando una consecuencia teórica del teorema de cambio de variable. Hemos definido la integración sobre dominios de  $\mathbb{R}^d$ , pero, más en general, si  $V$  es un espacio vectorial de dimensión  $d$  dotado de un producto escalar (por ejemplo, si  $V$  es un subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^n$ , lo que nos permite dotarlo de la restricción a  $V$  del producto escalar de  $\mathbb{R}^n$ ), podemos considerar en  $V$  una *base ortonormal*, es decir una base  $v_1, \dots, v_d$  formada por vectores que cumplan  $v_i v_i = 1$ ,  $v_i v_j = 0$ , para  $i \neq j$  (vectores de norma 1 perpendiculares entre sí). (El álgebra lineal garantiza que siempre existen bases ortonormales.) A su vez, podemos definir una aplicación lineal  $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow V$  determinada por que  $\phi(e_i) = v_i$ , donde  $e_i$  son los vectores de la base canónica de  $\mathbb{R}^d$ . La aplicación  $\phi$  conserva el producto escalar:

$$\phi(x)\phi(y) = \left( \sum_i x_i v_i \right) \left( \sum_i y_i v_i \right) = \sum_i x_i y_i = xy,$$

y, en particular, conserva la distancia entre puntos. Es fácil ver entonces que  $\phi$  transforma los cubos de  $\mathbb{R}^d$  en lo que, por definición, podemos llamar *cubos* en  $V$ , del mismo volumen. En el caso en que  $V$  sea un subespacio de  $\mathbb{R}^n$ , por ejemplo, un plano en  $\mathbb{R}^3$ , los cubos de  $V$  son rectángulos situados en una posición arbitraria en el espacio.

Ahora podríamos desarrollar en  $V$  toda la teoría de integración que hemos visto (particiones, sumas superiores e inferiores, etc.), pero podemos llegar al mismo resultado por un camino más corto: podemos definir un dominio de integración  $D \subset V$  como un subconjunto de  $V$  tal que  $D' = \phi^{-1}[D]$  sea un dominio de integración en  $\mathbb{R}^d$ , y diremos que una función acotada  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  es *integrable* si lo es  $\phi|_{D'} \circ f$ , en cuyo caso definimos la integral

$$\int_D f(x) dx = \int_{D'} f(\phi(t)) dt.$$

Como decimos, una comprobación rutinaria permitiría mostrar que estas definiciones nos llevan al mismo concepto de integral que si desarrollamos sistemáticamente en  $V$  el cálculo integral que hemos desarrollado en  $\mathbb{R}^d$ . Para tomar la igualdad anterior como definición de integral, necesitamos una comprobación que la justifique, y ahí es donde interviene el teorema de cambio de variable: hemos de probar que la definición de dominio de integración en  $V$  y de integral de una función sobre un dominio de  $V$  no dependen de la elección de la base ortonormal.

En efecto, si tomamos dos bases ortonormales en  $V$ , éstas dan lugar a dos aplicaciones  $\phi, \phi' : \mathbb{R}^d \rightarrow V$ , con las que podemos formar otra aplicación lineal  $\psi = \phi \circ \phi'^{-1} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ .

Como  $\phi$  y  $\phi'$  conservan el producto escalar, lo mismo le sucede a  $\psi$ , luego, si  $A$  es la matriz de  $\psi$  en la base canónica de  $\mathbb{R}^d$ , tenemos que, para todo par de vectores  $x, y \in \mathbb{R}^d$ , se cumple que  $x A A^t y^t = xy$ . Aplicando esto a los vectores de la base canónica concluimos que  $A A^t = I$ , y tomando determinantes vemos que  $|A|^2 = 1$ , luego  $|A| = \pm 1$ .

De este modo, si  $D \subset V$  y  $\phi^{-1}[D]$  es un dominio de integración en  $\mathbb{R}^d$ , el teorema 7.27 nos da que  $\psi[\phi^{-1}[D]] = \phi'^{-1}[D]$  también lo es, y el teorema de

cambio de variable nos da que

$$\int_{\phi^{-1}[D]} f(\phi(t)) dt = \int_{\psi^{-1}[\phi^{-1}[D]]} f(\phi(\psi(t))) dt = \int_{\phi^{-1}[D]} f(\phi(t)) dt.$$

(En realidad, tenemos esto probado bajo la hipótesis de que  $f$  sea continua, no meramente integrable, en  $D$ . Podríamos probar el caso general, pero no merece la pena.)

Así pues, el cálculo integral en  $V$  no depende de la base ortonormal elegida. En particular, si tomamos  $V = \mathbb{R}^d$ , concluimos que esta generalización de integral respecto de una base ortonormal coincide con la integral que ya teníamos definida (respecto de la base canónica).

## 7.6 Áreas de superficies

En esta sección veremos cómo calcular el área de una superficie curva  $S$ . Del mismo modo que no hemos definido el área de cualquier superficie plana, sino únicamente de los dominios de integración, también será necesario que la superficie sea “razonable” en algún sentido de la palabra. Concretamente, vamos a considerar el caso en que  $S$  es la gráfica de una función de clase  $C^1$ . En particular, esto significa que si aplicamos a  $S$  una homotecia de centro uno de sus puntos y razón infinita, obtenemos un plano. Dicho de otro modo: vista a través de una lupa de “infinitos aumentos”,  $S$  es plana.

Dejando de lado de momento las homotecias infinitas, una aproximación al área de  $A(S)$  (que queremos definir) puede obtenerse pegando en  $S$  pequeños cuadraditos. Pensemos, por ejemplo, en una esfera de un metro de radio cubierta por cuadraditos de un milímetro cuadrado. Evidentemente, los cuadraditos no “se ajustan” perfectamente a la esfera, porque son planos y cualquier fragmento de esfera, por diminuto que sea, tiene cierto “abombamiento”. No obstante, el producto del área de cada cuadradito por el número de cuadraditos que hemos necesitado para cubrir  $S$ , es una (buena) aproximación al área que buscamos. Más aún, podemos aceptar que, cuanto menores sean los cuadraditos, menor será el error de la aproximación, de modo que  $A(S)$  podría verse como el límite de estas aproximaciones, cuando el área (o el lado) de los cuadraditos tiende a 0.

Esto no es una definición operativa, porque no es fácil definir en general cómo deben “ajustarse” los cuadraditos para cubrir la superficie. No obstante, de aquí podemos deducir una propiedad que, según esto, debe tener el área que pretendemos definir: si aplicamos a  $S$  (y a los cuadraditos) una homotecia  $H_r$  de radio  $r < 1$ , los cuadraditos reducidos se ajustan incluso mejor a la superficie reducida  $H_r$ , puesto que también se habrán reducido los “resquicios” entre los cuadraditos. Ahora bien, las áreas de los cuadraditos se habrán multiplicado por  $r^2$ . Como esto vale para todas las aproximaciones de  $A(S)$  (para cuadraditos de cualquier área), lo mismo ha de valer para el límite, es decir, se ha de cumplir que

$$A(H_r[S]) = r^2 A(S).$$

Puesto que  $S$  se obtiene de  $H_r[S]$  mediante una homotecia de radio  $1/r$ , esta relación leída al revés nos dice que es válida igualmente cuando  $r > 1$ .

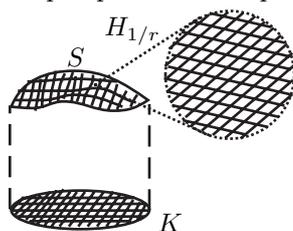
Otra propiedad elemental que está implícita en todo lo que venimos diciendo es que si dos superficies (“razonables”)  $S_1$  y  $S_2$  sólo comparten puntos de su frontera, entonces se ha de cumplir que

$$A(S_1 \cup S_2) = A(S_1) + A(S_2).$$

Consideramos ahora una función estándar  $g : K \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1$  en un dominio de integración compacto  $K$ . (Esto significa, por definición, que  $g$  es de clase  $C^1$  en un abierto que contiene a  $K$ .) Su gráfica es la imagen  $S = f[K]$  de la aplicación  $f : K \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$f(x, y) = (x, y, g(x, y)).$$

Nuestro propósito es llegar a una definición razonable del área  $A(S)$  que respete los principios que acabamos de discutir. Observemos que  $f : K \rightarrow S$  es un homeomorfismo, pues su inversa es la restricción a  $S$  de la proyección  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  en las dos primeras componentes. Podemos pensar en  $f$  como un “mapa” plano de la superficie  $S$ .



En lugar de cubrir  $S$  con cuadraditos, tomamos un cuadrado  $Q$  que contenga a  $K$  y consideramos una partición de  $Q$  en cuadrados infinitesimales  $Q_i$  de lado  $r$ . Las imágenes en  $S$  de estos cuadrados serán cuadrados algo deformados, pero no mucho, en el sentido de que, tal y como veremos enseguida, vistos con una lupa de  $1/r$  aumentos, es decir, transformados por una homotecia de razón  $1/r$ , resultan

ser indistinguibles de paralelogramos cuya área podremos calcular. En efecto, pongamos que

$$Q_i = [a, a + r] \times [b, b + r] \subset K$$

y sea  $p = (a, b) \in K$ . (Está en  $K$  porque  $K$  es compacto). Llamamos  $\phi = d_p f$  y sea  $Q_1 = [0, 1]^2$ . Como  $f$  es estrictamente diferenciable en  $p$ , tenemos que, para todo  $(x, y) \in Q_1$ , se cumple que

$$\frac{f(a + rx, b + ry) - f(a, b) - \phi(rx, ry)}{r\|(x, y)\|} \approx 0.$$

Llamemos

$$\bar{f}(x, y) = \frac{f(a + rx, b + ry)}{r}, \quad \bar{\phi}(x, y) = \frac{f(a, b) + \phi(rx, ry)}{r} = \frac{f(a, b)}{r} + \phi(x, y).$$

De este modo, cuando  $(x, y)$  recorre  $Q_1$ , tenemos que  $f(a + rx, b + ry)$  recorre  $f[Q_i]$ , y  $\bar{f}(x, y)$  recorre  $f[Q_i]$  aumentado con una “lupa” de  $1/r$  aumentos. Igualmente,  $\bar{\phi}(x, y)$  recorre  $f(a, b) + \phi[Q_i]$  aumentado  $1/r$  veces. Lo que hemos probado es que

$$\bar{f}(x, y) \approx \bar{\phi}(x, y),$$

de modo que cada punto de  $\bar{f}[Q_1]$  está a distancia infinitesimal de un punto de  $\bar{\phi}[Q_1]$ , y viceversa. En otros términos, las imágenes  $f[Q_i]$  y  $f(a, b) + \phi[Q_i]$  son indistinguibles incluso si se amplían  $1/r$  veces para volverlas apreciables.

Ahora introducimos un tercer principio que determine la definición de área (recordemos que los otros dos han sido la aditividad de las áreas y su comportamiento ante las homotecias): si los conjuntos  $\bar{f}[Q_1]$  y  $\bar{\phi}[Q_1]$  son apreciables e indistinguibles entre sí, sus áreas han de ser indistinguibles, es decir:

$$A(\bar{f}[Q_1]) \approx A(\bar{\phi}[Q_1]).$$

Como  $\bar{\phi}$  es la composición de  $\phi$  una traslación, el área de  $\bar{\phi}[Q_1]$  ha de ser la misma que la de  $\phi[Q_1]$ , y ésta la hemos definido al final de la sección anterior, ya que  $\phi$  es una aplicación lineal, luego  $\phi[Q_1]$  es un paralelogramo (plano). Usando  $v$  para el área de un dominio de integración plano (que sí que tenemos definida), lo que tenemos es que el concepto de área que pretendemos definir debe cumplir la relación

$$A(\bar{f}[Q_1]) \approx v(\phi[Q_1]).$$

Enseguida calcularemos el miembro derecho, que es un número estándar no nulo, por lo que podemos escribir:

$$\frac{A(\bar{f}[Q_1])}{v(\phi[Q_1])} \approx 1.$$

Puesto que  $\bar{f}[Q_1]$  es la imagen de  $f[Q_i]$  por una homotecia de radio  $1/r$ , teniendo en cuenta la relación entre las áreas y las homotecias, esto equivale a

$$\frac{A(f[Q_i])}{r^n v(\phi[Q_1])} \approx 1$$

o, equivalentemente,

$$\frac{A(f[Q_i])}{v[Q_i]} \approx v(\phi[Q_1]).$$

Nos ocupamos ahora de calcular el área del paralelogramo  $P = \phi[Q_1]$ . Según lo visto al final de la sección anterior, para ello deberíamos aplicar a  $P$  una aplicación lineal que lo transforme en un subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  conservando las distancias, y calcular entonces el área de su imagen, pero podemos ahorrarnos todo esto mediante un truco. Tenemos que

$$\phi(1, 0) = (1, 0, g_x), \quad \phi(0, 1) = (0, 1, g_y),$$

donde

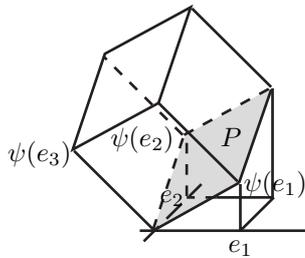
$$g_x = \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_p, \quad g_y = \left. \frac{\partial g}{\partial y} \right|_p.$$

Ahora observamos que  $v = (-g_x, -g_y, 1)$  cumple que

$$v\phi(1, 0) = v\phi(0, 1) = 0,$$

es decir, que es perpendicular a  $P$ . Sea  $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la aplicación lineal que sobre la base canónica toma los valores

$$\psi(e_1) = \phi(1, 0), \quad \psi(e_2) = \phi(0, 1), \quad \psi(e_3) = v.$$



La imagen por  $\psi$  del cubo unitario  $[0, 1]^3$  es el paralelepípedo de base  $P$  y altura

$$\|v\| = \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2},$$

luego su volumen es  $\|v\|v(P)$ . Por otra parte, sabemos que este volumen es el determinante de  $\psi$ , luego,

$$v(P) = \frac{1}{\|v\|} \begin{vmatrix} 1 & 0 & g_x \\ 0 & 1 & g_y \\ -g_x & -g_y & 1 \end{vmatrix} = \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2}.$$

Si llamamos  $\Delta(p) = \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2}$  (que, ciertamente, depende únicamente del punto  $p$ ), hemos probado que

$$\frac{A(Q_i)}{v(Q_i)} \approx \Delta(p) \approx \Delta(a_i),$$

donde  $a_i \in Q_i$  es el vértice que antes llamábamos  $(a, b) \approx p$ , y la última aproximación se debe a que la función  $\Delta(x, y)$  es continua en  $p$ . Así, para cualquier  $\epsilon > 0$  estándar, tenemos que

$$-\Delta x_i \epsilon < a(Q_i) - \Delta(a_i) \Delta x_i < \Delta x_i \epsilon$$

y, sumando para los  $Q_i \subset K$ , tenemos que

$$-\sum_i \Delta x_i \epsilon < a(K) - \sum_i \Delta(a_i) \Delta x_i < \sum_i \Delta x_i \epsilon.$$

Ahora aplicamos el teorema 7.7, en virtud del cual, al tomar partes estándar obtenemos:

$$-v(K)\epsilon \leq a(K) - \int_K \Delta(x) dx \leq v(K)\epsilon.$$

Como esto vale para todo  $\epsilon > 0$  estándar, ha de ser

$$a(K) = \int_K \Delta(x) dx.$$

En definitiva, llegamos a la siguiente definición:

**Definición 7.30** Sea  $g : K \rightarrow \mathbb{R}$  una aplicación de clase  $C^1$  definida sobre un dominio de integración compacto  $K \subset \mathbb{R}^2$ . Definimos  $\Delta : K \rightarrow \mathbb{R}$  como la función dada por

$$\Delta(x) = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}.$$

Entonces, el área de la gráfica de  $g$  se define como

$$A = \int_K \Delta(x) dx.$$

**Ejemplo** Vamos a calcular de nuevo el área de una esfera de radio  $R$ . Para ello calculamos, en realidad, el área de una semiesfera, que es la gráfica de la función

$$f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2},$$

definida sobre el círculo  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R\}$ .

Tenemos un problema y es que  $f$  no es derivable en los puntos de la circunferencia, así que calcularemos el área de la gráfica sobre el conjunto

$$C_\epsilon = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R - \epsilon\},$$

lo que nos sitúa en las condiciones de la definición que hemos dado, y luego haremos tender  $\epsilon$  a 0. Para ello calculamos:

$$\begin{aligned} \Delta(x, y) &= \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{R^2 - x^2 - y^2}} \\ &= \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}. \end{aligned}$$

Así pues, el área que queremos calcular es

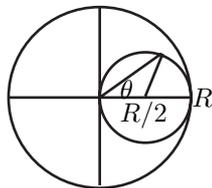
$$\int_{C_\epsilon} \frac{R dx dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

Aplicamos el cambio a coordenadas polares:  $x = \rho \cos \theta$ ,  $y = \rho \sin \theta$ , con lo que

$$\begin{aligned} \int_{C_\epsilon} \frac{R dx dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} &= R \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{R-\epsilon} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} d\theta \\ &= 2\pi R \left[ -\sqrt{R^2 - \rho^2} \right]_0^{R-\epsilon} = 2\pi R^2 - 2\pi R \sqrt{R^2 - (R-\epsilon)^2} \end{aligned}$$

Haciendo tender  $\epsilon$  a cero, es claro que el área de la semiesfera es  $2\pi R^2$ , luego el área de la esfera es  $4\pi R^2$ , como ya sabíamos. ■

**Ejemplo** ahora vamos a calcular el área de la semiesfera de radio  $R$  situada bajo el círculo de centro  $(R/2, 0)$  y radio  $R/2$ .



El triángulo de la figura es isósceles. El máximo valor de  $\rho$  para un ángulo  $\theta > 0$  dado es el que cumple

$$\cos \theta = \frac{\rho/2}{R/2},$$

es decir,  $\rho = R \cos \theta$ . Para evitar el problema de que el integrando (el mismo del ejemplo anterior) no es derivable en  $(R, 0)$ , calculemos la integral en el semicírculo superior, y nos restringiremos al compacto  $K_\epsilon$  determinado por  $\epsilon \leq \theta \leq \pi/2$ . Así,

$$\begin{aligned} \int_{K_\epsilon} \frac{R \, dx \, dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} &= R \int_\epsilon^{\pi/2} \int_0^{R \cos \theta} \frac{\rho \, d\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \, d\theta \\ &= R \int_\epsilon^{\pi/2} \left[ -\sqrt{R^2 - \rho^2} \right]_0^{R \cos \theta} \, d\theta = R \int_\epsilon^{\pi/2} (R - R \operatorname{sen} \theta) \, d\theta \end{aligned}$$

$$R^2 [\theta + \cos \theta]_\epsilon^{\pi/2} = \pi R^2 / 2 - R^2 (\epsilon + \cos \epsilon).$$

Haciendo tender  $\epsilon$  a cero y multiplicando por 2 (porque hemos integrado sólo en el semicírculo superior) queda que el área buscada es

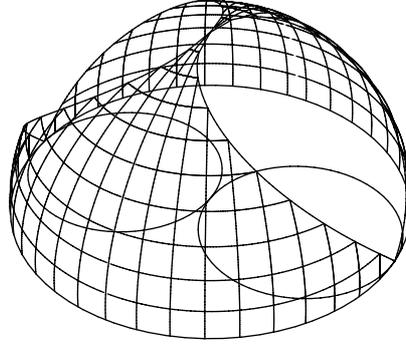
$$A = \pi R^2 - 2R^2.$$

En muchos libros se llama *bóveda de Viviani* a la superficie cuya área acabamos de calcular, pero el nombre es históricamente incorrecto. Vincenzo Viviani fue un discípulo de Galileo que, en cierta ocasión, planteó (y resolvió) el siguiente problema:

*Encontrar la forma de perforar dos ventanas en una bóveda semiesférica de modo que el área de la superficie resultante sea cuadrable.*

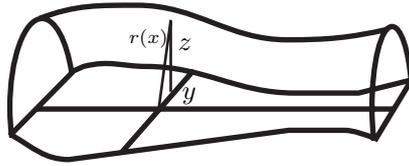
“Cuadrable” significa que pueda construirse un cuadrado de la misma área. En la práctica, quiere decir que el área no dependa de  $\pi$ . La solución al problema de Viviani consiste en eliminar la superficie de la bóveda que queda sobre dos círculos tangentes de radio  $R/2$ . Según acabamos de calcular, cada una de estas dos ventanas tiene área  $\pi R^2 - 2R^2$ , el área de las dos juntas es  $2\pi R^2 - 4R^2$  y, como el área de la semiesfera es  $2\pi R^2$ , el área de la bóveda sin las ventanas resulta ser  $A = 4R^2$ .

Así pues, la bóveda de Viviani, la bóveda que resuelve el problema de Viviani, no es el fragmento de esfera situado sobre el círculo, sino la semiesfera perforada con los dos agujeros o ventanas:



■

Para terminar, vamos a comparar la definición que hemos dado del área de una gráfica con la definición 4.27 del área de una superficie de revolución. Una superficie de revolución no es la gráfica de ninguna función, pero la mitad de ella sí que lo es.



Si la superficie viene determinada por una función  $r(x)$ , la mitad de la superficie correspondiente a los puntos con  $z > 0$  es la gráfica de la función  $z = \sqrt{r(x)^2 - y^2}$ , sobre el dominio

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \quad -r(x) \leq y \leq r(x)\}.$$

Para calcular el área según la definición 7.30 calculamos:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{rr'}{\sqrt{r^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{r^2 - y^2}},$$

con lo que

$$\Delta(x, y) = \frac{r(x)}{\sqrt{r(x)^2 - y^2}} \sqrt{1 + r'(x)^2}.$$

El área será:

$$A = \int_a^b \int_{-r(x)}^{r(x)} \frac{r(x)}{\sqrt{r(x)^2 - y^2}} \sqrt{1 + r'(x)^2} dy dx.$$

Observemos que el integrando no está definido cuando  $y = \pm r(x)$ . En principio tendríamos que restringir la integral a un dominio menor y luego tomar límites, como ya hemos hecho en otras ocasiones. Dejamos esta precisión a

cargo del lector. Para calcular la integral interior hacemos el cambio de variable  $y = r(x) \sin \theta$ , con lo que el área es

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{\cos \theta} \sqrt{1+r'(x)^2} r(x) \cos \theta \, d\theta dx &= \int_a^b \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1+r'(x)^2} r(x) \, d\theta dx \\ &= \pi \int_a^b \sqrt{1+r'(x)^2} r(x) \, dx, \end{aligned}$$

que es la mitad del valor dado por la definición 4.27 (porque estamos calculando el área de la mitad de la superficie de revolución). ■

## 7.7 Apéndice: Descomposición de aplicaciones lineales

Demostramos aquí el resultado sobre descomposición de aplicaciones lineales biyectivas en aplicaciones elementales que hemos utilizado en la prueba del teorema 7.27, a saber:

**Teorema 7.31** *Toda aplicación lineal biyectiva  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  se puede expresar como composición de un número finito de aplicaciones lineales  $g$  de uno de los tres tipos siguientes:*

- $g$  permuta los vectores  $e_1, \dots, e_d$  de la base canónica de  $\mathbb{R}^d$ .
- $g(e_1) = re_1$  y  $g(e_i) = e_i$  para  $i > 1$ , donde  $r \in \mathbb{R}$  es no nulo.
- $g(e_1) = e_1 + e_2$  y  $g(e_i) = e_i$ , para  $i > 1$ .

DEMOSTRACIÓN: Sea  $A$  la matriz asociada a  $f$  en la base canónica. Es conocido que  $f$  puede transformarse en una matriz diagonal de la forma

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

mediante un número finito de operaciones elementales de los tipos siguientes:

- permutar dos filas o columnas,
- multiplicar una fila o columna por un número real no nulo,
- sumar a una fila o columna otra multiplicada por un número.

En efecto, los pasos a seguir son los siguientes:



donde las matrices  $E_i$  y  $E'_i$  son elementales. Ahora bien, todas las matrices elementales tienen determinante diferente de 0, y  $A$  también (porque  $f$  es biyectiva), luego  $D$  también ha de tener determinante diferente de 0, lo cual sólo puede suceder si  $D$  es la matriz identidad.

Por otra parte, la inversa de una matriz elemental es también una matriz elemental (la inversa de la matriz que multiplica una fila o columna por  $r$  es la que la multiplica por  $1/r$ , y la inversa de la matriz que suma a una fila o columna otra multiplicada por  $r$  es la que suma la otra multiplicada por  $-r$ ). Por consiguiente, podemos despejar  $A$  y expresarla como producto de matrices elementales.

Equivalentemente, la aplicación lineal  $f$  es composición de aplicaciones definidas por matrices elementales. Una aplicación lineal  $g$  definida por una matriz elemental está en uno de los casos siguientes:

- a) Permuta los vectores de la base canónica.
- b)  $g(e_i) = re_i$ ,  $g(e_j) = e_j$  para  $j \neq i$ .
- c)  $g(e_i) = e_i + re_j$ ,  $g(e_k) = e_k$  para  $k \neq i$ .

Si  $g$  está en el caso c) puede descomponerse como sigue: permutamos los vectores de la base canónica para que  $e_i \mapsto e_1$  y  $e_j \mapsto e_2$  (tipo a), hacemos  $e_2 \mapsto re_2$  (tipo b), hacemos  $e_1 \mapsto e_1 + e_2$ , hacemos  $e_2 \mapsto (1/r)e_2$  (tipo b), invertimos la permutación inicial (tipo a).

Por consiguiente, podemos reducir el caso c) a  $g(e_1) = e_1 + e_2$ .

Por último, si  $g$  está en el caso b) puede descomponerse así: permutamos los vectores de la base canónica de modo que  $e_i \mapsto e_1$ , hacemos  $e_1 \mapsto re_1$  y deshacemos la permutación inicial. Así hemos descompuesto  $f$  en homomorfismos de los tipos indicados en el enunciado. ■



## Apéndice A

# La teoría de Nelson

Describimos aquí una teoría axiomática de conjuntos en la que pueden formalizarse todos los resultados expuestos en los capítulos precedentes de este libro exactamente en el mismo sentido en que los resultados expuestos en cualquier libro de análisis estándar pueden formalizarse en la teoría de conjuntos ZFC. Se trata de la teoría expuesta por Nelson en [4].

El lenguaje formal de la teoría de Nelson consta de los signos lógicos usuales más el relator (diádico) de pertenencia  $\in$  y un relator monádico  $st$ . Convendremos en leer la fórmula  $st x$  como “*el conjunto  $x$  es estándar*”.

Las expresiones del lenguaje de la teoría de Nelson pueden dividirse en *internas*, si no contienen el relator  $st$ , y *externas* si lo contienen. Equivalentemente, las expresiones internas son las expresiones del lenguaje de ZFC.

Pasamos ahora a presentar los axiomas de la teoría de Nelson. En primer lugar:

*Todos los axiomas de ZFC son axiomas de la teoría de Nelson.*

Como consecuencia, todos los teoremas de ZFC son también teoremas de la teoría de conjuntos de Nelson, sin cambio o precisión alguna. En particular, en la teoría de Nelson podemos usar todos los signos matemáticos que se introducen en ZFC a través de definiciones:  $\emptyset$ ,  $x \cup y$ ,  $x \times y$ ,  $f : A \rightarrow B$ , etc.

**Notas** Observemos que un teorema de ZFC (un esquema teorematizado, en realidad), es el *esquema de especificación*, en virtud del cual, si  $\phi(x, x_1, \dots, x_n)$  es cualquier fórmula —cualquier fórmula del lenguaje de ZFC, es decir, cualquier fórmula interna del lenguaje de Nelson— la fórmula siguiente es un teorema:

$$\bigwedge x_1 \cdots x_n \bigwedge A \bigvee^1 B \bigwedge x (x \in B \leftrightarrow x \in A \wedge \phi(x, x_1, \dots, x_n)).$$

Este teorema nos permite definir

$$\{x \in A \mid \phi(x, x_1, \dots, x_n)\}$$

como el único conjunto  $B$  que cumple el teorema anterior. Según lo dicho, todo esto sigue siendo válido en la teoría de Nelson, pero ahora es crucial recordar que la teoría de Nelson (a falta de otros axiomas) sólo nos permite especificar subconjuntos mediante fórmulas internas. Nada de lo dicho hasta aquí nos legitima a extender el esquema de especificación a fórmulas externas. Así, del mismo modo que en ZFC no podemos asegurar la existencia de

$$R = \{x \mid x \notin x\}$$

porque no se está restringiendo  $x$  a ningún conjunto prefijado  $A$ , en contra de lo que exige el esquema de especificación, en la teoría de Nelson no podemos asegurar la existencia de

$$\{x \in \mathbb{N} \mid \text{st } x\},$$

ya que la fórmula  $\text{st } x$  es externa.

Más aún, igual que en ZFC se puede demostrar que no existe ningún conjunto  $R$  cuyos elementos sean los conjuntos que no se pertenecen a sí mismos, veremos que en la teoría de Nelson se puede demostrar que no existe ningún conjunto cuyos elementos sean los números naturales estándar.

Otra precaución relacionada con ésta es tiene que ver con el principio de inducción, en virtud del cual, si  $\phi(n)$  es una fórmula (tal vez con más variables libres), se cumple que

$$(\phi(0) \wedge \bigwedge n \in \mathbb{N}(\phi(n) \rightarrow \phi(n+1))) \rightarrow \bigwedge n \in \mathbb{N} \phi(n).$$

Nuevamente, el hecho de que esto sea un esquema teorematizado de ZFC implica que también lo sea de la teoría de Nelson, pero sólo para fórmulas internas. Así pues, en la teoría de Nelson no son válidos los razonamientos por inducción respecto a fórmulas externas. Decimos que esto está relacionado con el caso anterior porque el principio de inducción se demuestra en ZFC considerando el conjunto

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid \phi(n)\},$$

y probando que  $A = \mathbb{N}$ . Si la fórmula  $\phi$  es externa, entonces la existencia de  $A$  no puede deducirse de los axiomas de ZFC y, por consiguiente, tampoco de los axiomas de la teoría de Nelson que hemos visto hasta ahora (que son los mismos). ■

La teoría de Nelson consta de los axiomas de ZFC más tres esquemas axiomáticos adicionales. Para enunciarlos conviene introducir la notación siguiente: si  $\alpha$  es una fórmula, escribiremos

$$\bigwedge^{\text{st}} x \alpha \equiv \bigwedge x(\text{st } x \rightarrow \alpha), \quad \bigvee^{\text{st}} x \alpha \equiv \bigvee x(\text{st } x \wedge \alpha).$$

**Principio de Transferencia** Si  $\alpha(x, x_1, \dots, x_n)$  es una fórmula interna cuyas variables libres sean exactamente las indicadas, la fórmula siguiente es un axioma:

$$\bigwedge^{\text{st}} x_1 \cdots x_n (\bigwedge^{\text{st}} x \alpha(x, x_1, \dots, x_n) \rightarrow \bigwedge x \alpha(x, x_1, \dots, x_n)).$$

Equivalentemente, (considerando el axioma correspondiente a  $\neg\alpha$  e invirtiendo la implicación)

$$\bigwedge^{\text{st}} x_1 \cdots x_n (\bigvee x\alpha(x, x_1, \dots, x_n) \rightarrow \bigvee^{\text{st}} x\alpha(x, x_1, \dots, x_n)).$$

Informalmente, el principio de transferencia puede enunciarse así:

*Si todo conjunto estándar cumple una propiedad interna que depende a lo sumo de parámetros estándar, entonces todo conjunto (estándar o no) cumple dicha propiedad. Equivalentemente, si existe un conjunto (estándar o no) que cumple una propiedad interna con parámetros estándar, entonces existe un conjunto estándar que también la cumple.*

Como primera consecuencia:

**Teorema A.1** *Si  $t(x_1, \dots, x_n)$  es un término interno cuyas variables libres sean exactamente las indicadas, entonces*

$$\bigwedge^{\text{st}} x_1 \cdots x_n \text{st } t(x_1, \dots, x_n).$$

DEMOSTRACIÓN: Basta considerar la fórmula  $x = t(x_1, \dots, x_n)$ . El principio de transferencia nos da que

$$\bigwedge^{\text{st}} x_1 \cdots x_n (\bigvee x(x = t(x_1, \dots, x_n)) \rightarrow \bigvee^{\text{st}} x(x = t(x_1, \dots, x_n))).$$

Fijados conjuntos estándar  $x_1, \dots, x_n$ , es trivialmente cierto que existe un conjunto  $x = t(x_1, \dots, x_n)$ , luego deducimos que existe un  $x$  estándar que cumple  $x = t$ , en definitiva, que  $t(x_1, \dots, x_n)$  es estándar. ■

Así, por ejemplo, ahora podemos asegurar que

$$\text{st } \emptyset, \quad \text{st } \mathbb{N}, \quad \text{st } 250, \quad \text{st } \sqrt{2}$$

y, en general, que cualquier conjunto definible explícitamente en ZFC es estándar. Si una definición tiene parámetros, entonces hemos de exigir que los parámetros sean estándar. Por ejemplo:

$$\bigwedge^{\text{st}} xy \text{st}(x \cup y), \quad \bigwedge^{\text{st}} xy \text{st}(x \cap y), \quad \bigwedge^{\text{st}} xy \text{st}\{x, y\},$$

$$\bigwedge^{\text{st}} mn(m \in \mathbb{N} \wedge n \in \mathbb{N} \rightarrow \text{st}(m + n)), \quad \text{etc.}$$

En palabras: la unión de conjuntos estándar es un conjunto estándar, la intersección de conjuntos estándar es un conjunto estándar, el par formado por dos conjuntos estándar es un conjunto estándar, la suma de números naturales estándar es un número natural estándar, y, en general, cualquier conjunto

construido a partir de conjuntos estándar mediante una construcción definible en ZFC, es estándar.<sup>1</sup>

Otra consecuencia del principio de transferencia es la siguiente:

**Teorema A.2** *Si dos conjuntos estándar tienen los mismos elementos estándar, entonces son iguales.*

DEMOSTRACIÓN: Dados dos conjuntos estándar  $x$  e  $y$ , la hipótesis es que

$$\bigwedge^{\text{st}} u (u \in x \leftrightarrow u \in y).$$

El principio de transferencia nos permite pasar a

$$\bigwedge u (u \in x \leftrightarrow u \in y),$$

lo cual implica que  $x = y$ . ■

Así pues, si dos conjuntos estándar tienen los mismos elementos estándar, automáticamente tienen también los mismos elementos no estándar. En particular, si a un conjunto estándar le quitamos un elemento no estándar, necesariamente deja de ser estándar (o, si no, tendríamos dos conjuntos estándar distintos con los mismos elementos estándar).

El segundo axioma nos da la existencia de conjuntos no estándar:

**Principio de Idealización** *Si  $\alpha(x, y)$  es una fórmula interna con al menos las variables libres  $x, y$ , entonces la fórmula siguiente es un axioma:*

$$\bigwedge^{\text{st}} z (z \text{ finito} \rightarrow \forall x \bigwedge y \in z \alpha(x, y)) \leftrightarrow \forall x \bigwedge^{\text{st}} y \alpha(x, y).$$

El miembro izquierdo del axioma afirma que la fórmula interna  $\alpha(x, y)$  determina una relación *concurrente*, es decir, que dado cualquier familia estándar finita<sup>2</sup>  $z$  de conjuntos existe un conjunto  $x$  relacionado con todos ellos. Así, el principio de idealización puede leerse así:

<sup>1</sup>En principio, si  $+$  representa la suma de números naturales (definida en ZFC), lo que nos da el teorema A.1 es que  $\bigwedge^{\text{st}} mn \text{ st}(m + n)$ . Aquí hemos de entender que si  $m$  y  $n$  no son números naturales, el término  $m + n$  es una descripción impropia. Adoptamos el convenio de que todas las descripciones impropias representan un mismo objeto, que podemos especificar o no. Por ejemplo, podemos convenir (podemos tomar como axioma) que todas las descripciones impropias son el conjunto vacío:  $(x \mid x = x) = \emptyset$ . El principio de transferencia nos obliga a elegir como descripción impropia un conjunto estándar, ya que, como acabamos de ver, permite probar que la descripción impropia es estándar. Este convenio sólo es útil en teoría para que enunciados como el teorema A.1 tengan sentido sin necesidad de imponer restricciones al término  $t$ . En la práctica podemos particularizar fórmulas como

$$\bigwedge^{\text{st}} mn \text{ st}(m + n) \quad \text{a} \quad \bigwedge^{\text{st}} mn (m \in \mathbb{N} \wedge n \in N \rightarrow \text{st}(m + n))$$

y así evitamos tratar con descripciones impropias.

<sup>2</sup>La noción de finitud es, por supuesto, la usual, tal y como se define habitualmente en ZFC.

*Una relación interna (tal vez con parámetros no estándar) es concurrente si y sólo si hay un conjunto relacionado con todos los conjuntos estándar.*

En la práctica no es frecuente trabajar con relaciones definidas sobre todos los conjuntos, sino sólo sobre un conjunto prefijado. Por ello suele ser más útil la siguiente versión relativizada del principio:

**Teorema A.3** *Si  $\alpha(x, y)$  es una fórmula interna con al menos las variables libres  $x, y$ , entonces la fórmula siguiente es un teorema:*

$$\bigwedge A (\bigwedge^{\text{st}} z (z \subset A \wedge z \text{ finito} \rightarrow \bigvee x \bigwedge y \in z \alpha(x, y)) \leftrightarrow \bigvee x \bigwedge^{\text{st}} y \in A \alpha(x, y)).$$

DEMOSTRACIÓN: Aplicamos el principio de idealización a la fórmula

$$\beta(x, y) \equiv y \in A \rightarrow \alpha(x, y).$$

Si la relación  $\alpha$  es *concurrente* en  $A$ , es decir, si cumple el miembro izquierdo del enunciado, entonces, para cada conjunto  $z$  estándar y finito tenemos que el conjunto  $z' = z \cap A$  es estándar (por el teorema anterior), es finito y está contenido en  $A$ . Por hipótesis  $\bigvee x \bigwedge y \in z' \alpha(x, y)$ , y esto es equivalente a que  $\bigvee x \bigwedge y \in z \beta(x, y)$ . Así pues,  $\beta$  es concurrente, luego por el principio de idealización  $\bigvee x \bigwedge^{\text{st}} y \beta(x, y)$ , lo cual equivale a  $\bigvee x \bigwedge^{\text{st}} y \in A \alpha(x, y)$ . El recíproco se prueba igualmente. ■

El resultado básico sobre existencia de conjuntos no estándar es el siguiente:

**Teorema A.4** *Un conjunto es estándar y finito si y sólo si todos sus elementos son estándar.*

DEMOSTRACIÓN: Sea  $A$  un conjunto. Aplicamos el principio de idealización a la relación interna  $\alpha(x, y) = x \in A \wedge x \neq y$ , donde  $A$  aparece como parámetro (no necesariamente estándar). La relación  $\alpha$  es concurrente si y sólo si

$$\bigwedge^{\text{st}} z (z \text{ finito} \rightarrow \bigvee x \bigwedge y \in z (x \in A \wedge x \neq y))$$

o equivalentemente, si  $A$  no está contenido en ningún conjunto estándar y finito  $z$ .

Por tanto, si  $A$  es estándar y finito, por el principio de idealización,

$$\bigwedge x \in A \bigvee^{\text{st}} y \ x = y,$$

pero esto equivale a que todos los elementos de  $A$  son estándar.

Recíprocamente, si todos los elementos de  $A$  son estándar el principio de idealización implica que la relación  $\alpha$  no es concurrente, y por tanto  $A$  está contenido en un conjunto estándar y finito  $z$ . Entonces  $A$  es finito y  $A \in \mathcal{P}z$ . Por el principio de transferencia,  $\mathcal{P}z$  es estándar y, como también es finito, la parte ya probada permite concluir que  $\mathcal{P}z$  sólo tiene elementos estándar. Luego  $A$  es también estándar. ■

Otra consecuencia notable del principio de idealización es la siguiente:

**Teorema A.5** *Existe un conjunto finito que contiene a todos los conjuntos estándar.*

DEMOSTRACIÓN: Basta aplicar el principio de idealización a la fórmula

$$\alpha(x, y) \equiv y \in x \wedge x \text{ es finito.}$$

■

Existen otras teorías de conjuntos no estándar en las que no se cumplen exactamente los mismos hechos básicos. En la teoría de Nelson, el principio de idealización es especialmente fuerte, por lo que de cara a traducir los resultados a otras aproximaciones al análisis no estándar, conviene observar que, en las aplicaciones usuales de la teoría al análisis, la topología, etc., nunca es necesario usar el principio de idealización de Nelson en toda su generalidad, sino que en la práctica es suficiente con los teoremas A.3, A.4 y la siguiente versión débil del teorema anterior:

**Teorema A.6** *Todo conjunto  $A$  tiene un subconjunto finito  $B$  que contiene a todos sus elementos estándar.*

DEMOSTRACIÓN: Basta tomar  $F \cap A$ , donde  $F$  es un conjunto finito que contenga a todos los conjuntos estándar. ■

Todos los resultados que hemos demostrado en los capítulos precedentes de este libro han usado únicamente el principio de idealización a través del teorema A.4 y, en contadas ocasiones, del teorema A.6 (resultados que en el capítulo I hemos llamado *Principio de idealización I* y *II*). El teorema A.3 es necesario, por ejemplo, en el estudio de espacios topológicos arbitrarios, no necesariamente metrizablees, estudio en el que no hemos entrado en este libro.

**Ejemplo** Ahora estamos en condiciones de demostrar algo que habíamos afirmado más arriba, a saber, que no existe

$$\{x \in \mathbb{N} \mid \text{st } x\}$$

o, en otras palabras, que no existe ningún conjunto cuyos elementos sean los números naturales estándar. En efecto, si existiera tal conjunto, llamémoslo  $A$ , entonces  $\mathbb{N} \setminus A$  sería el conjunto de los números naturales no estándar, que es no vacío, ya que  $\mathbb{N}$  es infinito, luego tiene elementos no estándar. Todo subconjunto no vacío de  $\mathbb{N}$  tiene un mínimo elemento. Sea, pues,  $\mu$  el mínimo de  $\mathbb{N} \setminus A$ . Se trata de un número natural no estándar, luego ha de ser  $\mu \neq 0$ , ya que  $\text{st } 0$ . Por lo tanto, ha de ser  $\mu = n + 1$ , para cierto  $n < \mu$ . Por la minimalidad de  $\mu$ , concluimos que  $n$  es estándar, pero entonces  $\mu = n + 1$  es suma de dos números estándar, luego debería ser estándar, y tenemos una contradicción. ■

Vemos, pues, que en la teoría de Nelson hay fórmulas (externas) que no definen conjuntos. Pese a ello, a menudo es útil utilizar la notación conjuntista con estas fórmulas, es decir, hablar de

$$\{x \in A \mid \phi(x, x_1, \dots, x_n)\}$$

aunque la fórmula  $\phi$  sea externa. Esto será lícito siempre y cuando cualquier expresión que contenga un “conjunto inexistente” de este tipo pueda ser reformulada en términos de  $\phi$ . Por ejemplo, es útil definir en general

$${}^{\circ}A = \{x \in A \mid \text{st } x\}.$$

Antes hemos demostrado que no existe ningún conjunto cuyos elementos sean los números naturales estándar, es decir, que no existe  ${}^{\circ}\mathbb{N}$ . Expresaremos esto diciendo que  ${}^{\circ}\mathbb{N}$  es un *conjunto externo*, de modo que los conjuntos externos son esencialmente lo mismo que las *clases propias* en ZFC (y en la propia teoría de Nelson, pues, igual que podemos hablar de clases propias en ZFC, podemos hacerlo en la teoría de Nelson).

La diferencia entre conjuntos externos y clases propias es que llamamos clases propias a las colecciones de conjuntos definidas por fórmulas que no definen conjuntos porque no acotan la variable tal y como exige el esquema de especificación, y llamamos conjuntos externos a las colecciones de conjuntos definidas por fórmulas que no definen conjuntos porque son externas. Así, por ejemplo,

$$A = \{x \mid \forall y(x = \{y\})\}$$

(la clase de todos los conjuntos con un elemento) es una clase propia, pero

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid \neg \text{st } x\}$$

(el conjunto de todos los números naturales no estándar) es un conjunto externo.

Notemos que tiene sentido afirmar, por ejemplo, que  $A \cap B = \emptyset$ , porque con ello estamos diciendo algo que puede expresarse sin hacer referencia ni a clases propias ni a conjuntos externos, a saber, que es imposible que un número natural sea no estándar y tenga un único elemento, ya que el único número natural con un elemento es  $1 = \{0\}$ , y es estándar.

En general, una afirmación que involucre conjuntos externos será admisible en la teoría de Nelson en la medida en que pueda reformularse sin hacer referencia a conjuntos externos. Por ejemplo, el teorema A.4 puede reenunciarse como:

*Un conjunto  $A$  es estándar y finito si y sólo si  $A = {}^{\circ}A$ .*

Esto es admisible precisamente porque la igualdad  $A = {}^{\circ}A$  puede sustituirse por la fórmula  $\bigwedge x \in A \text{ st } x$ , en la que no aparecen conjuntos externos.

Este resultado muestra, por otra parte, que  ${}^{\circ}A$  no siempre es externo: Si  $A$  es un conjunto estándar y finito, entonces  ${}^{\circ}A$  es interno y estándar, porque es el propio  $A$ .

A veces, a los conjuntos los llamaremos también *conjuntos internos*, por oposición a los conjuntos externos. Así, podemos decir que  $\mathbb{N}$  es un conjunto interno, mientras que  ${}^{\circ}\mathbb{N}$  es externo, pero debemos tener presente que decir que  $\mathbb{N}$  es un conjunto interno significa exactamente lo mismo que decir simplemente

que es un conjunto, es decir, uno de los objetos de los que habla la teoría de Nelson.

El tercer esquema axiomático que completa la teoría de Nelson nos permite definir conjuntos a partir de fórmulas externas, pero no en el mismo sentido en que lo hace el esquema de especificación:

**Principio de Estandarización** *Si  $\alpha(z)$  es una fórmula (interna o externa) con al menos la variable libre  $x$ , entonces la fórmula siguiente es un axioma:*

$$\bigwedge^{\text{st}} x \bigvee^{\text{st}} y \bigwedge^{\text{st}} z (z \in y \leftrightarrow z \in x \wedge \alpha(z)).$$

Dado un conjunto estándar  $x$ , el conjunto  $y$  que postula el principio de estandarización es único en virtud del teorema A.2, y podemos llamarlo

$${}^S\{z \in x \mid \alpha(z)\}.$$

Aquí es esencial recordar que este conjunto no está formado por los elementos  $z \in x$  que cumplen  $\alpha(z)$ , sino que sus elementos estándar son los elementos estándar  $z \in x$  que cumplen  $\alpha(z)$ , pero que, aparte, puede tener otros elementos no estándar, sobre los que —en principio— no podemos decir nada.

Podemos pensar en  $A \mapsto {}^S A$  como una operación que asigna un conjunto estándar a cada conjunto externo (su *estandarización*), pero también podemos estandarizar conjuntos internos: si  $A$  es un conjunto interno, podemos definir

$${}^S A = {}^S\{x \in A \mid x \in A\},$$

que es el conjunto estándar que tiene los mismos elementos estándar que  $A$ . Así, es claro que un conjunto  $A$  es estándar si y sólo si  $A = {}^S A$ .

Veamos un ejemplo detallado del uso de los principios de transferencia y estandarización, que nos proporciona un ejemplo más en el que un conjunto  ${}^\circ A$  puede ser interno:

**Teorema A.7** *Si  $A$  es un conjunto finito con un número estándar de elementos, entonces  ${}^\circ A = {}^S A$ . En particular,  ${}^\circ A$  es un conjunto interno, estándar y finito.*

DEMOSTRACIÓN: Por hipótesis, existe un número natural estándar  $n$  y una aplicación biyectiva  $f : I_n \rightarrow A$ , donde  $I_n = \{m \in \mathbb{N} \mid m \leq n\}$ . Llamamos  $g = {}^S f$ . Así, todo elemento estándar de  $g$  es un elemento de  $f$ , luego

$$\bigwedge^{\text{st}} x \in g \bigvee^{\text{st}} m (m \in I_n \wedge a \in A \wedge x = (m, a)).$$

Como la fórmula que sigue al cuantificador inicial es interna, podemos aplicar el principio de transferencia y concluir que  $g \subset I_n \times A$ . Similarmente, si  $m \in I_n$ , tenemos que

$$\bigwedge^{\text{st}} a b ((m, a) \in g \wedge (m, b) \in g \rightarrow a = b),$$

ya que si  $(m, a) \in g$  con  $m$  y  $a$  estándar, entonces  $(m, a)$  es estándar, luego  $(m, a) \in f$ , e igualmente  $(m, b) \in f$ , y  $f$  es una función. (Observemos que  $m$  es estándar, porque  $I_n$  es estándar y finito, luego todos sus elementos son estándar.)

Ahora podemos aplicar el principio de transferencia porque la fórmula tras el cuantificador inicial es interna y porque el único parámetro que aparece en ella es  $g$ , es un conjunto estándar. La conclusión es que  $g$  es una función.

Similarmente, si  $m_1, m_2 \in I_n$ ,

$$\bigwedge^{\text{st}} a((m_1, a) \in g \wedge (m_2, a) \in g \rightarrow m_1 = m_2),$$

luego, aplicando el principio de transferencia (lo cual es lícito porque los parámetros  $g, m_1$  y  $m_2$  son estándar), concluimos que  $g$  es inyectiva.

Sea  $D \subset I_n$  el dominio de  $g$ , que es un conjunto estándar, porque el dominio de una función estándar ha de ser un conjunto estándar. Si  $m \in D$ , entonces  $g(m)$  es estándar (porque lo son  $m$  y  $g$ ), luego  $(m, g(m)) \in g$  implica que  $(m, g(m)) \in f$ , lo que a su vez implica que  $g(m) \in A$  o, más concretamente,  $g(m) \in {}^\circ A$ . Así pues,  $g[D] \subset {}^\circ A$ .

Recíprocamente, si  $a \in {}^\circ A$ , existe un  $m \in I_n$  tal que  $(m, a) \in f$ . Como  $m$  y  $a$  son ambos estándar, también lo es  $(m, a)$ , luego  $(m, a) \in g$ , luego  $a \in g[D]$ . En definitiva,  ${}^\circ A = g[D]$  es un conjunto estándar y finito (porque la imagen de un conjunto estándar por una aplicación estándar es un conjunto estándar).

Como  ${}^\circ A$  es un conjunto estándar que contiene los mismos elementos estándar que  $A$ , ha de ser  ${}^\circ A = {}^S A$ . ■

Otra aplicación sencilla del principio de estandarización es la posibilidad de definir una función estándar especificando únicamente las imágenes de los elementos estándar de su dominio:

**Teorema A.8 (Principio de extensión)** *Si  $X$  e  $Y$  son conjuntos estándar y  $f : {}^\circ X \rightarrow {}^\circ Y$  es una aplicación externa, entonces existe una aplicación estándar  $\bar{f} : X \rightarrow Y$  que extiende a  $f$ .*

DEMOSTRACIÓN: Hay que entender que  $f$  es cualquier criterio que asigna a cada elemento estándar de  $X$  un único elemento estándar de  $Y$ . Más concretamente, el enunciado supone que existe una fórmula  $\alpha(x, y)$  (tal vez con parámetros) de modo que se demuestra que

$$\bigwedge^{\text{st}} x \in X \bigvee^1 y \in Y \alpha(x, y).$$

Definimos  $\bar{f} = {}^S \{(x, y) \in X \times Y \mid \alpha(x, y)\}$ . Así, los elementos estándar de  $\bar{f}$  son pares ordenados de  $X \times Y$  y para todo  $x \in X$  estándar existe un único  $y \in Y$  tal que  $(x, y) \in \bar{f}$ . Aplicando el principio de transferencia a estos hechos concluimos que  $\bar{f} : X \rightarrow Y$ , y claramente extiende a  $f$ . ■

El interés del principio de extensión es que, la forma de asignar un elemento estándar de  $Y$  a cada elemento estándar de  $X$  puede expresarse mediante una

fórmula externa y, pese a ello, la aplicación final  $\bar{f} : X \longrightarrow Y$  será estándar. Más en general, podemos definir un concepto mediante una fórmula externa y, si restringimos el alcance de la definición a conjuntos estándar, podemos exigir que el conjunto de todos los objetos que cumplen la definición sea estándar. Remitimos a la definición 2.29 y las explicaciones posteriores para ilustrar esta posibilidad, fundamental para una exposición natural del análisis no estándar.

## Apéndice B

# La teoría de Hrbacek

En este apéndice expondremos la teoría de conjuntos no estándar presentada por K. Hrbacek en [2], que se diferencia de la de Nelson en que formaliza la noción de conjunto externo. Nos referiremos a ella como H.

El lenguaje de ZFC está formado por las variables  $x, y, z, \dots$ , por los dos relatores  $\in, =$ , el negador  $\neg$ , el implicador  $\rightarrow$ , el generalizador  $\bigwedge$  y por el descriptor  $|$ .

Consideraremos como axioma de ZFC que todas las descripciones impropias son el conjunto vacío, es decir:  $x|(x = x) = \emptyset$ . Formalmente esto ha de entenderse como un axioma añadido a los axiomas de ZFC, pero en realidad es una definición: estamos conviniendo que todo lo que esté mal definido es por definición el conjunto vacío. En la práctica nunca vamos a trabajar con nociones mal definidas, pero al tratar sistemáticamente con expresiones arbitrarias hemos de contemplar la posibilidad de que sean descripciones impropias. En cuanto hayamos justificado la existencia del conjunto vacío en H adoptaremos también este axioma en la teoría de Hrbacek.

Cualquier otro signo lo consideraremos como una abreviatura de una expresión que contenga únicamente estos signos. Por ejemplo,

$$x \in y \vee x \in z \equiv \neg(x \in y) \rightarrow x \in z.$$

No consideramos a los paréntesis como signos de nuestro lenguaje, pues teóricamente pueden suprimirse a condición de alterar la sintaxis del lenguaje.

El lenguaje de la teoría de Hrbacek consta de los signos del lenguaje de ZFC más dos nuevos relatores  $st\ x$  ( $x$  es estándar) e  $in\ x$  ( $x$  es interno). Si  $\alpha$  es una fórmula, usaremos las abreviaturas

$$\bigwedge^{st} x\alpha, \quad \bigvee^{st} x\alpha, \quad \bigwedge^{in} x\alpha, \quad \bigvee^{in} x\alpha$$

con los significados obvios. Cuando hablemos de fórmulas de ZFC entenderemos que son fórmulas en las que no aparecen los relatores que acabamos de introducir, mientras que si hablamos de fórmulas de H entenderemos que pueden contener estos relatores.

Para indicar que un conjunto es arbitrario, no necesariamente interno, diremos que es *externo*. Cuando queramos indicar que no es interno diremos que es *estrictamente externo*.

La idea básica que debe guiarnos es que los conjuntos estándar de H se corresponden con los conjuntos estándar de la teoría de Nelson, los conjuntos internos de H se corresponden con los conjuntos de la teoría de Nelson (los que existen formalmente, es decir, los internos) y los conjuntos estrictamente externos de H se corresponden con los conjuntos externos de la teoría de Nelson, de los que sólo tiene sentido hablar metamatemáticamente.<sup>1</sup>

Desgraciadamente, no podemos suponer que los conjuntos externos satisfacen la axiomática completa de ZFC. Nos tendremos que limitar a la axiomática de Zermelo incluido el axioma de elección, es decir, suprimimos el axioma de reemplazo e incluimos el axioma de especificación. Como contrapartida, extendemos dicho axioma a fórmulas arbitrarias de H, luego, a diferencia de lo que sucede en la teoría de Nelson, podemos usar libremente los relatores  $st$  e  $in$  para definir conjuntos (lo que sucederá es que por regla general los conjuntos definidos con estos relatores serán estrictamente externos). Explícitamente, los axiomas básicos son los siguientes:

EXTENSIONALIDAD	$\bigwedge xy(\bigwedge u(u \in x \leftrightarrow u \in y) \rightarrow x = y),$
PAR	$\bigwedge xy\bigvee z\bigwedge u(u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y),$
UNIÓN	$\bigwedge x\bigvee y\bigwedge u(u \in x \rightarrow u \subset y),$
ESPECIFICACIÓN	Para toda fórmula $\alpha(u, x_1, \dots, x_n)$ de H, $\bigwedge x\bigvee y\bigwedge u(u \in y \leftrightarrow u \in x \wedge \alpha(u, x_1, \dots, x_n)),$
PARTES	$\bigwedge x\bigvee y\bigwedge u(u \subset x \rightarrow u \in y),$
ELECCIÓN	Todo conjunto admite un buen orden.

El conjunto cuya existencia postula el axioma de especificación es único por extensionalidad, y es el que se representa usualmente por

$$\{u \in x \mid \alpha(u, x_1, \dots, x_n)\}.$$

Notemos que de aquí se sigue la existencia de un conjunto sin elementos (tomando  $\alpha(u) \equiv u \neq u$ ), por lo que no hemos necesitado el axioma del conjunto vacío. Tampoco hemos incluido el axioma de infinitud porque se deducirá de los axiomas restantes. Veremos luego que el axioma del reemplazo y el axioma de regularidad son contradictorios con los otros axiomas de H.

La supresión del axioma de reemplazo sólo hace que la teoría de conjuntos se resienta en lo concerniente a la teoría de ordinales y cardinales. Por ejemplo, no es posible demostrar la existencia del ordinal  $\omega \cdot 2$ , por lo que un conjunto bien ordenado no tiene por qué tener asociado un ordinal. Sin embargo, los

<sup>1</sup>En realidad los axiomas de H determinan propiedades ligeramente distintas para los conjuntos internos que los axiomas de Nelson. Las diferencias son mínimas, pero debemos tener presente que la correspondencia entre ambas es aproximada.

resultados que no dependen directamente de estas nociones (lo cual incluye a los resultados básicos del álgebra, la topología o del análisis) siguen disponibles en esta teoría.<sup>2</sup> En particular disponemos de todo el lenguaje conjuntista básico: aplicaciones, relaciones, etc.

Introducimos ahora dos axiomas que en la teoría de Nelson son triviales, pues en ella todo conjunto es interno:

- INCLUSIÓN:  $\bigwedge^{\text{st}} x \text{ in } x$  (Todo conjunto estándar es interno.)  
 TRANSITIVIDAD:  $\bigwedge^{\text{in}} x \bigwedge u (u \in x \rightarrow \text{in } u)$  (Los elementos de los conjuntos internos son internos.)

El axioma de transitividad afirma que al introducir los conjuntos externos en la teoría no estamos modificando los conjuntos internos, en el sentido de que no les añadimos elementos.

Ahora debemos insistir en que una afirmación que en la teoría de Nelson empiece por “para todo número natural...” equivale a una afirmación de H que empiece por “para todo número natural interno...” Para formalizar esta idea hemos de introducir la noción de *relativización* de una fórmula:

Si  $\theta$  es una expresión de ZFC, definimos  $\theta^{\text{in}}$  como la expresión determinada por las reglas siguientes:

- a)  $x^{\text{in}} \equiv x$ ,
- b)  $(x = y)^{\text{in}} \equiv x = y$ ,  $(x \in y)^{\text{in}} \equiv x \in y$ ,
- c)  $(\neg \alpha)^{\text{in}} \equiv \neg \alpha^{\text{in}}$ ,
- d)  $(\alpha \rightarrow \beta)^{\text{in}} \equiv \alpha^{\text{in}} \rightarrow \beta^{\text{in}}$ ,
- e)  $(\bigwedge x \alpha)^{\text{in}} \equiv \bigwedge^{\text{in}} x \alpha^{\text{in}}$ ,
- f)  $(x | \alpha)^{\text{in}} \equiv x | (\text{in } x \wedge \alpha^{\text{in}})$ .

Son claras las identidades

$$(\alpha \vee \beta)^{\text{in}} \equiv \alpha^{\text{in}} \vee \beta^{\text{in}}, \quad (\alpha \wedge \beta)^{\text{in}} \equiv \alpha^{\text{in}} \wedge \beta^{\text{in}}, \quad (\alpha \leftrightarrow \beta)^{\text{in}} \equiv \alpha^{\text{in}} \leftrightarrow \beta^{\text{in}},$$

así como las equivalencias lógicas

$$(\bigvee x \alpha)^{\text{in}} \leftrightarrow \bigvee^{\text{in}} x \alpha^{\text{in}}, \quad \text{y} \quad (\bigvee^1 x \alpha)^{\text{in}} \leftrightarrow \bigvee^1 x (\text{in } x \wedge \alpha^{\text{in}}).$$

Por ejemplo  $\alpha \vee \beta \equiv \neg \alpha \rightarrow \beta$  y basta aplicar las reglas correspondientes a la implicación y a la negación. Lo mismo sucede con la conjunción  $\alpha \wedge \beta \equiv \neg(\neg \alpha \vee \neg \beta)$  y la coimplicación  $\alpha \leftrightarrow \beta \equiv (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$ .

---

<sup>2</sup>Un uso elemental del esquema de reemplazo es la prueba de la existencia de  $x \times y$ , pero teniendo en cuenta que  $(u, v) = \{\{u\}\{u, v\}\}$ , podemos obtener  $x \times y$  por especificación desde  $\mathcal{P}(\mathcal{P}(x \cup y))$ .

Para el cuantificador existencial tenemos que  $\forall x\alpha \equiv \neg\bigwedge x\neg\alpha$ , luego

$$(\forall x\alpha)^{\text{in}} \equiv \neg\bigwedge^{\text{in}} x\neg\alpha^{\text{in}}.$$

Esto no es exactamente lo mismo que  $\bigvee^{\text{in}} x\alpha^{\text{in}}$ , pero ambas fórmulas son lógicamente equivalentes, luego en la práctica relativizar un cuantificador  $\forall$  es cambiarlo por  $\bigvee^{\text{in}}$ . Similarmente sucede con la existencia única.

**Ejemplo** Veamos un ejemplo del “funcionamiento” de esta noción. Todavía no estamos en condiciones de justificar nada de lo que vamos a decir. Este ejemplo es meramente orientativo.

Ahora tenemos que distinguir entre el conjunto  $\mathbb{N}$  de los números naturales y el conjunto  $\mathbb{N}^{\text{in}}$  de los números naturales<sup>in</sup>. El primero es el conjunto de los números naturales (externos) construido a partir de los axiomas de Zermelo. Por ejemplo, podemos definir  $\mathbb{N}$  como la intersección de todos los conjuntos (externos) que contienen a  $0 = \emptyset$  y que si contienen a un conjunto  $n$  contienen también a  $n + 1 = n \cup \{n\}$ . Con esta definición se prueba que  $\mathbb{N}$  sólo contiene números estándar. La prueba se basa en que podemos definir el conjunto

$$X = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{st } n\},$$

(lo cual no es lícito en la teoría de Nelson) y demostrar que

$$0 \in X \wedge \bigwedge n \in X \ n + 1 \in X.$$

Por definición de  $\mathbb{N}$  tenemos que  $\mathbb{N} \subset X$ , luego  $\mathbb{N} = X$ .

Por otra parte,  $\mathbb{N}^{\text{in}}$  es la intersección de todos los conjuntos internos que contienen a  $0$  y que si contienen a  $n$  contienen a  $n \cup \{n\}$ . El conjunto  $X$  resulta ser estrictamente externo, luego no forma parte de la intersección que estamos considerando. El resultado es que  $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}^{\text{in}}$ , pero el segundo contiene muchos conjuntos que no están en  $\mathbb{N}$ , conjuntos que son números naturales<sup>in</sup>, pero no son números naturales. Demostraremos que  $\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N}^{\text{in}} \mid \text{st } n\}$ . ■

El siguiente grupo de axiomas de H es:

ZFC<sup>in</sup>: Si  $\alpha$  es un axioma de ZFC, entonces<sup>3</sup>  $\alpha^{\text{in}}$  es un axioma de H.

En otras palabras, los conjuntos internos (al igual que en la teoría de Nelson) cumplen ZFC. El hecho de que los conjuntos externos no cumplan todo ZFC no tiene gran importancia, pues debemos tener presente que el objeto de la teoría H es estudiar los conjuntos internos como herramienta a su vez para el estudio de los conjuntos estándar. Los conjuntos externos son un mero auxiliar.

<sup>3</sup>Aquí suponemos que los axiomas de ZFC no tienen variables libres. En el caso del axioma del reemplazo, donde aparece una fórmula que puede tener parámetros  $x_1, \dots, x_n$ , hay que entender que el axioma empieza con  $\bigwedge x_1 \cdots x_n$ .

**Ejemplo** El axioma del conjunto vacío en ZFC afirma que  $\forall x \wedge y x \notin y$ , es decir, existe un conjunto sin elementos. Por el axioma de extensionalidad es único, lo que justifica la definición  $\emptyset \equiv x | \wedge y y \notin x$ .

Ahora tenemos que  $\bigvee^{\text{in}} x \wedge \bigwedge^{\text{in}} y x \notin y$  es un axioma de H, es decir, existe un conjunto interno sin elementos internos. A este conjunto lo deberíamos llamar  $\emptyset^{\text{in}} \equiv x | (\text{in } x \wedge \bigwedge^{\text{in}} y y \notin x)$ . Ahora bien, como los conjuntos internos sólo pueden tener elementos internos concluimos que  $\emptyset^{\text{in}}$  no tiene elementos en absoluto, luego es simplemente  $\emptyset^{\text{in}} = \emptyset$ . En particular tenemos que  $\emptyset$  es interno. ■

Veamos un resultado trivial:

**Teorema B.1** Sea  $t(x_1, \dots, x_n)$  un término del lenguaje de ZFC con las variables libres indicadas. Entonces se prueba en H que  $\bigwedge^{\text{in}} x_1 \dots x_n \text{ in } t^{\text{in}}$ .

DEMOSTRACIÓN: Un término ha de ser necesariamente una variable  $t \equiv x$ , en cuyo caso el teorema es trivial, o bien una descripción  $t \equiv x | \alpha(x, x_1, \dots, x_n)$ , y entonces  $t^{\text{in}}$  es el único  $x$  interno que cumple  $\alpha^{\text{in}}$  si es que existe (y entonces es interno) o bien es  $(x | x = x) = \emptyset$  si no existe (y también es interno). ■

En la teoría de Nelson, al suponer todos los axiomas de ZFC tenemos automáticamente todos los teoremas de ZFC. El análogo para H no es igual de inmediato, pero también se cumple:

**Teorema B.2** Si  $\alpha$  es un teorema de ZFC sin variables libres, entonces  $\alpha^{\text{in}}$  es un teorema de H.

La prueba de este teorema es una comprobación rutinaria basada en la definición de “demostración” que proporciona la lógica matemática: una fórmula es un teorema de ZFC si se deduce en un número finito de pasos a partir de los axiomas de ZFC y de los axiomas lógicos mediante la aplicación de ciertas reglas de inferencia. Se comprueba que si  $\alpha$  es un axioma lógico (con variables libres  $x_1, \dots, x_n$ ) entonces  $\bigwedge^{\text{in}} x_1 \dots x_n \alpha^{\text{in}}$  es un teorema de H; por otra parte, si  $\alpha$  es un axioma de ZFC entonces  $\alpha^{\text{in}}$  es un axioma de H; finalmente, se comprueba que si  $\alpha$  se deduce de otras fórmulas mediante una regla de inferencia, entonces  $\bigwedge^{\text{in}} x_1 \dots x_n \alpha^{\text{in}}$  puede demostrarse en H a partir de las relativizaciones de las premisas. De aquí se sigue fácilmente el teorema. La demostración es constructiva, en el sentido de que permite obtener explícitamente la demostración en H de cualquier fórmula  $\alpha^{\text{in}}$  sin variables libres a partir de la demostración de  $\alpha$  en ZFC.

Hemos demostrado que  $\emptyset^{\text{in}} = \emptyset$ , y hemos anunciado que  $\mathbb{N}^{\text{in}} \neq \mathbb{N}$ . Vamos a ver ahora que la relativización a conjuntos internos es trivial para los conceptos básicos de la teoría de conjuntos, es decir, que “en la medida de lo posible” los conceptos internos coinciden con los externos. Para ello introducimos el concepto siguiente:

**Definición B.3** Diremos que un término  $t(x_1, \dots, t_n)$  de ZFC es *absoluto* si

$$\bigwedge^{\text{in}} x_1 \dots x_n t^{\text{in}}(x_1, \dots, x_n) = t(x_1, \dots, x_n).$$

Una fórmula  $\alpha(x_1, \dots, x_n)$  de ZFC es *absoluta* si

$$\bigwedge^{in} x_1 \cdots x_n (\alpha^{in}(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \alpha(x_1, \dots, x_n)).$$

Por ejemplo, hemos demostrado que  $\emptyset$  es absoluto. El teorema siguiente nos permite reconocer muchas expresiones absolutas:

**Teorema B.4** *Se cumple*

- Un término  $t$  es absoluto si y sólo si lo es la fórmula  $x = t$ , donde  $x$  es una variable que no esté libre en  $t$ .
- Si una fórmula  $\alpha$  es equivalente en la teoría de Zermelo  $Z$  a una fórmula absoluta  $\beta$  entonces  $\alpha$  es absoluta.
- $x = y$  y  $x \in y$  son fórmulas absolutas.
- Si  $\alpha$  y  $\beta$  son fórmulas absolutas, también lo son  $\neg\alpha$ ,  $\alpha \rightarrow \beta$ ,  $\alpha \vee \beta$ ,  $\alpha \wedge \beta$ ,  $\alpha \leftrightarrow \beta$ ,  $\bigwedge x \in y \alpha$ ,  $\bigvee x \in y \alpha$ ,  $\bigvee^1 x \in y \alpha$ ,  $x|(x \in y \wedge \alpha)$ .
- Si  $\theta(x_1, \dots, x_n)$  es una expresión absoluta y  $t_1, \dots, t_n$  son términos absolutos, entonces  $\theta(t_1, \dots, t_n)$  también es absoluta.

DEMOSTRACIÓN: a) Si  $x = t$  es absoluta tenemos que

$$\bigwedge x_1 \cdots x_n x(x = t^{in} \leftrightarrow x = t),$$

y sustituyendo  $x$  por  $t^{in}$  obtenemos que  $t^{in} = t$ . El recíproco es similar.

b) Si en  $Z$  tenemos  $\bigwedge x_1 \cdots x_n (\alpha \leftrightarrow \beta)$ , entonces en  $H$  tenemos

$$\bigwedge^{in} x_1 \cdots x_n (\alpha^{in} \leftrightarrow \beta^{in}), \quad \text{y} \quad \bigwedge x_1 \cdots x_n (\alpha \leftrightarrow \beta).$$

En particular  $\bigwedge^{in} x_1 \cdots x_n (\alpha \leftrightarrow \beta)$ , con lo que la conclusión es clara.

c) es inmediato.

d) La prueba para  $\neg\alpha$  y  $\alpha \rightarrow \beta$  es inmediata. Para los conectores restantes se deduce de estos dos casos. Para el cuantificador universal tenemos que probar que

$$\bigwedge^{in} x_1 \cdots x_n y (\bigwedge x \in y \alpha \leftrightarrow \bigwedge^{in} x \in y \alpha^{in}).$$

Como  $\alpha$  es absoluta tenemos que

$$\bigwedge^{in} x_1 \cdots x_n y (\bigwedge^{in} x \in y \alpha \leftrightarrow \bigwedge^{in} x \in y \alpha^{in}),$$

pero el axioma de transitividad nos permite cambiar el primer  $\bigwedge^{in} x$  por  $\bigwedge x$ , ya que los elementos de  $y$  son necesariamente internos.

El caso del cuantificador existencial puede reducirse al anterior o demostrarse análogamente. Para el cuantificador con unicidad tenemos que

$$\bigvee^1 x \in y \alpha \leftrightarrow \bigvee z \in y \bigwedge x \in y (\alpha \leftrightarrow x = z),$$

luego también se reduce a los casos anteriores.

Por último, fijados  $x_1, \dots, x_n, y$  internos, tenemos que un conjunto  $x$  cumple  $x \in y \wedge \alpha$  si y sólo si es interno y cumple  $x \in y \wedge \alpha^{\text{in}}$ , pues  $x \in y$  ya implica que  $x$  es interno y como  $\alpha$  es absoluta  $\alpha^{\text{in}}$  equivale a  $\alpha$ . Por consiguiente, o bien existe un único conjunto interno  $x \in y$  que cumple  $\alpha^{\text{in}}$ , y éste es también el único conjunto  $x$  que cumple  $x \in y \wedge \alpha$ , o bien no se da ninguna de las dos unicidades. En cualquier caso  $(x|(x \in y \wedge \alpha))^{\text{in}} = x|(x \in y \wedge \alpha)$  (Si no se da la unicidad ambos miembros son el conjunto vacío.)

e) Si  $\theta$  es una fórmula tenemos que

$$\bigwedge^{\text{in}} x_1 \cdots x_n (\theta^{\text{in}}(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \theta(x_1, \dots, x_n)).$$

Por otra parte, si  $y_1, \dots, y_m$  son las variables libres en los términos  $t_1, \dots, t_n$ , tenemos que

$$\bigwedge^{\text{in}} y_1 \cdots y_m (t_i^{\text{in}}(y_1, \dots, y_m) = t_i(y_1, \dots, y_m)).$$

Además, fijados  $y_1, \dots, y_m$  tenemos que cada  $t_i^{\text{in}}$  es un conjunto interno, luego podemos sustituir en la fórmula anterior y queda

$$\bigwedge^{\text{in}} y_1 \cdots y_m (\theta^{\text{in}}(t_1^{\text{in}}, \dots, t_n^{\text{in}}) \leftrightarrow \theta(t_1, \dots, t_m)).$$

Es fácil ver que  $\theta^{\text{in}}(t_1^{\text{in}}, \dots, t_n^{\text{in}}) \equiv \theta(t_1, \dots, t_m)^{\text{in}}$ , con lo que la composición es absoluta.

Si  $\theta$  es un término, el resultado se sigue del caso que acabamos de probar aplicado a la fórmula  $x = \theta$ . ■

Por ejemplo, ahora es claro que la unión de conjuntos es absoluta, es decir,

$$\bigwedge^{\text{in}} xy (x \cup y)^{\text{in}} = x \cup y.$$

Una prueba directa es la siguiente: el miembro izquierdo es por definición el único conjunto interno cuyos elementos internos son los elementos internos de  $x$  o  $y$ , pero por transitividad sobran todas las especificaciones “interno”, es decir,  $(x \cup y)^{\text{st}}$  es el único conjunto interno cuyos elementos son los elementos de  $x$  o  $y$ . Así pues,  $(x \cup y)^{\text{in}} = x \cup y$ . En otras palabras, la unión interna de conjuntos internos es simplemente su unión.

Por otra parte, el teorema anterior nos permite llegar mecánicamente a la misma conclusión: basta ver que

$$z = x \cup y \leftrightarrow \bigwedge u \in z (u \in x \vee u \in y)$$

y el miembro derecho es absoluto por el teorema anterior, luego el izquierdo también.

Similarmente se prueba que  $x \cap y$ ,  $x \setminus y$ ,  $\{x\}$ ,  $\{x, y\}$ ,  $x \subset y$  son absolutos. Ahora, el término  $(x, y) \equiv \{\{x\}, \{x, y\}\}$  es absoluto por el apartado e) del teorema. Por otra parte,

$$z = x \times y \leftrightarrow \bigwedge w \in z \bigvee u \in x \bigvee v \in y w = (u, v),$$

luego  $x \times y$  también es absoluto.

Otros ejemplos de expresiones absolutas son  $f : x \longrightarrow y$  (inyectiva, suprayectiva, biyectiva),  $f(u)$ ,  $R$  es una relación (reflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva). Por ejemplo:

$$f : x \longrightarrow y \leftrightarrow \bigwedge z \in f \bigvee u \in x \bigvee v \in y z = (u, v) \wedge$$

$$\bigwedge u \in x \bigvee v \in y \bigvee w \in f (w = (u, v) \wedge w \in f).$$

Para probar que  $f(x) \equiv y | (x, y) \in f$  es absoluto observamos que si  $f$  y  $x$  son internos entonces  $f(x)^{\text{in}} = y | (\text{in } y \wedge (x, y) \in f)$ , donde usamos que  $(x, y)$  es absoluto. Ahora bien,  $\text{in } y$  es redundante, pues si  $(x, y) \in f$  necesariamente  $y$  es interno, ya que  $y \in \{x, y\} \in (x, y) \in f$ , luego tenemos la igualdad.

En definitiva, las propiedades y operaciones conjuntistas básicas son absolutas. Esto implica en particular que al realizar dichas operaciones sobre conjuntos internos obtenemos conjuntos internos: la unión, la intersección, el producto cartesiano, etc. de conjuntos internos es un conjunto interno. Por ejemplo  $x \times y = (x \times y)^{\text{in}}$ , luego es interno por el teorema B.1.

**Ejemplo** Anticipamos (sin prueba) un ejemplo de concepto no absoluto:  $\mathcal{P}x$ .

En efecto,  $\mathcal{P}^{\text{in}}\mathbb{N}^{\text{in}}$  es por definición el conjunto (interno) de todos los subconjuntos internos de  $\mathbb{N}^{\text{in}}$ , y no coincide con  $\mathcal{P}\mathbb{N}^{\text{in}}$ , que es el conjunto de todos los subconjuntos (internos y externos) de  $\mathbb{N}^{\text{in}}$ . Así pues, la fórmula  $\bigwedge x (\mathcal{P}^{\text{in}}x = \mathcal{P}x)$  falla cuando se aplica al conjunto interno  $x = \mathbb{N}^{\text{in}}$ . Por consiguiente  $\mathcal{P}x$  no es absoluto. ■

**Ejemplo** Es un teorema de ZFC que  $0 \in \mathbb{N} \wedge \bigwedge n \in \mathbb{N} n \cup \{n\} \in \mathbb{N}$ . Teniendo en cuenta que  $0, \cup$  y  $\{x\}$  son conceptos absolutos, la relativización de este teorema es

$$0 \in \mathbb{N}^{\text{in}} \wedge \bigwedge n \in \mathbb{N}^{\text{in}} n \cup \{n\} \in \mathbb{N}^{\text{in}}.$$

Notemos que no hace falta poner  $\bigwedge n \in \mathbb{N}^{\text{in}}$  porque  $\mathbb{N}^{\text{in}}$  es interno, luego sus elementos son necesariamente internos. Esta fórmula es un teorema de H, y de ella se sigue que  $\mathbb{N}^{\text{in}}$  es un conjunto infinito. Por ello no hemos incluido el axioma de infinitud entre los axiomas sobre los conjuntos externos. Ahora ya tenemos justificada la existencia de conjuntos (externos) infinitos y, en particular, la existencia de  $\mathbb{N}$ . ■

Los axiomas que faltan se corresponden aproximadamente con los principios de transferencia, idealización y estandarización de la teoría de Nelson. Para enunciar el principio de idealización necesitamos unas definiciones:

**Definición B.5** Para cada conjunto  $A$ , definimos

$${}^\circ A = \{x \in A \mid \text{st } x\}.$$

Diremos que un conjunto  $B$  tiene *tamaño estándar* si existe un conjunto estándar  $A$  y una aplicación  $f : {}^\circ A \longrightarrow B$  suprayectiva.

En particular, si  $A$  es un conjunto estándar entonces  ${}^\circ A$  es un conjunto de tamaño estándar. Los axiomas restantes son:

TRANSFERENCIA: Si  $\alpha(x, x_1, \dots, x_n)$  es una fórmula interna cuyas variables libres sean exactamente las indicadas, la fórmula siguiente es un axioma:

$$\bigwedge^{\text{st}} x_1 \cdots x_n (\bigwedge^{\text{st}} x \alpha^{\text{in}}(x, x_1, \dots, x_n) \rightarrow \bigwedge^{\text{in}} x \alpha^{\text{in}}(x, x_1, \dots, x_n)).$$

IDEALIZACIÓN: Para toda fórmula  $\alpha(x, y, x_1, \dots, x_n)$  del lenguaje de ZFC

$$\bigwedge^{\text{in}} x_1 \cdots x_n \bigwedge A (A \text{ tiene tamaño estándar} \wedge \bigwedge z (z \subset A \wedge z \text{ finito} \rightarrow \bigvee^{\text{in}} x \bigwedge^{\text{in}} y \in z \alpha^{\text{in}}(x, y, x_1, \dots, x_n)) \rightarrow \bigvee^{\text{in}} x \bigwedge^{\text{in}} y \in A \alpha^{\text{in}}(x, y, x_1, \dots, x_n)).$$

ESTANDARIZACIÓN:  $\bigwedge x \bigvee^{\text{st}} y \bigwedge^{\text{st}} u (u \in y \leftrightarrow u \in x)$ .

Del principio de transferencia se sigue que si dos conjuntos estándar tienen los mismos elementos estándar entonces tienen los mismos elementos internos y, por transitividad, son iguales. Por consiguiente, del principio de estandarización se sigue que para todo conjunto  $A$  existe un único conjunto estándar  ${}^S A$  cuyos elementos estándar son los mismos que los de  $A$ .

De principio de transferencia se sigue, análogamente a como hemos hecho en la teoría de Nelson, que las versiones internas de todos los conceptos definibles en ZFC son de hecho estándar. Por ejemplo,  $\mathbb{N}^{\text{in}}$  es un conjunto estándar. Para probarlo aplicamos el principio de transferencia a la fórmula (sin parámetros)  $(z = \mathbb{N})^{\text{in}}$ , lo cual nos da que  $\bigvee^{\text{in}} z z = \mathbb{N}^{\text{in}} \rightarrow \bigvee^{\text{st}} z z = \mathbb{N}^{\text{in}}$ .

Similarmente, la unión de conjuntos estándar es estándar y, en general, cualquier conjunto definido mediante una expresión de ZFC a partir de parámetros estándar es estándar.

**Los números naturales** Ahora ya podemos demostrar que, tal y como habíamos anticipado,  $\mathbb{N} = {}^\circ \mathbb{N}^{\text{in}}$ , es decir, que los números naturales externos son los números naturales<sup>in</sup> estándar.

Una inclusión es simple: Relativizando teoremas de ZFC a conjuntos internos tenemos  $0 = \emptyset \in \mathbb{N}^{\text{in}}$  y  $\bigwedge n \in \mathbb{N}^{\text{in}} n + 1 \in \mathbb{N}^{\text{in}}$ . Aquí hemos usado que  $x \cup \{x\}$  es un término absoluto, con lo que si  $n$  es un conjunto interno entonces  $(n + 1)^{\text{in}} = (n \cup \{n\})^{\text{in}} = n \cup \{n\}$ .

Más aún, tenemos que  $0 \in {}^\circ \mathbb{N}^{\text{in}}$  y  $\bigwedge n \in {}^\circ \mathbb{N}^{\text{in}} n + 1 \in {}^\circ \mathbb{N}^{\text{in}}$ , pues si  $n$  es estándar entonces  $n + 1$  es estándar (por transferencia). El principio de inducción nos da entonces que  $\mathbb{N} \subset {}^\circ \mathbb{N}^{\text{in}}$ .

Supongamos ahora que  $A = {}^\circ \mathbb{N}^{\text{in}} \setminus \mathbb{N} \neq \emptyset$ . Entonces  $A \subset {}^S A \neq \emptyset$ . Todo conjunto interno que contenga números naturales<sup>in</sup> contiene un mínimo número natural<sup>in</sup> (esto es la versión interna de un teorema de ZFC). Sea  $m$  el mínimo número natural<sup>in</sup> de  ${}^S A$ . Como  ${}^S A$  es un conjunto estándar y  $m$  está definido a partir de  ${}^S A$ , el principio de transferencia nos da que  $m$  es estándar. En particular  $m \in {}^\circ \mathbb{N}^{\text{in}} \setminus \mathbb{N}$ . Necesariamente  $m \neq 0$ , luego existe  $n = m - 1$ , que

es un número natural<sup>in</sup> que además es estándar por transferencia. Más aún,  $(n < m)^{\text{in}}$ . Esto nos lleva a una contradicción, pues la minimalidad de  $m$  fuerza a que  $n \in \mathbb{N}$ , pero entonces también  $m = n + 1 \in \mathbb{N}$ . ■

No tiene sentido decir que la suma de números naturales es absoluta. Esto sería tanto como decir que

$$\bigwedge mn \in \mathbb{N}^{\text{in}} (m + n)^{\text{in}} = m + n,$$

pero si  $m$  y  $n$  son números naturales<sup>in</sup> no estándar, el miembro derecho no está definido (o, en sentido estricto, está definido como el conjunto vacío y, en cualquier caso, no se da la igualdad). Lo que sí es cierto es algo más débil que el carácter absoluto:

$$\bigwedge mn \in \mathbb{N} (m + n)^{\text{in}} = m + n,$$

es decir, la suma de números naturales<sup>in</sup> restringida a los números naturales externos coincide con la usual. Esto es consecuencia de que ambas cumplen la misma relación recurrente. Lo mismo vale para el producto, la exponenciación, la relación de orden, etc.

**La finitud** El concepto de finitud dista mucho de ser absoluto. Podemos definir los conjuntos finitos como los biyectables con números naturales. Entonces un conjunto interno es finito<sup>in</sup> si es biyectable<sup>in</sup> con un número natural<sup>in</sup>. Observemos que “biyectable” no es absoluto: ser biyectable<sup>in</sup> con un conjunto supone que la biyección sea interna.

Así pues, todo número natural<sup>in</sup> es por definición finito<sup>in</sup>, pero no tiene por qué ser finito. En primer lugar demostramos lo siguiente:

**Teorema B.6** *Un conjunto interno es estándar y finito<sup>in</sup> si y sólo si es finito y todos sus elementos son estándar, si y sólo si es estándar y finito.*

**DEMOSTRACIÓN:** Sea  $x$  estándar y finito<sup>in</sup>. Entonces su cardinal<sup>in</sup> es un número natural<sup>in</sup> estándar  $n$ , luego es un número natural, y existe una biyección  $f : n \rightarrow x$  interna que, por transferencia, podemos tomar estándar. Como los elementos de  $n$  son todos estándar y la imagen de un conjunto estándar por una aplicación estándar es estándar, concluimos que todos los elementos de  $x$  son estándar. Obviamente  $x$  es finito.

Recíprocamente, si  $x$  es un conjunto finito formado por conjuntos estándar, probaremos que  $x$  es estándar finito<sup>in</sup> por inducción sobre su cardinal. Si  $x = \emptyset$  es evidente. Supuesto cierto para conjuntos de cardinal  $n$ , pongamos que  $x$  tiene cardinal  $n + 1$ . Sea  $y \in x$  y sea  $x' = x \setminus \{y\}$ . Por hipótesis de inducción  $x'$  es estándar y finito<sup>in</sup>, pero  $\{y\}$  es interno porque el término  $\{y\}$  es absoluto, es estándar por transferencia y es finito<sup>in</sup> porque es un teorema de ZFC que  $\bigwedge y(\{y\} \text{ es finito})$ . Por otra parte, la unión de conjuntos estándar es estándar y la unión de conjuntos finitos<sup>in</sup> es finita<sup>in</sup>, luego  $x$  es estándar y finito<sup>in</sup>.

Respecto a la otra equivalencia, por la parte ya probada tenemos que todo conjunto estándar finito<sup>in</sup> es estándar y finito. Si  $x$  es estándar y finito probamos

que es finito<sup>in</sup> por el mismo argumento inductivo sobre el cardinal con la variante siguiente: si el cardinal de  $x$  es  $n + 1$ , en particular  $x \neq \emptyset$ , luego  $\bigvee y y \in x$  y por transferencia  $\bigvee^{\text{st}} y y \in x$ . Tomamos, pues  $y \in x$  estándar, y el resto del argumento vale igual. ■

Para ir más lejos necesitamos el principio de idealización. Vamos a demostrar el análogo al teorema A.3:

**Teorema B.7** *Sea  $\alpha(x, y, x_1, \dots, x_n)$  una fórmula de ZFC. Entonces*

$$\bigwedge^{\text{in}} x_1 \cdots x_n A(\bigwedge^{\text{st}} z(z \subset A \wedge z \text{ finito} \rightarrow \bigvee^{\text{in}} x \bigwedge y \in z \alpha^{\text{in}}(x, y)) \leftrightarrow \bigvee^{\text{in}} x \bigwedge^{\text{st}} y \in A \alpha^{\text{in}}(x, y)).$$

DEMOSTRACIÓN: Fijados  $x_1, \dots, x_n$  y  $A$ , suponemos la concurrencia y consideramos el conjunto  ${}^{\circ S}A$ , es decir, el conjunto de todos los elementos estándar del estandarizado de  $A$ , que obviamente tiene tamaño estándar. En efecto, se cumple que

$$\bigwedge z(z \subset {}^{\circ S}A \wedge z \text{ finito} \rightarrow \bigvee^{\text{in}} x \bigwedge^{\text{in}} y \in z \alpha^{\text{in}}(x, y)),$$

pues basta tener en cuenta que si  $z \subset {}^{\circ S}A \subset A$  es finito, como todos sus elementos son estándar, el teorema anterior nos da que es estándar, y podemos aplicar la hipótesis.

El principio de idealización nos da que  $\bigvee^{\text{in}} x \bigwedge^{\text{in}} y \in {}^{\circ S}A \alpha^{\text{in}}(x, y)$ , de donde se sigue claramente que  $\bigvee^{\text{in}} x \bigwedge^{\text{st}} y \in A \alpha^{\text{in}}(x, y)$ .

La implicación contraria es trivial, teniendo en cuenta que los elementos de un conjunto estándar finito son todos estándar. ■

Ahora ya podemos demostrar el teorema general sobre existencia de conjuntos no estándar:

**Teorema B.8** *Un conjunto interno  $A$  es estándar y finito si y sólo si todos sus elementos son estándar.*

DEMOSTRACIÓN: Aplicamos el teorema anterior a la relación dada por  $\alpha(x, y) \equiv x \in A \wedge x \neq y$ . Esta relación es concurrente en  $A$  si y sólo si  $A$  no es estándar y finito. Por el teorema anterior esto equivale a que  $A$  tiene un elemento no estándar. ■

Para completar la compatibilidad con la teoría de Nelson observamos que el teorema siguiente (análogo de A.6) se deduce del teorema anterior aplicado a la relación  $\alpha(x, y) \equiv y \in x \wedge x \subset A \wedge x$  es finito.

**Teorema B.9** *Todo conjunto interno tiene un subconjunto finito<sup>in</sup> que contiene a todos sus elementos estándar.*

Ahora es claro que todos los resultados que hemos demostrado en los capítulos precedentes a partir de la axiomática de Nelson pueden demostrarse también en la teoría de Hrbacek.

**El teorema de extensión** La versión general que hemos dado del principio de idealización permite demostrar una versión fuerte del principio de extensión (comparar con A.8).

**Teorema B.10 (Teorema de extensión)** *Si  $A$  es un conjunto estándar y  $f$  es una función externa en  ${}^\circ A$  con valores internos, entonces  $f$  se extiende a una función interna definida en  $A$ .*

DEMOSTRACIÓN: La función  $f$ , es decir, el conjunto  $\{(x, f(x)) \mid x \in {}^\circ A\}$ , tiene tamaño estándar, por lo que podemos aplicarle el principio de idealización. Si  $z \subset f$  es finito, entonces  $z$  es una función cuyo dominio es un subconjunto finito  $a$  de  ${}^\circ A$ . El conjunto  $a$  es finito y todos sus elementos son estándar, luego es estándar. Una simple inducción sobre su cardinal demuestra que  $z$  es interno, y es una función que contiene a todos los elementos de  $f$ . Aplicamos el principio de idealización a la fórmula “ $x$  es una función  $\wedge y \in f$ ”, con lo que obtenemos una función  $F$  que contiene a  $f$ , luego su dominio contiene a  ${}^\circ A$  y por transferencia a  $A$ . ■

**Regularidad y reemplazo** Es claro que el axioma de regularidad no se cumple en la teoría de Hrbacek. Por ejemplo, si tenemos en cuenta que  $\mathbb{N}^{\text{in}}$  no es sino el conjunto de todos los (ordinales finitos)<sup>in</sup> y que, por lo tanto, la relación de orden es la pertenencia, vemos que el conjunto  $\mathbb{N}^{\text{in}} \setminus {}^\circ \mathbb{N}$  no tiene un elemento minimal para la relación de pertenencia, lo cual contradice al axioma de regularidad.

Tampoco podemos suponer el axioma de reemplazo. Para verlo observemos que si  $\alpha$  es un ordinal<sup>in</sup> estándar, entonces  ${}^\circ \alpha$  está bien ordenado por la relación de pertenencia. En efecto, si  $x \subset {}^\circ \alpha$  y  $x \neq \emptyset$ , entonces  ${}^S x \subset \alpha$  es un subconjunto interno no vacío de  $\alpha$ , luego contiene un mínimo ordinal  $\beta$ , que por transferencia será estándar. Así pues,  $\beta \in x$  y es el mínimo de  $x$ .

Si suponemos el axioma de reemplazo podemos considerar el (único) ordinal  $\tilde{\alpha}$  semejante a  ${}^\circ \alpha$ . Ahora probamos que si  $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta}$  entonces  $\alpha = \beta$ . En efecto, tenemos una biyección  $f : {}^\circ \alpha \rightarrow {}^\circ \beta$  que conserva el orden y, aplicando el principio de transferencia, es fácil ver que  ${}^S f : \alpha \rightarrow \beta$  es una biyección que conserva el orden, luego  $\alpha = \beta$ .

Consideremos ahora el conjunto de todos los ordinales de cardinal menor o igual que el cardinal de  $\mathbb{N}^{\text{in}}$  (este cardinal tampoco puede definirse sin el axioma de reemplazo). De él seleccionamos el conjunto de los ordinales que son de la forma  $\tilde{\alpha}$ , para cierto ordinal<sup>in</sup> estándar  $\alpha$ , y otra vez por el axioma del reemplazo formamos el conjunto  $A$  de todos los ordinales<sup>in</sup> estándar  $\alpha$  tales que  $\tilde{\alpha}$  es inyectable en  $\mathbb{N}^{\text{in}}$ .

Ahora bien, el conjunto  $A$  contiene a todos los ordinales<sup>in</sup> estándar, pues si  $\alpha$  es uno de ellos y  $F$  es un conjunto finito<sup>in</sup> tal que  ${}^\circ \alpha \subset F \subset \alpha$ , existe  $f : F \rightarrow \mathbb{N}^{\text{in}}$  inyectiva, que se restringe a  ${}^\circ \alpha$  y prueba que  $\alpha \in A$ .

Cambiando  $A$  por su estandarizado, podemos suponer que  $A$  es estándar. Tenemos así un conjunto estándar que contiene a todos los ordinales<sup>in</sup> estándar.

Por transferencia  $A$  contiene a todos los ordinales<sup>in</sup>, pero esto es imposible, pues se demuestra en ZFC que ningún conjunto contiene a todos los ordinales.<sup>4</sup>

Pese a esto, en el apéndice C demostraremos que podemos suponer<sup>5</sup> que la relación de pertenencia está bien fundada en la clase  $S$  de todos los conjuntos estándar, es decir, que para todo conjunto no vacío  $A \subset S$ ,

$$\forall x \in A \wedge y \in A \ y \notin x.$$

Si dispusiéramos del axioma de reemplazo, podríamos definir por recursión transfinita sobre la relación de pertenencia una aplicación que a cada conjunto estándar  $x$  le asigna un conjunto  $\tilde{x}$  determinado por la relación recurrente

$$\tilde{x} = \{\tilde{y} \mid y \in x \wedge \text{st } y\}.$$

Más aún, la teoría general de recursión transfinita permite demostrar que esta aplicación biyecta la clase de todos los conjuntos estándar con una única clase transitiva (su colapso transitivo) de modo que se conserva la relación de pertenencia, es decir,  $x \in y \leftrightarrow \tilde{x} \in \tilde{y}$ . En el apéndice C veremos que podemos suponer todo esto y que el colapso transitivo de la clase de todos los conjuntos estándar es precisamente la clase  $R$  de todos los conjuntos regulares, es decir, la clase definida recurrentemente por

$$R_0 = \emptyset \wedge \bigwedge \alpha R_{\alpha+1} = \mathcal{P}R_\alpha \wedge \bigwedge \lambda R_\lambda = \bigcup_{\delta < \lambda} R_\delta \wedge R = \bigcup_\alpha R_\alpha,$$

donde  $\alpha$  recorre todos los ordinales y  $\lambda$  todos los ordinales límite (esta jerarquía tampoco puede definirse en general sin el axioma de reemplazo). Si suponemos todo esto, tenemos una aplicación  $* : R \rightarrow S$  que es un isomorfismo para la relación de pertenencia (la inversa de la función colapsante).

El lector familiarizado con la teoría de modelos básica comprenderá el significado de esta aplicación: el principio de transferencia afirma que  $S$  es un submodelo elemental de la clase  $I$  de los conjuntos internos, luego en particular satisface todos los axiomas de ZFC, y a través de la función colapsante llegamos a que  $R$  también los satisface. Así pues, aunque no podemos suponer que todos los conjuntos externos cumplen ZFC, sí que podemos suponer que la existe clase de los conjuntos regulares y que cumple todo ZFC. Todos los conceptos conjuntistas son absolutos para  $R$ , por lo que, por ejemplo,  $\mathbb{R}^* = (\mathbb{R}^R)^* = \mathbb{R}^S = \mathbb{R}^I = \mathbb{R}^{\text{in}}$ . En general,  $*$  transforma cada conjunto externo en su correspondiente interno.

---

<sup>4</sup>Ésta es una diferencia entre la teoría de Hrbacek y la de Nelson: en ésta sí que existe un ordinal mayor que todos los ordinales estándar, por la versión fuerte del principio de idealización.

<sup>5</sup>En todo este apartado “podemos suponer” significa que podemos tomarlo como axioma de modo que se sigue cumpliendo el teorema de conservación.



## Apéndice C

# El teorema de conservación

Dedicamos este apéndice a demostrar el teorema de conservación para la teoría de Nelson y para la de Hrbacek. Nos referiremos a ellas como N y H, respectivamente. Para la primera afirma que todo teorema interno de N es también un teorema de ZFC. Para la segunda afirma que si  $\alpha$  es una fórmula de ZFC tal que  $\alpha^{\text{in}}$  es un teorema de H, entonces  $\alpha$  es un teorema de ZFC. Los razonamientos que emplearemos serán metamatemáticos finitistas —es decir, afirmaciones sobre la teoría axiomática de conjuntos que no pueden ser entendidos como teoremas de teoría alguna— o teoremas de ZFC; en ningún caso han de entenderse como teoremas de la teoría de conjuntos no estándar.

### C.1 Modelos internos

La herramienta básica para obtener el teorema de conservación será la teoría de modelos internos, que fue ideada por von Neumann para probar la independencia del axioma de regularidad y que después uso Gödel para probar la consistencia de la hipótesis del continuo generalizada y el axioma de elección.

Seleccionamos cinco variables de (el lenguaje de) H, a las que llamaremos  $M$ ,  $E$ ,  $I$ ,  $S$  y  $d$ , de modo que ninguna expresión que consideremos tendrá estas variables salvo que lo indiquemos explícitamente. Para cada expresión  $\theta$  de H que no contenga estas variables, definimos su *relativización*  $\theta^{MEISd}$  (que abreviaremos por  $\theta^M$ ) como la expresión construida según las reglas siguientes.

- a)  $x^M \equiv x$ ,
- b)  $(t_1 = t_2)^M \equiv t_1 = t_2$ ,  
 $(t_1 \in t_2)^M \equiv t_1 E t_2 \equiv (t_1, t_2) \in E$ ,  
 $(st)^M \equiv t \in S$ ,  
 $(\text{in } t)^M \equiv t \in I$ .
- c)  $(\neg\alpha)^M \equiv \neg\alpha^M$ ,

- d)  $(\alpha \rightarrow \beta)^M \equiv \alpha^M \rightarrow \beta^M$ ,
- e)  $(\bigwedge x \alpha)^M \equiv \bigwedge x \in M \alpha^M$ ,
- f)  $(x|\alpha)^M \equiv x|((\bigvee^1 x(x \in M \wedge \alpha^M) \wedge x \in M \wedge \alpha^M) \vee (\neg(\bigvee^1 x(x \in M \wedge \alpha^M) \wedge x = d))$ .

En definitiva (dejando de lado las descripciones, que comentaremos enseguida) la relativización de  $\theta$  se obtiene cambiando cada  $\in$  por  $E$ , cada  $st$  por  $\in S$ , cada  $in$  por  $\in I$  y cada  $\bigwedge x$  por  $\bigwedge x \in M$ . Por ejemplo,

$$(\bigwedge u(u \in x \rightarrow u \in y))^M \equiv \bigwedge u \in M(u E x \rightarrow u E y)$$

Para interpretar esta definición supongamos que (en ZFC) hemos fijado un conjunto  $M$ , una relación  $E \subset M \times M$ , unos subconjuntos  $S \subset I \subset M$  y un elemento  $d \in M$ . Entonces, si  $\theta$  es una fórmula de H, la fórmula  $\theta^M$  es lo que significa  $\theta$  si llamamos “conjuntos” a los elementos de  $M$  únicamente, “conjuntos estándar” a los elementos de  $S$ , “conjuntos internos” a los conjuntos de  $I$  y consideramos que la relación de pertenencia es la relación  $E$ .

Por ejemplo,  $(x \subset y)^M$  es la fórmula que acabamos de calcular, de modo que “ $x$  es un subconjunto de  $y$  visto desde  $M$ ” si todo elemento de  $M$  que “pertenece en  $M$ ” a  $x$  (es decir, que cumple  $u E x$ ), también “pertenece en  $M$ ” a  $y$ .

Similarmente  $\emptyset^M$  está definido como “el único elemento  $x \in M$  que cumple  $\bigwedge u \in M \neg u E x$ , si es que existe tal elemento, o bien  $d$  si no existe”.

Ésta es la idea subyacente a la definición de relativización, pero en sentido estricto lo único que hemos hecho ha sido asociar a cada expresión  $\theta$  de H otra expresión  $\theta^M$  de ZFC cuyas variables libres son las mismas de  $\theta$  más quizá las variables  $M$ ,  $E$ ,  $I$ ,  $S$  y  $d$ . Es claro que si  $\theta$  es una fórmula de N (resp. de ZFC) entonces  $\theta^M$  no contiene la variable  $I$  (resp.  $S$  e  $I$ ), por lo que podemos hablar de  $\theta^{MESd}$  (resp.  $\theta^{MEd}$ ).

Todo lo anterior ha de entenderse metamatemáticamente, mientras que la definición siguiente es una definición en ZFC:

**Definición C.1** Llamaremos *modelo* a toda quintupla  $\mathcal{M} = (M, E, I, S, d)$  tal que  $E \subset M \times M$ ,  $d \in M$ ,  $(S \subset I \subset M)$ .

Ésta es la definición de un modelo del lenguaje de H. Similarmente se define un modelo para el lenguaje de N suprimiendo la  $I$ , mientras que un modelo para el lenguaje de ZFC se obtiene suprimiendo también la  $S$ . Para referirnos a este último caso hablaremos de un *modelo estándar*. Cuando no indiquemos a qué tipo de modelo nos estamos refiriendo o a qué lenguaje pertenecen las fórmulas que estamos considerando será porque lo que digamos valdrá en cualquiera de los tres casos posibles.

En la práctica diremos que “ $\mathcal{M}$  es un modelo” sobrentendiendo que lo es con un universo  $M$ , una relación  $E$ , una descripción impropia  $d$ , etc.

La relativización de los signos lógicos definidos es fácil de calcular:

$$(\alpha \vee \beta)^M \equiv \alpha^M \vee \beta^M, \quad (\alpha \wedge \beta)^M \equiv \alpha^M \wedge \beta^M, \quad (\alpha \leftrightarrow \beta)^M \equiv \alpha^M \leftrightarrow \beta^M.$$

Para el cuantificador existencial tenemos que

$$(\exists x \alpha)^M \equiv \exists x \in M \alpha^M, \quad (\exists^1 x \alpha)^M \leftrightarrow \exists^1 x \in M \alpha^M.$$

(Comparar con la relativización a conjuntos internos en la teoría de Hrbacek, apéndice B)

**Teorema C.2** *Si  $t(x_1, \dots, x_n)$  es un término con las variables libres indicadas. se prueba en ZFC que si  $\mathcal{M}$  es un modelo entonces  $\bigwedge x_1 \dots x_n \in M t^M \in M$ .*

DEMOSTRACIÓN: Si  $t \equiv x$  el teorema se reduce a  $\bigwedge x \in M x \in M$ , lo cual es obvio, mientras que si  $t \equiv x | \alpha(x, x_1, \dots, x_n)$  entonces  $t^M$  es el único elemento de  $M$  que cumple  $\alpha^M$  si existe tal elemento (y entonces está en  $M$ ), o bien  $d$  si no existe (y en tal caso también está en  $M$  por definición de modelo). ■

Informalmente hemos de pensar que  $t^M$  es lo que llamaría  $t$  alguien que “creyera” que los conjuntos son los elementos de  $M$ , que la relación de pertenencia es  $E$ , etc.

**Definición C.3** Sea  $\Gamma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$  una colección finita de fórmulas y sean  $x_1, \dots, x_n$  las variables que aparezcan libres en ellas. Abreviaremos

$$\mathcal{M} \models \Gamma \equiv \bigwedge x_1 \dots x_n \in M \alpha_1^M \wedge \dots \wedge \alpha_m^M.$$

De este modo,  $\mathcal{M} \models \Gamma$  es una fórmula cuyas únicas variables libres son  $M$ ,  $E$ ,  $I$ ,  $S$  y  $d$  (o menos si consideramos fórmulas y modelos de  $\mathbb{N}$  o de ZFC). Se suele leer “ $\mathcal{M}$  es un modelo de  $\Gamma$ ” y también se dice que las fórmulas de  $\Gamma$  son verdaderas en  $\mathcal{M}$ . Si tenemos una sola fórmula  $\alpha$  escribiremos también  $\mathcal{M} \models \alpha$ .

Es importante observar que no podemos definir de este modo qué significa que infinitas fórmulas sean verdaderas en un modelo dado, pues tendríamos que formar la conjunción de infinitas fórmulas. La definición es posible, pero eso nos llevaría a la teoría de modelos propiamente dicha en vez de a la teoría de modelos internos, que es la que necesitamos.

El resultado fundamental sobre modelos internos es el siguiente:

**Teorema C.4** *Sea  $\Gamma$  una colección finita de fórmulas y  $\theta$  una consecuencia lógica de  $\Gamma$ . Se demuestra en ZFC que si  $\mathcal{M} \models \Gamma$  entonces  $\mathcal{M} \models \theta$ .*

Este teorema se demuestra con un argumento formalmente análogo al que prueba el teorema B.2 (ver la observación tras éste resultado). Hemos de insistir en el carácter constructivo de la prueba: a partir de una demostración de  $\theta$  a partir de las premisas de  $\Gamma$  es posible obtener explícitamente una demostración de que si  $\mathcal{M} \models \Gamma$  entonces  $\mathcal{M} \models \theta$ .

El teorema siguiente es una de las piedras angulares de nuestra demostración del teorema de conservación. Recordemos que en ZFC se define la jerarquía  $\{V_\alpha\}$ , donde  $\alpha$  recorre los números ordinales, de modo que

$$V_0 = \emptyset \wedge \bigwedge \alpha V_{\alpha+1} = \mathcal{P}V_\alpha \wedge \bigwedge \lambda V_\lambda = \bigcup_{\delta < \lambda} V_\delta,$$

donde  $\lambda$  varía en los ordinales límite, y se demuestra que todo conjunto está en un cierto  $V_\alpha$ .

Por conveniencia, nosotros llamaremos  $V_\alpha$  a lo que normalmente se llama  $V_{\omega+\alpha}$ . Los conjuntos  $V_\alpha$  son transitivos, es decir, si  $x \in V_\alpha$  entonces  $x \subset V_\alpha$ , y forman una sucesión creciente: si  $\alpha \leq \beta$  entonces  $V_\alpha \subset V_\beta$ .

Consideraremos a  $V_\alpha$  como un modelo estándar con la relación de pertenencia usual y con  $d = \emptyset$ .

**Teorema C.5 (Teorema de Reflexión)** *Sea  $\Gamma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$  una colección finita de fórmulas internas cuyas variables libres estén entre  $x_1, \dots, x_n$ . Entonces se demuestra en ZFC que existe un ordinal límite  $\lambda$  tal que*

$$\bigwedge x_1 \dots x_n \in V_\lambda (\alpha_i^{V_\lambda} \leftrightarrow \alpha_i), \quad i = 1, \dots, m.$$

DEMOSTRACIÓN: Es claro que podemos construir una sucesión finita de expresiones  $\theta_1, \dots, \theta_r$  con las propiedades siguientes:

- a) Las fórmulas  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  están entre  $\theta_1, \dots, \theta_r$ .
- b) Todas las subexpresiones de cada  $\theta_i$  aparecen previamente en la sucesión.
- c) Si  $\theta_i \equiv x|\alpha$ , entonces  $\bigvee^1 x \alpha$  (y, por consiguiente,  $\alpha$ ) aparece previamente en la sucesión.

Vamos a construir una sucesión de ordinales  $\alpha_0 < \alpha_1 < \dots$ . Tomamos como  $\alpha_0$  cualquier ordinal. Supongamos definido  $\alpha_k$ .

Si  $\theta_i \equiv \bigwedge x \alpha(x, x_1, \dots, x_n)$  para cada  $n$ -tupla  $(x_1, \dots, x_n) \in V_{\alpha_k}^n$  definimos  $f(x_1, \dots, x_n)$  como el mínimo ordinal  $\alpha$  tal que existe  $x \in V_\alpha$  tal que  $\neg \alpha(x, x_1, \dots, x_n)$  si es que existe tal  $x$ , y  $\alpha = 0$  en caso contrario.

Sea  $\alpha_k^i$  el mínimo ordinal tal que  $V_{\alpha_k^i}$  contiene el rango de  $f$ , es decir, tal que  $f : V_{\alpha_k}^n \longrightarrow V_{\alpha_k^i}$ .

Si  $\theta_i$  no es de esta forma, definimos  $\alpha_r^i = 0$ . Sea  $\alpha_{r+1}$  el máximo entre  $\alpha_r + 1$  y todos los  $\alpha_r^i$ . El supremo de la sucesión  $\{\alpha_r\}$  es un ordinal límite  $\lambda$ . Veamos que cumple lo pedido.

Por construcción,  $(x|x = x) \in V_\lambda$  y si  $\theta_i \equiv \bigwedge x \alpha(x, x_1, \dots, x_n)$  y para ciertos  $x_1, \dots, x_n \in V_\lambda$  existe un  $x$  tal que  $\neg \alpha(x, x_1, \dots, x_n)$ , entonces existe un  $x$  que cumple esto y además está en  $V_\lambda$ .

Vamos a probar por inducción sobre  $i$  que si  $\theta_i$  es un término con variables libres  $x_1, \dots, x_n$  entonces

$$\bigwedge x_1 \cdots x_n \in V_\lambda(\theta_i(x_1, \dots, x_n) = \theta_i^{V_\lambda}(x_1, \dots, x_n))$$

y si  $\theta_i$  es una fórmula entonces

$$\bigwedge x_1 \cdots x_n \in V_\lambda(\theta_i(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \theta_i^{V_\lambda}(x_1, \dots, x_n)).$$

Como las  $\alpha_j$  del enunciado están entre las  $\theta_i$ , el teorema quedará probado.

Si  $\theta_i \equiv x$  entonces lo que hay que probar es que  $\bigwedge x \in V_\lambda x = x$ , lo cual es obvio.

Si  $\theta_i \equiv t_1 \in t_2$ , entonces los términos  $t_1$  y  $t_2$  aparecen antes en la sucesión, luego por hipótesis de inducción

$$\bigwedge x_1 \cdots x_n \in V_\lambda(t_1 = t_1^{V_\lambda} \wedge t_2 = t_2^{V_\lambda}).$$

Lo que hemos de probar es que  $\bigwedge x_1 \cdots x_n \in V_\lambda(t_1 \in t_2 \leftrightarrow t_1^{V_\lambda} \in t_2^{V_\lambda})$ , lo cual es obvio. El caso en que  $\theta_i \equiv t_1 = t_2$  es idéntico a este.

Si  $\theta_i \equiv \neg\alpha$ , por hipótesis de inducción

$$\bigwedge x_1 \cdots x_n \in V_\lambda(\alpha \leftrightarrow \alpha^{V_\lambda}),$$

y es claro que esto sigue siendo cierto si negamos ambos términos. El caso en que  $\theta_i \equiv \alpha \rightarrow \beta$  es análogo.

Si  $\theta_i \equiv \bigwedge x \alpha$ , por hipótesis de inducción tenemos que

$$\bigwedge x x_1 \cdots x_n \in V_\lambda(\alpha(x, x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \alpha^{V_\lambda}(x, x_1, \dots, x_n))$$

y hemos de probar que

$$\bigwedge x_1 \cdots x_n \in V_\lambda(\bigwedge x \alpha(x, x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \bigwedge x \in V_\lambda \alpha^{V_\lambda}(x, x_1, \dots, x_n)).$$

Ahora bien, fijados  $x_1, \dots, x_n \in V_\lambda$ , si suponemos que  $\bigwedge x \alpha$  y tomamos un  $x \in V_\lambda$ , tenemos  $\alpha(x, x_1, \dots, x_n)$  y por hipótesis de inducción  $\alpha^{V_\lambda}(x, x_1, \dots, x_n)$ , es decir, se cumple  $\bigwedge x \in V_\lambda \alpha^{V_\lambda}$ .

Recíprocamente, si  $\neg \bigwedge x \alpha$  existe un  $x$  que cumple  $\neg \alpha(x, x_1, \dots, x_n)$  y por construcción de  $\lambda$  existe un  $x \in V_\lambda$  tal que  $\neg \alpha(x, x_1, \dots, x_n)$ . Por hipótesis de inducción  $\neg \alpha^{V_\lambda}(x, x_1, \dots, x_n)$ , luego no se cumple  $\bigwedge x \in V_\lambda \alpha^{V_\lambda}$ .

Supongamos finalmente que  $\theta_i \equiv x|\alpha$ . Entonces, fijados  $x_1, \dots, x_n \in V_\lambda$ , por hipótesis de inducción

$$\bigvee^1 x \alpha(x, x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \bigvee^1 x \in V_\lambda \alpha^{V_\lambda}(x, x_1, \dots, x_n)$$

y

$$\bigwedge x \in V_\lambda(\alpha(x, x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \alpha^{V_\lambda}(x, x_1, \dots, x_n)).$$

Supongamos que se dan las dos unicidades y sea  $x$  el único conjunto de  $V_\lambda$  que cumple  $\alpha^{V_\lambda}$ . Entonces también cumple  $\alpha$ , luego es de hecho el único conjunto que cumple  $\alpha$ . Por tanto  $(x|\alpha) = x = (x|\alpha)^{V_\lambda}$ .

Si no se dan las unicidades,  $(x|\alpha) = \emptyset = (x|\alpha)^{V_\lambda}$ . ■

El último concepto que necesitamos sobre modelos internos es el de inmersión elemental:

**Definición C.6** Una *inmersión elemental*  $j : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}'$  entre dos modelos (del mismo lenguaje) es una aplicación  $j : M \longrightarrow M'$  tal que para toda fórmula  $\alpha(x_1, \dots, x_n)$  con las variables libres indicadas se cumple

$$\bigwedge x_1 \cdots x_n \in M (\alpha^M(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \alpha^{M'}(j(x_1), \dots, j(x_n))). \quad (\text{C.1})$$

**Nota** Esta definición carece de sentido tal y como está enunciada, pues la afirmación “para toda fórmula  $\alpha$ ” carece de significado matemático. Fijada una colección finita de fórmulas  $\Gamma$ , podemos definir una  $\Gamma$ -inmersión elemental como la conjunción de las equivalencias (C.1) para cada una de las fórmulas  $\alpha$  de  $\Gamma$ . En la práctica, cuando tomemos como hipótesis que una aplicación  $j$  es una inmersión elemental se entenderá que lo es respecto a una colección finita de fórmulas suficientemente grande como para que se cumpla la tesis que queremos demostrar, mientras que cuando demostremos que una aplicación  $j$  es una inmersión elemental significará que, para toda colección finita de fórmulas  $\Gamma$  es posible demostrar que  $j$  es una  $\Gamma$ -inmersión elemental.

Por ejemplo, podemos decir que toda inmersión elemental es inyectiva, aplicando la definición a la fórmula  $x = y$ , con lo cual hay que entender que toda inmersión elemental respecto a una colección finita de fórmulas que contenga a  $x = y$  es inyectiva.

**Teorema C.7** Si  $j : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}'$  es una inmersión elemental tal que  $j(d) = d'$ , entonces para todo término  $t(x_1, \dots, x_n)$  se cumple

$$\bigwedge x_1 \cdots x_n \in M (j(t^M(x_1, \dots, x_n)) = t^{M'}(j(x_1), \dots, j(x_n))).$$

DEMOSTRACIÓN: Si  $t$  es una variable es trivial, y si  $t = x|\alpha$ , distinguimos dos casos: Si se cumple que  $\bigvee^1 x \in M \alpha^M(x, x_1, \dots, x_n)$ , entonces

$$\bigvee^1 x \in M' \alpha^{M'}(x, j(x_1), \dots, j(x_n))$$

(pues estas fórmulas son las relativizaciones de  $\bigvee^1 x \alpha$  a  $M$  y  $M'$ ). Pero más aún, si  $x \in M$  es el único que cumple  $\alpha^M(x, x_1, \dots, x_n)$ , entonces se cumple  $\alpha^{M'}(j(x), j(x_1), \dots, j(x_n))$ . Por consiguiente  $x = (x|\alpha)^M$  y  $j(x) = (x|\alpha)^{M'}$ .

Si no se da la unicidad en  $M$ , tampoco se da en  $M'$ , luego  $j((x|\alpha)^M) = j(d) = d' = (x|\alpha)^{M'}$ . ■

Terminamos esbozando el plan de la prueba del teorema de conservación. Suponemos que una fórmula interna  $\alpha$  es demostrable a partir de los axiomas

de  $\mathcal{N}$ . Aunque los axiomas son infinitos, en una demostración sólo puede aparecer una cantidad finita de ellos. Sea  $\Gamma$  la colección de todos ellos. No perdemos generalidad si suponemos que  $\alpha$  no tiene variables libres.

El resultado principal que nos falta por probar es (aproximadamente) el siguiente:

*Si  $\Gamma$  es una colección finita de axiomas de  $\mathcal{N}$  y  $\alpha$  es una fórmula interna sin variables libres, existe una colección finita  $\Delta$  de axiomas de ZFC de modo que en ZFC se demuestra que si el modelo estándar  $\mathcal{M} = V_\lambda$  cumple  $\mathcal{M} \models \Delta$  entonces existe un modelo no estándar  $\mathcal{N}$  tal que  $\mathcal{N} \models \Gamma$  y además  $\mathcal{M} \models \alpha$  si y sólo si  $\mathcal{N} \models \alpha$ .*

De hecho tendremos una inmersión elemental  $j : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ , de modo que los conjuntos estándar de  $\mathcal{N}$  serán los de la imagen de  $j$ .

Admitiendo esto, la prueba del teorema de conservación es como sigue: consideramos la colección  $\Delta$  correspondiente a los axiomas  $\Gamma$  con los que se prueba  $\alpha$ , aplicamos el teorema de reflexión a las fórmulas de  $\Delta$  y a  $\alpha$ , de modo que encontramos un modelo  $\mathcal{M} = V_\lambda$  tal que  $\mathcal{M} \models \Delta$  y además  $\alpha \leftrightarrow \mathcal{M} \models \alpha$ . El teorema que nos falta probar nos da un modelo no estándar  $\mathcal{N}$  tal que  $\mathcal{N} \models \Gamma$ , luego  $\mathcal{N} \models \alpha$ , luego  $\mathcal{M} \models \alpha$ , luego  $\alpha$ . En definitiva, hemos probado  $\alpha$  en ZFC.

Insistimos en que la prueba es totalmente constructiva: si tenemos una demostración explícita de  $\alpha$  a partir de los axiomas no estándar  $\Gamma$ , el teorema que vamos a probar nos da explícitamente la colección  $\Delta$ , el teorema de reflexión nos da una prueba explícita en ZFC de que  $\mathcal{M} \models \Delta$  y de la implicación  $\alpha \leftrightarrow \mathcal{M} \models \alpha$ . El teorema que nos falta probar nos da una prueba explícita en ZFC de que  $\mathcal{M} \models \Delta \rightarrow \mathcal{N} \models \Gamma$  y  $\mathcal{M} \models \alpha \leftrightarrow \mathcal{N} \models \alpha$ , con lo que tenemos una prueba explícita de que  $\mathcal{N} \models \Gamma$  y  $\alpha \leftrightarrow \mathcal{N} \models \alpha$ , el teorema C.4 nos da una prueba explícita en ZFC de que  $\mathcal{N} \models \alpha$  y terminamos con una prueba explícita de  $\alpha$  en ZFC.

El argumento para H es ligeramente más complicado, pero a grandes rasgos coincide con éste.

## C.2 Ultrapotencias

En esta sección veremos cómo construir modelos no estándar a partir de modelos estándar. Recordemos algunas definiciones conjuntistas:

**Definición C.8** Un *filtro* en un conjunto  $I$  es una familia  $F$  de subconjuntos de  $I$  con las propiedades siguientes:

- a)  $I \in F$ ,  $\emptyset \notin F$ ,
- b) Si  $X \subset Y \subset I$  y  $X \in F$  entonces  $Y \in F$ ,
- c) Si  $X, Y \in F$  entonces  $X \cap Y \in F$ .

Un *ultrafiltro*  $U$  en un conjunto  $I$  es un filtro con la propiedad adicional de que si  $X \subset I$  entonces  $X \in U$  o  $I \setminus X \in U$ .

Toda familia de subconjuntos de  $I$  con la propiedad de la intersección finita (es decir, tal que la intersección de cualquier subfamilia finita es no vacía) está contenida en un filtro, a saber, en el filtro de todos los subconjuntos de  $I$  que contienen una intersección finita de conjuntos de la familia.

De aquí se sigue fácilmente que un ultrafiltro es un filtro maximal respecto de la inclusión, por lo que el lema de Zorn nos da que todo filtro está contenido en un ultrafiltro. En particular, toda familia de subconjuntos de  $I$  con la propiedad de la intersección finita está contenida en un ultrafiltro. El teorema siguiente es inmediato:

**Teorema C.9** Sean  $V$  e  $I$  dos conjuntos, sea  $U$  un ultrafiltro en  $I$  y sea  $V^I$  el conjunto de todas las aplicaciones de  $I$  en  $V$ . La relación

$$f =_U g \leftrightarrow \{i \in I \mid f(i) = g(i)\} \in U$$

es una relación de equivalencia en  $V^I$ .

**Definición C.10** Si  $V$  es un conjunto y  $U$  es un ultrafiltro en un conjunto  $I$ , llamaremos *ultrapotencia* de  $V$  respecto a  $U$  al conjunto cociente  ${}^*V = V^I/U$  de  $V^I$  respecto de la relación de equivalencia  $=_U$ .

Definimos la inmersión natural  $j : V \longrightarrow {}^*V$  como la aplicación dada por  $j(x) = [c_x]$ , donde  $c_x : I \longrightarrow V$  es la aplicación constante  $c_x(i) = x$ . Es claro que  $j$  es inyectiva.

Supongamos ahora que  $(V, E, d)$  es un modelo estándar. Podemos definir la relación  ${}^*E$  en  ${}^*V$  mediante

$$[f] {}^*E [g] \leftrightarrow \{i \in I \mid f(i) E g(i)\} \in U.$$

Es inmediato comprobar que esta definición no depende de los representantes  $f$  y  $g$  de las clases de equivalencia, así como que la aplicación  $j$  cumple

$$\bigwedge xy \in V (x E y \leftrightarrow j(x) {}^*E j(y)).$$

El teorema fundamental sobre ultrapotencias es el siguiente:

**Teorema C.11** Sea  $\theta$  una fórmula interna con  $x_1, \dots, x_n$  como variables libres. Entonces en ZFC se demuestra lo siguiente: Si  $(V, E, d)$  es un modelo estándar y  ${}^*V$  es una ultrapotencia, entonces  $({}^*V, {}^*E, j(d))$  es un modelo estándar tal que

$$\bigwedge f_1 \cdots f_n \in V^I (\theta_k^V([f_1], \dots, [f_n]) \leftrightarrow \{i \in I \mid \theta_k^V(f_1(i), \dots, f_n(i))\} \in U).$$

En particular  $j : V \longrightarrow {}^*V$  es una inmersión elemental.

DEMOSTRACIÓN: Sea  $\theta_1, \dots, \theta_r$  una sucesión de expresiones en las mismas condiciones exigidas en la prueba del teorema de reflexión. Veamos por inducción sobre  $k$  que si  $\theta_k$  es un término y  $f_1, \dots, f_n \in V^I$  entonces

$$\theta_i^{*V}([f_1], \dots, [f_n]) = [g],$$

donde  $g : I \rightarrow V$  viene dada por  $g(i) = \theta_k^V(f_1(i), \dots, f_n(i))$ , mientras que si  $\theta_k$  es una fórmula entonces cumple la propiedad del enunciado.

Si  $\theta_k \equiv x_1$  tenemos que  $g = f_1$ , luego el resultado es trivial.

Si  $\theta_k \equiv t_1 \in t_2$  y  $f_1, \dots, f_n \in V^I$ , tenemos que

$$t_1^{*V}([f_1], \dots, [f_n]) = [g_1], \quad t_2^{*V}([f_1], \dots, [f_n]) = [g_2],$$

donde  $g_1$  y  $g_2$  están determinados por la hipótesis de inducción. Así,

$$\begin{aligned} \theta_k^{*V}([f_1], \dots, [f_n]) &\leftrightarrow [g_1] \text{ }^*E [g_2] \leftrightarrow \{i \in I \mid g_1(i) \text{ } E g_2(i)\} \in U \\ &\leftrightarrow \{i \in I \mid t_1^V(f_1(i), \dots, f_n(i)) \text{ } E t_2^V(f_1(i), \dots, f_n(i))\} \in U \\ &\leftrightarrow \{i \in I \mid \theta_k^V(f_1(i), \dots, f_n(i))\} \in U. \end{aligned}$$

El caso  $\theta_k \equiv t_1 = t_2$  es similar, usando la definición de  $=_U$ .

Si  $\theta_k \equiv \neg\alpha$ , por hipótesis de inducción tenemos que

$$\alpha^{*V}([f_1], \dots, [f_n]) \leftrightarrow \{i \in I \mid \alpha^V(f_1(i), \dots, f_n(i))\} \in U,$$

y como  $U$  es un ultrafiltro

$$\neg\alpha^{*V}([f_1], \dots, [f_n]) \leftrightarrow V^I \setminus \{i \in I \mid \alpha^V(f_1(i), \dots, f_n(i))\} \in U,$$

pero esto equivale a

$$\neg\alpha^{*V}([f_1], \dots, [f_n]) \leftrightarrow \{i \in I \mid \neg\alpha^V(f_1(i), \dots, f_n(i))\} \in U,$$

que es lo que había que probar.

Si  $\theta_k \equiv \alpha \rightarrow \beta$  probaremos la coimplicación de las negaciones:

$$\neg(\alpha \rightarrow \beta)^{*V}([f_1], \dots, [f_n]) \leftrightarrow \alpha^{*V}([f_1], \dots, [f_n]) \wedge \neg\beta^{*V}([f_1], \dots, [f_n]).$$

Usando la hipótesis de inducción y el caso anterior esto equivale a

$$\begin{aligned} \{i \in I \mid \alpha^V(f_1(i), \dots, f_n(i))\} \in U \wedge \{i \in I \mid \neg\beta^V(f_1(i), \dots, f_n(i))\} \in U \\ \leftrightarrow \{i \in I \mid (\alpha^V \wedge \neg\beta^V)(f_1(i), \dots, f_n(i))\} \in U \\ \leftrightarrow \{i \in I \mid \neg(\alpha \rightarrow \beta)^V(f_1(i), \dots, f_n(i))\} \in U. \end{aligned}$$

Usando que  $U$  es un ultrafiltro esto equivale a que

$$\{i \in I \mid \theta_k^V(f_1(i), \dots, f_n(i))\} \notin U,$$

que es lo que teníamos que probar.

Si  $\theta_k \equiv \bigwedge x \alpha$  probaremos también la coimplicación de las negaciones:

$$-\theta_k^{*V}([f_1], \dots, [f_n]) \leftrightarrow \forall f \in V^I \neg \alpha^{*V}([f], [f_1], \dots, [f_n])$$

Usando la hipótesis de inducción y el caso  $\neg \alpha$  ya probado, esto equivale a

$$\forall f \in V^I \{i \in I \mid \neg \alpha^V(f(i), f_1(i), \dots, f_n(i))\} \in U. \quad (C.2)$$

Falta probar que esto equivale a

$$\{i \in I \mid \forall x \in V \neg \alpha^V(x, f_1(i), \dots, f_n(i))\} \in U. \quad (C.3)$$

En efecto, si existe  $f$  según (C.2) es claro que el conjunto que está en  $U$  según (C.2) está contenido en el conjunto que ha de estar en  $U$  según (C.3), luego se cumple (C.3). Recíprocamente, si se cumple (C.3), para cada  $i$  en el conjunto indicado tomamos  $f(i) \in V$  de modo que se cumpla  $\alpha^V(f(i), f_1(i), \dots, f_n(i))$ , y si  $i$  no está en el conjunto dado por (C.3) tomamos como  $f(i)$  cualquier elemento de  $V$ . Es claro que  $f$  cumple (C.2).

Si  $\theta_k \equiv x \mid \alpha$ , sea  $g(i) = \theta_r^V(f_1(i), \dots, f_n(i))$ . Por hipótesis de inducción

$$\overset{1}{\forall} x \in {}^*V \alpha^{*V}(x, [f_1], \dots, [f_n]) \leftrightarrow \{i \in I \mid \overset{1}{\forall} x \in V \alpha^V(x, f_1(i), \dots, f_n(i))\} \in U.$$

Llamemos  $X$  al conjunto de la derecha. Si se da la unicidad, entonces  $X \in U$  y hemos de probar que  $[g]$  es el único elemento de  ${}^*V$  que cumple  $\alpha^{*V}$ . Ahora bien, por la unicidad basta ver que  $\alpha^{*V}([g], [f_1], \dots, [f_n])$  y por hipótesis de inducción esto sucede si y sólo si

$$\{i \in I \mid \alpha^V(g(i), f_1(i), \dots, f_n(i))\} \in U,$$

pero es que  $X$  está contenido en este conjunto.

Si no se da la unicidad, entonces  $I \setminus X \in U$  y para cada  $i \in I \setminus U$  tenemos que  $g(i) = d = c_d(i)$ , luego  $[g] = j([d]) = \theta_r^{*V}([f_1], \dots, [f_n])$ . ■

En particular, si  $\theta$  no tiene variables libres hemos obtenido que

$$V \models \theta \leftrightarrow {}^*V \models \theta.$$

A su vez esto implica que si  $V$  satisface una colección finita  $\Gamma$  de axiomas de ZFC entonces  ${}^*V$  también los satisface (los axiomas de ZFC no tienen variables libres).

Podemos convertir a  ${}^*V$  en un modelo no estándar (del lenguaje de  $\mathbb{N}$ ) definiendo  $S = j[V]$ , es decir, tomando como conjuntos estándar las imágenes por  $j$  de los conjuntos de  $V$ .

**Teorema C.12** Si  $V$  es un modelo estándar y  ${}^*V$  es una ultrapotencia, entonces  ${}^*V$  cumple el principio de transferencia de  $N$ .

DEMOSTRACIÓN: Más precisamente, lo que vamos a probar es que si

$$\alpha \equiv \bigwedge^{\text{st}} x_1 \cdots x_n (\bigwedge^{\text{st}} x\theta \rightarrow \bigwedge x\theta)$$

es un caso particular del principio de transferencia (donde  $\theta$  es una fórmula de ZFC) entonces en ZFC se demuestra que si  $V$  es un modelo estándar y  ${}^*V$  una ultrapotencia entonces  ${}^*V \models \alpha$ .

En efecto, hemos de probar  $\alpha^{}^*V$ , que es la fórmula

$$\bigwedge x_1 \cdots x_n \in S (\bigwedge x \in S \theta^{}^*V(x, x_1, \dots, x_n) \rightarrow \bigwedge x \in {}^*V \theta^{}^*V(x, x_1, \dots, x_n)).$$

Fijamos  $j(x_1), \dots, j(x_n) \in S$ , donde  $x_1, \dots, x_n \in V$ . Suponemos que

$$\bigwedge x \in S \theta^{}^*V(x, j(x_1), \dots, j(x_n))$$

o, lo que es lo mismo,

$$\bigwedge x \in V \theta^{}^*V(j(x), j(x_1), \dots, j(x_n)).$$

Por el teorema anterior esto equivale a

$$\bigwedge x \in V \theta^V(x, x_1, \dots, x_n) \equiv (\bigwedge x\theta)^V(x_1, \dots, x_n),$$

y aplicando otra vez el teorema  $(\bigwedge x\theta)^{}^*V(j(x_1), \dots, j(x_n))$ . Así pues,

$$\bigwedge x \in {}^*V \theta^{}^*V(x, j(x_1), \dots, j(x_n)),$$

como teníamos que probar. ■

Ahora probaremos que si el ultrafiltro  $U$  se escoge adecuadamente entonces  ${}^*V$  satisface una forma débil del principio de idealización.

**Definición C.13** Sea  $V$  un conjunto y  ${}^*V$  una ultrapotencia. Para cada  $X \subset V$  definimos  ${}^*X \subset {}^*V$  como el conjunto dado por

$$[f] \in {}^*X \leftrightarrow \{i \in I \mid f(i) \in X\} \in U.$$

Se comprueba inmediatamente que la definición no depende de la elección del representante  $f$ , así como que se cumplen las propiedades siguientes:

$${}^*(X \cap Y) = {}^*X \cap {}^*Y, \quad {}^*(X \cup Y) = {}^*X \cup {}^*Y, \quad {}^*(V \setminus X) = {}^*V \setminus {}^*X.$$

$$\bigwedge x \in V (x \in X \leftrightarrow j(x) \in {}^*X).$$

Llamemos  $\tilde{V}$  al conjunto de todos los ultrafiltros en  $V$  y sea  $t : {}^*V \rightarrow \tilde{V}$  la aplicación dada por  $t(\xi) = \{X \in \mathcal{P}V \mid \xi \in {}^*X\}$ . Diremos que la ultrapotencia  ${}^*V$  es *adecuada* si la aplicación  $t$  es suprayectiva.

**Teorema C.14** *Todo conjunto tiene una ultrapotencia adecuada.*

DEMOSTRACIÓN: Sea  $V$  un conjunto y sea  $I$  el conjunto de todos los subconjuntos finitos de  $\mathcal{P}V$ . Para cada  $X \subset V$  definimos  $\tilde{X} = \{i \in I \mid X \in i\}$ . Es claro que si  $X_1, \dots, X_n$  son subconjuntos de  $V$  entonces  $\tilde{X}_1 \cap \dots \cap \tilde{X}_n \neq \emptyset$ , pues contiene a  $i = \{X_1, \dots, X_n\}$ . Por consiguiente la familia de los conjuntos  $\tilde{X}$  está contenida en un ultrafiltro  $U$  sobre  $I$ . Sea  ${}^*V$  la ultrapotencia correspondiente y veamos que es adecuada.

Para ello tomamos un ultrafiltro  $F$  en  $V$  y para cada  $i \in I$  llamamos  $A_i$  a la intersección de todos los elementos de  $i$  que están en  $F$  (entendiendo que  $A_i = V$  si no hay ninguno). Así  $A_i \neq \emptyset$ .

Para cada  $i \in I$  elegimos  $f(i) \in A_i$  y llamamos  $\xi = [f] \in {}^*V$ . Basta probar que  $t(\xi) = F$ . En efecto, si  $X \in F$  entonces para cada  $i \in I$  tal que  $X \in i$  tenemos que  $A_i \subset X$ , luego  $f(i) \in X$ . Así pues,  $\tilde{X} \subset \{i \in I \mid f(i) \in X\}$ , lo que prueba que este último conjunto está en  $U$ , es decir,  $\xi \in {}^*X$ . Por definición de  $t$  esto significa que  $X \in t(\xi)$ . Con esto hemos probado que  $F \subset t(\xi)$ , pero como ambos conjuntos son ultrafiltros se ha de dar la igualdad  $F = t(\xi)$ . ■

**Teorema C.15** *Sea  $\theta(x, y, x_1, \dots, x_m)$  una fórmula de ZFC con las variables libres indicadas. Entonces en ZFC se demuestra que si  $V$  es un modelo estándar de una cierta colección finita  $\Delta$  de axiomas de ZFC y  ${}^*V$  es una ultrapotencia adecuada entonces*

$${}^*V \models \bigwedge^{\text{st}} x_1 \cdots x_m (\bigwedge^{\text{st}} z (z \text{ finito} \rightarrow \forall x \wedge y \in z \theta(x, y)) \rightarrow \forall x \bigwedge^{\text{st}} y \theta(x, y)).$$

DEMOSTRACIÓN: La relativización de esta fórmula es

$$\begin{aligned} \bigwedge x_1 \cdots x_m \in S (\bigwedge z \in S (z \text{ finito}^V \rightarrow \forall x \in {}^*V \wedge y \in {}^*V (y^* E z \rightarrow \theta^V(x, y))) \\ \rightarrow \forall x \in {}^*V \wedge y \in S \theta^V(x, y)). \end{aligned}$$

Fijamos  $m$  elementos de  $S$ , de la forma  $j(x_1), \dots, j(x_m)$ , con  $x_i \in V$ . Suponemos

$$\bigwedge z \in S (z \text{ finito}^V \rightarrow \forall x \in {}^*V \wedge y \in {}^*V (y^* E z \rightarrow \theta^V(x, y, j(x_1), \dots, j(x_m)))).$$

Sea  $\Delta$  la colección de axiomas necesarios para demostrar en ZFC la existencia de  $\{x\}$ , la existencia de la unión de dos conjuntos, que la unión de dos conjuntos finitos es finita y que  $\{x\}$  es siempre un conjunto finito.

Tomemos  $y_1, \dots, y_n \in V$ . Del hecho de que  $V \models \Delta$  se sigue que existe un  $z \in V$  tal que  $z$  es  $\text{finito}^V$  y  $y_i E z$  para todo  $i = 1, \dots, n$ .

Como  $j$  es elemental, tenemos que  $j(z)$  es  $\text{finito}^V$  y  $j(y_i)^* E j(z)$  para todo  $i = 1, \dots, n$ . Por la hipótesis tenemos que

$$\forall x \in {}^*V \wedge y \in {}^*V (y^* E z \rightarrow \theta^V(x, y))$$

y, como  $j$  es elemental, existe un  $x \in V$  tal que  $\theta^V(x, y_i, x_1, \dots, x_m)$  para todo  $i = 1, \dots, n$ . En otros términos, hemos probado que la familia de los conjuntos

$$\{x \in V \mid \theta^V(x, y, x_1, \dots, x_m)\} \quad \text{para } y \in V$$

tiene la propiedad de la intersección finita, luego están contenidos en un ultrafiltro  $F$  de  $V$ . Como la ultrapotencia es adecuada, existe  $\xi \in {}^*V$  tal que  $F = t(\xi)$ . De este modo, si  $j(y) \in S$  tenemos que  $\{x \in V \mid \theta^V(x, y, x_1, \dots, x_m)\} \in F$ , luego  $\xi \in {}^*\{x \in V \mid \theta^V(x, y, x_1, \dots, x_m)\}$ , y por el teorema C.11 esto implica que  $\theta^{{}^*V}(\xi, j(y), j(x_1), \dots, j(x_m))$ . Por consiguiente

$$\forall x \in {}^*V \wedge y \in S \theta^{{}^*V}(x, y, j(x_1), \dots, j(x_m))$$

(tomando  $x = \xi$ ), que es lo que teníamos que demostrar. ■

Con esto tenemos que  ${}^*V$  cumple (una implicación de) el principio de idealización de  $\mathbb{N}$ , pero exigiendo además que los parámetros sean estándar. Desgraciadamente el caso general no tiene por qué cumplirse en  ${}^*V$ , lo cual nos lleva a refinar la construcción.

### C.3 Límites inductivos

**Definición C.16** Un *sistema inductivo* es una familia  $\{M_\alpha\}_{\alpha < \lambda}$  de conjuntos no vacíos, donde  $\lambda$  es un ordinal límite, junto con una familia de aplicaciones inyectivas  $j_{\alpha\alpha'} : M_\alpha \rightarrow M_{\alpha'}$  tales que si  $\alpha < \alpha' < \alpha'' < \lambda$  entonces se cumple la relación  $j_{\alpha\alpha'} \circ j_{\alpha'\alpha''} = j_{\alpha\alpha''}$ .

Diremos que  $\{x_\alpha\}_{\alpha_0 \leq \alpha < \lambda}$  es una *sucesión inductiva* si para cada  $\alpha$  se cumple  $x_\alpha \in M_\alpha$  y para  $\alpha_0 \leq \alpha < \alpha' < \lambda$  se cumple que  $x_{\alpha'} = j_{\alpha\alpha'}(x_\alpha)$ .

Definimos el *límite inductivo* de la familia como el cociente del conjunto de todas las sucesiones inductivas respecto a la relación de equivalencia que identifica dos sucesiones si coinciden en su dominio común.

Si llamamos  $M$  al límite inductivo, definimos las aplicaciones  $j_\alpha : M_\alpha \rightarrow M$  mediante  $j_\alpha(x) = [\{j_{\alpha\alpha'}(x)\}_{\alpha < \alpha' < \lambda}]$ . Es inmediato comprobar que para todos los ordinales  $\alpha < \alpha' < \lambda$  se cumple la relación  $j_{\alpha\alpha'} \circ j_{\alpha'} = j_\alpha$ , así como que todo  $x \in M$  es de la forma  $j_\alpha(y)$  para un cierto  $\alpha < \lambda$  y un cierto  $y \in M_\alpha$ .

Supongamos ahora que los conjuntos  $M_\alpha$  son modelos estándar y que si  $\alpha < \alpha' < \lambda$  entonces  $\bigwedge xy \in M_\alpha (x E_\alpha y \leftrightarrow j_{\alpha\alpha'}(x) E_{\alpha'} j_{\alpha\alpha'}(y))$ . Supongamos también que  $j_{\alpha\alpha'}(d_\alpha) = d_{\alpha'}$ . Entonces podemos convertir al límite inductivo  $M$  en un modelo estándar con la relación

$$x E y \leftrightarrow \forall \alpha < \lambda \forall x' y' \in M_\alpha (x = j_\alpha(x') \wedge y = j_\alpha(y') \wedge x' E_\alpha y').$$

De las hipótesis se desprende que esta definición no depende de la representación de  $x, y$  como  $x = j_\alpha(x')$ ,  $y = j_\alpha(y')$ . Tomamos como descripción impropia a  $j_\alpha(d_\alpha)$ , para cualquier  $\alpha$ .

**Teorema C.17** *Si  $M$  es el límite inductivo de un sistema de modelos estándar para el que las aplicaciones  $j_{\alpha'}$  son inmersiones elementales, entonces las aplicaciones  $j_{\alpha}$  también lo son.*

DEMOSTRACIÓN: Vamos a probar que todas las  $j_{\alpha}$  satisfacen la definición de inmersión elemental para una fórmula dada. Par ello tomamos una sucesión de expresiones  $\theta_1, \dots, \theta_r$  en las mismas condiciones que en la prueba del teorema de reflexión y que la contenga. Probaremos que si  $\theta_k$  es una fórmula entonces cada  $j_{\alpha}$  cumple la definición de inmersión elemental para ella y si es un término entonces cumple el teorema C.7.

En efecto, si  $\theta_k \equiv x$  el teorema se reduce a  $j_{\alpha}(x) = j_{\alpha}(x)$ .

Si  $\theta_k \equiv t_1 \in t_2$ , usando la hipótesis de inducción vemos que

$$\begin{aligned} \theta_k^{M_{\alpha}}(x_1, \dots, x_n) &\leftrightarrow t_1^{M_{\alpha}}(x_1, \dots, x_n) \ E_{\alpha} \ t_2^{M_{\alpha}}(x_1, \dots, x_n) \\ &\leftrightarrow j_{\alpha}(t_1^{M_{\alpha}}(x_1, \dots, x_n)) \ E \ j_{\alpha}(t_2^{M_{\alpha}}(x_1, \dots, x_n)) \\ &\leftrightarrow t_1^M(j_{\alpha}(x_1), \dots, j_{\alpha}(x_n)) \ E \ t_2^M(j_{\alpha}(x_1), \dots, j_{\alpha}(x_n)) \\ &\leftrightarrow \theta_k^M(j_{\alpha}(x_1), \dots, j_{\alpha}(x_n)). \end{aligned}$$

El caso  $\theta_k \equiv t_1 = t_2$  es idéntico.

Si  $\theta_k \equiv \neg\phi$  o  $\theta_k \equiv \phi \rightarrow \psi$  la conclusión se sigue inmediatamente de la hipótesis de inducción.

Si  $\theta_k \equiv \bigwedge x\phi$ , por hipótesis de inducción tenemos que

$$\bigwedge x x_1 \cdots x_n \in M_{\alpha}(\phi^{M_{\alpha}}(x, x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \phi^M(j_{\alpha}(x), j_{\alpha}(x_1), \dots, j_{\alpha}(x_n)))$$

y hemos de probar que

$$\begin{aligned} \bigwedge x_1 \cdots x_n \in M_{\alpha}(\bigwedge x \in M_{\alpha} \phi^{M_{\alpha}}(x, x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \\ \bigwedge x \in M \phi^M(x, j_{\alpha}(x_1), \dots, j_{\alpha}(x_n))). \end{aligned}$$

Una implicación es inmediata. Supongamos que  $\bigwedge x \in M_{\alpha} \phi^{M_{\alpha}}(x, x_1, \dots, x_n)$  y tomemos  $x \in M$ . Entonces existe un ordinal  $\beta$  tal que  $\alpha < \beta < \lambda$  y  $x = j_{\beta}(x')$ , con  $x' \in M_{\beta}$ . Usando que  $j_{\alpha\beta}$  es elemental concluimos que

$$\bigwedge x \in M_{\beta} \phi^{M_{\beta}}(x, j_{\alpha\beta}(x_1), \dots, j_{\alpha\beta}(x_n)).$$

En particular  $\phi^{M_{\beta}}(x', j_{\alpha\beta}(x_1), \dots, j_{\alpha\beta}(x_n))$ . Ahora usamos la hipótesis de inducción para  $\beta$ , con lo que

$$\phi^M(j_{\beta}(x'), j_{\beta}(j_{\alpha\beta}(x_1)), \dots, j_{\beta}(j_{\alpha\beta}(x_n))),$$

que es lo mismo que  $\phi^M(x, j_{\alpha}(x_1), \dots, j_{\alpha}(x_n))$ .

Si  $\theta_k \equiv x|\phi$ , por hipótesis de inducción tenemos que

$$\bigvee^1 x \in M_{\alpha} \phi^{M_{\alpha}}(x, x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \bigvee^1 x \in M \phi^M(j_{\alpha}(x_1), \dots, j_{\alpha}(x_n)).$$

Si se da la unicidad y  $x \in M_\alpha$  es el único  $x$  que cumple  $\phi^{V_\alpha}$ , por la hipótesis de inducción para  $\phi$  tenemos que  $j_\alpha(x)$  cumple  $\phi^M$ , luego es el único que lo cumple. En definitiva  $j_\alpha((x|\phi)^{V_\alpha}) = (x|\phi)^M$ .

Si no se da la unicidad, entonces  $(x|\phi)^{V_\alpha} = d_\alpha$  y  $(x|\phi)^M = j_\alpha(d_\alpha)$ , luego también tenemos la relación que buscamos. ■

El teorema siguiente es inmediato:

**Teorema C.18** *Si  $V$  es un modelo estándar arbitrario y  $\kappa$  es un ordinal límite, existe una familia de modelos estándar  $\{\alpha V\}_{\alpha \leq \kappa}$  y una familia de inmersiones elementales  $j_{\alpha\beta} : \alpha V \longrightarrow \beta V$ , para  $\alpha < \beta \leq \kappa$ , de manera que*

- a)  ${}^0V = V$ .
- b) *Para cada  $\alpha < \kappa$  el modelo  $\alpha+1V$  es una ultrapotencia de  $\alpha V$  respecto a un cierto ultrafiltro  $U_\alpha$  y  $j_{\alpha\alpha+1}$  es la inmersión natural canónica de la ultrapotencia.*
- c) *Para cada ordinal límite  $\lambda \leq \kappa$  los modelos  $\{\alpha V\}_{\alpha < \lambda}$  con las correspondientes inmersiones  $j_{\alpha\beta}$  forman un sistema inductivo y  $\lambda V$  es el correspondiente límite inductivo, de modo que las inmersiones  $j_{\alpha\lambda}$  son las correspondientes a este límite.*

En estas circunstancias diremos que el modelo  ${}^\kappa V$  es un *ultralímite* del modelo  $V$ . Es claro que los ultrafiltros  $U_\alpha$  pueden definirse recurrentemente a lo largo del proceso de construcción de los modelos  $\alpha V$ . En particular podemos definir  $U_\alpha$  en términos de  $\alpha V$  y en particular podemos exigir que  $\alpha+1V$  sea una ultrapotencia adecuada de  $\alpha V$ . En tal caso diremos que  ${}^\kappa V$  es un *ultralímite adecuado* de  $V$ .

En la prueba del teorema de conservación para  $N$  necesitamos únicamente un ultralímite numerable (es decir, con  $\kappa = \omega$ ). En efecto, si partimos de cualquier modelo estándar  $V$  y formamos un ultralímite  ${}^*V = {}^\omega V$ , tenemos la inmersión elemental  $j = j_{0\omega} : V \longrightarrow {}^*V$ . Convertimos a  ${}^*V$  en un modelo del lenguaje de  $N$  definiendo  $S = j[V]$ . El hecho de que  $j$  sea una inmersión elemental permite probar, con el mismo argumento que en C.12, que  ${}^*V$  cumple el principio de transferencia:

**Teorema C.19** *Si  $V$  es un modelo estándar y  ${}^*V$  es un ultralímite numerable, entonces  ${}^*V$  cumple el principio de transferencia de  $N$ .*

La diferencia es que ahora podemos demostrar el principio de idealización sin restricciones:

**Teorema C.20** *Si  $V$  es un modelo estándar en el que se cumpla una cierta colección finita  $\Delta$  de axiomas de ZFC y  ${}^*V$  es un ultralímite adecuado numerable, entonces  ${}^*V$  cumple la implicación “ $\rightarrow$ ” del principio de idealización de  $N$ .*

DEMOSTRACIÓN: Fijamos una fórmula interna  $\theta(x, y, x_1, \dots, x_m)$  y hemos de probar que

$${}^*V \models \bigwedge x_1 \cdots x_m (\bigwedge^{\text{st}} z (z \text{ finito} \rightarrow \bigvee x \bigwedge y \in z \theta(x, y)) \rightarrow \bigvee x \bigwedge^{\text{st}} y, \theta(x, y)),$$

es decir, que

$$\begin{aligned} \bigwedge x_1 \cdots x_m \in {}^*V (\bigwedge z \in S (z \text{ finito}^{{}^*V} \rightarrow \bigvee x \in {}^*V \bigwedge y \in {}^*V (y^* E z \rightarrow \theta^{{}^*V}(x, y))) \\ \rightarrow \bigvee x \in {}^*V \bigwedge y \in S \theta^{{}^*V}(x, y)). \end{aligned}$$

Si  $x_1, \dots, x_n \in {}^*V$  existe un natural  $m$  tal que  $x_1, \dots, x_n \in j_m[{}^m V]$ . Digamos que  $x_i = j_m(x'_i)$ , con  $x'_i \in {}^m V$ . Suponemos

$$\bigwedge z \in S (z \text{ finito}^{{}^*V} \rightarrow \bigvee x \in {}^*V \bigwedge y \in {}^*V (y^* E z \rightarrow \theta^{{}^*V}(x, y, j_m(x'_1), \dots, j_m(x'_n)))).$$

Ahora usamos que  $j_{m+1} : {}^{m+1}V \rightarrow {}^*V$  es una inmersión elemental, con lo que

$$\begin{aligned} \bigwedge z \in {}^{m+1}S (z \text{ finito}^{{}^{m+1}V} \rightarrow \bigvee x \in {}^{m+1}V \bigwedge y \in {}^{m+1}V \\ (y E_{m+1} z \rightarrow \theta^{{}^{m+1}V}(x, y, j_{m+1}(x'_1), \dots, j_{m+1}(x'_n))), \end{aligned}$$

donde  ${}^{m+1}S = j_{0m+1}[V]$ . En efecto: fijado  $z \in {}^{m+1}S$  tal que  $z$  es finito  ${}^{m+1}V$ , entonces  $j_{m+1}(z) \in S$  y es finito  ${}^*V$ , luego concluimos que

$$\bigvee x \in {}^*V \bigwedge y \in {}^*V (y^* E z \rightarrow \theta^{{}^*V}(x, y, j_m(x'_1), \dots, j_m(x'_n))),$$

y ahora volvemos a aplicar que  $j_{m+1}$  es elemental. Aplicamos el teorema C.15 a  ${}^m V$ , lo cual nos da que

$$\bigvee x \in {}^{m+1}V \bigwedge y \in {}^{m+1}S \theta^{{}^{m+1}V}(x, y, j_{m+1}(x'_1), \dots, j_{m+1}(x'_n)).$$

Fijamos un  $x \in {}^{m+1}V$  que cumpla esto y observamos que entonces

$$\bigwedge y \in S \theta^{{}^*V}(j_{m+1}(x), y, x_1, \dots, x_n).$$

En efecto, todo elemento de  $S$  es de la forma  $j(y)$ , para un  $y \in {}^{m+1}S$  que ha de cumplir

$$\theta^{{}^{m+1}V}(x, y, j_{m+1}(x'_1), \dots, j_{m+1}(x'_n)).$$

Usando de nuevo que  $j_{m+1}$  es elemental pasamos a

$$\theta^{{}^*V}(j_{m+1}(x), j_{m+1}(y), x_1, \dots, x_n).$$

En definitiva tenemos que

$$\bigvee x \in {}^*V \bigwedge y \in S \theta^{{}^*V}(x, y, x_1, \dots, x_n),$$

como teníamos que probar. ■

Para los axiomas restantes nos restringiremos al caso en que  $V$  es un modelo  $V_\lambda$ , para un cierto ordinal límite  $\lambda$ . Puede probarse que si  $V_\lambda$  cumple suficientes axiomas de ZFC y  $z \in V_\lambda$  entonces  $z$  es  $\text{finito}^{V_\lambda}$  si y sólo si  $z$  es finito, pero podemos añadir esto como hipótesis en lugar de demostrarlo:

**Teorema C.21** *Existe un conjunto finito  $\Delta$  de axiomas de ZFC tal que en ZFC se demuestra que si  $\lambda$  es un ordinal límite tal que  $V_\lambda \models \Delta$  y*

$$\bigwedge z \in V_\lambda (z \text{ es } \text{finito}^{V_\lambda} \leftrightarrow z \text{ es finito})$$

*entonces toda ultrapotencia adecuada numerable  ${}^*V$  de  $V_\lambda$  cumple los principios de transferencia, idealización y estandarización de  $N$ .*

DEMOSTRACIÓN: Veamos que  ${}^*V \models \bigwedge^{\text{st}} z (z \text{ finito} \rightarrow \bigwedge y \in z \text{ st } y)$ . Esto equivale a probar que  $\bigwedge z \in S (z \text{ finito}^{*V} \rightarrow \bigwedge y \in {}^*V (y {}^*E z \rightarrow y \in S))$ .

Un tal  $z$  será de la forma  $z = j(z')$ , donde  $z' \in V_\lambda$  y como  $j$  es elemental tenemos que  $z'$  es  $\text{finito}^{V_\lambda}$ . Por hipótesis  $z'$  es finito, digamos  $z' = \{y_1, \dots, y_n\}$ . Basta probar que si  $y {}^*E z$  entonces  $y = j(y_i)$  para algún  $i = 1, \dots, n$ . Lo probamos por inducción sobre  $n$ .

Si  $z' = \{y_1\}$  usamos la fórmula  $\bigwedge y (y \in z' \rightarrow y = y_1)^{V_\lambda}$  para concluir  $\bigwedge y \in {}^*V (y {}^*E z \rightarrow y = j(y_1))$ , como queríamos probar.

Si vale para  $n - 1$  llamamos  $z'' = \{y_1, \dots, y_{n-1}\}$ . Como

$$\bigwedge y (y \in z' \rightarrow y \in z'' \vee y = y_n)^{V_\lambda},$$

tenemos también

$$\bigwedge y \in {}^*V (y {}^*E z \rightarrow y {}^*E j(z'') \vee y = j(y_n)),$$

y combinando esto con la hipótesis de inducción llegamos a que si  $y {}^*E j(z'')$  entonces  $y = j(y_i)$  para  $i = 1, \dots, n - 1$ . La conclusión es inmediata.

Ahora observamos que la implicación “ $\leftarrow$ ” del principio de idealización es una consecuencia lógica de la sentencia  ${}^*V \models \bigwedge^{\text{st}} z (z \text{ finito} \rightarrow \bigwedge y \in z \text{ st } y)$  que acabamos de probar que se cumple en  ${}^*V$ , luego por C.4 también se cumple la implicación. El recíproco nos lo da el teorema anterior. Nos falta probar el principio de estandarización, es decir, que

$${}^*V \models \bigwedge x_1 \cdots x_n \bigwedge^{\text{st}} x \bigvee^{\text{st}} y \bigwedge^{\text{st}} z (z \in y \leftrightarrow z \in x \wedge \theta(z, x, y, x_1, \dots, x_n)).$$

Fijamos  $x_1, \dots, x_n \in {}^*V$  y  $x \in V$ . Hemos de probar que existe un  $y \in V_\lambda$  tal que

$$\bigwedge z \in S (z {}^*E j(y) \leftrightarrow z {}^*E j(x) \wedge \theta^{*V}(z, j(x), j(y), x_1, \dots, x_n)).$$

Sea  $y = \{z \in x \mid \theta^{*V}(j(z), j(x), j(y), x_1, \dots, x_n)\} \in V_\lambda$ . De este modo, si  $j(z) \in S$ , con  $z \in V_\lambda$ , se cumple

$$\begin{aligned}
j(z) {}^*E j(y) &\leftrightarrow z \in y \leftrightarrow z \in x \wedge \theta {}^*V(j(z), j(x), j(y), x_1, \dots, x_n) \\
&\leftrightarrow j(z) {}^*E j(x) \wedge \theta {}^*V(j(z), j(x), j(y), x_1, \dots, x_n).
\end{aligned}$$

■

Con esto llegamos al resultado final para la N:

**Teorema C.22** *Si  $\Gamma$  es cualquier colección finita de axiomas de N y  $\theta$  es una fórmula interna sin variables libres, en ZFC se demuestra que existe un modelo no estándar  $\mathcal{M}$  tal que  $\mathcal{M} \models \Gamma$  y*

$$\theta \leftrightarrow \mathcal{M} \models \theta.$$

DEMOSTRACIÓN: Tomamos una colección finita de axiomas  $\Delta$  de ZFC que contenga a todos los axiomas de ZFC que haya en  $\Gamma$  y que satisfaga el teorema C.21. Por el teorema C.5 podemos demostrar que existe un ordinal límite  $\lambda$  tal que  $V_\lambda$  está en las hipótesis de C.21 y además  $\theta \leftrightarrow \theta^{V_\lambda}$ . Llamamos  $\mathcal{M}$  a un ultralímite adecuado numerable de  $V_\lambda$ . Entonces  $\mathcal{M} \models \Delta$ , luego en particular  $\mathcal{M}$  cumple todos los axiomas de ZFC que hay en  $\Gamma$ . Además  $\theta^{V_\lambda} \leftrightarrow \mathcal{M} \models \theta$ . Por el teorema C.21 podemos probar que  $\mathcal{M}$  cumple los axiomas externos que haya en  $\Gamma$ , con lo que tenemos todas las propiedades requeridas. ■

Esto prueba el teorema de conservación: si  $\theta$  es un teorema interno de la teoría de conjuntos no estándar entonces  $\theta$  se demuestra a partir de una cantidad finita de axiomas  $\Gamma$ . El teorema anterior nos dice cómo demostrar en ZFC la existencia de un modelo  $\mathcal{M}$  tal que  $\mathcal{M} \models \Gamma$  y  $\theta \leftrightarrow \mathcal{M} \models \theta$ , el teorema C.4 nos dice cómo transformar la prueba que conocemos de  $\theta$  a partir de los axiomas de la teoría no estándar en una prueba en ZFC de que  $\mathcal{M} \models \theta$  y reuniendo todo esto obtenemos una prueba de  $\theta$  en ZFC.

**Nota** La prueba que hemos visto puede entenderse así: la colección de todas las afirmaciones matemáticas (internas) que los matemáticos han demostrado hasta la fecha o se han planteado demostrar es finita. Por el teorema de reflexión podemos encontrar un ordinal  $\lambda$  tal que en  $V_\lambda$  se cumplen todos los teoremas demostrados hasta la fecha y, además, cualquier presunto teorema que un matemático pueda estar interesado en probar (dentro de una selección finita, pero arbitrariamente grande, de objetivos interesantes) se cumple en  $V_\lambda$  si y sólo si se cumple de verdad.

Si formamos un ultralímite  ${}^*V$  obtenemos otro modelo donde se cumplen todos los teoremas demostrados y tal que un “objetivo” se cumple si y sólo si se cumple de verdad. Pero además en  ${}^*V$  se cumplen los axiomas de la teoría de conjuntos no estándar, por lo que si demostramos un “objetivo” con la ayuda de estos axiomas y de cualquier teorema conocido previamente, estamos probando que nuestro “objetivo” se cumple en  ${}^*V$ , y entonces se cumple de verdad. ■

## C.4 El teorema de conservación para la teoría de Hrbacek

El teorema de conservación para H requiere una construcción más delicada que la que acabamos de emplear para N. Concretamente, hemos de demostrar que si  $\alpha$  es una fórmula de ZFC tal que  $\alpha^{\text{in}}$  es un teorema de H, entonces  $\alpha$  es un teorema de ZFC.

Para empezar observamos que si  $\mathcal{M} = (M, E, I, S, d)$  es un modelo del lenguaje de H entonces  $(I, E|_{I \times I}, d)$  es un modelo estándar, y si  $\theta(x_1, \dots, x_n)$  es una fórmula de ZFC entonces

$$\bigwedge x_1 \cdots x_n \in M((\theta^{\text{in}})^M(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \theta^I(x_1, \dots, x_n)),$$

pues las restricciones  $x \in M \wedge x \in I$  que aparecen en  $(\theta^{\text{in}})^M$  equivalen a las restricciones  $x \in I$  que aparecen en  $\theta^I$ . Se demuestra por inducción sobre la longitud de  $\theta$ , probando al mismo tiempo que si  $\theta$  es un término entonces

$$\bigwedge x_1 \cdots x_n \in M((\theta^{\text{in}})^M(x_1, \dots, x_n) = \theta^I(x_1, \dots, x_n)).$$

Partimos de un modelo  $V_\lambda$  que cumpla los suficientes axiomas de ZFC y tal que, para la fórmula  $\alpha$  que queremos demostrar en ZFC, se cumpla  $\alpha^{V_\lambda} \leftrightarrow \alpha$ .

Basta construir un modelo  $M$  en el que se cumplan los axiomas de H junto con una inmersión elemental  $j : V_\lambda \rightarrow I$ , pues si  $\alpha^{\text{in}}$  es demostrable en H entonces tendremos  $(\alpha^{\text{in}})^M$ , luego  $\alpha^I$ , luego  $\alpha^{V_\lambda}$  y, por consiguiente,  $\alpha$ . Toda la prueba será constructiva.

En realidad vamos a trabajar simultáneamente con todos los modelos  $V_\alpha$ , para  $\alpha < \lambda$ . Por claridad enunciamos en un teorema las características de la construcción que vamos a realizar. Necesitamos una definición adicional:

**Definición C.23** Una aplicación  $i : M \rightarrow M'$  entre dos modelos estándar es una *inmersión inicial* si es inyectiva, cumple  $\bigwedge xy \in M(x E y \leftrightarrow i(x) E' i(y))$ ,  $i(d) = d'$  y

$$\bigwedge x \in M \bigwedge y \in M'(y E' i(x) \rightarrow \bigvee y_0 \in M y = i(y_0)).$$

**Teorema C.24** Fijados ordinales límite  $\lambda$  y  $\kappa$ , existe una sucesión de modelos estándar  $W_\alpha^\beta$ , con  $\alpha < \lambda$ ,  $\beta \leq \kappa$  junto con aplicaciones inyectivas

$$i_{\alpha\alpha'}^\beta : W_\alpha^\beta \rightarrow W_{\alpha'}^\beta, \quad j_{\alpha\alpha'}^{\beta\beta'} : W_\alpha^\beta \rightarrow W_{\alpha'}^{\beta'}$$

(para  $\alpha < \alpha' < \lambda$ ,  $\beta < \beta' \leq \kappa$ ) tales que:

- a) Si  $\beta < \beta' < \beta''$  entonces  $j_{\alpha\alpha'}^{\beta\beta'} \circ j_{\alpha\alpha'}^{\beta'\beta''} = j_{\alpha\alpha'}^{\beta\beta''}$ .
- b) Si  $\alpha < \alpha' < \alpha''$  entonces  $i_{\alpha\alpha'}^\beta \circ i_{\alpha'\alpha''}^\beta = i_{\alpha\alpha''}^\beta$ .

c) Si  $\alpha < \alpha'$ ,  $\beta < \beta'$  el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} W_{\alpha'}^\beta & \xrightarrow{j_{\alpha'}^{\beta\beta'}} & W_{\alpha'}^{\beta'} \\ i_{\alpha\alpha'}^\beta \uparrow & & \uparrow i_{\alpha\alpha'}^{\beta'} \\ W_\alpha^\beta & \xrightarrow{j_\alpha^{\beta\beta'}} & W_\alpha^{\beta'} \end{array}$$

- d) Las aplicaciones  $j_\alpha^{\beta\beta'}$  son inmersiones elementales, y las aplicaciones  $i_{\alpha\alpha'}^\beta$  son inmersiones iniciales.
- e)  $W_\alpha^0 = V_\alpha$ ,  $E_\alpha^0$  es la relación de pertenencia,  $i_{\alpha\alpha'}^0$  es la inclusión.
- f) Cada  $W_\alpha^{\beta+1}$  es una ultrapotencia de  $W_\alpha^\beta$  respecto a un ultrafiltro  $U^\beta$  en un conjunto  $I^\beta$  (donde ninguno de los dos depende de  $\alpha$ ).
- g) Si  $\lambda' \leq \kappa$  es un ordinal límite entonces  $W_\alpha^{\lambda'}$  es el límite inductivo de los modelos  $W_\alpha^\beta$ , para  $\beta < \lambda'$ .

DEMOSTRACIÓN: Las condiciones del teorema determinan totalmente la construcción. Únicamente hemos de explicitar la construcción de las inmersiones iniciales.

Para  $\beta = 0$ , la transitividad de cada  $V_\alpha$  implica que las inclusiones  $i_{\alpha\alpha'}^0$  son ciertamente inmersiones iniciales.

Supuestos construidos todos los modelos  $W_\alpha^\beta$  para todo  $\alpha < \lambda$  y un  $\beta < \kappa$ , (junto con las aplicaciones correspondientes). Fijamos arbitrariamente un conjunto  $I^\beta$  y un ultrafiltro  $U^\beta$  en  $I^\beta$  y definimos  $W_\alpha^{\beta+1}$  como la ultrapotencia correspondiente de  $W_\alpha^\beta$ . Esto nos da automáticamente las inmersiones elementales  $j_\alpha^{\beta\beta+1}$ .

Definimos  $i_{\alpha\alpha'}^{\beta+1}([f]) = [f']$ , donde  $f'(i) = i_{\alpha\alpha'}^\beta(f(i))$ . Una simple comprobación muestra que  $i_{\alpha\alpha'}^{\beta+1}$  está bien definida, satisface las relaciones indicadas y es inicial. Por ejemplo, si  $[g] E_{\alpha'}^{\beta+1} i_{\alpha\alpha'}^{\beta+1}([f])$ , entonces

$$\{i \in I^\beta \mid g(i) E_{\alpha'}^\beta i_{\alpha\alpha'}^\beta(f(i))\} \in U^\beta.$$

Como  $i_{\alpha\alpha'}^\beta$  es inicial, para cada  $i$  en este conjunto,  $g(i) = i_{\alpha\alpha'}^\beta(g'(i))$ , donde  $g'(i) \in W_\alpha^\beta$ . Extendemos  $g'$  a una función sobre todos los índices, de modo que tenemos  $[g'] \in W_\alpha^\beta$  y claramente  $[g] = i_{\alpha\alpha'}^{\beta+1}([g'])$ .

Supongamos ahora construidos los modelos  $W_\alpha^\beta$  (con las aplicaciones correspondientes) para todo  $\beta < \lambda'$ , donde  $\lambda' \leq \kappa$  es un ordinal límite. Definimos  $W_\alpha^{\lambda'}$  como el límite inductivo de los modelos  $W_\alpha^\beta$ . Las aplicaciones  $i_{\alpha\alpha'}^{\lambda'}$  se definen mediante

$$i_{\alpha\alpha'}^{\lambda'}(\{x_\beta\}) = \{i_{\alpha\alpha'}^\beta(x_\beta)\}.$$

Se demuestra fácilmente que están bien definidas, que cumplen todas las relaciones y que son iniciales. ■

En realidad podemos exigir algo más:

**Teorema C.25** *En las condiciones del teorema anterior, los conjuntos  $I^\beta$  y los ultrafiltros  $U^\beta$  pueden elegirse de modo que cada  $W_\alpha^{\beta+1}$  sea una ultrapotencia adecuada de  $W_\alpha^\beta$ .*

DEMOSTRACIÓN: Suponemos contruidos los modelos  $\{W_\alpha^\beta\}_{\alpha < \lambda}$ , con las correspondientes inmersiones  $i_{\alpha\alpha'}^\beta$ . Formamos el límite inductivo  $W^\beta$  y tomamos  $I^\beta$  y  $U^\beta$  según el teorema C.14 aplicado a  $W^\beta$ , es decir,  $I^\beta$  es el conjunto de todos los subconjuntos finitos de  $\mathcal{PW}^\beta$ . Vamos a comprobar que el argumento de C.14 se refina levemente para probar que todas las ultrapotencias  $W_\alpha^{\beta+1}$  son adecuadas:

Tomamos un ultrafiltro  $F \subset W_\alpha^\beta$  y para cada  $i \in I^\beta$  llamamos  $A_i$  a la intersección de los conjuntos  $(i_\alpha^\beta)^{-1}[X]$ , donde  $X \in i$  e  $(i_\alpha^\beta)^{-1}[X] \in F$  (entendiendo que  $A_i = W_\alpha^\beta$  si no hay ningún  $X$ ). En particular  $A_i \neq \emptyset$ , por lo que podemos tomar  $f(i) \in A_i$  y formamos así un  $\xi = [f] \in W_\alpha^{\beta+1}$ .

Ahora, si  $Y \in F$  y  $X = i_\alpha^\beta[Y] \in i$  entonces  $A_i \subset Y$ , luego  $f(i) \in Y$ , lo que a su vez implica que

$$\tilde{X} \subset \{i \in I \mid f(i) \in Y\},$$

luego el último conjunto está en  $U^\beta$ . Como en C.14 se concluye ahora que  $Y \in t(\xi)$ , con lo que  $F \subset t(\xi)$  y al ser ultrafiltros tenemos la igualdad. ■

Tomamos concretamente  $\kappa = |V_\lambda|^+$  (el menor cardinal mayor que el cardinal de  $V_\lambda$ ). Para cada ordinal  $\beta \leq \kappa$  definimos  $W^\beta$  como el límite inductivo del sistema formado por los modelos  $\{W_\alpha^\beta\}_{\alpha < \lambda}$  con las aplicaciones  $i_{\alpha\alpha'}^\beta$ . Esto nos da aplicaciones  $i_\alpha^\beta : W_\alpha^\beta \rightarrow W^\beta$ . Es fácil ver que son iniciales. Así mismo es claro que  $V_\lambda$  se identifica con  $W^0$  de forma natural.

Si  $\beta < \beta' \leq \kappa$ , definimos  $j^{\beta\beta'} : W^\beta \rightarrow W^{\beta'}$  como la única aplicación que cumple  $i_\alpha^\beta \circ j^{\beta\beta'} = j_{\alpha\alpha'}^{\beta\beta'} \circ i_\alpha^{\beta'}$ . Es fácil ver que existe. Pronto veremos que  $j^{\beta\beta'}$  es una inmersión elemental, pero esto no es inmediato.

Llamamos  $I = W^\kappa$  e identificamos cada modelo  $W_\alpha^\beta$  con su imagen por la aplicación  $j_\alpha^{\beta\kappa} \circ i_\alpha^\beta$ . Es claro entonces que todas las inmersiones que estamos considerando se identifican con inclusiones. En particular

$$W^\beta = \bigcup_{\alpha < \lambda} W_\alpha^\beta.$$

Recordemos que el ordinal  $\lambda$  lo proporciona el teorema de reflexión, de modo que  $V_\lambda$  satisface una colección finita arbitrariamente grande de axiomas de ZFC. Vamos a exigir que satisfaga también las propiedades siguientes (lo cual es posible siempre por el teorema de reflexión)

- a)  $\bigwedge \alpha \in V_\lambda (\alpha \text{ es un ordinal}^{V_\lambda} \leftrightarrow \alpha \text{ es un ordinal})$ .
- b)  $\bigwedge \alpha < \lambda (V_\alpha^{V_\lambda} = V_\alpha)$  (esto se obtiene por el teorema de reflexión aplicado a  $x = V_\alpha$ ).

En la prueba del teorema de reflexión se ve que el ordinal  $\lambda$  se puede tomar arbitrariamente grande, es decir, para cada fórmula  $\alpha$  tenemos que

$$\bigwedge \alpha \bigvee \lambda' (\alpha \leq \lambda' \wedge \bigwedge x_1 \cdots x_n \in V_{\lambda'} (\alpha^{V_{\lambda'}}(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \alpha(x_1, \dots, x_n))).$$

(Aquí se entiende que  $\alpha$  representa un ordinal y  $\lambda'$  un ordinal límite.)

Pues bien, vamos a suponer que  $V_\lambda$  cumple la relativización de esta fórmula a  $V_\lambda$  (para una colección finita arbitrariamente grande de fórmulas  $\alpha$ . Teniendo en cuenta a) y b) lo que estamos suponiendo es que

$$\bigwedge \alpha < \lambda \bigvee \lambda' (\alpha \leq \lambda' < \lambda \wedge \bigwedge x_1 \cdots x_n \in V_{\lambda'} (\alpha^{V_{\lambda'}}(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \alpha^{V_\lambda}(x_1, \dots, x_n))).$$

Pero esto es tanto como decir que la inclusión  $i_{\lambda'}^0 : V_{\lambda'} \longrightarrow V_\lambda$  es una inmersión elemental para un conjunto de ordinales límite  $\lambda'$  no acotado en  $\lambda$ .

**Teorema C.26** *En las condiciones anteriores, si  $i_{\lambda'}^0$  es una inmersión elemental, también lo es  $i_{\lambda'}^\beta$  para todo  $\beta \leq \kappa$ .*

DEMOSTRACIÓN: Fijada una fórmula, construimos una sucesión de expresiones  $\theta_1, \dots, \theta_r$  igual que en la prueba del teorema de reflexión y demostramos que cada  $\theta_k$  cumple la definición de inmersión elemental o el teorema C.7 según si es una fórmula o un término. Razonamos por inducción sobre  $\beta$ . Para  $\beta = 0$  es trivial. Ahora suponemos que  $i_{\lambda'}^\beta$  es una inmersión elemental para todas las expresiones  $\theta_k$  y siempre que  $i_{\lambda'}^0$  lo es, y vamos a probarlo para  $i_{\lambda'}^{\beta+1}$ . A su vez suponemos que se cumple para expresiones anteriores a  $\theta_k$  y lo probamos para ésta.

Si  $\theta_k \equiv x$  es trivial. Si  $\theta_k \equiv t_1 = t_2$  o  $\theta_k \equiv t_1 \in t_2$  se sigue inmediatamente de que  $i_{\lambda'}^{\beta+1}$  no es más que la inclusión. Los casos  $\theta_k \equiv \neg\phi$  o  $\theta_k \equiv \phi \rightarrow \psi$  son igualmente inmediatos a partir de la hipótesis para  $\phi$  y  $\psi$ .

Supongamos ahora que  $\theta_k \equiv \bigwedge x \phi$ . La parte no trivial es suponer que, fijados  $x_1, \dots, x_n \in W_{\lambda'}^{\beta+1}$ , si se cumple  $\bigwedge x \in W_{\lambda'}^{\beta+1} \phi^{W_{\lambda'}^{\beta+1}}(x, x_1, \dots, x_n)$  entonces también  $\bigwedge x \in W^{\beta+1} \phi^{W^{\beta+1}}(x, x_1, \dots, x_n)$ .

Supongamos, por reducción al absurdo, que existe  $x \in W^{\beta+1}$  de manera que  $\neg \phi^{W^{\beta+1}}(x, x_1, \dots, x_n)$ . Tomemos entonces un ordinal límite  $\lambda'' > \lambda'$  tal que  $i_{\lambda''}^0$  sea elemental y de modo que  $x \in W_{\lambda''}^{\beta+1}$ .

Por la hipótesis de inducción para  $\phi$  y  $\lambda''$  tenemos  $\neg \phi^{W_{\lambda''}^{\beta+1}}(x, x_1, \dots, x_n)$ .

Tomemos funciones  $f_j : I^\beta \longrightarrow W_{\lambda'}^\beta$  funciones tales que  $x_j = [f_j]$ . Por el teorema C.11 tenemos que

$$\{i \in I^\beta \mid \bigvee x \in W_{\lambda''}^\beta \neg \phi^{W_{\lambda''}^\beta}(x, f_1(i), \dots, f_n(i))\} \in U^\beta.$$

Para cada índice  $i$  en este conjunto aplicamos la hipótesis de inducción en virtud de la cual las inclusiones  $i_{\lambda''}^\beta$  e  $i_{\lambda'}^\beta$  son elementales para  $\theta_k$ , de donde se sigue que  $\bigvee x \in W_{\lambda'}^\beta \neg \phi^{W_{\lambda'}^\beta}(x, f_1(i), \dots, f_n(i))$ . Así pues,

$$\{i \in I^\beta \mid \bigvee x \in W_{\lambda'}^\beta \neg \phi^{W_{\lambda'}^\beta}(x, f_1(i), \dots, f_n(i))\} \in U^\beta.$$

De nuevo por C.11 concluimos que  $\forall x \in W_{\lambda'}^{\beta+1} \neg \phi^{W_{\lambda'}^{\beta+1}}(x, x_1, \dots, x_n)$ , en contra de lo supuesto.

El caso en que  $\theta_k \equiv x|\phi$  se trata con el mismo argumento que hemos empleado en todos los resultados similares a éste.

Ahora suponemos que  $\beta$  es un ordinal límite y que  $i_{\lambda'}^{\delta}$  es una inmersión elemental para las expresiones  $\theta_k$  siempre que  $\delta < \beta$  y  $i_{\lambda'}^0$  lo es. Hemos de probarlo para  $i_{\lambda'}^{\beta}$ , y a su vez lo suponemos cierto para las expresiones anteriores a  $\theta_k$ .

Pasamos directamente al único caso no trivial, es decir, cuando  $\theta_k \equiv \bigwedge x \phi$ . Fijamos  $x_1, \dots, x_n \in W_{\lambda'}^{\beta}$  y suponemos que existe un  $x \in W^{\beta}$  de manera que  $\neg \phi^{W^{\beta}}(x, x_1, \dots, x_n)$ .

Sea  $\lambda'' > \lambda$  un ordinal límite tal que  $i_{\lambda''}^0$  sea elemental y  $x, x_1, \dots, x_n \in W_{\lambda''}^{\beta}$ . A su vez tomamos un  $\delta < \beta$  tal que  $x \in W_{\lambda''}^{\delta}$  y  $x_1, \dots, x_n \in W_{\lambda'}^{\delta}$ .

Por la hipótesis de inducción para  $\phi$  tenemos  $\neg \phi^{W_{\lambda''}^{\beta}}(x, x_1, \dots, x_n)$ , como la inclusión  $j_{\lambda''}^{\delta\beta}$  es elemental de aquí se sigue  $\neg \phi^{W_{\lambda''}^{\delta}}(x, x_1, \dots, x_n)$ , por la hipótesis de inducción para  $i_{\lambda''}^{\delta}$  e  $i_{\lambda'}^{\delta}$ , respecto a  $\theta_k$  tenemos  $\forall x \in W_{\lambda'}^{\delta} \neg \phi^{W_{\lambda'}^{\delta}}(x, x_1, \dots, x_n)$ , y usando que la inmersión  $j_{\lambda'}^{\delta\beta}$  es elemental concluimos que

$$\forall x \in W_{\lambda'}^{\beta} \neg \phi^{W_{\lambda'}^{\beta}}(x, x_1, \dots, x_n).$$

■

Como consecuencia tenemos:

**Teorema C.27** Si  $\beta < \beta' \leq \kappa$ , la inclusión  $j^{\beta\beta'} : W^{\beta} \longrightarrow W^{\beta'}$  es una inmersión elemental.

DEMOSTRACIÓN: Dada una fórmula  $\phi(x_1, \dots, x_n)$ , fijamos  $x_1, \dots, x_n \in W^{\beta}$  y tomamos un ordinal límite  $\lambda'$  tal que  $x_1, \dots, x_n \in W_{\lambda'}^{\beta}$  y las inclusiones  $i_{\lambda'}^{\beta}$ ,  $i_{\lambda'}^{\beta'}$  sean elementales. Entonces, usando que  $j_{\lambda'}^{\beta\beta'}$  es elemental, vemos que

$$\phi^{W^{\beta}}(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \phi^{W_{\lambda'}^{\beta}}(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \phi^{W_{\lambda'}^{\beta'}}(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \phi^{W^{\beta'}}(x_1, \dots, x_n).$$

■

Llamaremos  $j = j^{0\kappa}$ , de modo que  $j : V_{\lambda} \longrightarrow I$  es una inmersión elemental. Definimos  $S = j[V_{\lambda}] \subset I$ . Los elementos de  $I$  serán los conjuntos internos del modelo que vamos a construir. Ahora nos falta construir los conjuntos estrictamente externos. Conviene introducir el siguiente concepto:

**Definición C.28** Si  $x$  es un elemento de un modelo estándar  $M$ , llamaremos *extensión* de  $x$  al conjunto  $\tilde{x} = \{u \in M \mid u E x\}$ .

En la definición siguiente las extensiones que aparecen hacen referencia a la relación  $E$  del modelo estándar  $I$ :

**Definición C.29** Definimos la familia de modelos estándar  $(Z_\alpha^\beta, E_\alpha^\beta, d)$ , para  $\alpha < \lambda$ ,  $\beta \leq \lambda$ , determinada por las propiedades siguientes:

- a) La descripción impropia de todos los modelos es la de  $I$ .
- b)  $(Z_\alpha^0, E_\alpha^0, d) = (W_\alpha^\kappa, E_\alpha^\kappa, d)$ .
- c)  $Z_\alpha^{\beta+1} = Z_\alpha^\beta \cup A_\alpha^\beta \cup B_\alpha^\beta$ , donde
 
$$A_\alpha^\beta = \{x \in I \mid \tilde{x} \subset Z_\alpha^\beta\}, \quad B_\alpha^\beta = \{x \in \mathcal{P}Z_\alpha^\beta \mid \bigwedge y \in I x \neq \tilde{y}\}.$$
- d)  $E_\alpha^{\beta+1} = E_\alpha^\beta \cup \{(x, y) \in Z_\alpha^\beta \times A_\alpha^\beta \mid x E y\} \cup \{(x, y) \in Z_\alpha^\beta \times B_\alpha^\beta \mid x \in y\}$ .
- e) Si  $\lambda' \leq \lambda$  es un ordinal límite,  $Z_\alpha^{\lambda'} = \bigcup_{\delta < \lambda'} Z_\alpha^\delta$ ,  $E_\alpha^{\lambda'} = \bigcup_{\delta < \lambda'} E_\alpha^\delta$ .

Definimos  $M$  como la unión de todos los modelos  $Z_\alpha^\beta$ , con la relación  $E$  que resulta de unir todas las relaciones  $E_\alpha^\beta$  y con la descripción impropia de  $I$ .

Veamos algunas consecuencias de esta definición:

**Teorema C.30** *Se cumple:*

- a)  $S \subset I \subset M$ .
- b) Si  $x \in I$  entonces la extensión de  $x$  en  $M$  es la misma que en  $I$ .
- c) Si  $x \in M \setminus I$ , entonces la extensión de  $x$  es  $x$ .
- d) Para todo  $a \subset Z_\alpha^\beta$  existe un  $x \in Z_\alpha^{\beta+1}$  tal que  $\tilde{x} = a$ .
- e) Si  $\alpha < \alpha' < \lambda$  y  $\beta < \beta' \leq \lambda$ , entonces  $Z_\alpha^\beta \subset Z_{\alpha'}^{\beta'} \cap Z_{\alpha'}^\beta$ .
- f) Si  $x \in M$ ,  $y \in Z_\alpha^\beta$ ,  $x E y$ , entonces  $x \in Z_\alpha^\beta$ .

DEMOSTRACIÓN: Las propiedades a), b) y c) son inmediatas. La propiedad d) se debe a que o bien existe un  $x \in A_\alpha^\beta$  tal que  $\tilde{x} = a$ , y entonces cumple lo pedido, o bien tomamos  $x = a \in B_\alpha^\beta$ . La propiedad e) se demuestra fácilmente por inducción. La propiedad f) se prueba por inducción sobre  $\beta$ . El caso  $\beta = 0$  es consecuencia de que la inclusión de  $W_\alpha^\kappa$  en  $I$  es inicial. ■

Tenemos así un modelo  $\mathcal{M} = (M, E, I, S, d)$ . Hemos de probar que cumple (cualquier subcolección finita de) los axiomas de H.

**Extensionalidad** Decir que  $\mathcal{M}$  cumple el axioma de extensionalidad es tanto como decir que si dos conjuntos  $x, y \in M$  tienen la misma extensión entonces son iguales. Ahora bien, si  $x, y \in M \setminus I$  entonces  $x = \tilde{x} = \tilde{y} = y$ , si  $x, y \in I$  entonces las extensiones de  $x$  e  $y$  son sus extensiones en  $I$ , y ha de ser  $x = y$  porque  $I$  satisface el axioma de extensionalidad. Por último, no puede ocurrir que  $x \in I$  e  $y \in M \setminus I$  tengan la misma extensión, pues si  $y \in Z_\alpha^\beta$  y  $\beta$  es el mínimo ordinal para el que esto sucede, entonces  $\beta = \gamma + 1$  y ha de ser  $y \in B_\alpha^\gamma$ , con lo que  $\tilde{y} = y \neq \tilde{x}$ .

**Par** El axioma del par es

$$\bigwedge xy \in M \bigvee z \in M \bigwedge u \in M (u E z \leftrightarrow u = x \vee u = y).$$

Sean  $\alpha$  y  $\beta$  tales que  $x, y \in Z_\alpha^\beta$ . Consideremos  $a = \{x, y\} \subset Z_\alpha^\beta$ . Basta tomar el  $z \in Z_\alpha^{\beta+1}$  cuya extensión es  $a$ .

**Unión** El axioma de la unión es

$$\bigwedge x \in M \bigvee y \in M \bigwedge uv \in M (u E v \wedge v E x \rightarrow u E y).$$

Consideremos  $a = \{u \in M \mid \bigvee v \in M (u E v \wedge v E x)\}$ . Si  $x \in Z_\alpha^\beta$ , entonces todo  $v \in M$  que cumpla  $v E x$  está también en  $Z_\alpha^\beta$  y lo mismo sucede con todo  $u \in M$  tal que  $u E v$ . Así pues,  $a \subset Z_\alpha^\beta$ . Ahora basta tomar el  $x \in Z_\alpha^{\beta+1}$  cuya extensión es  $a$ .

**Partes** El axioma de partes es

$$\bigwedge x \in M \bigvee y \in M \bigwedge u \in M (\bigwedge v \in M (v E u \rightarrow v E x) \rightarrow u E y).$$

Tomamos  $x \in M$ , que estará de hecho en un  $Z_\alpha^\beta$ . Sea  $a = \{u \in Z_\alpha^{\beta+1} \mid \tilde{u} \subset \tilde{x}\}$  y sea  $y \in Z_\alpha^{\beta+2}$  cuya extensión sea  $a$ . Entonces  $y$  cumple lo pedido, pues si  $u \in M$  cumple  $\bigwedge v \in M (v E u \rightarrow v E x)$ , entonces  $\tilde{u} \subset \tilde{x} \subset Z_\alpha^\beta$ , luego existe un  $u_0 \in Z_\alpha^{\beta+1}$  tal que  $\tilde{u} = \tilde{u}_0$ , luego por extensionalidad  $u = u_0 \in Z_\alpha^{\beta+1}$ . Más aún,  $u \in a$ , luego  $u E y$ .

**Especificación** El axioma de especificación es

$$\bigwedge x_1 \cdots x_n x \in M \bigvee y \in M \bigwedge u \in M (u E y \leftrightarrow u E x \wedge \alpha^M(u, x_1, \dots, x_n))$$

Tomamos  $\alpha$  y  $\beta$  tales que  $x \in Z_\alpha^\beta$  y consideramos el conjunto

$$a = \{u \in Z_\alpha^\beta \mid u E x \wedge \alpha^M(u, x_1, \dots, x_n)\}.$$

Es claro que el  $y \in Z_\alpha^{\beta+1}$  cuya extensión es  $a$  cumple lo necesario.

**Elección** Para demostrar el axioma de elección tomamos un conjunto  $x \in Z_\alpha^\beta$  y fijamos un buen orden  $R$  en  $x$ . Teniendo en cuenta que  $(u, v) \equiv \{\{u\}, \{u, v\}\}$ , es fácil ver que si  $u E x \wedge v E x$ , entonces  $\{u\}^M, \{u, v\}^M \in Z_\alpha^{\beta+1}$  y que  $(u, v)^M \in Z_\alpha^{\beta+2}$ . Llamamos  $a$  al conjunto de todos los elementos de  $Z_\alpha^{\beta+2}$  que son de la forma  $(u, v)^M$ , con  $(u, v) \in R$  y tomamos el conjunto  $y \in Z_\alpha^{\beta+3}$  cuya extensión es  $a$ . Se comprueba que  $(y$  es un buen orden de  $x)^M$ .

**Inclusión y transitividad** El axioma de inclusión es trivial, pues  $S \subset I$ . El axioma de transitividad equivale a que  $\bigwedge x \in M \bigwedge y \in I (x E y \rightarrow x \in I)$ , lo cual es cierto, pues la extensión de un conjunto interno es su extensión en  $I$ .

**ZFC<sup>in</sup>** Podemos demostrar que  $M$  cumple cualquier cantidad finita de axiomas de ZFC relativizados a conjuntos internos gracias a la inmersión elemental  $j : V_\lambda \longrightarrow I$ . En efecto, si  $\alpha$  es un axioma de ZFC, podemos suponer  $\alpha^{V_\lambda}$ , luego  $\alpha^I$ , pero esto equivale a  $(\alpha^{\text{in}})^M$ .

**Transferencia** Para demostrar el principio de transferencia hemos de probar que

$$\bigwedge x_1 \cdots x_n \in S(\bigwedge x \in S \alpha^I(x, x_1, \dots, x_n) \rightarrow \bigwedge x \in I \alpha^I(x, x_1, \dots, x_n)).$$

Sean  $j(x_1), \dots, j(x_n) \in S$  y supongamos que  $\bigwedge x \in S \alpha^I(x, j(x_1), \dots, j(x_n))$  o, lo que es lo mismo,  $\bigwedge x \in V_\lambda \alpha^I(j(x), j(x_1), \dots, j(x_n))$ . Como  $j$  es elemental, esto equivale a  $\bigwedge x \in V_\lambda \alpha^{V_\lambda}(x, x_1, \dots, x_n) \equiv (\bigwedge x \alpha)^{V_\lambda}(x_1, \dots, x_n)$ . Usando de nuevo que  $j$  es elemental concluimos que  $\bigwedge x \in I \alpha^I(x, j(x_1), \dots, j(x_n))$ .

**Idealización** Observemos que si  $A \in M$  cumple ( $A$  tiene tamaño estándar) <sup>$M$</sup> , entonces existen  $B \in I$  y  $f \in M$  tales que  $(f : {}^\circ B \longrightarrow A \text{ suprayectiva})^M$ . No es cierto que  $f$  sea exactamente una aplicación fuera de  $M$ , pero en cualquier caso determina una aplicación suprayectiva  $g : S \cap \tilde{B} \longrightarrow \tilde{A}$ . La aplicación  $j$  biyecta  $S \cap \tilde{B}$  con un subconjunto de  $V_\lambda$ , luego  $|\tilde{A}| \leq |V_\lambda| < \kappa$ .

Llamemos  $A_0 = \tilde{A} \cap I$ . También se cumple que  $|A_0| < \kappa$ . Vamos a probar que existen ordinales  $\alpha < \lambda$ ,  $\beta < \kappa$  tales que  $A_0 \subset W_\alpha^\beta$ . Para ello necesitamos algunos hechos previos:

$$1) \text{ Si } x \in W_\alpha^\beta, \text{ entonces } i_{\alpha\alpha+1}^\beta(x) \text{ E } j_{\alpha+1}^{0\beta}(V_\alpha).$$

En efecto, se prueba por inducción sobre  $\beta \leq \kappa$ . Para  $\beta = 0$  es trivial (entendiendo que  $j_{\alpha+1}^{00}$  es la identidad). Si vale para  $\beta$  y  $x \in W_\alpha^{\beta+1}$ , entonces  $x = [f]$ , para cierta  $f : I^\beta \longrightarrow W_\alpha^\beta$ . Sea  $i_{\alpha\alpha+1}^{\beta+1}(x) = [g]$ . Aplicando la hipótesis de inducción a  $f(i)$ , tenemos que  $g(i) = i_{\alpha\alpha+1}^\beta(f(i)) \text{ E } j_{\alpha+1}^{0\beta}(V_\alpha)$ . Tomando clases  $i_{\alpha\alpha+1}^{\beta+1}(x) \text{ E } j_{\alpha+1}^{\beta\beta+1}(j_{\alpha+1}^{0\beta}(V_\alpha)) = j_{\alpha+1}^{0\beta+1}(V_\alpha)$ . Si  $\beta$  es límite y  $x \in W_\alpha^\beta$ , existe un  $\delta < \beta$  tal que  $x = j_\alpha^{\delta\beta}(x')$ , con  $x' \in W_\alpha^\delta$ . Por hipótesis de inducción  $i_{\alpha\alpha+1}^\delta(x') \text{ E } j_{\alpha+1}^{0\delta}(V_\alpha)$ , y aplicando  $j_{\alpha+1}^{\delta\beta}$  tenemos  $i_{\alpha\alpha+1}^\beta(x) = j_{\alpha+1}^{0\beta}(V_\alpha)$ .

$$2) \text{ Si } x \in I \text{ y } \tilde{x} \subset Z_\alpha^0, \text{ entonces } x \in Z_{\alpha+2}^0.$$

En efecto, según la propiedad anterior (recordemos que  $Z_\alpha^0 = W_\alpha^\kappa$ ) tenemos que  $(x \subset j(V_\alpha))^I$ , luego  $x \in \mathcal{P}j(V_\alpha)^I$ , y como  $j$  es elemental  $(\mathcal{P}j(V_\alpha))^I = j((\mathcal{P}V_\alpha)^{V_\lambda}) = j(V_{\alpha+1})$ . Así pues,  $x \text{ E } j(V_{\alpha+1}) \in Z_{\alpha+2}^0$ , y por el teorema C.30 f) concluimos que  $x \in Z_{\alpha+2}^0$ .

$$3) Z_\alpha^\beta \cap I \subset Z_{\alpha+2\beta}^0.$$

Por inducción sobre  $\beta < \lambda$ . Para  $\beta = 0$  es trivial. Si  $x \in Z_\alpha^{\beta+1} \cap I$ , entonces  $\tilde{x} \subset Z_\alpha^\beta \cap I \subset Z_{\alpha+2\beta}^0$ , luego por el apartado anterior  $x \in Z_{\alpha+2\beta+2}^0$ . Si  $\beta$  es límite y  $x \in Z_\alpha^\beta \cap I$ , entonces  $x \in Z_\alpha^\delta \cap I$ , para un  $\delta < \beta$ . Por hipótesis de inducción  $x \in Z_{\alpha+2\delta}^0 \subset Z_{\alpha+2\beta}^0$ .

Volviendo al conjunto  $A$  de tamaño estándar, si  $A \in Z_\alpha^\beta$ , ahora tenemos que  $A_0 \subset Z_\alpha^\beta \cap I \subset Z_{\alpha+2\beta}^0 = W_{\alpha+2\beta}^\kappa$ , pero como  $\kappa$  es un cardinal regular y  $|A_0| < \kappa$ , ha de existir un  $\gamma < \kappa$  tal que  $A_0 \subset W_{\alpha+2\beta}^\gamma$ . Cambiando la notación, tenemos un ordinal  $\alpha < \lambda$  y otro  $\beta < \kappa$  tales que  $A_0 \subset W_\alpha^\beta$ . Puesto que  $\alpha$  se puede tomar arbitrariamente grande, podemos suponer que la inclusión  $W_\alpha^\kappa \rightarrow I$  es elemental (ver el teorema C.26).

Fijados  $x_1, \dots, x_n \in I$  (que podemos suponer en  $W_\alpha^\beta$ ) Hemos de demostrar

$$\begin{aligned} \bigwedge z \in M(\tilde{z} \subset \tilde{A} \wedge z \text{ finito}^M \rightarrow \bigvee x \in I \bigwedge y \in \tilde{z} \cap A_0 \alpha^I(x, y, x_1, \dots, x_n)) \\ \rightarrow \bigvee x \in I \bigwedge y \in A_0 \alpha^I(x, y, x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Suponemos la hipótesis. Tomamos  $y_1, \dots, y_m \in A_0$ . Puesto que las inclusiones  $W_\alpha^\beta \rightarrow W_\alpha^\kappa \rightarrow I$  son elementales, podemos suponer que  $W_\alpha^\beta$  satisface cualquier cantidad finita de axiomas de ZFC. Si suponemos que cumple los necesarios para demostrar que existe  $\{x\}$  y es finito, que existe la unión de conjuntos y que la unión de conjuntos finitos es finita, podemos construir un  $z \in W_\alpha^\beta$  cuya extensión sea  $\{y_1, \dots, y_m\}$ . También es fácil ver que  $z$  es finito<sup>M</sup>, por lo que

$$\bigvee x \in I \bigwedge y \in I(y E z \rightarrow \alpha^I(x, y, x_1, \dots, x_n)).$$

Usando que las inclusiones son elementales pasamos a

$$\bigvee x \in W_\alpha^\beta \bigwedge y \in W_\alpha^\beta(y E z \rightarrow \alpha^{W_\alpha^\beta}(x, y, x_1, \dots, x_n)).$$

Así pues, tenemos que los conjuntos  $\{x \in W_\alpha^\beta \mid \alpha^{W_\alpha^\beta}(x, y, x_1, \dots, x_n)\}$  para  $y \in A_0$  tienen la propiedad de la intersección finita, luego están contenidos en un ultrafiltro  $F$  en  $W_\alpha^\beta$ . Como la ultrapotencia  $W_\alpha^{\beta+1}$  es adecuada, existe un  $\xi \in W_\alpha^{\beta+1}$  tal que  $F = t(\xi)$ , y así, si  $y \in A_0$  tenemos que

$$\xi \in \ast\{x \in W_\alpha^\beta \mid \alpha^{W_\alpha^\beta}(x, y, x_1, \dots, x_n)\},$$

lo cual, por el teorema C.11 equivale a

$$\alpha^{W_\alpha^{\beta+1}}(\xi, j_\alpha^{\beta+1}(y), j_\alpha^{\beta+1}(x_1), \dots, j_\alpha^{\beta+1}(x_n)).$$

Si usamos que  $j_\alpha^{\beta+1\kappa}$  e  $i_{\alpha\lambda}^\kappa$  son inmersiones elementales e identificándolas con inclusiones llegamos a  $\alpha^I(\xi, y, x_1, \dots, x_n)$ , para todo  $y \in A_0$ , como teníamos que probar.

**Estandarización** Hemos de probar que

$$\bigwedge x \in M \bigvee y \in S \bigwedge u \in S(u E y \leftrightarrow u E x).$$

Para ello demostramos primero que si  $\alpha \leq \gamma < \lambda$ ,  $u \in V_\gamma$ ,  $y \in W_\alpha^\beta$  y  $j_\gamma^{0\beta}(u) = i_{\alpha\gamma}^\beta(y)$ , entonces  $u \in V_\alpha$ .

Lo probamos por inducción sobre  $\beta$ . Para  $\beta = 0$  es trivial (entendiendo que  $j_\gamma^{00}$  es la identidad). Si vale para  $\beta$ , sea  $x' = j_\gamma^{0\beta}(u)$ , con lo que  $j_\gamma^{0\beta+1}(u) = j_\gamma^{\beta\beta+1}(x') = [c_{x'}]$ .

Por otra parte, si  $y = [f]$ , para un conjunto de índices  $i$  que está en  $U^\beta$ , se ha de dar la igualdad  $c_{x'}(i) = i_{\alpha\gamma}^\beta(f(i))$ , es decir, existe un  $y' = f(i) \in W_\alpha^\beta$  tal que  $x' = j_\gamma^{0\beta}(u) = i_{\alpha\gamma}^\beta(y')$ . Por hipótesis de inducción  $u \in V_\alpha$ .

Si  $\beta$  es un límite y vale para todo  $\delta < \beta$ , tomamos  $\delta$  de modo que  $y = j_\alpha^{\delta\beta}(y')$ , para cierto  $y' \in W_\alpha^\delta$ . Entonces

$$j_\gamma^{\delta\beta}(j_\gamma^{0\delta}(u)) = i_{\alpha\gamma}^\beta(j_\alpha^{\delta\beta}(y')) = j_\gamma^{\delta\beta}(i_{\alpha\gamma}^\delta(y')),$$

luego  $j_\gamma^{0\delta}(u) = i_{\alpha\gamma}^\delta(y')$  y, por hipótesis de inducción,  $u \in V_\alpha$ .

En particular, para  $\beta = \kappa$  e identificando todos los modelos con subconjuntos de  $I$  tenemos que si  $u \in V_\lambda$  cumple  $j(u) \in Z_\alpha^0$  entonces  $u \in V_\alpha$ .

Ahora demostramos que si  $u \in V_\lambda$  cumple  $j(u) \in Z_\alpha^\beta$ , con  $\alpha, \beta < \lambda$ , entonces  $u \in V_{\alpha+\beta}$ .

Observemos antes que podemos exigir que si  $\alpha, \beta < \lambda$  entonces  $\alpha + \beta < \lambda$ . En efecto, basta suponer que  $V_\lambda$  cumple

$$\bigwedge x \in V_\lambda (x \text{ es un ordinal}^{V_\lambda} \leftrightarrow x \text{ es un ordinal})$$

así como el teorema que afirma que para cada dos ordinales existe su suma.

Razonamos por inducción sobre  $\beta$ . Para  $\beta = 0$  lo acabamos de probar. Supongámoslo cierto para  $\beta$  y sea  $j(u) \in Z_\alpha^{\beta+1}$ . Si  $v \in u$ , entonces  $j(v) E j(u)$ , luego  $j(v) \in Z_\alpha^\beta$ . Por hipótesis de inducción  $v \in V_{\alpha+\beta}$ , luego  $u \subset V_{\alpha+\beta}$ , luego  $u \in V_{\alpha+\beta+1}$ . El caso límite es trivial.

Ahora ya podemos demostrar el principio de estandarización: dado  $x \in Z_\alpha^\beta$ , con  $\alpha, \beta < \lambda$ , tomamos  $a = \{u \in V_{\alpha+\beta} \mid j(u) E x\} \in V_{\alpha+\beta+1}$ . Así, para todo  $u \in V_\lambda$  tenemos que  $j(u) E x$  si y sólo si  $u \in a$ , si y sólo si  $j(u) \in j(a)$ , luego basta tomar  $y = j(a) \in S$ .

En definitiva, hemos demostrado lo siguiente:

**Teorema C.31** *Si  $\Gamma$  es cualquier colección finita de axiomas de H y  $\theta$  es una fórmula de ZFC sin variables libres, en ZFC se demuestra que existe un modelo  $\mathcal{M}$  tal que  $\mathcal{M} \models \Gamma$  y*

$$\theta \leftrightarrow \mathcal{M} \models \theta^{\text{in}}.$$

De aquí se deduce el teorema de conservación para H exactamente igual que el teorema para N se deducía de C.22. La prueba del teorema anterior —y por consiguiente del teorema de conservación— es completamente constructiva.

**Regularidad y reemplazo** Vamos a justificar aquí las afirmaciones del último apartado del apéndice B. Ante todo, teniendo en cuenta que todos los conjuntos de  $V_0$  son finitos, es fácil ver que  $j$  biyecta  $V_0$  con  $Z_0^0$ . Por comodidad podemos sustituir los conjuntos de  $Z_0^0$  por sus antiimágenes en  $V_0$ , de modo que  $V_0 \subset M$  y  $j$  es la identidad en  $V_0$ .

Un conjunto  $x \in I$  tal que  $\tilde{x} \subset Z_0^0$  tiene todos sus elementos estándar, por lo que ha de ser estándar y finito, lo cual obliga a que esté en  $Z_0^0$ . Así pues,  $Z_0^1$  no tiene más conjuntos internos que los de  $Z_0^0$ . Por consiguiente  $Z_0^1 = \mathcal{P}Z_0^0$ . Ahora es fácil demostrar en general que  $\bigwedge \alpha < \lambda Z_0^\alpha = V_\alpha$ , luego  $V_\lambda \subset M$  y la relación  $E$  en  $M$  se restringe a la pertenencia usual en  $V_\lambda$ .

Se comprueba que los únicos ordinales <sup>$M$</sup>  son los elementos de  $\lambda$ , y entonces es fácil ver que en  $M$  puede construirse la jerarquía regular, de modo que los conjuntos regulares son precisamente los de  $V_\lambda$ . En particular en  $M$  se cumple que la relación de pertenencia está bien fundada sobre los conjuntos regulares, y a través de la inmersión  $j$  se prueba que también está bien fundada sobre los conjuntos estándar. Más aún, en  $M$  existe el colapso transitivo de cada conjunto estándar  $x$ , pues no es sino  $j^{-1}(x)$ . Éstos son los hechos que habíamos afirmado que pueden añadirse como axiomas adicionales a H sin perder por ello el teorema de conservación, lo cual queda ahora demostrado porque se cumplen en  $M$ .



# Bibliografía

- [1] DIENER, F. *Cours d'analyse non standard*, Université d'Oran (1983).
- [2] HRBACEK, K. *Axiomatic foundations of nonstandard analysis*, Fund. Math. **XCVIII** (1978), pp. 1–19.
- [3] HRBACEK, K. *Nonstandard set theory*, Amer. Math. Monthly **83** (1979), pp. 659–677.
- [4] NELSON, E. *Internal set theory: a new approach to nonstandard analysis*, Bull. Amer. Math. Soc. **83** (6) (1977), pp. 1165–1198.
- [5] STROYAN, K. D., LUXEMBURG, W. A. J. *Introduction to the theory of infinitesimals*. Pure and Applied Mathematics, No. 72. Academic Press, New York (1976).

# Índice de Materias

- abierto, 183
- absolutamente convergente (serie), 159
- acotada
  - función, 118
  - sucesión, 58
- acotado
  - conjunto, 17
  - espacio, 187
- acumulación (punto de), 80
- adherente (punto), 184
- aislado (punto), 80
- anillo, 21
- aplicación, 12
- arco seno, 134
- arco tangente, 140
- arquimediano (cuerpo), 48
  
- Barrow (regla de), 125
- bola, 185
- buena ordenación (principio de), 17
  
- cardinal, 20
- casi estándar, 182
  - función, 163
  - número, 62
- Cauchy (sucesión de), 62, 170
- cerrado, 184
- cilíndricas (coordenadas), 248
- clase de equivalencia, 18
- clausura, 186
- compacto (espacio), 188
- complementario, 9
- concurrente (relación), 264, 265
- conexo (espacio), 193
- congruencia, 22
- conjunto
  - cociente, 18
  - de oportunidades, 212
  - conservación (principio de), 41
  - continua (función), 78, 189
  - convergencia
    - casi uniforme, 168
    - de funciones, 109
    - de sucesiones, 54
    - puntual, 163
    - uniforme, 165
  - convexa (función), 97
  - coseno, 136
    - hiperbólico, 116
  - cota, 17
  - cubo, 219
  - cuerpo, 25
  - cuádrupla, 8
  - cóncava (función), 97
  
  - derivada, 86
    - parcial, 195
  - derivadas sucesivas, 99
  - diferenciable (función), 197
    - estricta, 201
  - distancia, 181
    - euclídea, 180
    - producto, 182
  - dominio de integración, 223
  
  - entorno, 86, 183
  - espacio
    - normado, 180
    - vectorial, 179
  - especificación (axioma de), 6
  - estandarización (principio de), 40, 268
  - exponencial, 104, 107

- extensionalidad (axioma de), 3
- extensión, 307
- extensión (principio de), 33, 269
- externa (afirmación, propiedad, etc.), 32
- externa (expresión), 261
- externo (conjunto), 37, 267
- factorial, 28
- filtro, 291
- finito
  - conjunto, 18
  - número, 49
  - número natural, 44
  - punto, 182
- frontera, 187
- función, 12
  - lagrangiana, 214
  - objetivo, 212
- Gauss (campana de), 248
- geométrica (suma de una serie), 103
- gráfica, 77
- halo, 53, 182
- homeomorfismo, 193
- idealización (principio de), 36, 264
- indeterminación, 59
- inducción (principio de), 11
- inductivo (conjunto), 10
- ínfimo, 70
- infinitamente próximos (números), 51
- infinitesimal, 50
- infinito
  - conjunto, 18
  - número, 49
  - número natural, 44
- infinitud (axioma de), 10
- inmersión
  - elemental, 290
  - inicial, 303
- integral, 121, 222
  - inferior, superior, 119, 221
- interior, 186
- interior (punto), 86, 183
- interna (afirmación, propiedad, etc.), 6, 32
- interna (expresión), 261
- intersección, 8
- intervalo, 74
- L'Hôpital (regla de), 112–115
- Lagrange (condiciones de), 214
- lagrangiana (función), 214
- ley de composición, 21
- logaritmo, 105
- longitud, 133, 145
- límite
  - de funciones, 109
  - de sucesiones, 55
    - infinito, 59
    - inductivo, 297
    - superior, 174
- matriz jacobiana, 198
- máximo, 17
  - local, 93, 212
- mínimo, 17
  - local, 93, 212
- modelo, 286
- monótona
  - función, 85
  - sucesión, 73
- multiíndice, 220
- Newton (binomio), 29
- norma, 180, 220
  - de una partición, 118
  - euclídea, 180
- nulo (conjunto), 224
- números
  - combinatorios, 28
  - enteros, 23
  - naturales, 10
  - racionales, 26
- optimización clásica, 212
- par
  - desordenado, 8
  - ordenado, 8
- parte entera, 48

- parte estándar, 62, 182
- partes (conjunto de), 9
- partición, 117, 220
- Peano (axiomas de), 11
- pertenencia, 3
- pi, 137
- polares (coordenadas), 147, 246
- polinomio, 81
- primitiva, 126
- producto cartesiano, 9
  
- radio de convergencia, 176
- raíz  $k$ -ésima, 71
- recta tangente, 142
- regular (punto, conjunto), 211
- relación, 16
  - de equivalencia, 18
  - de orden, 16
- relativización, 273, 285
- remoto (punto), 182
- restricción, 13
  
- sección, 60
- seno, 135
  - hiperbólico, 116
- serie, 100
  - funcional, 171
- simplificación (propiedad de), 16
- sistema inductivo, 297
- subconjunto, 4
- sucesión, 53
- sumas de Riemann, 118, 220
- supremo, 70
  
- tangente, 88, 139
- Tartaglia (triángulo), 29
- Taylor
  - polinomio de, 100
  - resto de, 100
  - serie de, 100
- Teorema
  - de cambio de variable, 127, 244
  - de Cauchy, 96
  - de completitud, 68, 69
  - de la función implícita, 210
  - de la función inversa, 94, 206, 209
  - de la media, 236
  - de recursión, 13
  - de Schwarz, 205
  - de Tychonoff, 189
  - de Weierstrass (primero), 83
  - de Weierstrass (segundo), 84
  - del valor medio, 96
- terna, 8
- transferencia (principio de), 33, 262
  
- ultrafiltro, 292
- ultralímite, 299
- ultrapotencia, 292
  - adecuada, 295
- unidad, 25
- unión, 8
  
- vacío (conjunto), 7
- valor absoluto, 48
- valor medio, 236
- Viviani (bóveda de), 255
- volumen, 220, 223
  
- Weierstrass (criterio de mayoración), 172