Carlos Ivorra Castillo

TEORÍAS DE CONJUNTOS

Todas las teorías son legítimas y ninguna tiene importancia. Lo que importa es lo que se hace con ellas.

Jorge Luis Borges

Índice General

Introducción

El plural del título de este libro pretende advertir de que no es un libro de "teoría de conjuntos" en el sentido usual de la palabra, sino sobre "teorías de conjuntos", es decir, un libro en el que se discuten varias teorías de conjuntos distintas de las más habituales: ZFC o NBG.

Es relativamente conocido que la teoría de conjuntos de Zermelo se diferenciaba de la actual ZFC en que no incluía el axioma del reemplazo, y en su lugar tenía un axioma más débil: el axioma de especificación, o de selección de subconjuntos. Si llamamos ZC a la teoría de Zermelo con el axioma de elección, resulta que en ella puede desarrollarse una gran parte de la matemática moderna (del álgebra, el análisis, la geometría, etc.) y sin embargo es una teoría muchísimo más débil que ZFC. Para darse cuenta de la distancia entre ambas teorías basta observar que en ZFC se demuestra fácilmente que el conjunto $V_{\omega+\omega}$ es un modelo transitivo de ZC, lo que a su vez pone de manifiesto que en ZC no es posible demostrar la existencia del ordinal $\omega+\omega$, pero, ¿cuántas partes de las matemáticas necesitan tratar con ordinales? Por el contrario, en ZC podemos desarrollar cómodamente (entre otras cosas) toda el análisis en $\mathbb{R}^n$, la geometría diferencial, el álgebra y una buena parte de la topología, siempre y cuando no tratemos de incidir en sus aspectos más puramente conjuntistas.

Hay teorías de conjuntos que son incluso más débiles que ZC en cuanto a consistencia y que, pese a ello, permiten desarrollar una parte considerable de las matemáticas o, dicho de otro modo, que tienen modelos con una estructura suficientemente rica como para resultar interesantes. Algunas de estas teorías han surgido por razones "filosóficas", es decir, con la intención de servir como fundamento a la porción de las matemáticas que interesaba especialmente a su creador tratando al mismo tiempo de cumplir con alguna clase de "escrúpulo" de naturaleza más o menos intuicionista. Sin embargo, aquí no pretendemos defender ninguna postura filosófica exótica. Por el contrario, consideramos que el interés de una buena parte de este libro radica en que es útil saber qué axiomas son realmente necesarios para demostrar cada uno de los teoremas básicos de la teoría de conjuntos. Por ejemplo, en el capítulo I expondremos una miniteoría de conjuntos T que resulta ser suficiente para definir los ordinales (de von Neumann) y demostrar sus propiedades básicas. Sabiendo esto sabemos que para que podamos hablar de ordinales en un modelo basta con que éste satisfaga los axiomas de T.

Por lo demás, la teoría T no da más de sí, pero en el capítulo II exponemos la teoría de Kaye-Forster (KF), cuyos axiomas son por una parte muy restrictivos y hasta cierto punto incómodos de manejar, pero bastan para introducir los conceptos conjuntistas básicos (relaciones, funciones, etc.), así como los números naturales, e incluso demostrar las equivalencias usuales del axioma de elección (el principio de buena ordenación, el lema de Zorn, etc.)

Una teoría similar a KF, pero mucho más manejable, es la teoría de Mac Lane (MAC), que resulta ser equiconsistente con una teoría bastante más potente, la teoría de Mostowski (MOST), aunque todas ellas son mucho más débiles que ZFC. Como muestra de la potencia de MAC señalamos que basta para definir la clase L de los conjuntos constructibles, aunque no por el procedimiento usual, sino mediante la técnica usada por el propio Gödel en su trabajo sobre la consistencia del axioma de elección y la hipótesis del continuo generalizada.

La teoría MOST puede verse como la conjunción de dos teorías que en cierto sentido son complementarias. Una de ellas es MAC y la otra es la teoría de Kripke-Platek (KP), que es una de las teorías más relevantes tratadas en este libro. En efecto, en diversas ramas de la teoría de conjuntos es frecuente tratar con modelos de ZFC que no son necesariamente bien fundados (por ejemplo, los que se obtienen al formar ultrapotencias o límites inductivos de otros modelos). En dichos modelos se puede definir de forma natural una parte bien fundada, la cual no es necesariamente un modelo de ZFC, pero sí resulta ser un modelo de KP (incluso de una extensión algo más fuerte) y, bajo condiciones muy generales, de KPI, que es KP más el axioma de infinitud.

Por ello es especialmente relevante saber qué resultados de ZFC siguen siendo válidos si sólo disponemos de los axiomas de KP o KPI. Y sucede que KP es suficiente para demostrar teoremas muy generales de inducción y recursión transfinita, e incluso para construir la clase de los conjuntos constructibles por el procedimiento usual (mediante iteración del operador de partes definibles).

Por otra parte, la teoría KPI tiene también un gran interés por su relación con la teoría de la recursión y los conjuntos admisibles, lo que a su vez la relaciona con al teoría descriptiva de conjuntos, aunque en este libro no abordaremos estas facetas.

Una razón para estudiar la teoría débil y algo incómoda KF es porque es lo suficientemente débil como para ser consistente (al menos en una variante KFA que admite átomos, es decir, objetos primitivos que no son conjuntos) con un axioma insólito, a saber, la existencia de un conjunto de todos los conjuntos. Al añadir a KF el axioma $V \in V$ (es decir, la clase de todos los conjuntos es un conjunto), no obtenemos, contrariamente a lo que podría esperarse, un diluvio de contradicciones, desde la de Russell hasta la de Cantor pasando por la antinomia de Burali-Forti, sino que obtenemos la llamada teoría de los Nuevos Fundamentos de Quine (en la variante con átomos propuesta por Jensen) NFA.

Los tres últimos capítulos de este libro están dedicados a esta teoría, que viene a ser a la teoría de conjuntos lo que el análisis no estándar es al análisis. En particular demostraremos la equiconsistencia entre NFA y MAC, así como la consistencia de varias extensiones de NFA respecto a otras subteorías de ZFC, o incluso de superteorías en algunos casos, pues algunas pruebas de consistencia requieren cardinales grandes.

Debemos confesar nuestro escepticismo sobre cualquier utilidad práctica que pueda atribuirse a NFA. Como el análisis no estándar, debajo de una superficie que permite presentarla (no sin cierta manipulación) como una teoría "natural e intuitiva", en el fondo esconde un aparato lógico nada intuitivo que, a diferencia de la lógica subyacente a ZFC, no puede relegarse en ningún momento a un segundo plano, lo que la incapacita como teoría apta para el uso cotidiano de matemáticos no especialistas en lógica. Ahora bien, siempre igual que en el caso del análisis no estándar, su planteamiento es sugerente, y es natural que excite la curiosidad de todo aquel interesado por la lógica y la teoría de conjuntos, aunque tras familiarizarse con ella pueda terminar viéndola como un mero divertimento. Como tal la presentamos aquí, sin más pretensiones.

Por el contrario, consideramos que el paciente estudio de las subteorías de ZFC que exponemos en los cinco primeros capítulos de este libro, si bien es la antítesis de lo que sería una introducción razonable a la teoría de conjuntos, puede proporcionar una visión más profunda y madura al lector ya familiarizado con ella, y que le puede resultar especialmente útil al tratar con modelos de la teoría de conjuntos.

Capítulo I

La teoría básica

En este primer capítulo presentamos una teoría mínima T que será común a todas las teorías de conjuntos que vamos a estudiar. Como veremos, pese a su "minimalidad", no sólo permite demostrar los hechos básicos sobre el álgebra de los conjuntos, sino también las propiedades básicas de los ordinales.

1.1 Extensionalidad

Como es bien sabido, el lenguaje formal de ZFC tiene un único signo primitivo no lógico, el relator de pertenencia $\in$. Esto se traduce en que en ZFC hay dos únicos conceptos primitivos no definidos, sino regulados por los axiomas:

- El concepto de *"conjunto",* que es el nombre general de los objetos de los que trata la teoría, de modo que los cuantificadores $\bigwedge x$, $\bigvee x$ se leen informalmente como "para todo conjunto x" y "existe un conjunto x", respectivamente.
- El concepto de *"pertenencia",* que viene expresado por el relator '$\in$' , de modo que la fórmula '$x \in y$' se lee informalmente como "el conjunto x pertenece a (o es un elemento de) el conjunto y".

La naturaleza conjuntista de los objetos de cualquier modelo posible de ZFC viene determinada por el *axioma de extensionalidad:*

$$\bigwedge xy(\bigwedge u(u \in x \leftrightarrow u \in y) \rightarrow x = y).$$

Esto significa que cada conjunto está unívocamente determinado por su *extensión,* es decir, por la colección de los conjuntos que le pertenecen y, por consiguiente, podemos identificar a cada conjunto con su extensión.

Sin embargo, en algunas de las teorías que vamos a estudiar conviene admitir la posible existencia de objetos que no sean conjuntos. Para dejar abierta esta posibilidad consideramos el lenguaje formal $\mathcal{L}_a$ que consta de los signos de $\mathcal{L}$ más un relator monádico cto. De este modo, el lenguaje $\mathcal{L}_a$ permite hablar de tres conceptos primitivos básicos:

- El concepto de *"objeto"*, que es el nombre general que daremos a los objetos de cualquier teoría sobre $\mathcal{L}_a$. Así, los cuantificadores $\bigwedge x$, $\bigvee x$ los leeremos informalmente como "para todo objeto x" y "existe un objeto x", respectivamente.

- El concepto de *"conjunto"*, que viene expresado por el relator 'cto', de modo que la fórmula $\operatorname{cto} x$ la leeremos informalmente "x es un conjunto". La fórmula '$\neg \operatorname{cto} x$' la leeremos "$x$ es un átomo", de modo que todo objeto es, por definición, o bien un conjunto, o bien un átomo.

  Por simplicidad adoptaremos el convenio de que las variables mayúsculas representan conjuntos, de modo que

$$\bigwedge X\alpha \equiv \bigwedge x(\operatorname{cto} x \rightarrow \alpha), \qquad \bigvee X\alpha \equiv \bigvee x(\operatorname{cto} x \wedge \alpha).$$

- El concepto de *"pertenencia"*, que viene expresado por el relator '$\in$', de modo que la fórmula '$x \in y$' la podemos leer como "el objeto x pertenece al objeto y".

Hemos distinguido entre conjuntos y objetos para restringir la propiedad de extensionalidad a los primeros:

Axioma de extensionalidad $\bigwedge XY(\bigwedge u(u \in X \leftrightarrow u \in Y) \rightarrow X = Y)$

En palabras: si dos conjuntos tienen los mismos elementos (ya sean conjuntos o átomos), entonces son iguales o, equivalentemente, todo conjunto está unívocamente determinado por su extensión. Para los átomos podemos introducir el axioma siguiente:

Axioma de los átomos $\bigwedge ux(u \in x \rightarrow \operatorname{cto} x)$

Equivalentemente, el axioma de los átomos afirma que los átomos no tienen elementos. En particular, todos los átomos tienen los mismos elementos, pero no podemos concluir que todos son iguales entre sí, precisamente porque hemos restringido el alcance del axioma de extensionalidad para que sólo sea aplicable a conjuntos.

Podría pensarse que, en realidad, no era necesario introducir el relator 'cto' como signo primitivo, sino que podríamos haber definido $\operatorname{cto} x \equiv \bigvee u\, u \in x$, pero esto no sería una buena idea, ya que en todas las teorías que vamos a considerar nos interesará que exista un conjunto vacío, es decir, un conjunto sin elementos que, no obstante, sea un conjunto y no un átomo.[1]

Cabe señalar que el axioma de los átomos sólo tiene un valor teórico, pues en la práctica nunca necesitaremos apelar a él. Simplemente, todos los resultados

[1] Una alternativa viable, equivalente a la que hemos adoptado, habría sido definir $\mathcal{L}_a$ como el lenguaje que resulta de añadir a $\mathcal{L}$ una constante $\varnothing$, introducir el axioma del conjunto vacío en la forma $\bigwedge x\, x \notin \varnothing$, y definir $\operatorname{cto} x \equiv (x = \varnothing \vee \bigvee u\, u \in x)$. En cualquier caso necesitamos un nuevo signo primitivo, sea un relator o una constante.

de interés en las teorías que vamos a considerar, al igual que sus demostraciones, no harán referencia en ningún momento a los posibles elementos de los átomos, así que es irrelevante que los haya o no.

Por ejemplo, al trabajar en una teoría que admita átomos conviene modificar la definición de inclusión para restringirla a conjuntos:

$$x \subset y \equiv \operatorname{cto} x \wedge \operatorname{cto} y \wedge \bigwedge u(u \in x \rightarrow u \in y).$$

Por otra parte, muchas de las teorías que vamos a considerar sobre $\mathcal{L}_a$ serán compatibles con la no existencia de átomos, es decir, con el axioma

No hay átomos (NA) $\bigwedge x \ \operatorname{cto} x$.

Naturalmente, el axioma NA hace redundante al relator 'cto'. Para precisar esta idea vamos a llamar T_0 a la teoría sobre $\mathcal{L}$ cuyo único axioma es el axioma de extensionalidad (de ZFC) y $\mathrm{T}_0\mathrm{A}$ a la teoría sobre $\mathcal{L}_a$ cuyo único axioma es el axioma de extensionalidad débil (restringido a conjuntos).

Es claro entonces que todo modelo M de T_0 se convierte en un modelo de $\mathrm{T}_0\mathrm{A}$+NA sin más que interpretar el relator 'cto' como la relación vacía y, recíprocamente, todo modelo M de $\mathrm{T}_0\mathrm{A}$+NA se convierte en un modelo de T_0 sin más que eliminar la interpretación del relator 'cto'.

Esto se traduce en que una fórmula de $\mathcal{L}$ es un teorema de T_0 si y sólo si es un teorema de $\mathrm{T}_0\mathrm{A}$+NA.

1.2 Los axiomas de T

Llamaremos TA a la teoría sobre $\mathcal{L}_a$ cuyos axiomas son los indicados en la tabla siguiente. Si añadimos el axioma de partes tenemos la teoría TPA.

T(A)	**Extensionalidad**	$\bigwedge XY(\bigwedge u(u \in X \leftrightarrow u \in Y) \rightarrow X = Y)$
	Vacío	$\bigvee X \bigwedge u \ u \notin X$
	Par	$\bigwedge xy \bigvee Z \bigwedge u(u \in Z \leftrightarrow u = x \vee u = y)$
	Unión	$\bigwedge X \bigvee Y \bigwedge u(u \in Y \leftrightarrow \bigvee V(u \in V \wedge V \in X))$
	Diferencia	$\bigwedge XY \bigvee Z \bigwedge u(u \in Z \leftrightarrow u \in X \wedge u \notin Y)$
TP(A)	**Partes**	$\bigwedge X \bigvee Y \bigwedge u(u \in Y \leftrightarrow u \subset X)$

Las teorías T y TP son las teorías sobre $\mathcal{L}$ que resultan de eliminar el relator cto de los axiomas de TA y TPA respectivamente o, equivalentemente, de suprimir la distinción entre mayúsculas y minúsculas en la tabla anterior.

Es claro que todo modelo de T (resp. TP) se extiende a un modelo de TA+NA (resp. TPA+NA) sin más que interpretar el relator 'cto' como la relación vacía y, recíprocamente, todo modelo de TA+NA (resp. TPA+NA) se convierte en un modelo de T (resp. TP) sin más que eliminar la interpretación del relator 'cto'. Por consiguiente, una fórmula de $\mathcal{L}$ es un teorema de T (resp. TP) si y sólo si lo es de TA+NA (resp. TPA+NA).

Notemos que todos los axiomas de TP son teoremas de ZFC. A pesar de ser una teoría muy básica, en T se pueden demostrar resultados no triviales. Veamos algunos teoremas de TA (luego en particular de T):

1.3 El álgebra de los conjuntos

El conjunto cuya existencia postula el axioma del conjunto vacío es único por el axioma de extensionalidad, luego podemos definir

$$\varnothing \equiv X|\bigwedge u\; u \notin X$$

y así tenemos que $\mathrm{cto}\,\varnothing \wedge \bigwedge u\; u \notin \varnothing$.

Similarmente, el axioma del par, junto con el axioma de extensionalidad, nos permiten definir

$$\{x, y\} \equiv Z|\bigwedge u(u \in Z \leftrightarrow u = x \vee u = y)$$

y en particular $\{x\} \equiv \{x, x\}$.

Del mismo modo, el axioma de la unión y el axioma de extensionalidad hacen que

$$\bigcup X \equiv Y|\bigwedge u(u \in Y \leftrightarrow \bigvee V(V \in Y \wedge u \in V))$$

sea una descripción propia para todo conjunto X.

Ahora es fácil probar:

$$\bigwedge XY \bigvee Z \bigwedge u(u \in Z \leftrightarrow u \in X \vee u \in Y),$$

pues basta tomar $Z = \bigcup\{X, Y\}$, luego, teniendo en cuenta de nuevo el axioma de extensionalidad, podemos definir

$$X \cup Y \equiv Z|\bigwedge u(u \in Z \leftrightarrow u \in X \vee u \in Y).$$

El axioma de la diferencia y el axioma de extensionalidad hacen que la descripción siguiente sea propia para conjuntos:

$$X \setminus Y \equiv Z|\bigwedge u(u \in Z \leftrightarrow u \in X \wedge u \notin Y).$$

Finalmente, tomando $Z = (X \cup Y) \setminus ((X \setminus Y) \cup (Y \setminus X))$ se justifica que la descripción siguiente es propia para conjuntos:

$$X \cap Y \equiv Z|\bigwedge u(u \in Z \leftrightarrow u \in X \wedge u \in Y).$$

A partir de aquí se demuestran sin dificultad todas las propiedades elementales del álgebra de conjuntos.

Para terminar observamos que en TPA la descripción siguiente es propia para conjuntos:

$$\mathcal{P}X \equiv Y|\bigwedge u(u \in Y \leftrightarrow u \subset Y).$$

1.4 Ordinales

Como ya hemos anticipado, la teoría básica de ordinales puede desarrollarse en TA (y en particular en T). En particular podemos definir en T los números naturales.

Definición 1.1 Diremos que un conjunto X es

a) *transitivo* si $\bigwedge u \in X\ u \subset X$,

b) $\in$-*conexo* si $\bigwedge uv \in X(u \in v \vee v \in u \vee u = v)$,

c) *bien fundado* si

$$\bigwedge U(U \subset X \wedge U \neq \varnothing \rightarrow \bigvee V \in U(V \cap U = \varnothing))).$$

Un conjunto V que cumpla esta definición recibe el nombre de *elemento minimal* de u.

d) *un ordinal* si cumple las tres propiedades anteriores.

Recordemos que la definición de $u \subset X$ supone que u es un conjunto, por lo que la definición de conjunto transitivo exige que todos los elementos de X sean conjuntos.

Llamaremos Ω a la clase de todos los ordinales, es decir,

$$\Omega \equiv \{\alpha \mid \alpha \text{ es un ordinal}\}.$$

Esto ha de entenderse igual que en ZFC, es decir, Ω no pretende nombrar a un objeto de la teoría, sino que simplemente $x \in \Omega$ es una forma cómoda de abreviar la fórmula 'x es un ordinal'. Para comodidad del lector reproducimos aquí los resultados básicos de la teoría de ordinales para constatar que, efectivamente, pueden demostrarse en TA:

Teorema 1.2 *Si X es un conjunto bien fundado entonces $X \notin X$.*

DEMOSTRACIÓN: Si $X \in X$ entonces $\{X\} \subset X \wedge \{X\} \neq \varnothing$. Sea u un elemento minimal de $\{X\}$. Necesariamente, $u = X$, pero $X \in X \cap \{X\}$, contradicción. ∎

Teorema 1.3 *Los elementos de los ordinales son ordinales.*

DEMOSTRACIÓN: Sea Y un ordinal y sea $X \in Y$. Por transitividad $X \subset Y$ y por consiguiente X es conexo y bien fundado. Falta probar que es transitivo, es decir, que $\bigwedge UV(U \in V \wedge V \in X \rightarrow U \in X)$.

Si $U \in V \wedge V \in X$, tenemos $V \in X \wedge X \in Y$ y, como Y es transitivo, $V \in Y$, e igualmente $U \in Y$. Así pues, $\{U, V, X\} \subset Y$. Como Y está bien fundado se cumplirá

$$U \cap \{U, V, X\} = \varnothing \quad \vee \quad V \cap \{U, V, X\} = \varnothing \quad \vee \quad X \cap \{U, V, X\} = \varnothing,$$

pero $U \in V \cap \{U, V, X\}$ y $V \in X \cap \{U, V, X\}$, luego ha de ser $U \cap \{U, V, X\} = \varnothing$. Como Y es conexo ha de ser $U \in X \vee X \in U \vee U = X$, pero si $X \in U$ entonces $X \in U \cap \{U, V, X\} = \varnothing$, y si $X = U$ entonces $V \in U \cap \{U, V, X\} = \varnothing$. Así pues, se ha de cumplir $U \in X$, como queríamos. ■

Ahora podemos probar:

Teorema 1.4 *Todo ordinal está bien ordenado por la inclusión.*

DEMOSTRACIÓN: Sea Y un ordinal. Los axiomas de T no permiten asegurar la existencia del conjunto

$$\{(u, v) \in Y \times Y \mid u \subset v\},$$

así que lo que vamos a probar es simplemente que

$$\bigwedge X(X \subset Y \wedge X \neq \varnothing \rightarrow \bigvee U \in X \bigwedge Z \in X\ U \subset Z).$$

Dado X, basta tomar $U \in X$ minimal, es decir, tal que $U \cap X = \varnothing$. Así, dado $Z \in X$, se cumple que U, $Z \in Y$, luego $U \in Z \vee Z \in U \vee U = Z$. No puede ser $Z \in U$, pues entonces $Z \in U \cap X = \varnothing$. Por lo tanto nos queda $U \in Z \vee U = Z$. Por el teorema anterior, Z es un ordinal, luego si $U \in Z$, tendremos $U \subset Z$, y trivialmente también si $U = Z$, por lo que en cualquiera de los dos casos $U \subset Z$. ■

Teorema 1.5 *Si X e Y son ordinales y $X \subset Y$, entonces $X \in Y \vee X = Y$.*

DEMOSTRACIÓN: Si $X \neq Y$ entonces $Y \setminus X \neq \varnothing$. Como Y es un ordinal, $Y \setminus X$ tiene un elemento minimal U, es decir, $U \cap (Y \setminus X) = \varnothing$.

Si $Z \in U$, entonces $Z \notin Y \setminus X$ y $Z \in Y$ (pues $Z \in U \in Y$), luego $Z \in X$. Por lo tanto $U \subset X$.

Si $Z \in X$, entonces tenemos Z, $U \in Y$, luego $Z \in U \vee U \in Z \vee Z = U$. Si $U \in Z$, entonces $U \in Z \in X$, luego $U \in X$, contradicción ($U \in Y \setminus X$). Si $Z = U$ entonces de nuevo $U \in X$, contradicción. Por lo tanto $Z \in U$, y así $X \subset U$.

En definitiva $X = U \in Y$. ■

Teorema 1.6 *La intersección de dos ordinales es un ordinal.*

DEMOSTRACIÓN: Sean X, Y ordinales. Como $X \cap Y \subset X$, trivialmente $X \cap Y$ es conexo y bien fundado. Falta ver que es transitivo:

Si $U \in X \cap Y$, entonces $U \in X \wedge U \in Y$, $U \subset X \wedge U \subset Y$, luego $U \subset X \cap Y$. ■

Con esto tenemos el resultado que buscábamos:

Teorema 1.7 *Sean X, Y ordinales. Entonces $X \in Y \vee Y \in X \vee X = Y$.*

DEMOSTRACIÓN: $X \cap Y$ es un ordinal, $X \cap Y \subset X$ y $X \cap Y \subset Y$. Por el teorema 1.5 tenemos $(X \cap Y \in X \vee X \cap Y = X) \wedge (X \cap Y \in Y \vee X \cap Y = Y)$. De aquí se sigue

$$(X \cap Y \in X \wedge X \cap Y \in Y) \vee (X \cap Y \in X \wedge X \cap Y = Y)$$

$$\vee\, (X \cap Y = X \wedge X \cap Y \in Y) \vee (X \cap Y = X \wedge X \cap Y = Y),$$

o sea $X \cap Y \in X \cap Y \quad \vee \quad Y \in X \quad \vee \quad X \in Y \quad \vee \quad X = Y$. El primer caso se descarta por el teorema 1.2. ■

Teorema 1.8 *Ω es un ordinal y, en particular, está bien ordenado por la inclusión.*

DEMOSTRACIÓN: Esto ha de entenderse del modo siguiente: decir que Ω es una clase transitiva es una forma de afirmar que $u \in v \in \Omega \rightarrow u \in \Omega$, lo cual es cierto por el teorema 1.3, decir que Ω es conexa es una forma de afirmar que si $u, v \in \Omega$, entonces $u \in v \vee v \in u \vee u = v$, lo cual es cierto por 1.7. Por último, decir que Ω está bien fundada equivale a afirmar que si $X \subset \Omega$ (es decir, si todos los elementos de X son ordinales) y $X \neq \varnothing$, entonces X tiene un elemento minimal.

En efecto, sea $Y \in X$. Si $Y \cap X = \varnothing$ entonces Y es un elemento minimal de X. Supongamos ahora que $Y \cap X \neq \varnothing$. Como Y es un ordinal e $Y \cap X \subset Y$, $Y \cap X$ tiene un elemento minimal U, es decir $U \in Y \cap X \wedge U \cap Y \cap X = \varnothing$.

Como $U \in Y$, también $U \subset Y$, de donde $U \in X \wedge U \cap X = \varnothing$, es decir, U es un elemento minimal de X.

Más aún, el mismo argumento empleado en 1.4 prueba que $\bigwedge Z \in X\ U \subset Z$, y es esto lo que hay que entender cuando afirmamos que Ω está bien ordenado por la inclusión. ■

Ahora es fácil probar que Ω no puede ser un conjunto, pues si lo fuera sería un ordinal y se cumpliría que $\Omega \in \Omega$, en contra del teorema 1.2.

En lo sucesivo, cuando digamos que α es un ordinal se entenderá que α es un conjunto que es un ordinal (es decir, excluiremos la posibilidad $\alpha = \Omega$). Si α y β son ordinales, escribiremos $\alpha \leq \beta \equiv \alpha \subset \beta$ y, en virtud de 1.5, $\alpha < \beta \equiv \alpha \in \beta$.

Según decíamos, el hecho de que Ω es un ordinal, junto con que está bien ordenado por la relación de pertenencia (como orden estricto), resume todos los resultados que hemos probado hasta ahora.

Introducimos la notación $0 \equiv \varnothing$, $x' = x \cup \{x\}$.

Teorema 1.9 *Se cumple:*

a) 0 *es el mínimo ordinal.*

b) *Si α es un ordinal, entonces α' también lo es, y es el mínimo ordinal mayor que α.*

c) *Todo conjunto de ordinales $X \subset \Omega$ tiene supremo igual a $\bigcup X$.*

Demostración: a) Es inmediato que $\varnothing$ es un ordinal. Además es el mínimo porque el orden es la inclusión.

b) Si $\alpha \in \Omega$, es claro que $\alpha' \subset \Omega$, luego α' es un conjunto conexo y bien fundado. Falta probar que es transitivo, pero si $u \in \alpha'$, entonces $u \in \alpha \vee u = \alpha$, y en ambos casos $u \subset \alpha \subset \alpha'$.

Obviamente $\alpha < \alpha'$ y si $\alpha < \beta$ entonces $\alpha \subset \beta$ por transitividad, luego $\alpha' = \alpha \cup \{\alpha\} \subset \beta$, es decir, $\alpha' \leq \beta$. Por consiguiente α' es el menor ordinal mayor que α.

c) Como todo $\alpha \in X$ está contenido en Ω, es claro que $\bigcup X \subset \Omega$, luego es un conjunto conexo y bien fundado. Hemos de probar que es transitivo, pero si $\beta \in \bigcup X$, entonces existe un $\alpha \in x$ tal que $\beta \in \alpha$, luego por la transitividad de α es $\beta \subset \alpha \subset \bigcup X$. Por consiguiente $\bigcup X \in \Omega$.

Teniendo en cuenta que el orden es la inclusión, es inmediato que $\bigcup X$ es el supremo de X. ■

Definición 1.10 Un ordinal $\alpha \in \Omega$ es un *ordinal sucesor* si existe un $\beta \in \Omega$ tal que $\alpha = \beta'$. Un *ordinal límite* es un ordinal $\lambda \in \Omega$ que no es nulo ni un ordinal sucesor.

De este modo, todo $\alpha \in \Omega$ es igual a 0, o bien es un ordinal sucesor, o bien es un ordinal límite.

Definición 1.11 Un conjunto n es un *número natural* si cumple:

$$n \in \Omega \wedge \bigwedge\alpha(\alpha \in n' \rightarrow \alpha = 0 \vee \bigvee\beta \in \alpha\, \alpha = \beta').$$

o sea, un número natural es un ordinal tal que ni él ni ninguno de sus antecesores es un ordinal límite. Llamaremos ω a la clase de los números naturales, de modo que $n \in \omega$ no es más que una abreviatura por "n es un número natural".

Más adelante tendrá importancia el hecho de que la segunda parte de la definición de número natural (quitando la condición $n \in \Omega$) es una fórmula Δ_0, pues puede expresarse en la forma

$$n = 0 \vee (\bigvee\beta \in n\; n = \beta' \wedge \bigwedge\alpha \in n \bigvee\beta \in \alpha\; \alpha = \beta')$$

No podemos demostrar que ω es un conjunto, pero esto no es necesario para probar los resultados básicos. El teorema siguiente se ha de entender en el mismo sentido que 1.8:

Teorema 1.12 *ω es un ordinal.*

Demostración: Como $\omega \subset \Omega$, basta ver que es transitiva. Si $u \in v \wedge v \in \omega$, entonces v es un número natural. Por definición tenemos que

$$\bigwedge\alpha(\alpha \in v' \rightarrow \alpha = 0 \vee \bigvee\beta \in \alpha\, \alpha = \beta'),$$

como $u < v$, también $u' \subset v'$ en particular

$$\bigwedge\alpha(\alpha \in u' \rightarrow \alpha = 0 \vee \bigvee\beta \in \alpha\, \alpha = \beta'),$$

luego $u \in \omega$. ■

Teorema 1.13 (Axiomas de Peano) *Se cumple:*

1) $0 \in \omega$,
2) $\bigwedge n \in \omega\, n' \in \omega$,
3) $\bigwedge n \in \omega\, n' \neq 0$,
4) $\bigwedge mn \in \omega (m' = n' \to m = n)$,
5) $\bigwedge Y (Y \subset \omega \land 0 \in Y \land \bigwedge n \in Y\, n' \in Y \to Y = \omega)$.

DEMOSTRACIÓN: 1) es trivial, si $n \in \omega$ y $\alpha \in n''$, entonces, o bien $\alpha \in n'$ o bien $\alpha = n'$. En el primer caso $\alpha = 0 \lor \bigvee \beta \in \alpha\, \alpha = \beta'$, porque $n \in \omega$. Esto también se cumple en el segundo caso, tomando $\beta = n$. Por consiguiente $n' \in \omega$.

Las propiedades 3) y 4) son trivialmente válidas para ordinales cualesquiera (teniendo en cuenta que n' es el menor ordinal mayor que n). Veamos 5).

Si $Y \subset \omega \land 0 \in Y \land \bigwedge n \in Y\, n' \in Y$ pero $Y \neq \omega$, entonces $\omega \setminus Y$ tendrá un mínimo elemento n, que será no nulo por hipótesis. Por la definición de número natural $n = m'$ para cierto $m < n$, luego $m \in Y$ y, por hipótesis $n = m' \in Y$, lo cual es una contradicción. ■

Observemos que no podemos decir que TA o TPA son teorías aritméticas, pues no estamos en condiciones de definir la suma y el producto de números naturales.

1.5 La jerarquía de Lévy

La teoría TA es suficiente para demostrar las propiedades básicas de la jerarquía de Lévy de las fórmulas del lenguaje de la teoría de conjuntos (que se adapta fácilmente al caso de $\mathcal{L}_a$). Recordemos su definición:

Definición 1.14 Una fórmula de $\mathcal{L}_a$ es de clase Δ_0 si todos sus cuantificadores aparecen acotados en la forma $\bigwedge x \in y$ o $\bigvee x \in y$.

Una fórmula de $\mathcal{L}_a$ es de clase Σ_n si es de la forma

$$\bigvee x_1 \bigwedge x_2 \bigvee x_3 \cdots x_n\, \alpha,$$

donde α es una fórmula Δ_0. Una fórmula de $\mathcal{L}_a$ es de clase Π_n si es de la forma

$$\bigwedge x_1 \bigvee x_2 \bigwedge x_3 \cdots x_n\, \alpha,$$

donde α es de nuevo una fórmula Δ_0.

Más en general, si T es una teoría axiomática sobre $\mathcal{L}_a$, diremos que una fórmula es Σ_n^T o Π_n^T si es equivalente en T a una fórmula del tipo correspondiente. Diremos que una fórmula es de tipo Δ_n^T si es a la vez Σ_n^T y Π_n^T.

Teorema 1.15 *Sea T una teoría sobre $\mathcal{L}_a$ que contenga al menos el axioma de extensionalidad y el axioma del par (en particular, cualquier teoría que extienda a la teoría* TA*). Entonces*

a) Si α y β son fórmulas Σ_n^T entonces también lo son $\bigvee x\alpha$, $\alpha \wedge \beta$, y $\alpha \vee \beta$.

b) Si α y β son fórmulas Π_n^T entonces también lo son $\bigwedge x\alpha$, $\alpha \wedge \beta$, y $\alpha \vee \beta$.

c) Si α es Σ_n^T entonces $\neg\alpha$ es Π_n^T y viceversa.

d) Si α es Σ_n^T y β es Π_n^T entonces $\alpha \rightarrow \beta$ es Π_n y análogamente intercambiando Σ y Π.

e) Si α y β son fórmulas Δ_n^T también lo son

$$\neg\alpha, \quad \alpha \wedge \beta, \quad \alpha \vee \beta, \quad \alpha \rightarrow \beta, \quad \alpha \leftrightarrow \beta.$$

Demostración: a) Por simplicidad supondremos $n = 3$. El caso general es formalmente idéntico. Tenemos que $\alpha \leftrightarrow \bigvee x_1 \bigwedge x_2 \bigvee x_3\ \phi$, donde ϕ es Δ_0. Así

$$\bigvee x\alpha \leftrightarrow \bigvee x x_1 \bigwedge x_2 \bigvee x_3\ \phi \leftrightarrow \bigvee w \bigvee z \in w \bigvee x x_1 \in z(w = (x, x_1) \wedge \bigwedge x_2 \bigvee x_3\ \phi)$$

$$\leftrightarrow \bigvee w \bigwedge x_2 \bigvee x_3 \bigvee z \in w \bigvee x x_1 \in z(w = (x, x_1) \wedge \phi).$$

Si $\beta \leftrightarrow \bigvee y_1 \bigwedge y_2 \bigvee y_3\ \psi$, donde ψ es Δ_0 y las variables y_1, y_2, y_3 son distintas de x_1, x_2, x_3, entonces

$$\alpha \wedge \beta \leftrightarrow \bigvee x_1 y_1 \bigwedge x_2 y_2 \bigvee x_3 y_3 (\phi \wedge \psi).$$

Ahora basta aplicar tres veces el caso ya probado y el correspondiente de b), que se sigue del que hemos probado aplicando c). Notemos que c) es inmediato. El caso de $\alpha \vee \beta$ es idéntico.

Como ya hemos comentado, c) es inmediato y b) se sigue de a) por c).
d) se sigue de los apartados anteriores porque $(\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \vee \beta)$.
e) es evidente. ■

Capítulo II

La teoría de conjuntos de Kaye-Forster

En este capítulo estudiamos la teoría que resulta de añadir a TPA una forma muy débil del esquema de especificación, pero que, no obstante, es suficiente para formalizar una parte considerable de la teoría de conjuntos usual.

2.1 Los axiomas de KF

Para introducir el axioma de especificación de KF necesitamos previamente el concepto de estratificación de fórmulas:

Definición 2.1 Una fórmula sin descriptores ϕ de $\mathcal{L}_a$ está *estratificada* si es posible asignar un número natural a cada una de sus variables (al que llamaremos su *tipo*) de modo que en cada subfórmula $x = y$ las dos variables tengan el mismo tipo, mientras que en cada subfórmula $x \in y$ el tipo de y sea una unidad mayor que el tipo de x.

La *teoría de Kaye-Forster* con átomos (KFA) es la teoría que resulta de añadir a TPA el esquema axiomático siguiente:

Esquema de especificación (KFA) Para toda fórmula de $\mathcal{L}_a$ sin descriptores estratificada $\phi(u, x_1, \ldots, x_n)$ de clase[1] Δ_0, la fórmula siguiente es un axioma:

$$\bigwedge x_1 \cdots x_n X \bigvee Z \bigwedge u(u \in Z \leftrightarrow u \in X \wedge \phi(u, x_1, \ldots, x_n)).$$

La *teoría de Kaye-Forster* (KF) es la teoría que resulta de añadir a TP el esquema axiomático análogo al anterior pero restringido a fórmulas de $\mathcal{L}$ y eliminando el relator 'cto', es decir, la distinción entre mayúsculas y minúsculas.

[1]Recordemos que una fórmula Δ_0 es una fórmula cuyos cuantificadores aparecen siempre acotados, es decir, en la forma $\bigwedge x \in y$ o $\bigvee x \in y$.

Así, en KFA, el término

$$\{u \in X \mid \phi(u, x_1, \ldots, x_n)\} \equiv Z|\bigwedge u(u \in Z \leftrightarrow u \in X \land \phi(u, x_1, \ldots, x_n))$$

es una descripción propia siempre que X sea un conjunto y ϕ sea una fórmula Δ_0 estratificada (de $\mathcal{L}$ o de $\mathcal{L}_a$, según si trabajamos en KF o KFA).

De nuevo es inmediato que KF es equivalente a KFA+NA, en el sentido que ya hemos discutido en el capítulo anterior para las teorías precedentes.

Observemos que en KFA podemos eliminar los axiomas del conjunto vacío y de la diferencia, pues son consecuencia del axioma de especificación. Ante todo observemos que la existencia de un objeto x es un teorema lógico, luego también podemos asegurar la existencia de un conjunto, por ejemplo $X = \{x\}$, y entonces

$$\varnothing = \{u \in X \mid u \neq u\}.$$

Similarmente,

$$X \setminus Y = \{u \in X \mid u \notin Y\}.$$

Ambos usos del axioma de especificación son correctos, pues las fórmulas $u \neq u$ y $u \notin Y$ están estratificadas (y obviamente son Δ_0, porque no tienen cuantificadores).

Así pues, los axiomas de KF(A) se pueden reducir a los siguientes:

Extensionalidad	$\bigwedge XY(\bigwedge u(u \in X \leftrightarrow u \in Y) \to X = Y)$
Par	$\bigwedge xy\bigvee Z(x \in Z \land y \in Z)$
Unión	$\bigwedge X\bigvee Y\bigwedge U \in X\bigwedge v \in U\ v \in Y$
Partes	$\bigwedge X\bigvee Y\bigwedge u(u \subset X \to u \in Y)$
$\boldsymbol{\Delta_0^e}$-especificación	$\bigwedge X\bigvee Y\bigwedge u(u \in Y \leftrightarrow u \in X \land \phi(u))$ $(*)$

$(*)$ para toda fórmula ϕ (con posibles parámetros) de clase Δ_0 y estratificada.

Notemos que hemos simplificado los axiomas del par, de la unión y de partes con respecto a los de T o los de ZFC, pues las versiones fuertes se recuperan a partir del esquema de especificación. Por ejemplo, en el caso del axioma del par, dado el conjunto Z cuya existencia afirma la versión débil del axioma, podemos construir

$$\{x, y\} = \{u \in Z \mid u = x \lor u = y\},$$

y con la unión se razona de forma similar.

El interés de restringir de este modo el esquema de especificación es que KFA es consistente con el axioma

$$V \in V \equiv \bigvee X\bigwedge u\ u \in X,$$

es decir, con la existencia de un "conjunto de todos los objetos". Concretamente, la teoría KF + $V \in V$ no es sino la teoría NF (Nuevos Fundamentos) de Quine, que estudiaremos más adelante,[2] mientras que a la teoría KFA + $V \in V$ la llamaremos NFA.

Notemos que al admitir un conjunto universal V toda fórmula es equivalente a una fórmula Δ_0, pues todas las variables cuantificadas se pueden acotar por V. Sin embargo, la teoría de Mac Lane (MAC), a la que pretendemos llegar, tiene como axioma el esquema de Δ_0-especificación (sin exigir estratificación), de modo que el interés de KF es que los resultados que probemos en su seno son a la vez teoremas de NF y teoremas de MAC.

Así pues, la condición de estratificación es una restricción suficiente para evitar que en KFA pueda justificarse cualquiera de los argumentos que en ZFC prueban que la clase de todos los conjuntos no es un conjunto. Por ejemplo, uno de estos argumentos consiste en que si V fuera un conjunto, también lo sería la clase

$$R = \{x \mid x \notin x\} = \{x \in V \mid x \notin x\},$$

lo cual da lugar a la famosa paradoja de Russell. Sin embargo, este razonamiento no es válido en KFA, ya que la fórmula que define a R no es estratificable, por lo que no podemos asegurar que R sea un conjunto.

Obviamente, si una fórmula ϕ (tal vez con descriptores) es equivalente en KF(A) a otra fórmula ϕ' sin descriptores estratificada y de clase Δ_0, el axioma de especificación para ϕ' implica la fórmula análoga para ϕ, de modo que podemos usar ϕ para especificar subconjuntos de un conjunto dado.

A la hora de reconocer si una fórmula con descriptores es equivalente a una fórmula (sin descriptores) estratificada, conviene generalizar la definición de fórmula estratificada como sigue:

Definición 2.2 Una expresión de $\mathcal{L}_a$ está *estratificada* si es posible asignar un número natural a cada uno de sus términos (variables o descripciones) al que llamaremos su *tipo*, de modo que en toda subfórmula $t_1 = t_2$ ambos términos tengan el mismo tipo, en toda subfórmula $t_1 \in t_2$ el tipo de t_2 sea una unidad mayor que el de t_1, y el tipo de cada descripción $x|\alpha$ sea el mismo que el de la variable x.

Es obvio que una fórmula sin descriptores está estratificada en este sentido si y sólo si lo está en el definido previamente.

Teorema 2.3 *Toda fórmula estratificada es equivalente a una fórmula estratificada sin descriptores con las mismas variables libres y éstas tienen los mismos tipos en ambas fórmulas.*

[2]Veremos que la consistencia de NFA es equivalente a la de la teoría de Mac Lane, que es bastante más débil que la de ZFC. Sin embargo, no se conoce ningún resultado análogo para NF (es decir, para NFA+NA). La teoría NF "parece" ser consistente, en el sentido de que nadie ha encontrado hasta ahora una contradicción en ella, pero no disponemos de ninguna prueba de consistencia relativa a ZFC. Ésta es la razón por la que estamos considerando teorías con átomos.

Demostración: Adoptaremos el convenio de que las descripciones impropias nombran el conjunto vacío.

Supongamos que una fórmula ϕ contiene n descripciones como subtérminos (si una misma descripción aparece varias veces podemos contarla una sola vez). Es claro que si sumamos n al tipo de cada subtérmino de ϕ obtenemos una nueva asignación de tipos que justifica que ϕ está estratificada y ahora todos los tipos son mayores o iguales que n.

Si $n = 0$ el teorema es obvio. En caso contrario seleccionamos una descripción $x|\alpha$ contenida en ϕ. Podemos suponer que la variable x no aparece en ϕ más que en los términos $x|\alpha$, pues en caso contrario podemos sustituirla por otra (dentro de dichos términos) y obtenemos una fórmula equivalente (y estratificada). Entonces

$$\phi \leftrightarrow \overset{1}{\bigvee} x(\alpha \land \phi') \lor (\neg \overset{1}{\bigvee} x\alpha \land \bigvee x(\mathrm{cto}\, x \land \bigwedge u\; u \notin x \land \phi')),$$

donde ϕ' es la fórmula que resulta de sustituir la descripción $x|\alpha$ por la variable x. Puesto que la asignación de tipos que justifica que ϕ está estratificada asigna el mismo tipo a $x|\alpha$ y a x, es claro que la fórmula ϕ' también está estratificada (con la misma asignación de tipos), y lo mismo vale para el miembro derecho de la equivalencia anterior, donde la variable u es cualquier variable que no aparezca en ϕ, a la que asignamos como tipo una unidad menos que a x.

De este modo, la fórmula del miembro derecho tiene $n-1$ descriptores y está estratificada con una asignación de tipos en la que el tipo de cada término es $\geq n-1$. Repitiendo este razonamiento, tras un número finito de pasos llegamos a una fórmula equivalente sin descriptores. ■

Este teorema hace que comprobar que una fórmula es equivalente a una fórmula estratificada sin descriptores sea relativamente fácil, como lo es comprobar que una fórmula es Δ_0. Sin embargo, comprobar ambas cosas a la vez requerirá a menudo mostrar equivalencias explícitas.

Por ejemplo, es evidente que el término

$$\{x, y\} \equiv Z|\bigwedge u(\underset{0}{u} \in \underset{1}{Z} \leftrightarrow \underset{0}{u} = \underset{0}{x} \lor \underset{0}{u} = \underset{0}{y})$$

está estratificado con una estratificación que le asigna tipo 1. Más en general, si en la identidad anterior sustituimos x e y por dos términos cualesquiera t_1 y t_2, vemos que si ambos admiten estratificaciones que les asignen un mismo tipo n, entonces el término $\{t_1, t_2\}$ admite una estratificación que le asigna tipo $n+1$.

Sin embargo, para asegurar que $\{t_1, t_2\}$ es de clase Δ_0 necesitamos hipótesis y comprobaciones adicionales. Concretamente, supongamos que t_1 y t_2 son términos tales que las fórmulas $u = t_1$ y $u = t_2$ (donde u es una variable que no aparezca en ellos) sean equivalentes a fórmulas sin descriptores, estratificadas, de clase Δ_0 y de modo que ambas admitan estratificaciones que asignen a la variable u un mismo tipo n, entonces la fórmula $x = \{t_1, t_2\}$ es también equivalente a una fórmula sin descriptores, estratificada, de clase Δ_0.

En efecto,

$$x = \{t_1, t_2\} \leftrightarrow \operatorname{cto} x \wedge \bigwedge \underset{n}{u} \in \underset{n+1}{x} (\underset{n}{u} = \underset{n}{t_1} \vee \underset{n}{u} = \underset{n}{t_2})$$

$$\wedge \bigvee \underset{n}{u} \in \underset{n+1}{x}\ \underset{n}{u} = \underset{n}{t_1} \wedge \bigvee \underset{n}{u} \in \underset{n+1}{x}\ \underset{n}{u} = \underset{n}{t_2},$$

y al sustituir las fórmulas $u = t_1$, $u = t_2$ por las fórmulas equivalentes sin descriptores obtenemos claramente una fórmula Δ_0 estratificada y en la que x tiene tipo $n + 1$.

2.2 Relaciones y funciones

Producto cartesiano Notemos que en TA se puede definir el concepto de par ordenado de la forma habitual:

$$(x, y) \equiv \{\{x\}, \{x, y\}\},$$

y se demuestra que

$$\bigwedge xyuv((x, y) = (u, v) \leftrightarrow x = u \wedge y = v).$$

De la propia definición de par ordenado se sigue inmediatamente que el término (x, y) admite una estratificación que asigna a las dos variables el mismo tipo n y al par ordenado el tipo $n + 2$. Más aún, aplicando dos veces la última observación del apartado anterior obtenemos que la fórmula $u = (x, y)$ es equivalente a una fórmula de clase Δ_0 y estratificada de modo que el tipo de u es dos unidades mayor que el de x e y.

Si $x \in X \wedge y \in Y$, entonces $(x, y) \in \mathcal{P}\mathcal{P}(X \cup Y)$, luego la clase

$$A = \{u \in \mathcal{P}\mathcal{P}(X \cup Y) \mid \bigvee x \in X \bigvee y \in Y\ u = (x, y)\}$$

es un conjunto en KFA, ya que la fórmula $u = (x, y)$ es equivalente a una fórmula sin descriptores de clase Δ_0 y está estratificada, lo cual implica claramente que lo mismo vale para la fórmula completa, y es claro que A contiene exactamente a los pares ordenados con primera componente en X y segunda componente en Y.

Por consiguiente, en KFA la descripción siguiente es propia para conjuntos:

$$X \times Y \equiv Z | \bigwedge u(u \in Z \leftrightarrow \bigvee xy(x \in X \wedge y \in Y \wedge u = (x, y))).$$

Usaremos la notación

$$\{(x, y) \in X \times Y \mid \phi(x, y, x_1, \ldots, x_n)\}$$

$$\equiv \{u \in X \times Y \mid \bigvee x \in X \bigvee y \in Y (u = (x, y) \wedge \phi(x, y, x_1, \ldots, x_n)\}.$$

Observemos que la condición para que sea una descripción propia es que X e Y sean conjuntos y que la fórmula ϕ sea de clase Δ_0 y admita una estratificación en la que las dos variables x e y tengan el mismo tipo.

Relaciones A partir de aquí ya es fácil definir todos los conceptos básicos relacionados con relaciones y demostrar sus propiedades elementales.

Observemos que la fórmula

$$R \subset X \times Y \leftrightarrow \operatorname{cto} X \land \operatorname{cto} Y \land \operatorname{cto} R \land \bigwedge u \in R \bigvee x \in X \bigvee y \in Y\ u = (x, y)$$

es (equivalente a una fórmula sin descriptores) de clase Δ_0 y admite una estratificación en la que las variables X, Y tienen el mismo tipo arbitrario n y R tiene tipo $n+2$.

Conviene observar que

$$x\,R\,y \leftrightarrow \bigvee u \in R\ u = (x, y)$$

es una fórmula Δ_0 y admite una estratificación en la que x e y tienen el mismo tipo n y R tiene tipo $n+3$.

Por otra parte, si $(x, y) \in R$, entonces $x, y \in \{x, y\} \in (x, y) \in R$, luego $x, y \in \bigcup\bigcup R$. Esto hace que las definiciones de dominio y rango:

$$\mathcal{D}R \equiv \{x \mid \bigvee y\ (x, y) \in R\}, \qquad \mathcal{R}R \equiv \{y \mid \bigvee x\ (x, y) \in R\}$$

sean descripciones propias para conjuntos, pues[3]

$$\mathcal{D}R = \{x \in \bigcup\bigcup R \mid \bigvee y \in \bigcup\bigcup R\ x\,R\,y\},$$

y análogamente con $\mathcal{R}R$. Similarmente podemos definir

$$R^{-1} \equiv \{(x, y) \mid (y, x) \in R\},$$

y la descripción es propia porque

$$R^{-1} = \{(x, y) \in \bigcup\bigcup R \times \bigcup\bigcup R \mid y\,R\,x\}.$$

A su vez la composición

$$R \circ S \equiv \{(x, z) \mid \bigvee y((x, y) \in R \land (y, z) \in S)\}$$

está bien definida porque

$$R \circ S = \{(x, z) \in \bigcup\bigcup R \times \bigcup\bigcup S \mid \bigvee y \in \bigcup\bigcup R\ (x\,R\,y \land y\,R\,z)\}.$$

Si R es una relación de equivalencia en un conjunto A (omitimos la definición obvia), para cada objeto $a \in A$ podemos definir su clase de equivalencia

$$[a]_R \equiv \{x \in A \mid x\,R\,a\}.$$

[3]Notemos que $\bigcup\bigcup R$ puede considerarse como parámetro, es decir, que el esquema de especificación nos asegura la existencia del conjunto

$$\{x \in X \mid \bigvee y \in x_1 \bigvee u \in x_2\ u = (x, y)\}$$

para todo conjunto X y todos los objetos x_1 y x_2, y particularizamos esto a $X = x_1 = \bigcup\bigcup R$, $x_2 = R$.

Similarmente, el conjunto cociente

$$A/R = \{[a] \mid a \in A\}$$

está bien definido, pues

$$A/R = \{x \in \mathcal{P}A \mid \bigvee a \in A \bigwedge u \in A(u \in x \leftrightarrow u\, R\, a)\}.$$

Las propiedades básicas de las relaciones de equivalencia (esencialmente que A/R es una partición de A) se demuestran sin dificultad.

Funciones Observemos que la fórmula

$$F : X \longrightarrow Y \equiv F \subset X \times Y \land \bigwedge x \in X \bigvee y \in Y \bigvee u \in F\ u = (x, y)$$

$$\land\ x \in X \bigwedge yy' \in Y (\bigvee uv \in F(u = (x, y) \land v = (x, y') \to y = y').$$

es equivalente a una fórmula Δ_0 sin descriptores y que admite una estratificación en la que las variables X e Y tienen el mismo tipo n y F tiene tipo $n + 2$.

Lo mismo vale para las fórmulas '$F : X \longrightarrow Y$ inyectiva', '$F : X \longrightarrow Y$ suprayectiva' o '$F : X \longrightarrow Y$ biyectiva', cuyas definiciones obvias omitimos.

Esto implica a su vez que la clase

$$Y^X \equiv \{F \mid F : X \longrightarrow Y\},$$

es un conjunto, ya que puede especificarse como subconjunto de $\mathcal{P}(X \times Y)$.

Observemos que, definiendo $F(x) \equiv y \mid (x, y) \in F$, si $F : X \longrightarrow Y$ y $x \in X$,

$$y = F(x) \leftrightarrow x\, F\, y,$$

y esta fórmula es equivalente a una fórmula Δ_0 sin descriptores que admite una estratificación en la que x e y tienen el mismo tipo n y F tiene tipo $n + 3$.

Otros conceptos básicos relacionados con aplicaciones cuya existencia podemos probar sin problemas son

$$F[X] \equiv \{y \mid \bigvee x \in X\ y = F(x)\}, \qquad F|_X \equiv \{(x, y) \in F \mid x \in X\}$$

pues

$$F[X] = \{y \in \mathcal{R}F \mid \bigvee x \in X\ y = F(x)\},$$

$$F|_X = \{u \in F \mid \bigvee x \in X \bigvee y \in \bigcup\bigcup F\ u = (x, y)\}.$$

A partir de aquí no hay ninguna dificultad en demostrar las propiedades elementales de estos conceptos (la composición de aplicaciones es una aplicación, la inversa de una aplicación biyectiva es una aplicación biyectiva, etc.)

2.3 Cardinalidad

No podemos definir cardinales en KFA, pero sí podemos definir las relaciones (metamatemáticas) de *equipotencia* y *minuspotencia:*

$$\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Y}} \equiv \bigvee F\ F : X \longrightarrow Y \text{ biyectiva}, \quad \overline{\overline{X}} \leq \overline{\overline{Y}} \equiv \bigvee F\ F : X \longrightarrow Y \text{ inyectiva}.$$

Las propiedades siguientes se demuestran trivialmente:

a) $\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{X}}$,

b) $\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Y}} \rightarrow \overline{\overline{Y}} = \overline{\overline{X}}$,

c) $\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Y}} \land \overline{\overline{Y}} = \overline{\overline{Z}} \rightarrow \overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Z}}$,

d) $\overline{\overline{X}} \leq \overline{\overline{X}}$,

e) $\overline{\overline{X}} \leq \overline{\overline{Y}} \land \overline{\overline{Y}} \leq \overline{\overline{Z}} \rightarrow \overline{\overline{X}} \leq \overline{\overline{Z}}$.

La que no es trivial es la antisimetría de la minuspotencia. La prueba usual en ZFC es válida en KFA. Para comprobarlo observamos antes que en KFA podemos definir

$$\bigcap X \equiv \{u \mid \bigwedge V \in X\ u \in V\},$$

que es una descripción propia siempre que X contenga al menos un conjunto V_0, pues entonces

$$\bigcap X = \{u \in V_0 \mid \bigwedge V \in X\ u \in V\}.$$

Teorema 2.4 (Cantor-Bernstein) $\bigwedge XY(\overline{\overline{X}} \leq \overline{\overline{Y}} \land \overline{\overline{Y}} \leq \overline{\overline{X}} \rightarrow \overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Y}})$.

DEMOSTRACIÓN: Empezamos probando lo siguiente:

> *Sea X un conjunto y $F : \mathcal{P}X \longrightarrow \mathcal{P}X$ una aplicación tal que si $u \subset v \subset X$ entonces $F(u) \subset F(v)$. Entonces existe un $z \in \mathcal{P}X$ tal que $F(z) = z$.*

Sea $A = \{u \in \mathcal{P}X \mid F(u) \subset u\}$. Notemos que A es un conjunto porque

$$F(u) \subset u \leftrightarrow \bigvee v \in \mathcal{P}X(v = F(u) \land \bigwedge x \in v\ x \in u)$$

y la fórmula de la derecha es Δ_0 (con parámetros $\mathcal{P}X, F$) y está estratificada. Puesto que $X \in A$, podemos tomar $z = \bigcap A \in \mathcal{P}X$.

Si $u \in A$, entonces $z \subset u$, luego $F(z) \subset F(u) \subset u$, con lo que $F(z) \subset z$. Por la hipótesis, $F(F(z)) \subset F(z)$, luego $F(z) \in A$, luego $z \subset F(z)$, lo que nos da la igualdad $F(z) = z$.

Supongamos que existen aplicaciones $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow X$ inyectivas. y definamos $F : \mathcal{P}X \longrightarrow \mathcal{P}X$ mediante $F(u) = X \setminus g[Y \setminus f[u]]$.

Esto es correcto, pues F está definida por especificación como subconjunto de $\mathcal{P}X \times \mathcal{P}X$ por la fórmula

$$\phi(u,v) \equiv v = X \setminus g[Y \setminus f[u]] \leftrightarrow \operatorname{cto} v \wedge \bigwedge x \in X(x \in v \leftrightarrow x \notin g[Y \setminus f[u]])$$

$$\leftrightarrow \operatorname{cto} v \wedge \bigwedge x \in X(x \in v \leftrightarrow \neg \bigvee y \in Y(y \notin f[u] \wedge x = f(y)))$$

$$\leftrightarrow \operatorname{cto} v \wedge \bigwedge x \in X(x \in v \leftrightarrow \neg \bigvee y \in Y(\neg \bigvee x' \in u\ y = f(x') \wedge x = f(y)))$$

y la última fórmula es claramente equivalente a una fórmula Δ_0 y estratificada.

Estamos en las hipótesis del resultado que acabamos de probar, pues si se cumple $u \subset v \subset X$, entonces

$$f[u] \subset f[v], \quad Y \setminus f[v] \subset Y \setminus f[u], \quad g[Y \setminus f[v]] \subset g[Y \setminus f[u]],$$

$$X \setminus g[Y \setminus f[u]] \subset X \setminus g[Y \setminus f[v]],$$

luego $F(u) \subset F(v)$.

En consecuencia existe un subconjunto $z \subset X$ tal que $F(z) = z$, es decir, $X \setminus g[Y \setminus f[z]] = z$ o, equivalentemente, $X \setminus z = g[Y \setminus f[z]]$. Por consiguiente, $f|_z : z \longrightarrow f[z]$ y $g|_{Y \setminus f[z]} : Y \setminus f[z] \longrightarrow X \setminus z$ son ambas biyectivas, luego la unión de la primera con la inversa de la segunda nos da una aplicación $h : X \longrightarrow Y$ biyectiva. ■

2.4 Buena ordenación

En general, si $(A, \leq)$ es un conjunto ordenado (omitimos la definición trivial), podemos considerar la relación de orden estricto asociada

$$< \equiv \leq \cap \{(x,y) \in A \times A \mid x \neq y\}$$

así como las secciones iniciales

$$A_a^< \equiv \{x \in A \mid x < a\}, \qquad A_a^\leq \equiv \{x \in A \mid x \leq a\}$$

(cuya existencia se justifica en KFA exactamente igual que la de las clases de equivalencia para una relación de equivalencia). El principio de inducción transfinita es inmediato:

Teorema 2.5 (Inducción transfinita) *Si $(A, \leq)$ es un conjunto bien ordenado y $X \subset A$ cumple que $\bigwedge a \in A(A_a^< \subset X \rightarrow a \in X)$, entonces $X = A$.*

Demostración: Si $A \setminus X \neq \varnothing$, tomamos $a = \operatorname{mín}(A \setminus X)$ y resulta que $A_a^< \subset X$, pero $a \notin X$. ■

Otro hecho básico es el siguiente:

Teorema 2.6 *Sea $(A, \leq)$ un conjunto bien ordenado y $f : (A, \leq) \longrightarrow (A, \leq)$ una aplicación inyectiva que conserva el orden. Entonces $\bigwedge a \in A\ a \leq f(a)$.*

Demostración: Consideremos el conjunto

$$X = \{a \in A \mid f(a) < a\} = \{a \in A \mid \bigvee x \in A(x = f(a) \land x < a)\},$$

claramente bien definido. Sólo hay que probar que es vacío, pero si no lo fuera podríamos tomar su mínimo a, de modo que $f(a) < a$, luego $f(f(a)) < f(a)$, con lo que $f(a) \in A$ y es menor que el mínimo, contradicción. ■

De aquí se sigue en particular que un conjunto bien ordenado $(A, \leq)$ no puede ser semejante a uno de sus segmentos iniciales $A_a^<$ (pues la semejanza cumpliría $f(a) < a$. Otra consecuencia importante es la siguiente:

Teorema 2.7 *Si dos conjuntos bien ordenados son semejantes, existe una única semejanza entre ellos.*

Demostración: Supongamos que $f, g : (A, \leq_A) \longrightarrow (B, \leq_B)$ son dos semejanzas. Entonces $f \circ g^{-1}$ es una semejanza de $(A, \leq_A)$ en sí mismo, luego $a \leq_A g^{-1}(f(a))$, luego $g(a) \leq_B f(a)$, para todo $a \in A$, e igualmente se prueba que $f(a) \leq_B f(a)$ para todo $a \in A$, luego $f(a) = g(a)$, luego $f = g$. ■

En KFA no puede probarse que todo conjunto bien ordenado es semejante a un ordinal, pero podemos hacer como hemos hecho con la cardinalidad y definir las fórmulas

$$\overline{(A, \leq_A)} = \overline{(B, \leq_B)} \equiv \bigvee f \ f : (A, \leq_A) \to (B, \leq_B) \text{ semejanza},$$

(donde una semejanza es una biyección que conserva el orden). Así mismo:

$$\overline{(A, \leq_A)} < \overline{(B, \leq_B)} \equiv \bigvee b \in B \bigvee f \ f : (A, \leq_A) \to (B_b^<, \leq_B) \text{ semejanza},$$

$$\overline{(A, \leq_A)} \leq \overline{(B, \leq_B)} \equiv \overline{(A, \leq_A)} < \overline{(B, \leq_B)} \lor \overline{(A, \leq_A)} = \overline{(B, \leq_B)}.$$

Las propiedades siguientes son inmediatas:

a) $\overline{(A, \leq_A)} = \overline{(A, \leq_A)}$,

b) $\overline{(A, \leq_A)} = \overline{(B, \leq_B)} \to \overline{(B, \leq_B)} = \overline{(A, \leq_A)}$,

c) $\overline{(A, \leq_A)} = \overline{(B, \leq_B)} \land \overline{(B, \leq_B)} = \overline{(C, \leq_C)} \to \overline{(A, \leq_A)} = \overline{(C, \leq_C)}$,

d) $\overline{(A, \leq_A)} < \overline{(B, \leq_B)} \land \overline{(B, \leq_B)} < \overline{(C, \leq_C)} \to \overline{(A, \leq_A)} < \overline{(C, \leq_C)}$,

así como las propiedades obvias que resultan de combinar $<$ y $=$.

Del teorema anterior se sigue inmediatamente que $\neg\overline{(A, \leq_A)} = \overline{(A_a^<, \leq_A)}$ o, equivalentemente, que $\neg\overline{(A, \leq_A)} < \overline{(A, \leq_A)}$, de donde se sigue que en la disyunción

$$\overline{(A, \leq_A)} < \overline{(B, \leq_B)} \lor \overline{(A, \leq_A)} = \overline{(B, \leq_B)}$$

no se pueden dar los dos casos a la vez. Otro hecho obvio es que no puede ocurrir

$$\overline{(A, \leq_A)} < \overline{(B, \leq_B)} \land \overline{(B, \leq_B)} < \overline{(A, \leq_A)},$$

por lo que

$$\overline{(A,\leq_A)} \leq \overline{(B,\leq_B)} \land \overline{(B,\leq_B)} \leq \overline{(A,\leq_A)} \rightarrow \overline{(A,\leq_A)} = \overline{(B,\leq_B)}.$$

El resultado no trivial es el siguiente:

Teorema 2.8 *Si $(A,\leq_A)$ y $(B,\leq_B)$ son conjuntos bien ordenados, entonces*

$$\overline{(A,\leq_A)} \leq \overline{(B,\leq_B)} \lor \overline{(B,\leq_B)} \leq \overline{(A,\leq_A)}.$$

DEMOSTRACIÓN: Consideremos el conjunto

$$F = \{(a,b) \in A \times B \mid \overline{(A_a^{\leq},\leq_A)} = \overline{(B_b^{\leq},\leq_B)}\}$$

La fórmula que define a F equivale a

$$\bigvee f \in \mathcal{P}(A\times B)\bigvee D \in \mathcal{P}A\bigvee D' \in \mathcal{P}B(\bigwedge x \in A(x \in D \leftrightarrow x \leq_A a) \land$$

$$\bigwedge x \in B(x \in D' \leftrightarrow x \leq_B b) \land f : D \longrightarrow D' \text{ biyectiva} \land$$

$$\bigwedge uv \in D\bigwedge u'v' \in D'(u' = f(u) \land v' = f(v) \land u \leq_A v \rightarrow u' \leq v')),$$

que claramente es Δ_0 y estratificada.

Para cada $a \in A$, si existe un $b \in B$ tal que $\overline{(A_a^{\leq},\leq_A)} = \overline{(B_b^{\leq},\leq_B)}$, entonces b es único, pues si hubiera dos, digamos $b < b'$, y $b < c \leq b'$ es el mínimo elemento de B mayor que b, entonces $B_b^{\leq} = (B_b^{\leq})_c^{<}$, con lo que tendríamos un conjunto bien ordenado semejante a un segmento inicial, y eso es imposible. Similarmente, para cada $b \in B$ hay a lo sumo un $a \in A$ tal que $\overline{(A_a^{\leq},\leq_A)} = \overline{(B_b^{\leq},\leq_B)}$. Esto se traduce en que F es una biyección de un subconjunto de A en un subconjunto de B.

Si $a \leq a'$ están en $\mathcal{D}F$ y $f : (A_{a'}^{\leq},\leq_A) \longrightarrow (B_{F(a')}^{\leq},\leq_B)$ es una semejanza, entonces $f|_{A_a^{\leq}} : (A_a^{\leq},\leq_A) \longrightarrow (B_{f(a)}^{\leq},\leq_B)$ es una semejanza, luego resulta que $F(a) = f(a) \leq F(a')$ y, por consiguiente, $F : (\mathcal{D}F,\leq_A) \longrightarrow (\mathcal{R}F,\leq_B)$ es una semejanza.

Es fácil ver que si $a \in \mathcal{D}F$ y $x \in A$ cumple $x \leq a$, entonces $x \in \mathcal{D}F$. A su vez esto implica que si $\mathcal{D}F \neq A$, entonces $\mathcal{D}F = A_a^{<}$, donde $a = \min(A \setminus \mathcal{D}F)$. Igualmente, $\mathcal{R}F = B$ o bien $\mathcal{R}F = B_b^{<}$ para cierto $b \in B$. Así pues, tenemos cuatro casos:

O bien $\mathcal{D}F = A \land \mathcal{R}F = B$, en cuyo caso $\overline{(A,\leq_A)} = \overline{(B,\leq_B)}$, o bien se cumple $\mathcal{D}F = A \land \mathcal{R}F = B_a^{<}$, en cuyo caso $\overline{(A,\leq_A)} < \overline{(B,\leq_B)}$, o bien $\mathcal{D}F = A_A^{<} \land \mathcal{R}F = B$, en cuyo caso $\overline{(B,\leq_B)} < \overline{(A,\leq_A)}$ y, finalmente, vamos a ver que no puede suceder que $\mathcal{D}F = A_a^{<}$ y $\mathcal{R}F = B_b^{<}$.

Si de diera este cuarto caso, es claro que $F' = F \cup \{(a,b)\}$ es una semejanza $F' : (A_a^{\leq},\leq_A) \longrightarrow (B_b^{\leq},\leq_B)$, luego $(a,b) \in F$, luego $a \in \mathcal{D}F$, contradicción. ■

2.5 Infinitud y números naturales

El axioma de infinitud usual en ZCF no es muy adecuado para KFA porque la fórmula $n \in \omega$ no está estratificada. No obstante, podemos trabajar con él:

Axioma de infinitud $(\omega \in V)$ $\bigvee X \bigwedge n(n \in X \leftrightarrow n \in \omega)$

En otras palabras, el axioma de infinitud afirma que la clase ω de los números naturales es un conjunto. La clave para evitar la no estratificación de $n \in \omega$ es considerar a ω como parámetro. Por ejemplo, en principio, la fórmula

$$n = m' \leftrightarrow n = m \cup \{m\} \leftrightarrow \bigwedge u \in n\ (u \in m \vee u = m) \wedge m \subset n \wedge m \in n$$

no está estratificada, por ejemplo por la subfórmula $u \in m \vee u = n$, pero también es equivalente a

$$m \subset n \wedge m \neq n \wedge \bigwedge k \in \omega(m \subset k \wedge k \subset n \rightarrow m = k \vee k = n),$$

que es Δ_0 y estratificada con parámetro ω. Observemos que en la estratificación las variables m y n tienen el mismo tipo.

En particular, tenemos definida la función sucesor $S : \omega \longrightarrow \omega$ dada por

$$S = \{(m, n) \in \omega \mid n = m'\}.$$

Esta función atestigua que $\omega \in V$ implica en KFA un axioma de infinitud alternativo no equivalente:

Axioma de infinitud (AID) $\bigvee SX\ S : X \longrightarrow X$ inyectiva no suprayectiva

Así, AID afirma la existencia de un conjunto infinito en el sentido de Dedekind.

En lo que sigue supondremos AID, pero no $\omega \in V$. Dada $S : X \longrightarrow X$ en las condiciones de AID, podemos tomar un elemento $0 \in X \setminus S[X]$ y definir

$$\mathbb{N} = \bigcap \{Y \in \mathcal{P}X \mid 0 \in Y \wedge \bigwedge n \in Y\ S(n) \in Y\}.$$

Se comprueba inmediatamente que la restricción de S sigue cumpliendo que $S : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ inyectiva y no suprayectiva, pero además $\mathbb{N}$ cumple los axiomas de Peano:

1) $0 \in \mathbb{N}$,

2) $\bigwedge n \in \omega\, S(n) \in \mathbb{N}$,

3) $\bigwedge n \in \mathbb{N}\, S(n) \neq 0$,

4) $\bigwedge mn \in \mathbb{N}(S(m) = S(n) \rightarrow m = n)$,

5) $\bigwedge Y(Y \subset \mathbb{N} \wedge 0 \in Y \wedge \bigwedge n \in Y\, S(n) \in Y \rightarrow Y = \mathbb{N})$.

Observemos que hemos construido $\mathbb{N}$ a partir de una terna arbitraria $(X, S, 0)$ tal que $S : X \longrightarrow X$ es inyectiva y $0 \in X \setminus S[X]$. Por lo tanto, no tenemos un único conjunto de números naturales, sino uno para cada terna en estas condiciones. (Técnicamente, el término $\mathbb{N}$ tiene en realidad tres variables libres X, S, 0.) Si suponemos $\omega \in V$ y hacemos la construcción de $\mathbb{N}$ partiendo de la aplicación sucesor $S : \omega \longrightarrow \omega$, entonces necesariamente el 0 que escogemos es el ordinal $0 = \varnothing$ y $\mathbb{N} = \omega$.

Teorema 2.9 *Sea* $(\mathbb{N}, S, 0)$ *cualquier terna que cumpla los axiomas de Peano. Si* $g : \mathbb{N} \longrightarrow X$ *y* $x_0 \in X$*, existe una única aplicación* $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$ *tal que*

$$f(0) = x_0 \land \bigwedge n \in \mathbb{N}\ f(S(n)) = g(f(n)).$$

Demostración: Es fácil ver que la clase

$$F = \{h \in \mathcal{P}(\mathbb{N} \times X) \mid \bigvee D \in \mathcal{P}\mathbb{N}(h : D \longrightarrow X \land 0 \in D \land h(0) = x_0$$
$$\land \bigwedge n \in \mathbb{N}(S(n) \in D \to n \in D \land h(S(n)) = g(h(n))))\}$$

es un conjunto.[4]

Observamos ahora que si $h, h' \in F$, con $h : D \longrightarrow X$, $h' : D' \longrightarrow X$ y $n \in D \cap D'$, entonces $h(n) = h'(n)$.

Para probarlo consideramos el conjunto

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \in D \cap D' \to h(n) = h'(n)\},$$

claramente bien definido. Obviamente $0 \in A$, pues $h(0) = x_0 = h'(0)$ y, si $n \in A$ y $S(n) \in D \cap D'$, entonces $h(S(n)) = g(h(n)) = g(h'(n)) = h'(S(n))$, luego $S(n) \in A$, lo que prueba que $A = \mathbb{N}$.

Por otra parte consideramos el conjunto

$$B = \{n \in \mathbb{N} \mid \bigvee h \in F \bigvee x \in X \bigvee u \in h\ u = (n, x)\}.$$

Tenemos que $0 \in B$, pues $\{(0, x_0)\} \in F$, y si $n \in B$, existe $h \in F$, digamos $h : D \longrightarrow X$, tal que $n \in D$. Si $S(n) \in D$, entonces $S(n) \in B$ y, en caso contrario, $h' = h \cup \{(S(n), g(h(n)))\} \in F$, luego $S(n) \in B$ igualmente. Esto prueba que $B = \mathbb{N}$.

De estos dos hechos deducimos que $f = \bigcup F : \mathbb{N} \longrightarrow X$ que claramente cumple las condiciones del enunciado. La unicidad se sigue inmediatamente de una inducción sobre el conjunto

$$C = \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) = f'(n)\},$$

donde f y f' son dos funciones que cumplan las condiciones del enunciado. ■

[4] Por ejemplo, la última igualdad equivale a

$$\bigvee xy \in X \bigvee m \in \mathbb{N}(m = S(n) \land y = h(n) \land x = h(m) \land x = g(y)).$$

En particular, si tenemos dos ternas $(\mathbb{N}, S, 0)$, $(\mathbb{N}', S', 0')$ que cumplen los axiomas de Peano, el teorema anterior nos da una aplicación $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}'$ tal que $f(0) = 0'$ y $\bigwedge n \in \mathbb{N}\ f(S(n)) = S'(f(n))$. Es fácil ver entonces que f es biyectiva, y esto significa que las dos ternas son "isomorfas", es decir, que ambas cumplen las mismas propiedades. A partir de aquí daremos por hecho que $(\mathbb{N}, S, 0)$ es una terna arbitraria que cumpla los axiomas de Peano.

Teorema 2.10 *Existe una única función* $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *tal que*

$$\bigwedge n \in \mathbb{N}\ n + 0 = n, \qquad \bigwedge mn \in \mathbb{N}\ n + S(m) = S(n + m).$$

Demostración: Basta definir

$$+ = \{((n, m), r) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times \mathbb{N} \mid \bigvee f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}(f(0) = n \land$$
$$\bigwedge m \in \mathbb{N}\ f(S(m)) = S(f(m)) \land f(m) = r)\}.$$

Es fácil ver que la fórmula es Δ_0 y estratificada. La unicidad se demuestra por inducción sobre el conjunto $X = \{m \in \omega \mid m + n = m \oplus n\}$, donde $+$ y $\oplus$ son dos aplicaciones en las condiciones del enunciado. ■

Análogamente se definen el producto y la exponenciación de números naturales. Notemos que los conjuntos $+$, $\cdot$ y $(\ )^{()}$ pueden usarse como parámetros a la hora de definir subconjuntos de ω, por lo que cualquier fórmula aritmética define un conjunto[5] y, por consiguiente, el principio de inducción vale para fórmulas aritméticas. Esto implica que KFA + AID es un sistema aritmético.

A partir de aquí es pura rutina demostrar todas las propiedades aritméticas de los números naturales y no entraremos en los detalles. A título ilustrativo consideramos la relación de orden, que se define mediante

$$m \leq n \leftrightarrow \bigvee r \in \mathbb{N}\ m + r = n.$$

Las propiedades de la suma implican que ciertamente es una relación de orden total respecto a la que 0 es el mínimo número natural y $n+1$ es el menor natural mayor que n, pues si se cumple $n \leq m \leq n + 1$, entonces

$$n + r = m \land m + s = n + 1,$$

luego $n + r + s = n + 1$, luego $r + s = 1$ y esto implica $r = 0 \lor s = 0$, luego $n = m \lor m = n + 1$. Finalmente, se trata de un buen orden, pues si $A \subset \mathbb{N}$ es un conjunto sin mínimo, consideramos el conjunto

$$X = \{n \in \mathbb{N} \mid \bigwedge m \in \mathbb{N}(m \leq n \rightarrow m \notin A)\}.$$

Se cumple que $0 \in X$, pues si $0 \in A$ sería el mínimo de A, y, si $n \in X$, entonces $n + 1 \in X$, pues si $n + 1 \notin X$ entonces $n + 1$ sería el mínimo de A. Por lo tanto $X = \mathbb{N}$ y $A = \varnothing$. ■

[5] Más concretamente, es fácil ver que toda fórmula aritmética en KFA + AID es de la forma $\phi(x_1, \ldots, x_n, \omega, +, \cdot)$, donde $\phi(x_1, \ldots, x_n, w, s, p)$ es una fórmula Δ_0 y estratificada con todas las variables $x_1, \ldots, x_n$ de tipo 0, la variable w de tipo 1 y las variables s y p de tipo 3.

2.6 El axioma de elección

Veamos a continuación que KFA es capaz también de probar las equivalencias principales del axioma de elección. Sólo hay un inconveniente técnico debido a la necesidad de trabajar con fórmulas estratificadas, y es que la fórmula $f(x) \in x$ no está estratificada, por lo que conviene retocar ligeramente la definición usual de función de elección:

Definición 2.11 Si A es un conjunto cuyos elementos son conjuntos no vacíos, una *función de elección estratificada* en A es una función $F : A \longrightarrow \mathcal{P}_1 \bigcup A$ tal que $\bigwedge X \in A\ F(X) \in \mathcal{P}_1 X$, donde

$$\mathcal{P}_1 X \equiv \{u \in \mathcal{P}X \mid \bigvee x \in X\ u = \{x\}\}.$$

Así, una función de elección en este sentido cumple que $F(X) = \{x\}$, para cierto $x \in X$, con lo cual cumple perfectamente su objetivo de seleccionar un elemento de cada conjunto, pero el tecnicismo es menos trivial de lo que podría parecer.[6]

La versión del axioma de elección adecuada para KFA es la siguiente:

Axioma de elección estratificado (AE*) *Toda familia A de conjuntos no vacíos posee una función de elección estratificada.*

Naturalmente, si trabajamos en KF podemos modificar AE* para eliminar el relator 'cto' y obtenemos una variante de AE* (a la que seguiremos llamando AE*) de modo que KF+AE* es equivalente a KFA+AE*+NA en el sentido usual.

Usando (AE*) podemos probar:

Teorema 2.12 *Si A es una familia de conjuntos no vacíos disjuntos dos a dos, existe un conjunto que contiene exactamente un elemento de cada conjunto de A.*

DEMOSTRACIÓN: Si F es la función dada por AE, tomamos $E = \bigcup F[A]$. ■

A partir del teorema anterior demostramos el lema de Zorn. (Omitimos las definiciones conocidas de cadena, cota superior y elemento maximal.)

[6]Sucede que en KFA no puede probarse, por ejemplo, que $\overline{\overline{\mathcal{P}_1 X}} = \overline{\overline{X}}$. La biyección natural $F : X \longrightarrow \mathcal{P}_1 X$ para probarlo sería la dada por $x \mapsto \{x\}$, pero la clase

$$F = \{(x, y) \in X \times \mathcal{P}_1 X \mid y = \{x\}\}$$

no es necesariamente un conjunto, pues para ello haría falta que la fórmula $y = \{x\}$ pudiera estratificarse con las variables x e y del mismo tipo, y esto no es posible. Naturalmente, esto no asegura que $\overline{\overline{\mathcal{P}_1 X}} = \overline{\overline{X}}$ no pueda probarse en KFA, sino únicamente que no puede probarse de la forma obvia. Ahora bien, en KFA sí puede probarse que $\overline{\overline{\mathcal{P}_1 X}} < \overline{\overline{\mathcal{P}X}}$ (adaptando ligeramente la prueba usual del teorema de Cantor), luego si pudiera probarse $\overline{\overline{\mathcal{P}_1 X}} = \overline{\overline{X}}$ tendríamos también el teorema de Cantor usual: $\overline{\overline{X}} < \overline{\overline{\mathcal{P}X}}$, que a su vez implica que $V \notin V$, pero KFA es consistente con $V \in V$.

Teorema 2.13 (Lema de Zorn) *Todo conjunto parcialmente ordenado en el que toda cadena tiene una cota superior, tiene un elemento maximal.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $(A, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado que cumpla las hipótesis. Para cada cadena c en A, sea

$$X_c \equiv \{x \in \mathcal{P}A \mid \bigvee u \in A\ (u \notin c \land \bigwedge v \in c\ v \leq u \land x = c \cup \{u\}) \lor$$

$$(\neg \bigvee u \in A\ (u \notin c \land \bigwedge v \in c\ v \leq u) \land x = c)\},$$

es decir, X_c es el conjunto de todas las extensiones de c por una cota superior si es que existe tal cota, o bien $X_c = \{c\}$ en caso contrario. Es fácil desarrollar un poco más la definición para comprobar que la fórmula correspondiente es Δ_0 y estratificada. Consideramos ahora la clase

$$S \equiv \{x \mid \bigvee c \in \mathcal{P}A(c \text{ es una cadena en } (A, \leq) \land x = \{c\} \times X_c)\}.$$

Para comprobar que S es un conjunto observamos que $c \in \mathcal{P}A$, $\{c\} \in \mathcal{PP}A$, $X_c \in \mathcal{PP}A$ y, usando que en general $U \times V \subset \mathcal{PP}(U \cup V)$, obtenemos que $\{c\} \times X_c \subset \mathcal{PPPP}A$, luego $S \subset \mathcal{PPPPP}A$. Ahora observamos que

$$c \text{ es una cadena en } (A, \leq) \leftrightarrow \bigwedge uv \in c\ (u \leq v \lor v \leq u),$$

que claramente es Δ_0 y estratificada, mientras que

$$x = \{c\} \times X_c \leftrightarrow \bigwedge u \in x \bigvee v \in \mathcal{P}A\ (u = (c, v) \land v \in X_c)$$

$$\land \bigwedge v \in \mathcal{P}A(v \in X_c \rightarrow \bigvee u \in x\ u = (c, v)).$$

Ahora sólo hace falta observar que $v \in X_c$ es equivalente a la fórmula que define a X_c, que es Δ_0 y admite una estratificación en la que las variables x y c tienen el mismo tipo. Esto basta para justificar que $x = \{c\} \times X_c$ es equivalente a una fórmula Δ_0 y estratificada.

Así S es una familia de conjuntos no vacíos disjuntos dos a dos. Por el teorema anterior existe un conjunto G que contiene exactamente un elemento de cada conjunto en S. Es claro que G es una función definida sobre el conjunto de todas las cadenas de $(A, \leq)$ y tal que $G(c) \in X_c$.

Diremos que c es una *buena cadena* en $(A, \leq)$ si c está bien ordenada por $\leq$ y, para cada $a \in c$, se cumple que

$$G(\{u \in c \mid u < a\}) = \{u \in c \mid u \leq a\}.$$

Es fácil comprobar lo siguiente:

- Si c es una buena cadena y $a \in c$, entonces los conjuntos $\{u \in c \mid u < a\}$ y $\{u \in c \mid u \leq a\}$ son también buenas cadenas.
- $\varnothing$ es una buena cadena.
- Si c es una buena cadena, $G(c)$ también lo es.

Veamos lo siguiente:

Si c y c' son buenas cadenas y $a \in c$ cumple que $\{u \in c \mid u < a\} = \{u \in c' \mid u < a\}$, entonces $a \in c'$ o bien $c' = \{u \in c \mid u < a\}$.

En efecto, si $c' \neq \{u \in c \mid u < a\}$, existe un $a' \in c'$ mayor que todos los $u \in c'$ tales que $u < a$. Como c' está bien ordenado, podemos suponer que a' es el mínimo elemento de c' mayor que todos los $u \in c'$ tales que $u < a$, es decir,

$$\{u \in c' \mid u < a'\} = \{u \in c' \mid u < a\} = \{u \in c \mid u < a\}.$$

Aplicando G obtenemos un conjunto cuyo máximo tiene que ser tanto a' como a, luego $a = a' \in c'$.

Veamos ahora que dos buenas cadenas c y c' están necesariamente contenidas una en la otra. En efecto, si c no está contenida en c', podemos tomar el mínimo $a \in c \setminus c'$, de modo que $\{u \in c \mid u < a\} \subset \{u \in c' \mid u < a\}$. Veamos que tiene que darse la igualdad. En caso contrario, existe un $a' \in c'$ tal que $a' < a$, pero $a' \notin c$. Podemos tomar el mínimo posible. Así, $\{u \in c \mid u < a'\} = \{u \in c' \mid u < a'\}$, luego, según hemos visto, esto implica que $c = \{u \in c' \mid u < a'\}$, pero entonces $a < a'$, contradicción. Por consiguiente, $\{u \in c \mid u < a\} = \{u \in c' \mid u < a\}$ y, aplicando de nuevo la propiedad que hemos demostrado, $c' \subset c$.

Ahora es fácil ver que la unión de todas las buenas cadenas es una buena cadena. Llamémosla C. Entonces $G(C)$ también es una buena cadena, pero necesariamente ha de ser $G(C) = C$, lo que significa que la única cota superior de C está en C y es su máximo elemento m. Necesariamente m es un elemento maximal de A, ya que de lo contrario, cualquier elemento por encima de m sería una cota superior de C fuera de C. ■

Notemos que hemos demostrado el lema de Zorn a partir del teorema 2.12, luego si ahora probamos el axioma de elección a partir del lema de Zorn habremos demostrado que los tres enunciados son equivalentes en KFA. En efecto:

Dada una familia A de conjuntos no vacíos, llamamos F a la familia de las funciones de elección (estratificadas) definidas sobre un subconjunto de A. El hecho de considerar funciones de elección estratificadas es crucial para que F esté bien definido. En efecto,

$$F = \{f \in (\mathcal{P}_1 \bigcup A)^A \mid \bigwedge \underset{1}{x} \in \underset{2}{A} \bigvee \underset{0}{u} \in \underset{1}{x} \bigvee \underset{1}{v} \in \mathcal{P}_1 \bigcup A \; (\underset{1}{v} = \{\underset{0}{u}\} \wedge \underset{1}{v} = \underset{4}{f}(\underset{1}{x})\}.$$

Es inmediato que F satisface la hipótesis del lema de Zorn (considerada como conjunto parcialmente ordenado por la inclusión), por lo que existe una función de elección maximal. Es fácil ver que su dominio tiene que ser todo A. ■

Teorema 2.14 (Teorema de buena ordenación) *Todo conjunto puede ser bien ordenado.*

Demostración: Dado un conjunto A, sea

$$X = \{R \in \mathcal{P}(A \times A) \mid \bigvee D \in \mathcal{P}A\ (R \subset D \times D \land (D, R) \text{ es un buen orden})\}.$$

Dejamos al lector la comprobación rutinaria de que X está bien definido. Definimos en X el orden parcial dado por $R \leq S$ si $R \subset S$ y, para todo $r \in \mathcal{D}R$ y todo $s \in \mathcal{D}S \setminus \mathcal{D}R$ se cumple $r\,S\,s$. En otras palabras, todos los elementos de $\mathcal{D}S$ que no están en $\mathcal{D}R$ son posteriores a los de $\mathcal{D}R$. Explícitamente:

$$\leq\ \equiv \{(R, S) \in F \times F \mid R \subset S \land \bigwedge rs \in A\ (r\,R\,r \land s\,S\,s \land \neg s\,R\,s \rightarrow r\,S\,s)\}.$$

Es claro que el conjunto $\leq$ está bien definido y es fácil ver que $(X, \leq)$ satisface las hipótesis del lema de Zorn y un elemento maximal es necesariamente un buen orden sobre todo A. ■

Y a su vez es claro que esto implica el axioma de elección, por lo que el principio de buena ordenación es también equivalente a AE*.

Una consecuencia del teorema anterior combinado con 2.8 es la siguiente:

Teorema 2.15 (AE) $\bigwedge XY\ (\overline{\overline{X}} \leq \overline{\overline{Y}} \lor \overline{\overline{Y}} \leq \overline{\overline{X}})$.

Capítulo III

La teoría de conjuntos de Mac Lane

Según hemos visto, el esquema de especificación de la teoría KF es deliberadamente restrictivo para evitar que en dicha teoría pueda probarse que la clase universal no es un conjunto. Sin embargo, esto hace que tampoco puedan probarse algunos hechos naturales, como la existencia de la aplicación $x \mapsto \{x\}$ o, más en general, la existencia de las aplicaciones canónicas $p : X \longrightarrow X/R$ de un conjunto dado en un cociente respecto de una relación de equivalencia.

La teoría (básica) de Mac Lane resulta de suprimir la restricción sobre estratificación en el esquema de especificación de MK, pero conservando la restricción a fórmulas Δ_0. Al añadir los axiomas de infinitud, elección y regularidad obtenemos la teoría de Mac Lane completa.

3.1 La teoría básica de Mac Lane

Llamaremos M_0 a la teoría que extender el esquema de especificación de KF a fórmulas de clase Δ_0 arbitrarias, sin exigir que estén estratificadas. Explícitamente, los axiomas de M_0 son los siguientes

Extensionalidad	$\bigwedge xy(\bigwedge u(u \in x \leftrightarrow u \in y) \rightarrow x = y)$
Par	$\bigwedge xy \bigvee z(x \in z \land y \in z)$
Unión	$\bigwedge x \bigvee y \bigwedge u \in x \bigwedge v \in u\ v \in y$
Partes	$\bigwedge x \bigvee y \bigwedge u(u \subset x \rightarrow u \in y)$
$\boldsymbol{\Delta_0}$-Especificación	$\bigwedge x \bigvee y \bigwedge u(u \in y \leftrightarrow u \in x \land \phi(u)) \quad (*)$

$(*)$ para toda fórmula ϕ (con posibles parámetros) de clase Δ_0.

Podríamos considerar también la teoría correspondiente $\mathrm{M}_0\mathrm{A}$, con átomos, pero no va a ser necesario. A partir de este nivel no consideraremos más teorías con átomos. En particular, a partir de ahora usaremos las mayúsculas y minúsculas como variables indiscriminadamente.

Todos los resultados que hemos probado en el capítulo precedente para KF valen, obviamente, para M_0, y las pruebas se pueden simplificar ligeramente al despojarlas de las comprobaciones técnicas relacionadas con la estratificación.

En particular, en M_0 podemos considerar de forma natural el axioma de elección usual en ZFC:

Axioma de elección (AE) Para todo conjunto A formado por conjuntos no vacíos existe una *función de elección*, es decir, una función $F : A \longrightarrow \bigcup A$ tal que $\bigwedge X \in A\ F(X) \in X$.

Notemos que en M_0 sí que podemos definir la biyección $f : X \longrightarrow \mathcal{P}_1 X$ dada por $x \mapsto \{x\}$, pues la clase

$$f = \{(x, y) \in X \times \mathcal{P}_1 X \mid y = \{x\}\}$$

está definida por una fórmula Δ_0, luego es un conjunto.

En consecuencia, si A es una familia de conjuntos no vacíos, $B = \bigcup A$ y $f : B \longrightarrow \mathcal{P}_1 B$ es la biyección natural que acabamos de describir, se cumple que si $F : A \longrightarrow B$ es una función de elección sobre A, entonces $F \circ f$ es una función de elección estratificada y si $F : A \longrightarrow \mathcal{P}_1 B$ es una función de elección estratificada, entonces $F \circ f^{-1}$ es una función de elección usual.

Esto implica que en M_0 los axiomas AE* y AE son equivalentes, por lo que en la práctica consideraremos únicamente el segundo.

Como ya hemos comentado, en M_0 sí son válidos los argumentos que demuestran que no existe el conjunto de todos los conjuntos:

Teorema 3.1 *La clase universal V no es un conjunto.*

Demostración: Si V fuera un conjunto (es decir, si existiera un conjunto que contuviera a todos los conjuntos) entonces también sería un conjunto

$$R = \{x \mid x \notin x\} = \{x \in V \mid x \notin x\},$$

pero esto da lugar a la conocida paradoja de Russell. ■

Otra forma de llegar a este mismo resultado es a través del teorema de Cantor:

Teorema 3.2 (Cantor) $\bigwedge X\ \overline{\overline{X}} < \overline{\overline{\mathcal{P}X}}$.

Omitimos la prueba, que es exactamente la usual. También tenemos la versión siguiente para conjuntos bien ordenados:

Teorema 3.3 *Si $(A, \leq)$ es un conjunto bien ordenado, entonces existe otro conjunto bien ordenado $(B, \leq)$ tal que $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$.*

DEMOSTRACIÓN: Consideramos el mismo conjunto X que hemos usado en la prueba del teorema de buena ordenación:

$$X = \{R \in \mathcal{P}(A \times A) \mid \bigvee D \in \mathcal{P}A\ (R \subset D \times D \land (D, R) \text{ es un buen orden})\}.$$

Es fácil comprobar que la fórmula que especifica a X es Δ_0 (teniendo en cuenta que podemos usar $\mathcal{P}A$ como parámetro), por lo que X es un conjunto. Consideramos ahora

$$\sim\, = \{(R, S) \in X \times X \mid \overline{(\mathcal{D}R, R)} = \overline{(\mathcal{D}S, S)}\}.$$

La fórmula es Δ_0, pues equivale a

$$\bigvee DD' \in \mathcal{P}A \bigvee f \in \mathcal{P}(A \times A)(R \subset D \times D \land S \subset D' \times D'$$
$$\land \bigwedge x \in D\ x\,R\,x \land \bigwedge x \in D'\ x\,R'\,x \land f : (D, R) \longrightarrow (D', S) \text{ semejanza}).$$

Es claro que $\sim$ es una relación de equivalencia en X, por lo que podemos considerar el conjunto cociente $B = X/\!\sim$, y en B podemos considerar la relación

$$\leq\, = \{(u, v) \in B \times B \mid \bigvee R \in u \bigvee S \in v\ \overline{(\mathcal{D}R, R)} \leq \overline{(\mathcal{D}S, S)}\}.$$

La comprobación de que es un conjunto es rutinaria y no ofrece dificultad alguna. Es fácil ver entonces que

$$[R] \leq [S] \leftrightarrow \overline{(\mathcal{D}R, R)} \leq \overline{(\mathcal{D}S, S)},$$

de modo que no importa el representante elegido en cada clase. El teorema 2.8 y las observaciones previas implican que $(B, \leq)$ es un conjunto totalmente ordenado. Vamos a probar que está bien ordenado, para lo cual tomamos un conjunto $Y \subset B$ no vacío. Sea $R \in X$ tal que $b = [R] \in Y$ y sea $D = \mathcal{D}R$.

Sea $f : D \longrightarrow B$ la aplicación que a cada $d \in D$ le asigna la clase de la restricción de R al segmento inicial estricto determinado por d en D, es decir,

$$f = \{(d, u) \in D \times B \mid \bigvee S \in u \bigvee D' \in \mathcal{P}D(\bigwedge d \in D(d' \in D' \leftrightarrow d'\,R\,d \land d' \neq d))$$
$$\land\ S = R \cap (D' \times D')\}$$

Se comprueba sin dificultad[1] que f es un conjunto y es claro entonces que $f : D \longrightarrow B_b^<$ es biyectiva, pues si $d < d'$, el orden del segmento inicial estricto determinado por d es menor que el del determinado por d', y todo elemento de $B_b^<$ es la clase de una relación de orden semejante a un segmento inicial estricto de D.

Esto prueba que $B_b^<$ está bien ordenado. Si $B_b^< \cap Y = \varnothing$, entonces b es el mínimo de Y y no hay nada que probar. En caso contrario, es claro que el mínimo de $B_b^< \cap Y$ es también el mínimo de Y.

Notemos que en realidad hemos probado que si $b = [R]$ es cualquier elemento de B, entonces $\overline{(\mathcal{D}R, R)} < \overline{(B, \leq)}$. Esto implica que $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$, pues, por una parte, como A admite un buen orden, tenemos que $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}}$ y, si fuera $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$, existiría $R \in X$ tal que $\mathcal{D}R = A$ y $\overline{(A, R)} = \overline{(B, \leq)}$, cuando hemos visto que ha de ser $\overline{(A, R)} < \overline{(B, \leq)}$, contradicción. ■

[1] La demostración hasta aquí podría llevarse a cabo en KF, pero aquí nos encontramos con que la definición de f no es estratificable y no podríamos seguir.

Relaciones bien fundadas Recordemos que una relación R en un conjunto A está *bien fundada* si todo $X \subset A$ no vacío tiene un elemento R-minimal, es decir, un $x \in X$ tal que $\bigwedge a \in A(a\, R\, x \rightarrow a \notin X)$.

Si (A, R) es un conjunto bien fundado (es decir, que R es una relación bien fundada en A) y $a \in A$, llamaremos *extensión* de A al conjunto

$$A_a^R = \{x \in A \mid x\, R\, a\}.$$

El resultado fundamental sobre relaciones bien fundadas es el teorema de recursión:

Teorema 3.4 (Teorema de Recursión) *Si (A, R) es un conjunto bien fundado y $g : E \longrightarrow Z$, donde*

$$E = \{h \in \mathcal{P}(\mathcal{P}A \times Z) \mid \bigvee Y \in \mathcal{P}A \bigvee a \in A(Y = A_a^R \wedge h : Y \longrightarrow Z)\},$$

entonces existe una única función $f : A \longrightarrow Z$ tal que

$$\bigwedge a \in A\ f(a) = g(f|_{A_a^R}).$$

Demostración: Diremos que h es *una aproximación* si

$$\bigvee D \in \mathcal{P}A(\bigwedge x \in A \bigwedge d \in D(x\, R\, d \rightarrow x \in D) \wedge h : D \longrightarrow Z \wedge$$
$$\bigwedge a \in D\ h(a) = g(h|_{A_a^R}).$$

Hemos de comprobar que la clase

$$B = \{h \in \mathcal{P}(A \times Z) \mid h \text{ es una aproximación}\}$$

es un conjunto, es decir, que la fórmula que lo define es Δ_0. La única parte no obvia es la final:

$$h(a) = g(h|_{A_a^R}) \leftrightarrow \bigvee z \in Z \bigvee Y \in \mathcal{P}A \bigvee h' \in E$$
$$(h(a) = z \wedge g(h') = z \wedge Y = A_a^R \wedge h' = h|_Y).$$

Ahora observamos que si $h : D \longrightarrow Z$ y $h' : D \longrightarrow Z$ son aproximaciones y $a \in D \cap D'$, entonces $h(a) = h'(a)$.

En efecto, basta probar que el conjunto

$$B' = \{a \in D \cap D' \mid h(a) \neq h'(a)\}.$$

es vacío. En caso contrario contendría un R-minimal a, de modo que si $x\, R\, a$, entonces $x \in D \cap D'$ y $h(x) = h'(x)$, es decir, que $h|_{A_a^R} = h'|_{A_a^R}$, de modo que $h(a) = g(h|_{A_a^R}) = g(h'|_{A_a^R}) = h'(a)$, contradicción.

Esto nos garantiza que existe un $D \subset A$ tal que $f = \bigcup B : D \longrightarrow Z$ es una aproximación, que obviamente contiene a todas las demás. Basta probar que $D = A$ (pues la unicidad ya la tenemos probada). En caso contrario podemos tomar un R-minimal $a \in A \setminus D$. Esto significa que $A_a^R \subset D$, luego

$$f' = f \cup \{(a, g(f|_{A_a^R}))\} : D \cup \{a\} \longrightarrow Z$$

es una aproximación definida en a, contradicción. ■

Cardinales Podemos definir la clase de los *cardinales* (de von Neumann) como

$$K = \{\alpha \in \Omega \mid \neg \bigvee \beta < \alpha \ \overline{\overline{\beta}} = \overline{\overline{\alpha}}\}.$$

Es decir, un cardinal es un ordinal que no puede biyectarse con ningún ordinal anterior. Para cada ordinal α podemos considerar el conjunto

$$Y = \{\beta \in \alpha \mid \bigvee f \in \mathcal{P}(\alpha \times \alpha) \mid f : \beta \longrightarrow \alpha \text{ biyectiva}\}.$$

Si $Y = \varnothing$, entonces α es un cardinal, y en caso contrario podemos tomar el mínimo κ de Y, que claramente es un cardinal y $\overline{\overline{\kappa}} = \overline{\overline{\alpha}}$. Así pues, todo ordinal es equipotente a un cardinal, que es único, pues es obvio que dos cardinales distintos no pueden ser equipotentes entre sí.

Más en general, si X es un conjunto y existe un ordinal α tal que $\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{\alpha}}$, entonces existe un único cardinal κ tal que $\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{\kappa}}$, y a dicho κ lo llamaremos *cardinal* de X y lo representaremos por $|X|$, es decir:

$$|X| \equiv \kappa \mid (\kappa \in K \land \overline{\overline{X}} = \overline{\overline{\kappa}}).$$

En particular acabamos de ver que $|\alpha|$ está definido para todo ordinal α y obviamente $|\alpha| \leq \alpha$. Sin embargo, en M_0 no podemos probar que todo conjunto X tiene un cardinal de von Neumann asociado. Obviamente, una condición necesaria para que esto suceda es que X admita un buen orden, pero esta condición no es suficiente en M_0, pues no puede probarse que todo conjunto bien ordenado sea semejante a un ordinal. Así pues, ni siquiera en M_0+AE puede probarse que todo conjunto tenga un cardinal asociado.

En cualquier caso, es inmediato que si X e Y son conjuntos con cardinal, entonces

$$|X| = |Y| \leftrightarrow \overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Y}}.$$

Teorema 3.5 *Si el conjunto X tiene cardinal e $Y \subset X$, entonces Y tiene cardinal y $|Y| \leq |X|$.*

DEMOSTRACIÓN: Es claro que basta probar el teorema cuando X es un cardinal κ. Entonces podemos considerar a Y como conjunto bien ordenado con el buen orden de κ, y sabemos (teorema 2.8) que $\overline{(Y, \leq)} \leq \overline{(\kappa, \leq)}$ o bien $\overline{(\kappa, \leq)} < \overline{(Y, \leq)}$. El primer caso significa que Y es semejante (y en particular equipotente) a κ o a un segmento inicial de κ, es decir, a un ordinal α menor que κ, luego existe un $\alpha \leq \kappa$ tal que $\overline{\overline{Y}} = \overline{\overline{\alpha}}$, luego $|Y| = |\alpha| \leq \alpha \leq \kappa = |\kappa|$.

Sólo falta probar que el caso $\overline{(\kappa, \leq)} < \overline{(Y, \leq)}$ no puede darse, pero esto significaría que existe un $\alpha \in Y \subset \kappa$ y una semejanza $f : (\kappa, \leq) \longrightarrow (Y_\alpha^<, \leq)$. En particular $f(\alpha) < \alpha$, en contradicción con 2.6. ■

De aquí se sigue que si X tiene cardinal y $\overline{\overline{Y}} \leq \overline{\overline{X}}$ entonces $|Y| \leq |X|$, y que si X e Y tienen cardinal, entonces

$$|X| \leq |Y| \leftrightarrow \overline{\overline{X}} \leq \overline{\overline{Y}}.$$

Teorema 3.6 *Los números naturales son cardinales, es decir, $\omega \subset K$.*

Demostración: Supongamos que existe $n \in \omega$ que no es un cardinal, es decir, tal que $|n| < n$. Entonces podemos formar el conjunto[2]

$$X = \{m \in n \mid \bigvee u \in m \bigvee f \in \mathcal{P}(n \times n)(f : u \longrightarrow m \text{ biyectiva})\}.$$

Si es vacío, entonces n es el mínimo natural que no es un cardinal. En caso contrario el mínimo de X es el mínimo natural que no es un cardinal. En definitiva, podemos suponer que $|n| < n$ y que $\bigwedge m \in n\ |m| = m$.

Sea $f : |n| \longrightarrow n$ biyectiva. Es claro que $|n| \neq 0$, luego podemos expresar $|n| = k+1$, $n = m+1$. Es fácil modificar f para exigir que $f(k) = m$, con lo que $f|_k : k \longrightarrow m$ biyectiva y $k < m < n$, luego $|m| < m < n$, contradicción. ■

Definición 3.7 Un conjunto X es *finito* si tiene cardinal y $|X| \in \omega$.

En este sentido podemos decir que los números naturales son los cardinales finitos. El teorema 3.5 implica que todo subconjunto de un conjunto finito es finito.

3.2 El axioma de infinitud

A partir de aquí trabajamos en $\mathrm{M}_0 + \omega \in V$. El teorema siguiente implica en particular que ω es un conjunto infinito:

Teorema 3.8 *$\omega \in K$.*

Demostración: En caso contrario $|\omega| = n < \omega$. Obviamente, $n \neq 0$, luego $n = m+1$. Sea $f : m+1 \longrightarrow \omega$ biyectiva. Es fácil modificar f para exigir que $f(m) = 0$. Entonces $f|_m : m \longrightarrow \omega \setminus \{0\}$ biyectiva, y la aplicación $g : \omega \setminus \{0\} \longrightarrow \omega$ dada por $g(k) = k-1$ es biyectiva, luego al componer ambas obtenemos que $|\omega| = m$, contradicción. ■

Recordemos del capítulo anterior que con el axioma de infinitud tenemos definida la aritmética de los números naturales. Ahora es fácil probar por inducción sobre n que si m y n son números naturales, entonces

$$\overline{\overline{(m \times \{0\}) \cup (n \times \{1\})}} = \overline{\overline{m+n}}.$$

En efecto, notemos que podemos definir el conjunto

$$\{n \in \omega \mid \bigvee f \in \mathcal{P}((\omega \times \{0\}) \cup (\omega \times \{1\}) \times \omega) \bigvee k \in \omega (k = m+n \wedge$$
$$f : (m \times \{0\}) \cup (n \times \{1\}) \longrightarrow k \text{ biyectiva}\},$$

y esto es todo lo necesario para poder llevar adelante la inducción.

[2]Notemos que no podemos plantear la demostración como una inducción sobre n porque no podemos definir el conjunto $\{n \in \omega \mid \bigvee m \in n \bigvee f\ f : m \longrightarrow n \text{ biyectiva}\}$. Necesitamos un hipotético contraejemplo n para definir el conjunto de contraejemplos menores usando $\mathcal{P}(n \times n)$ como parámetro.

De aquí se sigue que fácilmente que si A y B son conjuntos finitos disjuntos, entonces $A \cup B$ es finito y $|A \cup B| = |A| + |B|$. A su vez, esto nos da la fórmula más general

$$|A \cup B| + |A \cap B| = |A| + |B|$$

así como la desigualdad $|A \cup B| \leq |A| + |B|$ (siempre para conjuntos finitos).

Del mismo modo se demuestra que $\overline{\overline{m \times n}} = \overline{\overline{mn}}$, de donde se sigue que si A y B son conjuntos finitos, entonces $A \times B$ es finito y $|A \times B| = |A||B|$.

Similarmente se prueba que si A y B son finitos entonces A^B es finito y

$$|A^B| = |A|^{|B|},$$

así como que si A es finito entonces $\mathcal{P}A$ es finito y $|\mathcal{P}A| = 2^{|A|}$.

En general, en M_0+AI podemos demostrar todas las propiedades básicas de los conjuntos finitos.

Aritmética cardinal En M_0 + AI podemos definir la suma y el producto de cardinales y demostrar sus propiedades básicas. Necesitaremos un hecho elemental:

Teorema 3.9 *Si α es un ordinal infinito, entonces $|\alpha'| = |\alpha|$, por lo que todo cardinal infinito es un ordinal límite.*

DEMOSTRACIÓN: Tenemos que $\omega \subset \alpha$. Sea $f : \omega \longrightarrow \omega$ la aplicación dada por $f(n) = n + 1$ y sea

$$g = f \cup \{(\alpha, 0)\} \cup \{(\delta, \delta) \mid \omega \leq \delta < \alpha\}.$$

Es fácil ver que $f : \alpha' \longrightarrow \alpha$ biyectiva. ■

El resultado fundamental de la aritmética cardinal es el siguiente:

Teorema 3.10 *Si κ es un cardinal infinito entonces $\overline{\overline{\kappa \times \kappa}} = \overline{\overline{\kappa}}$.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que existe un cardinal infinito κ para el que esto no es cierto y consideramos el conjunto

$$X = \{\mu \in \kappa \mid \omega \leq \mu \wedge \neg \bigvee f \in \mathcal{P}(\kappa \times \kappa) \bigvee \alpha \in \mu \ f : \mu \longrightarrow \alpha \text{ biyectiva} \wedge$$

$$\neg \bigvee f \in \mathcal{P}((\kappa \times \kappa) \times \kappa) \ f : \mu \times \mu \longrightarrow \mu \text{ biyectiva}\}.$$

Si $X = \varnothing$ entonces κ es el menor cardinal que incumple la afirmación, y si $X \neq \varnothing$ el mínimo de X es el menor cardinal que incumple la afirmación. Así pues, podemos suponer que $\overline{\overline{\kappa \times \kappa}} \neq \overline{\overline{\kappa}}$ pero que para todo cardinal infinito $\mu < \kappa$ se cumple que $\overline{\overline{\mu \times \mu}} = \overline{\overline{\mu}}$.

Notemos que si $\mu < \kappa$ es finito entonces $\mu \times \mu$ también es finito, luego, para todo cardinal $\mu < \kappa$, tenemos que $\overline{\overline{\mu \times \mu}} < \overline{\overline{\kappa}}$.

Consideramos en $\kappa \times \kappa$ el buen orden dado por

$$(\alpha, \beta) < (\gamma, \delta) \leftrightarrow \text{máx}\{\alpha, \beta\} < \text{máx}\{\gamma, \delta\} \lor (\text{máx}\{\alpha, \beta\} = \text{máx}\{\gamma, \delta\} \land \alpha < \gamma))$$
$$\lor\ (\text{máx}\{\alpha, \beta\} = \text{máx}\{\gamma, \delta\} \land \alpha = \gamma \land \beta \leq \delta)).$$

Es fácil comprobar que se trata realmente de un buen orden y que

$$(\kappa \times \kappa)^{<}_{(\gamma,\delta)} \subset (\text{máx}\{\gamma, \delta\} + 1) \times (\text{máx}\{\gamma, \delta\} + 1).$$

Como κ es un ordinal límite, tenemos que $\text{máx}\{\gamma, \delta\} + 1 < \kappa$, por lo que $|\,\text{máx}\{\gamma, \delta\} + 1| < \kappa$, luego el conjunto de la derecha tiene cardinal $< \kappa$, luego

$$|(\kappa \times \kappa)^{<}_{(\gamma,\delta)}| < \kappa.$$

Así pues, si llamamos $A = \kappa \times \kappa$, tenemos que para todo $a \in A$ el segmento inicial $A^{<}_{a}$ tiene cardinal menor que κ. Ahora consideramos el conjunto

$$F = \{f \in \mathcal{P}(A \times \kappa) \mid \bigvee a \in A \bigvee \alpha \in \kappa\ f : A^{<}_{a} \longrightarrow \alpha \text{ semejanza}\}.$$

La unicidad de las semejanzas (teorema 2.7) implica claramente que $f = \bigcup F$ es una semejanza de un subconjunto de A (que es unión de segmentos iniciales) y un ordinal $\leq \kappa$. Ahora bien, es fácil ver que una unión de segmentos iniciales de un conjunto bien ordenado es todo el conjunto A o bien un segmento inicial $A^{<}_{a}$. Vamos a descartar esta segunda posibilidad, es decir, supongamos que $f : A^{<}_{a} \longrightarrow \alpha$ semejanza, con $\alpha \leq \kappa$. Entonces $|\alpha| < \kappa$, luego $\alpha < \kappa$. Por otra parte es fácil ver que A no tiene un máximo elemento, luego a tiene un sucesor a' en A, y $f' = f \cup \{(a, \alpha)\} : A^{<}_{a'} \longrightarrow \alpha'$ sería una semejanza, luego $f' \in F$, luego $f' \subset f$, luego $a' \in A^{<}_{a}$, contradicción.

Esto prueba que $f : A \longrightarrow \alpha$, con $\alpha \leq \kappa$, pero como $\overline{\overline{\kappa}} \leq \overline{\overline{A}} = \overline{\overline{\alpha}}$, tiene que ser $\alpha)\kappa$, es decir, que $f : \kappa \times \kappa \longrightarrow \kappa$ biyectiva, en contra de lo supuesto. ■

De este modo, si κ es cualquier cardinal, finito o infinito, sabemos que $\kappa \times \kappa$ tiene cardinal (porque es finito o bien por el teorema anterior). Por consiguiente, si κ, μ son dos cardinales cualesquiera, como

$$\overline{\overline{\kappa \times \mu}} \leq \overline{\overline{\text{máx}\{\kappa, \mu\} \times \text{máx}\{\kappa, \mu\}}},$$

concluimos que $\kappa \times \mu$ también tiene cardinal, y esto justifica la definición siguiente:

Definición 3.11 Si κ y μ son dos cardinales, definimos $\kappa\mu = |\kappa \times \mu|$.

Hemos probado que si κ y μ son números naturales el producto que acabamos de definir coincide con el producto usual. Ahora también es obvio que si X e Y son conjuntos que tienen cardinal, entonces $X \times Y$ tiene cardinal y

$$|X \times Y| = |X||Y|.$$

El teorema anterior prueba que si κ es un cardinal infinito entonces $\kappa\kappa = \kappa$. Más en general, es fácil ver que si $1 \leq \kappa \leq \mu$ y μ es infinito, $\mu \leq \kappa\mu \leq \mu\mu = \mu$. Así pues:

Teorema 3.12 *Si κ y μ son cardinales no nulos y al menos uno de ellos es infinito, entonces $\kappa\mu = \text{máx}\{\kappa, \mu\}$.*

Ahora es obvio que si κ y μ son cardinales y $\nu = \text{máx}\{\kappa, \mu\}$, entonces

$$\overline{\overline{(\kappa \times \{0\}) \cup (\mu \times \{1\})}} \leq \overline{\overline{(\nu \times \{0\}) \cup (\nu \times \{1\})}} = \overline{\overline{\nu \times 2}},$$

luego $(\kappa \times \{0\}) \cup (\mu \times \{1\})$ tiene cardinal, y podemos definir:

Definición 3.13 Si κ y μ son dos cardinales, definimos

$$\kappa + \mu = |(\kappa \times \{0\}) \cup (\mu \times \{1\})|.$$

Hemos probado que esta suma extiende a la suma usual de números naturales. Ahora es evidente que si X e Y son conjuntos disjuntos con cardinal, entonces $X \cup Y$ tiene cardinal y $|X \cup Y| = |X| + |Y|$. Si no son necesariamente disjuntos podemos usar que $X \cup Y = X \cup (Y \setminus X)$ y concluir que $|X \cup Y| \leq |X| + |Y|$.

Teorema 3.14 *Si κ y μ son cardinales y al menos uno de ellos es infinito, entonces $\kappa + \mu = \text{máx}\{\kappa, \mu\}$.*

Demostración: Si llamamos $\nu = \text{máx}\{\kappa, \mu\}$, tenemos que

$$\nu \leq \kappa + \mu \leq \nu + \nu = \nu \cdot 2 = \nu.$$

■

Los teoremas siguientes requieren el axioma de elección:

Teorema 3.15 (AE) *Sea κ un cardinal infinito. Si un conjunto X tiene cardinal $\leq \kappa$ y todos sus elementos son conjuntos con cardinal $\leq \kappa$, entonces $|\bigcup X| \leq \kappa$.*

Demostración: Si $x \in X$, existe $f : \kappa \longrightarrow x$ suprayectiva, y entonces $f \in \mathcal{P}(\kappa \times \bigcup X)$, luego

$$\begin{aligned} F_x &= \{(x, f) \in \{x\} \times \mathcal{P}(\kappa \times \textstyle\bigcup X) \mid f : \kappa \longrightarrow x \text{ suprayectiva}\} \\ &\in \mathcal{P}(X \times \mathcal{P}(\kappa \times \bigcup X)), \end{aligned}$$

luego

$$\begin{gathered} \mathcal{F} = \{F \in \mathcal{P}(X \times \mathcal{P}(\kappa \times \textstyle\bigcup X)) \mid \bigvee x \in X \bigwedge f \in \mathcal{P}(\kappa \times \bigcup X) \\ ((x, f) \in F \leftrightarrow f : \kappa \longrightarrow x \text{ suprayectiva})\} \end{gathered}$$

es una familia de conjuntos no vacíos disjuntos dos a dos. El axioma de elección nos da un conjunto f que tiene un elemento en cada uno de los elementos de $\mathcal{F}$. Así, f es una función de dominio X y, para cada $x \in X$, $f_x : \kappa \longrightarrow x$ suprayectiva. Tomamos ahora $g : \kappa \longrightarrow X$ suprayectiva y definimos

$$h = \{(\alpha, \beta, u) \in \kappa \times \kappa \times \textstyle\bigcup X \mid u = f_{g(\alpha)}(\beta)\}.$$

Así $h : \kappa \times \kappa \longrightarrow \bigcup X$ suprayectiva y podemos componerla con una biyección entre κ y $\kappa \times \kappa$ para obtener una aplicación $h' : \kappa \longrightarrow \bigcup X$ suprayectiva. Asignando a cada elemento de $\bigcup X$ su mínima antiimagen por h' obtenemos una aplicación inyectiva de $\bigcup X$ en κ, que prueba que $|\bigcup X| \leq \kappa$. ■

Teorema 3.16 (AE) *Sea κ un cardinal infinito. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

a) Todo $X \subset \kappa$ con $|X| < \kappa$ está acotado en κ.

b) Si un conjunto X tiene cardinal $< \kappa$ y todos sus elementos son conjuntos con cardinal $< \kappa$, entonces $|\bigcup X| < \kappa$.

DEMOSTRACIÓN: a) $\Rightarrow$ b) Razonando de forma análoga al apartado anterior podemos elegir funciones f_x de modo que, para cada $x \in X$ existe un $\alpha \in \kappa$ tal que $f_x : \alpha \longrightarrow x$ biyectiva. Sea

$$F = \{(x, \alpha) \in X \times \kappa \mid \alpha = \mathcal{D}f_x\}.$$

Así $F : X \longrightarrow \kappa$ y si $Y = \mathcal{R}F$, tenemos que $|Y| \leq |X| < \kappa$, luego existe un $\delta \in \kappa$ tal que $Y \subset \delta$. Podemos suponer que $|X| < \delta$, luego $|X| \leq |\delta| < \kappa$ y todos los elementos de X tienen cardinal $\leq |\delta|$, luego por el teorema anterior $|\bigcup X| \leq |\delta| < \kappa$.

b) $\Rightarrow$ a) Si $\alpha \in X$, entonces $|\alpha| \leq \alpha < \kappa$, luego por b) tenemos que $\gamma = \bigcup X$ tiene cardinal $< \kappa$, luego $\gamma < \kappa$ y es una cota de X en κ. ■

Definición 3.17 Los cardinales infinitos que cumplen cualquiera de las condiciones del teorema anterior se llaman cardinales *regulares,* y los que no las cumplen se llaman *singulares.*

Del teorema 3.15 se sigue inmediatamente que todo cardinal sucesor es regular.

En M_0+AE no podemos definir la exponenciación de cardinales porque no podemos probar que el conjunto A^B tenga cardinal aunque A y B lo tengan. No obstante, es fácil probar que si $n \in \omega$ no es nulo y A tiene cardinal infinito, entonces $|A^n| = |A|$. Más aún, para todo conjunto A podemos definir

$$A^{<\omega} = \{s \in \mathcal{P}(\omega \times A) \mid \bigvee n \in \omega \; s : n \longrightarrow A\}$$

y el teorema 3.15 nos da que si A tiene cardinal infinito $|A^{<\omega}| = |A|$.

La formalización de la lógica En este apartado daremos indicaciones que deberían bastar al lector para convencerse de que en M_0+$\omega \in V$ se pueden formalizar sin dificultad los resultados básicos de la teoría de la demostración y la teoría de modelos.

Dado un conjunto A, para cada $s \in A^{<\omega}$ llamaremos *longitud* de s a $\ell(s) = \mathcal{D}s$. Es fácil definir la *concatenación* de dos sucesiones como

$$s^\frown t = s \cup \{(n, a) \in \omega \times A \mid \bigvee i \in \omega (i < \ell(t) \wedge n = \ell(s) + i \wedge a = t(i))\}.$$

También es inmediato que la definición de *lenguaje formal* (considerando que los signos de un lenguaje formal son números naturales) puede formalizarse en $\mathrm{M}_0 + \omega \in V$, de modo que, para cada lenguaje formal $\mathcal{L}$, podemos definir el conjunto de los términos y el conjunto de las fórmulas de $\mathcal{L}$.

Todas las definiciones necesarias se formalizan a través de fórmulas de clase Δ_0 porque todas las variables pueden acotarse por los parámetros ω, $\omega^{<\omega}$ y $(\omega^{<\omega})^{<\omega}$. Por ejemplo, el conjunto de fórmulas de $\mathcal{L}$ se define en la forma

$$\mathrm{Form}(\mathcal{L}) = \{\alpha \in \omega^{<\omega} \mid \bigvee s \in (\omega^{<\omega})^{<\omega} \bigvee n \in \omega(\ell(s) = n+1 \land s(n) = \alpha \land \bigwedge i \in \omega(i \leq n \rightarrow \cdots))\},$$

donde los puntos suspensivos representan las condiciones que ha de cumplir cada término $s(i)$ de la sucesión s. (Ha de ser un término de $\mathcal{L}$, o bien la concatenación con el negador de $\mathcal{L}$ de un elemento anterior de la sucesión, etc.)

Es claro que igualmente podemos definir el concepto de "deducción a partir de un conjunto de axiomas" y demostrar todos los resultados básicos de la teoría de la demostración. En particular podemos definir el lenguaje formal $\mathcal{L}$ de la teoría de conjuntos, así como los conjuntos de axiomas T, M_0, Z, ZFC etc.

Tampoco presenta ninguna dificultad definir los conceptos básicos de la teoría de modelos. En particular, para definir la relación $M \vDash \alpha[v]$, donde M es un modelo de un lenguaje formal $\mathcal{L}$ de universo U, $\alpha \in \mathrm{Form}(\mathcal{L})$ y $v \in U^{\mathrm{Var}(\mathcal{L})}$ es una valoración de $\mathcal{L}$ en M. Para ello definimos adecuadamente una función

$$F : \mathrm{Form}(\mathcal{L}) \times U^{\mathrm{Var}(\mathcal{L})} \longrightarrow 2,$$

de modo que $M \vDash \alpha[v] \leftrightarrow F(\alpha, v) = 1$, y la definición de F se hace por recursión sobre la relación bien fundada

$$(\beta, w)\, R\, (\alpha, v) \leftrightarrow \ell(\beta) < \ell(\alpha).$$

Equivalentemente, definimos $M \vDash \alpha[v]$ supuesto definido $M \vDash \beta[w]$ para toda fórmula β de longitud menor que la de α. Todos los conjuntos necesarios para detallar esta definición están definidos mediante fórmulas Δ_0 porque todas las variables se pueden acotar por los parámetros U, $\mathcal{P}U$, ω, $\omega^{<\omega}$, etc. ■

3.3 La teoría de Mac Lane

Finalmente consideramos la teoría completa de *Mac Lane* (MAC), cuyos axiomas son los que se indican en la tabla siguiente más el axioma de elección:

M_0	**Extensionalidad**	$\bigwedge xy(\bigwedge u(u \in x \leftrightarrow u \in y) \rightarrow x = y)$
	Par	$\bigwedge xy \bigvee z(x \in z \land y \in z)$
	Unión	$\bigwedge x \bigvee y \bigwedge u \in x \bigwedge v \in u\ v \in y$
	Partes	$\bigwedge x \bigvee y \bigwedge u(u \subset x \rightarrow u \in y)$
	Δ_0-especificación	$\bigwedge x \bigvee y \bigwedge u(u \in y \leftrightarrow u \in x \land \phi(u))$ $(*)$
$\mathrm{M}_0\mathrm{R}$	**Regularidad**	$\bigwedge x(x \neq \varnothing \rightarrow \bigvee y(y \in x \land x \cap y = \varnothing))$
M	**Infinitud**	$\bigvee X(\varnothing \in X \land \bigwedge n \in X\ n \cup \{n\} \in X)$

$(*)$ para toda fórmula ϕ (con posibles parámetros) de tipo Δ_0.

Observamos que el único axioma que no habíamos considerado hasta ahora es el axioma de regularidad, que equivale a que la relación de pertenencia está bien fundada en V. Como consecuencia, admitiendo el axioma de regularidad las fórmulas $x \in \Omega$ y $x \in \omega$ resultan ser equivalentes a fórmulas Δ_0, pues la única parte de la definición de ordinal o de número natural que no es equivalente a una fórmula Δ_0 es precisamente la buena fundación, que bajo el axioma de regularidad puede suprimirse porque todos los conjuntos están bien fundados.

Esto hace a su vez que el axioma de infinitud pueda presentarse de una forma ligeramente más relajada que $\omega \in V$. En efecto, al suponer la existencia de un conjunto X en las condiciones del axioma de infinitud dado en la tabla anterior, podemos considerar el conjunto

$$Y = \{n \in X \mid n \in \omega\}$$

(que es un conjunto porque la fórmula $n \in \omega$ es Δ_0, ya que mientras no tengamos que ω es un conjunto no podemos considerar la clase ω como parámetro). Aplicando el principio de inducción 1.13 5) obtenemos que $Y = \omega$, es decir, que $\omega \in V$.

Si extendemos la teoría M (MAC - AE) admitiendo el esquema de especificación para fórmulas arbitrarias, no necesariamente Δ_0, tenemos la *teoría de Zermelo* (Z), mientras que ZC = Z + AE.

Es conocido que el axioma de regularidad en ZFC impone una fuerte estructura en la clase universal, pues la descompone en la jerarquía transfinita

$$V = \bigcup_{\alpha \in \Omega} V_\alpha .$$

En MAC, e incluso en ZC, su efecto es mucho más débil, pues en ZC no puede probarse siquiera que todo conjunto pertenezca a un conjunto transitivo. Esta afirmación se convierte en un posible axioma para extender cualquiera de las dos teorías que estamos considerando:

Axioma de la clausura transitiva (CT) $\bigwedge x \bigvee T\ (\bigcup T \subset T \land x \in T)$

Notemos que es equivalente exigir $x \in T$ o $x \subset T$, pues en el segundo caso $T \cup \{T\}$ es un conjunto transitivo que tiene a x por elemento.

El nombre de "axioma de la clausura transitiva" se debe al hecho siguiente:

Teorema 3.18 ($\mathbf{M}_0$) *Se cumple:*

$$\mathrm{CT} \leftrightarrow \bigwedge x \overset{1}{\bigvee} y (\bigcup y \subset y \land x \subset y \land \bigwedge z (x \subset z \land \bigcup z \subset z \to y \subset z))$$

Demostración: Una implicación es trivial. Suponiendo CT, dado un conjunto x tomamos un conjunto transitivo T tal que $x \subset T$. Sea

$$y = \bigcap \{u \in \mathcal{P}T \mid x \subset u \land \bigwedge v \in u\ v \subset u\}.$$

Notemos que el conjunto es no vacío porque contiene a T. Es fácil ver que y es un conjunto transitivo que contiene a x y, si z es cualquier otro conjunto transitivo que contiene a x, lo mismo le sucede a $z \cap T$, pero $y \subset z \cap T \subset z$, por definición de y. La unicidad es obvia. ■

Esto nos permite definir la *clausura transitiva* de un conjunto x como

$$\mathrm{ct}\, x \equiv y \mid \bigcup y \subset y \wedge x \subset y \wedge \bigwedge z(x \subset z \wedge \bigcup z \subset z \rightarrow y \subset z).$$

En general, si X es cualquiera de las teorías que estamos considerando, representaremos por X^+ a la teoría X+Regularidad+CT. Así pues, en M_0^+ está definida la clausura transitiva de cualquier conjunto.

En M_0^+ tenemos la Δ_0-regularidad, es decir, que si $\phi(x)$ es una fórmula Δ_0 (con posibles parámetros), entonces

$$\bigvee x\ \phi(x) \rightarrow \bigvee x(\phi(x) \wedge \bigwedge y \in x\ \neg\phi(y)).$$

Equivalentemente, se cumple el principio de $\in$-inducción para fórmulas Δ_0:

$$\bigwedge x(\bigwedge y \in x\ \phi(y) \rightarrow \phi(x)) \rightarrow \bigwedge x \phi(x).$$

En efecto, tomamos x_0 tal que $\phi(x_0)$ y consideramos el conjunto

$$X = \{x \in \mathrm{ct}(x_0) \cup \{x_0\} \mid \phi(x)\},$$

que está bien definido porque ϕ es Δ_0. Tenemos que $X \neq \varnothing$, pues $x_0 \in X$. Por el axioma de regularidad existe un $x \in X$ tal que $x \cap X = \varnothing$. Así, si $y \in x$, tenemos que $y \in x \in \mathrm{ct}(x_0) \cup \{x_0\}$, luego $y \in \mathrm{ct}(x_0) \cup \{x_0\}$ y, como $y \notin X$, tiene que cumplir $\neg\phi(y)$. ■

El axioma CT sigue sin introducir ninguna estructura global en la clase de todos los conjuntos. Para obtener resultados globales necesitamos un axioma más fuerte:

Axioma H $\bigwedge u \bigvee T(\bigcup T \subset T \wedge \bigwedge z(\bigcup z \subset z \wedge \overline{\overline{z}} \leq \overline{\overline{u}} \rightarrow z \subset T)).$

Hemos dado este enunciado porque es el más simple a la hora de comprobar que H se cumple en un modelo, pero en realidad (sobre M_0), el axioma H es equivalente a un resultado conocido:

Teorema 3.19 (M_0+H) (Teorema del colapso de Mostowski) *Si R es una relación extensional y bien fundada en un conjunto X, existe un conjunto transitivo M y una biyección $\pi : X \longrightarrow M$ tal que*

$$\bigwedge xy \in X(x\, R\, y \leftrightarrow \pi(x) \in \pi(y)).$$

DEMOSTRACIÓN: Más precisamente, tomemos un conjunto arbitrario u, sea T el conjunto transitivo dado por el axioma H, supongamos que $\overline{\overline{X}} \leq \overline{\overline{u}}$ y veamos que se cumple el enunciado con un $M \subset T$. La prueba es una leve variante de la del teorema de recursión 3.4:

Diremos que f es una *aproximación* si

$$\bigvee A \in \mathcal{P}X(f : A \longrightarrow T \land \bigwedge x \in X \bigwedge y \in A(x\,R\,y \to x \in A) \land$$

$$\bigwedge x \in A \bigwedge t \in T(t = f(x) \to \bigwedge u \in T(u \in T \leftrightarrow \bigvee y \in A(y\,R\,x \land u = f(y)))))).$$

Hemos escrito la definición de esta forma para constatar que es Δ_0, por lo que existe el conjunto

$$I = \{f \in \mathcal{P}(X \times T) \mid f \text{ es una aproximación}\},$$

pero la parte final de la definición dice, más claramente, que

$$\bigwedge x \in A\ f(x) = \{f(y) \mid y \in A \land y\,R\,x\}.$$

Veamos que toda aproximación f es inyectiva. En caso contrario, el conjunto

$$N = \{x \in A \mid \bigvee y \in A(x \neq y \land f(x) = f(y))\}$$

es no vacío y tiene un elemento R-minimal x, es decir, un $x \in N$ tal que para todo $u \in X$ tal que $u\,R\,x$ se cumple que $u \notin N$. Explícitamente, existe un $y \in A$ de modo que $x \neq y$ pero $f(x) = f(y)$, pero si $u\,R\,x$ y $v \in A$ cumple $u \neq v$, entonces $f(u) \neq f(v)$.

Ahora bien, la igualdad $f(x) = f(y)$ significa que

$$\{f(u) \mid u \in A \land u\,R\,x\} = \{f(v) \mid v \in A \land v\,R\,y\}.$$

Por lo tanto, si $u\,R\,x$, existe un $v \in A$ tal que $v\,R\,y$ y $f(u) = f(v)$, luego $u = v$, luego $u\,R\,y$. Recíprocamente, si $v\,R\,y$ existe un $u \in A$ tal que $u\,R\,x$ y $f(u) = f(v)$, luego $u = v$, luego $v\,R\,x$. Como R es extensional, esto implica que $x = y$, contradicción.

Además $f[A]$ es un conjunto transitivo, pues si $u \in v \in f[A]$, entonces $v = f(x)$, para cierto $x \in A$, luego $u = f(y)$, para cierto $y \in A$ tal que $y\,R\,x$, luego $u \in f[A]$. También es claro que $\bigwedge xy \in A\ (x\,R\,y \leftrightarrow f(x) \in f(y))$.

Observemos ahora que si $f : A \longrightarrow T$ y $g : B \longrightarrow T$ son dos aproximaciones, entonces $f|_{A\cap B} = g|_{A\cap B}$. En efecto, podemos considerar el conjunto

$$D = \{x \in A \cap B \mid f(x) \neq g(x)\} \subset X.$$

Si no fuera vacío, existiría un elemento R-minimal, es decir, un $x \in D$ tal que si $y\,R\,x$ entonces $y \notin D$, luego $f(y) = g(y)$, pero entonces

$$f(x) = \{f(y) \mid y \in X \land y\,R\,x\} = \{f(y) \mid y \in A \cap B \land y\,R\,x\}$$

$$= \{g(y) \mid y \in A \cap B \land y\,R\,x\} = \{g(y) \mid y \in X \land y\,R\,x\} = g(x),$$

contradicción.

En consecuencia, $\pi = \bigcup I : A \longrightarrow T$ es una aproximación (para un cierto conjunto $A \subset X$) que extiende a todas las demás aproximaciones. Veamos que

$A = X$. En caso contrario, sea $x \in X \setminus A$ un elemento R-minimal. Esto significa que

$$D = \{u \in X \mid u\,R\,x\} \subset A$$

y podemos definir $F = \pi \cup \{(x, \pi[D])\} : A \cup \{x\} \longrightarrow \pi[D] \cup \{\pi[D]\}$. Si probamos que $\pi[D] \cup \{\pi[D]\} \subset T$ tendremos que F' es una aproximación estrictamente mayor que F, lo cual es absurdo. Pero, como $\pi[D]$ es transitivo, es claro que $\pi[D] \cup \{\pi[D]\}$ también lo es, y, como π es inyectiva,

$$\overline{\overline{\pi[D] \cup \{\pi[D]\}}} = \overline{\overline{A \cup \{x\}}} \leq \overline{\overline{X}} \leq \overline{\overline{u}},$$

luego $\pi[D] \cup \{\pi[D]\} \subset T$ porque T cumple el axioma H.

Asó pues, $\pi : X \longrightarrow T$ es una aproximación y cumple el enunciado con $M = \pi[X]$. ■

Más adelante demostraremos (cf. teorema 3.29) que el teorema de Mostowski es equivalente al axioma H. No obstante, la unicidad del colapso transitivo requiere el axioma de regularidad:

Teorema 3.20 ($\mathrm{M_0R}$) *Si dos conjuntos transitivos son isomorfos entonces son iguales y el isomorfismo es la identidad.*

Demostración: Sea $f : M \longrightarrow N$ un isomorfismo entre conjuntos transitivos, es decir, una biyección tal que $\bigwedge xy \in M(x \in y \leftrightarrow f(x) \in f(y))$. Esto equivale a que $\bigwedge x \in M\ f(x) = \{f(y) \mid y \in x\}$.

Queremos probar que el conjunto $\{x \in M \mid f(x) \neq x\}$ es vacío. En caso contrario, por el axioma de regularidad, tiene un elemento minimal x, de modo que si $y \in x$ entonces $f(y) = y$, pero entonces $f(x) = \{y \in x\} = x$, contradicción. ■

Como caso particular del teorema de Mostowski tenemos:

Teorema 3.21 ($\mathrm{M_0}$+H) *Todo conjunto bien ordenado es semejante a un único ordinal.*

Demostración: Si $(A, \leq)$ es un conjunto bien ordenado, entonces $<$ es una relación extensional y bien fundada en A, por lo que podemos considerar su colapso transitivo $\pi : (A, <) \longrightarrow M$. Es fácil ver que M es un ordinal y que $\pi : (A, \leq) \longrightarrow (M, \leq)$ es una semejanza. La unicidad se debe a que dos ordinales son uno un segmento inicial del otro, luego no pueden ser isomorfos. ■

En $\mathrm{M_0}$ nada impide que $K = \omega \cup \{\omega\}$. Sin embargo, al suponer H podemos probar el teorema siguiente, que en realidad es consecuencia inmediata de 3.3, aunque vamos a dar una prueba directa más breve:

Teorema 3.22 ($\mathrm{M_0}$+H) $\bigwedge \kappa \in K \bigvee \mu \in K\ \kappa < \mu.$

DEMOSTRACIÓN: Sea κ un cardinal, que podemos tomar infinito, y sea T el conjunto dado por el axioma H para $u = \kappa$. Definimos $\theta = T \cap \Omega$, que es un conjunto transitivo de ordinales, luego $\theta \in \Omega$, y $\kappa \leq \theta$, pues $\kappa \subset T$. Si $\overline{\overline{\theta}} \leq \overline{\overline{\kappa}}$, entonces también $\overline{\overline{\theta + 1}} \leq \overline{\overline{\kappa}}$, luego $\theta + 1 \subset T$, luego $\theta \in \theta$, contradicción. Así pues, existen ordinales de cardinal mayor que κ, y el menor de todos ellos es un cardinal mayor que κ. ■

3.4 La consistencia de CT+H

En esta sección demostraremos (entre otras cosas) que si MAC es consistente, también lo es MAC$^+$+H. Trabajamos en M$_0$.

Consideremos la clase de las relaciones extensionales bien fundadas, es decir:

$$\mathrm{EBF} = \{(a, r) \mid r \text{ es una relación extensional y bien fundada en } a\}.$$

Si $(a, r) \in \mathrm{EBF}$ y $\alpha, \beta \in a$, escribiremos $\alpha \in_r \beta \equiv (\alpha, \beta) \in r$.

Dados $(a, r), (b, s) \in \mathrm{EBF}$, diremos que $\phi : (a, r) \longrightarrow (b, s)$ es un *isomorfismo parcial* si ϕ es una aplicación de un subconjunto de a en un subconjunto de b de modo que

a) $\bigwedge \alpha\beta \in a(\alpha \in_r \beta \land \beta \in \mathcal{D}\phi \rightarrow \alpha \in \mathcal{D}\phi \land \phi(\alpha) \in_s \phi(\beta))$

b) $\bigwedge \beta \in a \bigwedge \delta \in b(\beta \in \mathcal{D}\phi \land \delta \in_s \phi(\beta) \rightarrow \bigvee \alpha \in a(\alpha \in_r \beta \land \phi(\alpha) = \delta)$.

Es fácil comprobar que la fórmula "$\phi : (a, r) \longrightarrow (b, s)$ es un isomorfismo parcial" es Δ_0. En particular, si (a, r), $(b, s) \in \mathrm{EBF}$, existe el conjunto $\mathrm{IP}(a, r, b, s)$ de los isomorfismos parciales de (a, r) en (b, s), pues es un subconjunto Δ_0 de $\mathcal{P}(a \times b)$.

También es fácil ver que todo isomorfismo parcial ϕ es inyectivo. En efecto, en caso contrario podemos considerar el conjunto no vacío

$$\{\alpha \in a \mid \bigvee \alpha' \in a(\alpha \neq \alpha' \land \alpha, \alpha' \in \mathcal{D}\phi \land \phi(\alpha) \neq \phi(\alpha'))\}$$

(notemos que la fórmula que lo define es Δ_0). Como r está bien fundada en a, podemos tomar un α r-minimal en dicho conjunto. Vamos a probar que $\alpha = \alpha'$, con lo que tendremos una contradicción. Para ello usaremos la extensionalidad de r. Dado $\beta \in_r \alpha$, tenemos que $\phi(\beta) \in_s \phi(\alpha) = \phi(\alpha')$, luego existe un $\beta' \in a$ tal que $\beta' \in_r \alpha'$ y $\phi(\beta) = \phi(\beta')$, luego $\beta = \beta'$ por la minimalidad de α, luego $\beta \in_r \alpha'$. Similarmente se prueba que si $\beta' \in_r \alpha'$, entonces $\beta' \in_r \alpha$, luego por extensionalidad $\alpha = \alpha'$. ■

Veamos ahora que dos isomorfismos parciales $\phi, \psi : (a, r) \longrightarrow (b, s)$ coinciden en su dominio común.

Para ello consideramos el conjunto

$$\{\alpha \in a \mid \alpha \in \mathcal{D}\phi \land \mathcal{D}\psi \land \phi(\alpha) \neq \psi(\alpha)\},$$

claramente bien definido por Δ_0-especificación. Hay que probar que es vacío. En caso contrario podemos tomar un elemento α que sea r-minimal.

Si $\delta \in_s \phi(\alpha)$, existe un $\beta \in_r \alpha$ tal que $\phi(\beta) = \delta$, pero $\psi(\beta) = \phi(\beta) = \delta$ por la minimalidad de α, luego $\delta \in_s \psi(\alpha)$, e igualmente se prueba la implicación opuesta. Por extensionalidad concluimos que $\phi(\alpha) = \psi(\alpha)$, contradicción. ■

Como consecuencia, si (a, r), $(b, s) \in F_1$, resulta que

$$\Phi_{(a,r)(b,s)} = \bigcup \mathrm{IP}(a, r, b, s)$$

es un isomorfismo parcial, el mayor isomorfismo parcial de (a, r) en (b, s).

Es claro que $\Psi_{(a,r)(a,r)}$ es la identidad en a, así como que

$$\Psi^{-1}_{(a,r)(b,s)} = \Psi_{(b,s)(a,r)}, \qquad \Psi_{(a,r)(b,s)} \circ \Psi_{(b,s)(c,t)} \subset \Psi_{(a,r)(c,t)}.$$

Ahora consideramos la clase

$$W = \{(\alpha, a, r) \mid (a, r) \in \mathrm{EBF} \land \alpha \in a\},$$

sobre la cual consideramos las relaciones dadas por las formulas

$$(\alpha, a, r) \sim (\beta, b, s) \equiv \alpha \in \mathcal{D}\Psi_{(a,r)(b,s)} \land \Psi_{(a,r)(b,s)}(\alpha) = \beta,$$

$$(\alpha, a, r)\, E\, (\beta, b, s) \equiv \alpha \in \mathcal{D}\Psi_{(a,r)(b,s)} \land \Psi_{(a,r)(b,s)}(\alpha) \in_s \beta.$$

Es inmediato comprobar que $\sim$ determina una relación de equivalencia en la clase W. Veamos que E es compatible con dicha relación, en el sentido de que si $(\alpha_1, a_1, r_1) \sim (\alpha_2, a_2, r_2)$ y $(\beta_1, b_1, s_1) \sim (\beta_2, b_2, s_2)$, entonces

$$(\alpha_1, a_1, r_1) \sim (\beta_1, b_1, s_1) \leftrightarrow (\alpha_2, a_2, r_2)\, E\, (\beta_1, b_2, s_2).$$

Por una parte,

$$(\alpha_1, a_1, r_1)\, E\, (\beta_1, b_1, s_1) \sim (\beta_2, b_2, s_2) \to (\alpha_1, a_1, r_1)\, E\, (\beta_2, b_2, s_2).$$

En efecto, lo que tenemos es que

$$\alpha_1 \in \mathcal{D}\Psi_{(a_1,r_1)(b_1,s_1)} \land \Psi_{(a_1,r_1)(b_1,s_1)}(\alpha_1) \in_{s_1} \beta_1$$

$$\land\, \beta_1 \in \mathcal{D}\Psi_{(b_1,s_1)(b_2,s_2)} \land \Psi_{(b_1,s_1)(b_2,s_2)}(\beta_1) = \beta_2,$$

luego, aplicando $\Psi_{(b_1,s_1)(b_2,s_2)}$ llegamos a que

$$\Psi_{(a_1,r_1)(b_2,s_2)}(\alpha_1) \in_{s_2} \Psi_{(b_1,s_1)(b_2,s_2)}(\beta_1) = \beta_2,$$

y esto significa que $(\alpha_1, a_1, r_1)\, E\, (\beta_2, b_2, s_2)$. Un argumento similar prueba que

$$(\alpha_1, a_1, r_1) \sim (\alpha_2, a_2, r_2)\, E\, (\beta_1, b_1, s_2) \to (\alpha_1, a_1, r_1)\, E\, (\beta_1, b_1, s_1),$$

y de la combinación de estos dos casos se sigue el caso general. ■

Observemos que, en definitiva, la relación $(\alpha, a, r)\, E\, (\beta, b, s)$ equivale a que existe un $\alpha' \in b$ tal que $(\alpha, a, r) \sim (\alpha', b, s) \wedge \alpha' \in_s \beta$.

La idea es demostrar que la "clase cociente" de W respecto a la relación de equivalencia $\sim$ con la relación inducida por E es un modelo de $\mathrm{M_0R}$ + H, pero no estamos en condiciones de definir tal clase cociente, porque las clases de equivalencia son clases propias y en $\mathrm{M_0}$ no podemos seleccionar una clase de representantes, o una clase de conjuntos de representantes de cada clase de equivalencia. Lo máximo que podemos hacer es definir una relativización débil de fórmulas en la que el igualador se sustituye por la relación $\sim$:

Definición 3.23 Para cada fórmula metamatemática ϕ, llamaremos ϕ^* a la fórmula que resulta de sustituir $\in$ por E, $=$ por $\sim$ y acotar todos los cuantificadores por W.

Una comprobación rutinaria muestra que las relativizaciones en este sentido de los axiomas lógicos son teoremas de $\mathrm{M_0}$. Demostraremos que las relativizaciones de los axiomas de $\mathrm{M_0^+}$ + H también son teoremas de $\mathrm{M_0}$, y así podremos concluir que la relativización de todo teorema de $\mathrm{M_0^+}$ + H es un teorema de $\mathrm{M_0}$, lo cual probará la consistencia de $\mathrm{M_0^+}$ + H relativa a la de $\mathrm{M_0}$.

Empezamos demostrando la relativización del axioma de extensionalidad, es decir, suponemos que para todo $(\alpha, a, r) \in W$ se cumple que

$$(\alpha, a, r)\, E\, (\beta, b, s) \leftrightarrow (\alpha, a, r)\, E\, (\gamma, c, t)$$

y hemos de probar que $(\beta, b, s) \sim (\gamma, c, t)$.

Si $\alpha \in_s \beta$, entonces $(\alpha, b, s)\, E\, (\beta, b, s)$, luego $(\alpha, b, s)\, E\, (\gamma, c, t)$, de modo que $\Psi_{(b,s)(c,t)}(\alpha) \in_t \gamma$. En particular, todo $\alpha \in_s \beta$ está en $\mathcal{D}\Psi_{(b,s)(c,t)}$.

Por otra parte, si $\delta \in_t \gamma$, entonces $(\delta, c, t)\, E\, (\gamma, c, t)$, luego $(\delta, c, t)\, E\, (\beta, b, s)$, luego $\delta \in \mathcal{D}\Psi^{-1}_{(b,s)(c,t)}$ y $\Psi^{-1}_{(b,s)(c,t)}(\delta) \in_s \beta$.

En otras palabras, hemos probado que $\Psi_{(b,s)(c,t)}$ biyecta los $\alpha \in_s \beta$ con los $\delta \in_t \gamma$. Esto hace que si $\beta \in \mathcal{D}\Psi_{(b,s)(c,t)}$, necesariamente $\Psi_{(b,s)(c,t)}(\beta) = \gamma$, pues $\Psi_{(b,s)(c,t)}(\beta)$ es un elemento de c con la misma extensión que γ. Recíprocamente, si $\gamma \in \mathcal{D}\Psi^{-1}_{(b,s)(c,t)}$ necesariamente $\Psi^{-1}_{(b,s)(c,t)}(\gamma) = \beta$.

Más aún, si $\beta \notin \mathcal{D}\Psi_{(b,s)(c,t)}$ (y, consecuentemente, $\gamma \notin \mathcal{D}\Psi^{-1}_{(b,s)(c,t)}$), entonces $\Psi_{(b,s)(c,t)} \cup \{(\beta, \gamma)\}$ sería un isomorfismo parcial que extendería a $\Psi_{(b,s)(c,t)}$, en contra de la maximalidad de éste. Así pues, concluimos que $\Psi_{(b,s)(c,t)}(\beta) = \gamma$, lo que prueba que $(\beta, b, s) \sim (\gamma, c, t)$. ∎

Ahora probamos lo siguiente:

Teorema 3.24 *Para todo conjunto* $A \subset \mathrm{EBF}$ *existe* $(b, s) \in \mathrm{EBF}$ *tal que para todo* $(a, r) \in A$ *y todo* $\alpha \in a$ *existe un* $\beta \in b$ *tal que* $(\alpha, a, r) \sim (\beta, b, s)$.

Demostración: Observemos que si $x, y \in W$, se cumple que

$$\begin{aligned} x \sim y \leftrightarrow \bigvee \alpha a r \beta b s (x = (\alpha, a, r) \wedge y = (\beta, b, s) \\ \wedge \bigvee f (f \in \mathrm{IP}(a, r, b, s) \wedge (\alpha, \beta) \in f)) \end{aligned}$$

Ya hemos observado que la fórmula $f \in \mathrm{IP}(a, r, b, s)$ es Δ_0. Las seis primeras variables de la fórmula anterior pueden acotarse. Por ejemplo, podríamos haber escrito

$$\bigvee \alpha aruvw(u \in x \land \alpha \in u \land v \in u \land w \in v \land a \in w \land r \in w \land \cdots)$$

El único cuantificador que no puede acotarse es $\bigvee f$ (que podríamos cambiar equivalentemente por $\bigwedge f$). La situación es análoga para la fórmula $x\,E\,y$, por lo que ambas son Δ_1. Ahora bien, si consideramos un conjunto $A \subset \mathrm{EBF}$, podemos formar el conjunto

$$B = \{(\alpha, a, r) \mid (a, r) \in A \land \alpha \in a\},$$

que está bien definido, pues podríamos por Δ_0-especificación como subconjunto[3] de $(\bigcup^3 A) \times A$. Además, si (a, r), $(b, s) \in A$, resulta que todo isomorfismo parcial $f : (a, r) \longrightarrow (b, s)$ es un elemento de $\mathcal{P}(\bigcup^3 A \times \bigcup^3 A)$, luego las relaciones $x \sim y$ y $x\,E\,y$, para $x, y \in B$, son equivalentes a fórmulas Δ_0, luego existen los conjuntos

$$I_B = \{(x, y) \in B \times B \mid x \sim y\}, \quad E_B = \{(x, y) \in B \times B \mid x\,E\,y\}.$$

Claramente I_B es una relación de equivalencia en B, luego podemos definir el conjunto cociente $b = B/I_B$, por Δ_0-especificación a partir de $\mathcal{P}\mathcal{P}B$. Más aún, la relación E_B induce una relación $s \subset b \times b$, definida por Δ_0-especificación a partir de $\mathcal{P}(b \times b)$.

El hecho de que E sea extensional implica que s es extensional en b. En efecto, si dos clases $[\alpha_1, a_1, r_1]$, $[\alpha_2, a_2, r_2] \in b$ tienen la misma extensión respecto a s, entonces, si $(\gamma, c, t) \in W$ cumple $(\gamma, c, t)\,E\,(\alpha_1, a_1, r_1)$ y $\Psi_{(c,t)(a_1,r_1)}(\gamma) = \delta$, entonces claramente $[\delta, a_1, r_1]\,s\,[\alpha_1, a_1, r_1]$, luego $[\delta, a_1, r_1]\,s\,[\alpha_2, a_2, r_2]$, y también $\Psi_{(a_1,r_1)(a_2,r_2)}(\delta) \in_{r_2} \alpha_2$, luego $\Psi_{(c,t)(a_2,r_2)}(\gamma) \in_{r_2} \alpha_2$, luego concluimos que $(\gamma, c, t)\,E\,(\alpha_2, a_2, r_2)$, e igualmente se comprueba la implicación contraria. Por consiguiente, (α_1, a_1, r_1) y (α_2, a_2, r_2) tienen la misma extensión en W y esto implica que $(\alpha_1, a_1, r_1) \sim (\alpha_2, a_2, r_2)$, luego $[\alpha_1, a_1, r_1] = [\alpha_2, a_2, r_2]$.

Veamos ahora que s está bien fundada. Para ello tomamos $X \subset b$ no vacío y sea $[\alpha_0, a, r] \in X$. Sea $P = \{\alpha \in a \mid [\alpha, a, r] \in X\}$, que claramente existe por Δ_0-especificación. Como $\alpha_0 \in P$, tenemos que P no es vacío, luego tiene un r-minimal α_1. Así $[\alpha_1, a, r] \in X$ y vamos a probar que es s-minimal. En efecto, si existe $[\delta, c, t] \in X$ tal que $[\delta, c, t]\,s\,[\alpha_1, a, r]$, entonces $\alpha_2 = \Psi_{(c,t)(a,r)}(\delta) \in_r \alpha_1$ y $(\alpha_2, a, r) \sim (\delta, c, t)$, luego $[\alpha_2, a, r] = [\delta, c, t] \in X$, luego $\alpha_2 \in P$ contradice la minimalidad de α_1.

Con esto tenemos probado que $(b, s) \in \mathrm{EBF}$ y claramente cumple lo pedido, sin más que tomar $\beta = [\alpha, a, r]$. ■

Como primera aplicación demostramos que la relación E está bien fundada en la clase W, en el sentido de que todo subconjunto no vacío $C \subset W$ tiene un elemento minimal.

[3]Entendemos que $(\alpha, a, r) = (\alpha, (a, r))$.

En efecto, llamamos $A = \{(a, r) \mid \bigvee\alpha\ (\alpha, a, r) \in C\}$, que está bien definido por Δ_0-especificación porque la variable α se puede acotar por $\bigcup^2 C$. Además $A \neq \varnothing$. Sea $(b, s) \in \mathrm{EBF}$ el par construido en el teorema anterior y sea

$$C' = \{\beta \in b \mid \bigvee x \in C\ x \sim (\beta, b, s)\} \neq \varnothing.$$

Sea $\beta \in C'$ un elemento s-minimal y sea $(\alpha, a, r) \in C$ tal que $(\alpha, a, r) \sim (\beta, b, s)$. Entonces (α, a, r) es un E-minimal de C, pues si existe $(\delta, c, t) \in C$ tal que $(\delta, c, t)\, E\, (\alpha, a, r)$ entonces $(c, t) \in A$ y $\delta \in c$, luego por el teorema anterior existe un $\beta' \in b$ tal que $(\delta, c, t) \sim (\beta', b, s)$, luego $\beta' \in C'$ y, puesto que $(\beta', b, s)\, E, (\beta, b, s)$, también $\beta'\, s\, \beta$, en contradicción con la minimalidad de β. ■

De aquí se sigue inmediatamente la relativización del axioma de regularidad: si $(\alpha, a, r) \in W$ no es vacío*, existe un $\beta \in a$ tal que $\beta \in_r \alpha$. Si lo tomamos de modo que sea r-minimal del conjunto $\{\beta \in a \mid \beta \in_r \alpha\}$, entonces (β, a, r) es E-minimal para (α, a, r).

En efecto, si existe un $x \in W$ tal que $x\, E\, (\alpha, a, r)$ y $x\, E\, (\beta, a, r)$, entonces $x = (\gamma, a, r)$, donde $\gamma \in_r \alpha$, $\gamma \in_r \beta$, en contra de la minimalidad de β. ■

Veamos otra aplicación del teorema 3.24:

Teorema 3.25 *Si $x_1, \ldots, x_n \in W$, existen $(b, s) \in \mathrm{EBF}$ y $\beta_1, \ldots, \beta_n \in b$ tales que $x_i \sim (\beta_i, b, s)$ y, en estas condiciones, si $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ es una fórmula Δ_0, se cumple*

$$\phi^*(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \phi^{bs}(\beta_1, \ldots, \beta_n),$$

donde ϕ^{bs} es la relativización de ϕ que resulta de sustituir $\in$ por s y acotar todas las variables ligadas por b.

DEMOSTRACIÓN: En principio, $x_1 = (\alpha_1, a_1, r_1), \ldots, x_n = (\alpha_n, a_n, r_n)$. Aplicamos el teorema 3.24 al conjunto $A = \{(a_1, r_1), \ldots, (a_n, r_n)\}$, que nos da el par (b, s) y los β_i en las condiciones del enunciado. Para probar la segunda parte demostramos, más en general, que si $\phi(x_1, \ldots, x_m)$ es cualquier fórmula Δ_0 (con cualquier número de variables libres) entonces

$$\bigwedge \alpha_1 \cdots \alpha_m \in b(\phi^*((\alpha_1, b, s), \ldots, (\alpha_m, b, s)) \leftrightarrow \phi^{bs}(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)).$$

En estos términos, la prueba es inmediata por inducción sobre la longitud de ϕ. ■

Ya hemos probado los axiomas de extensionalidad y regularidad. Las relativizaciones de los axiomas restantes las obtendremos aplicando sistemáticamente el teorema siguiente:

Teorema 3.26 *Sean $(a, r) \in F_1$ y $B \subset \mathcal{P}a$ tales que $a \cap B = \varnothing$. Entonces existe un par $(c, s) \in \mathrm{EBF}$ de modo que:*

a) $a \subset c$.

b) $\bigwedge \alpha \in a\ (\alpha, a, r) \sim (\alpha, c, s)$.

c) $\bigwedge \alpha_1\alpha_2 \in a(\alpha_1 \in_r \alpha_2 \leftrightarrow \alpha_1 \in_t \alpha_2)$.

d) Para todo $x \in B$ existe un $x' \in c$ cuya s-extensión es x.

DEMOSTRACIÓN: Para cada $x \in B$, llamaremos α_x (si existe) al único $\alpha_x \in a$ tal que

$$\bigwedge \beta \in a\,(\beta \in x \leftrightarrow \beta \in_r \alpha_x).$$

La unicidad se debe a la extensionalidad de r y si $x, y \in B$ cumplen que existen $\alpha_x = \alpha_y$ entonces $x = y$, por el axioma de extensionalidad. Llamemos

$$B' = \{x \in B \mid \alpha_x \text{ no existe}\},$$

que existe por Δ_0-especificación a partir de B. Definimos $c = a \cup B'$, donde la unión es disjunta. Definimos una relación s en c mediante

$$\alpha\, s\, \beta \leftrightarrow (\alpha, \beta \in a \wedge \alpha \in_r \beta) \vee (\alpha \in a \wedge \beta \in B' \wedge \alpha \in \beta).$$

Notemos que no puede ocurrir a la vez que $\beta \in a$ y $\beta \in B'$ porque estamos suponiendo que $a \cap B = \varnothing$.

Veamos que $(c, s) \in$ EBF. Para comprobar la extensionalidad suponemos que $\beta, \beta' \in c$ tienen la misma extensión respecto de s. Si $\beta \in a$, entonces $\{\alpha \in c \mid \alpha\, s\, \beta\} = \{\alpha \in a \mid \alpha \in_r \beta\}$, mientras que si $\beta \in B'$ tenemos que $\{\alpha \in c \mid \alpha\, s\, \beta\} = \{\alpha \in a \mid \alpha \in \beta\} = \beta$. Por lo tanto, si $\beta, \beta' \in a$ o $\beta, \beta' \in B'$, tenemos que $\beta = \beta'$ por la extensionalidad de r o trivialmente. Si $\beta \in a$ y $\beta' \in B'$, entonces $\beta = \alpha_{\beta'}$, en contra de la definición de B'.

Falta probar que (c, s) está bien fundado. Para ello tomamos $z \subset a \cup B'$ no vacío. Si $z \cap a \neq \varnothing$, entonces podemos tomar en él un r-minimal α. Entonces no puede existir un $x \in z$ tal que $x\, s\, \alpha$, pues tendríamos que $x \in z \cap a$ y $x \in_r \alpha$, en contradicción con la minimalidad de α. Por lo tanto α también es s-minimal para z. Si $z \cap a = \varnothing$, todo elemento de z es s-minimal.

Así, $(c, s) \in$ EBF y, para cada $\beta \in c$, o bien $\beta \in a$ y $(\beta, c, s) \sim (\beta, a, r)$, o bien $\beta \in B'$ y su extensión en s coincide con β. Si $x \in B \setminus B'$ entonces $x' = \alpha_x \in c$ tiene extensión x. (Observemos que la propiedad c) es consecuencia inmediata de b).) ■

Nota: Aunque el teorema anterior exige como hipótesis que $a \cap B = \varnothing$, vamos a probar ahora que siempre podemos construir objetos $\bar{a}$ y $\bar{B}$ en situación análoga pero que además cumplen $\bar{a} \cap \bar{B} = \varnothing$.

Para ello tomamos $\tau \notin a \cup \bigcup\bigcup a$. Existe τ, incluso sin suponer el axioma de regularidad pues, para todo conjunto z, el conjunto $\{x \in z \mid x \notin x\}$ no puede pertenecer a z.

Así, $\bigwedge \alpha \in a\ (\tau, \alpha) \notin a$. Para cada $b \subset a$, sea $\bar{b} = \{(\tau, \alpha) \mid \alpha \in b\}$, que es un conjunto, pues se define por Δ_0-especificación desde $\{\tau\} \times b$. Por la elección de τ tenemos también que $a \cap \bar{a} = \varnothing$.

Sea $\bar{r} = \{((\tau, \alpha), (\tau, \beta)) \mid (\alpha, \beta) \in r\}$, $\bar{B} = \{\bar{b} \mid b \in B\}$. Así $\bar{r}$ es un conjunto definido por Δ_0-selección desde $\bar{a} \times \bar{a}$ y $\bar{B}$ es un conjunto definido por Δ_0-especificación desde $\mathcal{P}(\{\tau\} \times a)$. En particular $\bar{B} \subset \mathcal{P}\bar{a}$.

Veamos ahora que $\bar{a} \cap \bar{B} = \varnothing$. Si $x \in \bar{a} \cap \bar{B}$, entonces $x = (\tau, \xi) = \bar{b}$ para cierto $\xi \in a$ y cierto $b \in B$. Ahora bien, $(\tau, \xi) = \{\{\tau\}, \{\tau, \xi\}\} = \bar{b}$ implica que $\{\tau\} = (\tau, \alpha) = \{\{\tau\}, \{\tau, \alpha\}\}$, para cierto $\alpha \in b$, lo que exige en particular que $\tau = \alpha \in b \subset a$, contradicción.

Así pues, $\Psi_{(a,r)(\bar{a},\bar{r})} : (a, r) \longrightarrow (\bar{a}, \bar{r})$ está definido sobre todo a y hace corresponder B con $\bar{B}$. Dejamos a cargo del lector comprobar que cada vez que apliquemos el teorema anterior siempre es posible realizar esta sustitución para garantizar la hipótesis $a \cap B = \varnothing$. ■

Seguidamente probamos la relativización del axioma de Δ_0-especificación. Para ello fijamos una fórmula $\phi(u, x_1, \ldots, x_n)$ y unos objetos $x, x_1, \ldots, x_n \in W$. Hemos de probar que

$$\bigvee z \in W \bigwedge u \in W_1 (u\, E\, z \leftrightarrow u\, E\, x \land \phi^*(u, x_1, \ldots, x_n)).$$

Por el teorema 3.25, existe un par $(b, s) \in F_1$ tal que

$$x = (\beta, b, s), x_1 = (\beta_1, b, s), \ldots, x_n = (\beta_n, b, s).$$

El conjunto

$$I = \{\gamma \in b \mid \gamma \in_s \beta \land \phi^*((\gamma, b, s), (\beta_1, b, s), \ldots, (\beta_n, b, s))\}$$

está bien definido pues, según 3.25, puede definirse por Δ_0-especificación en la forma equivalente

$$I = \{\gamma \in b \mid \gamma \in_s \beta \land \phi^{bs}(\gamma, \beta_1, \ldots, \beta_n)\}.$$

Ahora aplicamos el teorema anterior al par (b, s) y a $B = \{I\}$. Así obtenemos un par (c, t) de modo que $b \subset c$ y existe un $\delta \in c$ cuya t-extensión es I, es decir,

$$\bigwedge \gamma \in c(\gamma \in_t \delta \leftrightarrow \gamma \in_t \beta \land \phi^*((\gamma, c, t), (\beta_1, c, t), \ldots, (\beta_n, c, t))).$$

Claramente esto equivale a que

$$\bigwedge u \in W(u\, E\, (\delta, c, t) \leftrightarrow u\, E\, x \land \phi^*(u, x_1, \ldots, x_n)),$$

luego $z = (\delta, c, t)$ es en W el conjunto definido por ϕ y los parámetros dados. ■

Nota Si en lugar de trabajar en M_0 trabajamos en M_0 más el esquema de especificación completo, es decir, sin restringirlo a fórmulas Δ_0, entonces tenemos de forma inmediata que I es un conjunto bien definido por especificación, y concluimos que W cumple también el esquema de especificación completo. ■

En particular tenemos que W cumple los axiomas del conjunto vacío y de la diferencia, pues son casos particulares de Δ_0-especificación.

Para probar el axioma del par tomamos $(\alpha_1, a_1, r_1), (\alpha_2, a_2, r_2) \in W$ y consideramos el conjunto $A = \{(a_1, r_1), (a_2, r_2)\}$, a partir del cual formamos el conjunto (b, s) dado por 3.24, de modo que existen β_1, $\beta_2 \in b$ tales que $(\alpha_i, a_i, r_i) \sim (\beta_i, b, s)$. Si existe un $\beta \in b$ cuya s-extensión sea $\{\beta_1, \beta_2\}$, entonces (β, b, s) cumple el axioma del par. En caso contrario aplicamos el teorema 3.26 a (b, s) y $B = \{\{\beta_1, \beta_2\}\}$, lo que nos da un par $(c, t) \in F_1$ tal que la t-extensión de $(\{\beta_1, \beta_2\}, c, t)$ es $\{\beta_1, \beta_2\}$ y, por consiguiente, es en W el par de los objetos dados. ■

Para probar el axioma de la unión partimos de $(\alpha, a, r) \in W$ y aplicamos el teorema 3.26 a (a, r) y a $B = \{\{\delta \in a \mid \bigvee \gamma \in a(\delta \in_r \gamma \in_r \alpha)\}\}$, lo que nos da un par (b, s) tal que existe $\beta \in b$ tal que

$$\bigwedge \delta \in b(\delta \in_s \beta \leftrightarrow \bigvee \gamma \in b(\delta \in_s \gamma \in_s \alpha)).$$

Esto equivale a

$$\bigwedge u \in W(u\, E\, (\beta, b, s) \leftrightarrow \bigvee v(v\, E\, (\alpha, a, r) \land u\, E\, v)),$$

luego (β, b, s) es la unión de (α, a, r). ■

Para probar el axioma de partes tomamos $(\alpha, a, r) \in W$ y aplicamos el teorema 3.26 al par (a, r) y al conjunto

$$B = \{x \in \mathcal{P}a \mid x \subset \{\delta \in a \mid \delta \in_r \alpha\}\}.$$

Así obtenemos un par (b, s) tal que todo subconjunto de (α, a, r) en W es de la forma (β, b, s), para cierto $\beta \in b$, aunque puede haber elementos de esta forma que sean elementos de (α, a, r) pero no subconjuntos. Por ello, a continuación aplicamos de nuevo el teorema 3.26 al par (b, s) y al conjunto

$$B' = \{\{\beta \in b \mid \bigwedge \gamma \in b(\gamma \in_s \beta \rightarrow \gamma \in_s \alpha)\}\}.$$

Así obtenemos un par (b', s') tal que existe $\beta' \in b'$ cuya extensión está formada por los $\beta \in b$ que representan subconjuntos de (α, a, r). Es claro entonces que (β', b', s') satisface el axioma de partes. ■

Con esto tenemos probado que W satisface todos los axiomas de $\mathrm{M_0R}$.

La prueba de CT es sencilla: dado un $(\alpha, a, r) \in W$ aplicamos el teorema 3.26 al par (a, r) y a $B = \{a\}$. Así obtenemos un par $(b, s) \in F_1$ y un $\beta \in b$ cuya extensión es a. En particular $(\alpha, a, r)\, E\, (\beta, b, s)$ y (β, b, s) es transitivo*, pues si $x \in W$ cumple $x\, E, (\beta, b, s)$, entonces $x = (\alpha, b, s)$, para cierto $\alpha \in b$ tal que $\alpha \in_s \beta$, luego $\alpha \in a$ y todo $y \in W$ que cumpla $y\, E\, x$ es de la forma (δ, a, r), para cierto $\delta \in_r \alpha$, pero entonces $(\delta, a, r) \sim (\delta, b, s)\, E\, (\beta, b, s)$. ■

Para probar el axioma H demostramos primero lo siguiente:

Teorema 3.27 *Si u es cualquier conjunto, existe un par $(b, s) \in \mathrm{EBF}$ tal que para todo $(a, r) \in \mathrm{EBF}$ con $\overline{\overline{a}} \leq \overline{\overline{u}}$ se cumple que $\mathcal{D}\Psi_{(a,r)(b,s)} = a$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea

$$B_u = \{(c,t) \mid c \subset u \land t \text{ es una relación extensional y bien fundada en } c\}.$$

Es fácil ver que B_u es un conjunto, definido por Δ_0-especificación desde $\mathcal{P}u \times \mathcal{P}(u \times u)$. La buena fundación de t requiere una variable que recorra los subconjuntos de c, pero ésta puede acotarse por $\mathcal{P}u$.

Llamamos (b,s) al conjunto dado por 3.24 a partir de B_u. Así, para todo $(c,t) \in \mathrm{EBF}$ con $c \subset u$ y todo $\alpha \in c$ existe un $\beta \in b$ tal que $(\alpha, c, t) \sim (\beta, b, s)$, lo que implica que $\alpha \in \mathcal{D}\Psi_{(c,t),(b,s)}$, luego $\mathcal{D}\Psi_{(c,t)(b,s)} = c$.

Más en general, si $(a,r) \in \mathrm{EBF}$ cumple que existe $f : a \longrightarrow u$ inyectiva, podemos llamar $c = f[a]$ y definir t en c de modo que $f : (a,r) \longrightarrow (c,t)$ sea un isomorfismo, con lo que $\Psi_{(a,r)(b,s)} = \Psi_{(a,r)(c,t)} \circ \Psi_{(c,t)(b,s)}$ tiene dominio a. ■

Tomemos ahora un $u_0 \in W$, que será de la forma $u_0 = (\epsilon, u, t)$ y consideremos el par $(b,s) \in \mathrm{EBF}$ dado por el teorema anterior. La nota posterior al teorema 3.26 nos permite pasar a un par en las mismas condiciones tal que $b \notin b$. Entonces podemos considerar $b' = b \cup \{b\}$ y la relación $s' = s \cup (b \times \{b\})$, y es fácil ver que $(b', s') \in \mathrm{EBF}$. Así $T = (b, b', s') \in W$. Vamos a probar que cumple el axioma H.

En primer lugar, T es transitivo*, pues si $x\, E\, y\, E\, T$, entonces $y = (\alpha, b', s')$, para cierto $\alpha \in b$, luego $x = (\alpha', b', s')$, con $\alpha' \in_{s'} \alpha$, luego $\alpha' \in b$, luego $\alpha' \in_{s'} b$, luego $x\, E\, T$.

Tomamos ahora $z \in W$ tal que $(\overline{\overline{z}} \leq \overline{\overline{u}}_0)^*$, es decir, tal que existe $f \in W$ tal que $(f : z \longrightarrow u_0 \text{ inyectiva})^*$. Por 3.25 podemos representar $f = (\alpha_1, a, r)$, $z = (\alpha_2, a, r)$, $u_0 \sim (\alpha_3, a, r)$, de modo que $(\alpha_1 : \alpha_2 \longrightarrow \alpha_3 \text{ inyectiva})^{ar}$. Podemos definir por Δ_0-especificación

$$g = \{(\delta_1, \delta_2) \in a \times a \mid (\delta_1 \in \alpha_2 \land \delta_2 \in \alpha_3 \land (\delta_1, \delta_2) \in \alpha_1)^{ar}\}$$

y es claro entonces que, si $a_2 = \{\alpha \in a \mid \alpha \in_r \alpha_2\}$, $a_3 = \{\alpha \in a \mid \alpha \in_r \alpha_3\}$, entonces $g : a_2 \longrightarrow a_3$ inyectiva. Componiendo con $\Psi_{(a,r)(u,t)}$ (que está definida sobre α_3 por la equivalencia $u_0 \sim (\alpha_3, a, r)$) obtenemos $g' : a_2 \longrightarrow u$ inyectiva.

Por otra parte, si llamamos r_2 a la restricción de r a a_0, tenemos claramente que $(a_2, r_2) \in \mathrm{EBF}$, luego, por la construcción de (b,s), sabemos que el isomorfismo local $\Psi_{(a_2,r_2)(b,s)} : (a_2, r_2) \longrightarrow (b,s)$ está definido sobre todo a_2 o, lo que es lo mismo, $\Psi_{(a,r),(b,s)} : (a,r) \longrightarrow (b,s)$ está definido sobre α_2, y esto implica que $(z \subset T)^*$. ■

Con esto tenemos probado el grueso del teorema siguiente:

Teorema 3.28 *Si* M_0 *(resp.* M, MAC, Z*) es consistente, también lo es* M_0^++H *(resp.* M^++H, MAC^++H, Z^++H*).*

DEMOSTRACIÓN: Sólo falta probar que si suponemos $\omega \in V$ (resp. AE) entonces se cumple $(\omega \in W)^*$ (resp. AE^*). Respecto al axioma de infinitud, probaremos de hecho algo más fuerte: hemos visto que (en M_0) se demuestra la implicación $\omega \in V \rightarrow$ AID. El recíproco no es cierto (ni M_0 ni en Z), pero vamos a probar $(\omega \in W)^*$ suponiendo únicamente AID, con lo cual habremos probado que si es consistente añadir AID a M_0 (o a cualquiera de las extensiones que estamos considerando) entonces también es consistente añadir $\omega \in V$.

En efecto, sabemos que AID implica la existencia de un conjunto $\mathbb{N}$ que cumple los axiomas de Peano, en el cual podemos definir la relación de orden (estricto) usual $<$. Sea $a = \mathbb{N} \cup \{\mu\}$, donde μ es cualquier conjunto tal que $\mu \notin \mathbb{N}$, y sea $r \subset a \times a$ la relación de orden estricto que extiende a $<$ y respecto a la cual μ es el elemento máximo. Claramente, $(\mu, a, r) \in W$, y todo $x \in W$ que cumpla $x\,E\,(\mu, a, r)$ es, salvo equivalencia, de la forma (n, a, r), para un cierto $n \in \mathbb{N}$.

En particular $(0, a, r)\,E\,(\mu, a, r)$ y es claro que $((0, a, r) = \varnothing)^*$, es decir, $(\varnothing \in (\mu, a, r))^*$. Por otra parte, es fácil ver que

$$x\,E\,(n+1, a, r) \rightarrow x\,E\,(n, a, r) \vee x \sim (n, a, r),$$

con lo que $((n+1, a, r) = (n, a, r) \cup \{(n, a, r)\})^*$ y, por lo tanto,

$$(\bigwedge x \in (\mu, a, r)\ x \cup \{x\} \in (\mu, a, r))^*.$$

Así pues,

$$(\bigvee X(\varnothing \in X \wedge \bigwedge x \in X\ x \cup \{x\} \in X)^*.$$

Teniendo en cuenta que W cumple el axioma de regularidad, con lo que $n \in \omega$ es una fórmula Δ_0, esta sentencia implica $\omega \in V$, luego $(\omega \in V)^*$.

Suponemos ahora AE y vamos a probar AE*. Sea $(\alpha, a, r) \in W$ una familia de conjuntos no vacíos disjuntos dos a dos*. Esto implica que el conjunto

$$X = \{x \in \mathcal{P}a \mid \bigvee \beta \in a(\beta \in_r \alpha \wedge \bigwedge u \in a(u \in x \leftrightarrow u \in_r \beta))\}$$

de las extensiones de los elementos de (β, a, r) es una familia de conjuntos no vacíos disjuntos dos a dos. Por AE existe un conjunto $A \in \mathcal{P}a$ que tiene exactamente un elemento de cada elemento de X. Sea $(c, s) \in$ EBF el par dado por el teorema 3.26 a partir de $B = \{A\}$. Así, existe un $\gamma \in c$ cuya s-extensión es A. Es claro entonces que $((\gamma, c, s) \in W$ contiene exactamente un elemento de cada elemento de $(\alpha, a, r))^*$. ■

3.5 Equivalencias de H

El teorema 3.27 que nos ha permitido demostrar H en el modelo W es también la clave para demostrar la equivalencia entre H y el teorema de Mostowski:

Teorema 3.29 (M_0) *El axioma* H *es equivalente al teorema del colapso de Mostowski* 3.19.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos el teorema de Mostowski y fijemos un conjunto arbitrario u para probar H. Por el teorema 3.27 existe un par $(b,s) \in \mathrm{EBF}$ tal que para todo $(a,r) \in \mathrm{EBF}$ con $\overline{\overline{a}} \leq \overline{\overline{u}}$ se cumple que el isomorfismo $\Psi_{(a,r)(b,s)} : (a,r) \longrightarrow (b,s)$ está definido sobre todo a.

Sea $\pi : (b,s) \longrightarrow T$ la función colapsante de Mostowski. Así T es un conjunto transitivo y bien fundado y, si a es un conjunto transitivo tal que $\overline{\overline{a}} \leq \overline{\overline{u}}$, entonces, considerando la relación r de pertenencia en u, tenemos que la composición $\Psi_{(a,r)(b,s)} \circ \pi : a \longrightarrow T$ es un isomorfismo en su imagen para la relación de pertenencia y, como ésta está bien fundada en T, también lo está en a, y el isomorfismo es la identidad. Así pues, $a \subset T$, como requiere el axioma H. ■

Seguidamente probaremos otras equivalencias de H en MAC^+. Empezamos probando lo siguiente, donde es esencial el uso del axioma de elección:

Teorema 3.30 ($\mathbf{MAC^+}$+H) (Esquema de Δ_0-recolección fuerte) *Para toda fórmula $\phi(x,y)$ de clase Δ_0 (con posibles parámetros) se cumple*

$$\bigwedge a \bigvee b \bigwedge x \in a (\bigvee y\ \phi(x,y) \rightarrow \bigvee y \in b\ \phi(x,y)).$$

DEMOSTRACIÓN: Fijemos parámetros $x_1, \ldots, x_n$ y consideremos la clausura transitiva $C = \mathrm{ct}(\{a, x_1, \ldots, x_n, \omega\})$. (Añadimos ω para garantizar que C es infinito.) Por el axioma H, existe un conjunto transitivo T tal que si A es un conjunto transitivo tal que $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{C}}$ entonces $A \subset T$. Vamos a probar que se cumple el enunciado con $b = T$. Para ello tomamos $x \in a$ y suponemos que existe un y tal que $\phi(x,y)$. Sea $M = \mathrm{ct}(\{y, C\})$.

Ahora llamamos N al núcleo de Skolem de $X = C \cup \{y\}$ en M (considerado como modelo transitivo del lenguaje de la teoría de conjuntos). Dejamos al lector la comprobación rutinaria de que puede construirse en MAC, así como que $|N| = |C|$. Notemos que para definir las funciones de Skolem necesitamos considerar un buen orden en M.

Sea $\pi : N \longrightarrow N'$ la función colapsante de N, de modo que N' es un conjunto transitivo y π es un isomorfismo de modelos. Como $C \subset N$ es transitivo, la unicidad de la función colapsante implica que $\pi|_C$ es la identidad, luego $C \subset N'$. Además $|N'| = |N| = |C|$, luego $N' \subset T$. Llamemos $y' = \pi(y) \in T = b$. Como la fórmula ϕ es Δ_0, se cumple que

$$\phi(x,y,x_1,\ldots,x_n) \rightarrow M \vDash \ulcorner\phi\urcorner[x,y,x_1,\ldots,x_n] \rightarrow N \vDash \ulcorner\phi\urcorner[x,y,x_1,\ldots,x_n]$$

$$\rightarrow N' \vDash \ulcorner\phi\urcorner[x,y',x_1,\ldots,x_n] \rightarrow \phi(x,y',x_1,\ldots,x_n),$$

luego $\bigvee y \in b\, \phi(x,y)$. ■

Este resultado se mejora ligeramente a sí mismo, y a su vez tiene varias consecuencias de interés:

Teorema 3.31 (T) *Consideremos los esquemas siguientes:*

a) Esquema de Δ_0-recolección fuerte: *Para toda fórmula $\phi(x,y)$ de clase Δ_0 (con posibles parámetros)*

$$\bigwedge a \bigvee b \bigwedge x \in a(\bigvee y\ \phi(x,y) \rightarrow \bigvee y \in b\ \phi(x,y)).$$

b) Esquema de Δ_0-recolección: *Para toda fórmula $\phi(x,y)$ de clase Δ_0 (con posibles parámetros)*

$$\bigwedge x \bigvee y\, \phi(x,y) \rightarrow \bigwedge a \bigvee b \bigwedge x \in a \bigvee y \in b\ \phi(x,y).$$

c) Esquema de Σ_1-recolección fuerte: *Para toda fórmula $\phi(x,y)$ de clase Σ_1, es decir, $\phi(x,y) \equiv \bigvee z\, \psi(x,y,z)$ (con posibles parámetros)*

$$\bigwedge a \bigvee b \bigwedge x \in a(\bigvee y\ \phi(x,y) \rightarrow \bigvee y \in b\ \phi(x,y)).$$

d) Esquema de Δ_0-especificación: *Para toda fórmula $\phi(u)$ de clase Δ_0 (con posibles parámetros)*

$$\bigwedge x \bigvee y \bigwedge u(u \in y \leftrightarrow u \in x \wedge \phi(u)).$$

e) Esquema de Π_1-especificación: *Para toda fórmula $\phi(u)$ de clase Π_1, es decir, $\phi(u) \equiv \bigwedge v\, \psi(u,v)$ (con posibles parámetros)*

$$\bigwedge x \bigvee y \bigwedge u(u \in y \leftrightarrow u \in x \wedge \phi(u)).$$

Se cumple que a) $\rightarrow$ b) $\wedge$ c) y a) $\wedge$ d) $\rightarrow$ e).

Demostración: a) $\rightarrow$ b) es trivial.

a) $\rightarrow$ c) Hemos de probar que

$$\bigwedge a \bigvee b \bigwedge x \in a(\bigvee yz\ \psi(x,y,z) \rightarrow \bigvee y \in b \bigvee z\ \psi(x,y,z)).$$

Apliquemos a) a la fórmula Δ_0

$$\chi(x,v) \equiv \bigvee u \in v \bigvee yz \in u(v = (y,z) \wedge \psi(x,y,z))$$

obtenemos que

$$\bigwedge a \bigvee b \bigwedge x \in a(\bigvee v\, \chi(x,v) \rightarrow \bigvee v \in b\, \chi(x,v)).$$

Por consiguiente:

$$\bigwedge a \bigvee b \bigwedge x \in a(\bigvee yz\, \psi(x,y,z) \rightarrow \bigvee yz((y,z) \in b \wedge \psi(x,y,z)),$$

luego

$$\bigwedge a \bigvee b \bigwedge x \in a(\bigvee yz\, \psi(x,y,z) \rightarrow \bigvee y \in \mathcal{D}b \bigvee z\, \psi(x,y,z))$$

y, basta cambiar b por $\mathcal{D}b$.

a) $\land$ *d)* $\rightarrow$ *e)* Por a), dado un conjunto x, existe un conjunto b tal que

$$\bigwedge u \in x (\bigvee v \, \neg\psi(u, v) \rightarrow \bigvee v \in b \, \neg\psi(u, v)).$$

Por d) existe un conjunto y tal que

$$\bigwedge u (u \in y \leftrightarrow u \in x \land \bigwedge v \in b \, \psi(u, v)).$$

Esto equivale a

$$\bigwedge u (u \in y \leftrightarrow u \in x \land \bigwedge v \, \psi(u, v)).$$

■

Notemos que la posibilidad de tomar complementos hace que el esquema de Π_1-especificación sea equivalente al de Σ_1-especificación. Consideramos ahora un esquema más:

Esquema de Π_1-regularidad Para toda fórmula $\phi(y)$ de clase Π_1 (con posibles parámetros)

$$\bigvee y \; \phi(y) \rightarrow \bigvee y \, (\phi(y) \land \bigwedge u \in y \; \neg\phi(u)).$$

Observemos que el esquema anterior para fórmulas Δ_0 es equivalente al axioma de regularidad. Para probar el axioma de regularidad consideramos la fórmula $\phi(y) \equiv y \in x$ y para la implicación inversa tomamos un y que cumpla $\phi(y)$ y consideramos el conjunto $x = \{u \in y \mid \phi(u)\}$. Si es vacío, entonces y es minimal para ϕ, y en caso contrario un elemento minimal de x es también minimal para ϕ.

Teorema 3.32 (MAC$^+$) *Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

a) El axioma H.

b) El esquema de Σ_1*-recolección fuerte.*

c) Los esquemas de Δ_0*-recolección y* Π_1*-especificación.*

d) El esquema de Δ_0*-recolección, el esquema de* Π_1*-regularidad y la sentencia* **Card** *"todo conjunto bien ordenado es semejante a un ordinal".*

DEMOSTRACIÓN: Hemos probado que a) implica el esquema de Δ_0-recolección fuerte y que éste implica b). Obviamente, b) implica el esquema de Δ_0-recolección fuerte y hemos visto que éste implica el esquema de Δ_0-recolección y, junto con Δ_0-especificación, que es un esquema axiomático de MAC$^+$, también el esquema de Π_1-especificación, es decir, que tenemos c).

Suponiendo c), si $\phi(y)$ es una fórmula de clase Π_1 y existe un conjunto y que cumple $\phi(y)$, por Π_1-especificación podemos considerar el conjunto

$$x = \{u \in y \mid \phi(u)\}.$$

Si es vacío, entonces y es minimal para ϕ. Si no lo es, por el axioma de regularidad tiene un elemento minimal, que también es minimal para ϕ.

Finalmente, consideremos un conjunto bien ordenado $(A, \leq)$ y sea

$$X = \{a \in A \mid \bigvee f\alpha(\alpha \in \Omega \wedge \bigvee B \in \mathcal{P}A\,(B = A_a^< \wedge f : B \longrightarrow \alpha \text{ semejanza})\},$$

cuya existencia está garantizada por Σ_1-especificación (que es trivialmente equivalente a la Π_1-especificación). Vamos a probar que $X = A$. En caso contrario sea a_0 el mínimo de $A \setminus X$, con lo que $A_{a_0}^< \subset X$ y consideremos la fórmula Δ_0

$$\phi(a, z) \equiv \bigvee u \in z \bigvee f\alpha \in u(z = (f, \alpha) \wedge (a \notin A_{a_0}^< \wedge f = \alpha = 0) \vee$$

$$(a \in A_{a_0}^< \wedge \bigvee B \in \mathcal{P}A(B = A_a^< \wedge f : B \longrightarrow A \text{ semejanza})).$$

Claramente $\bigwedge a \bigvee z\, \phi(a, z)$, luego, por Δ_0-recolección existe un conjunto S que, para cada $a \in A_{a_0}^<$, contiene un par (f, α) tal que $f : A_a^< \longrightarrow \alpha$ semejanza. Ahora, bien, tal semejanza es única, luego si definimos

$$T = \{f \in \mathcal{D}S \mid \bigvee \alpha \in \mathcal{R}S \bigvee a \in A_{a_0}^<\; f : A_a^< \longrightarrow \alpha \text{ semejanza}\},$$

sucede que T contiene exactamente una semejanza para cada $a \in A_{a_0}^<$, luego, llamando $F = \bigcup T$ y $\alpha = \mathcal{R}F$, tenemos que $\alpha \in \Omega$ y $F : A_{a_0}^< \longrightarrow \alpha$ semejanza. Esto nos da que $a_0 \in X$, contradicción.

La misma construcción cambiando $A_{a_0}^<$ por A nos ahora da una semejanza $F : A \longrightarrow \alpha$, para cierto $\alpha \in \Omega$.

d) $\rightarrow$ a) Por 3.29 basta probar que si r es una relación extensional y bien fundada sobre a, entonces (A, R) es isomorfo a un conjunto transitivo.

Como MAC^+ incluye el axioma de elección, tenemos que A admite un buen orden, luego por Card es equipotente a un ordinal, luego también a un cardinal de von Neumann $\kappa = |A|$. El teorema 3.3 (válido en M_0) implica que existe un conjunto bien ordenado de cardinal estrictamente mayor que κ, y de nuevo por Card éste es equipotente a un cardinal de von Neumann μ, que será necesariamente mayor que κ. En particular existe κ^+, el menor cardinal mayor que κ. Esto no es totalmente obvio porque "ser un cardinal" no es Δ_0, pero es sencillo:
Consideramos el conjunto

$$X = \{\alpha \in \mu \mid \neg \bigvee f \in \mathcal{P}(\mu \times \mu) \bigvee \beta < \alpha\; f : \beta \longrightarrow \alpha \text{ biyectiva} \wedge \kappa < \alpha\},$$

y observamos que, o bien $X = \varnothing$ y entonces $\mu = \kappa^+$, o bien X tiene un mínimo elemento, y éste es κ^+.

Ahora aplicamos el teorema de recursión 3.4, para lo cual consideramos el conjunto

$$E = \{h \in \mathcal{P}(\mathcal{P}A \times \kappa^+) \mid \bigvee Y \in \mathcal{P}A \bigvee a \in A(Y = A_a^R \wedge h : Y \longrightarrow \kappa^+)\},$$

sobre el cual definimos la aplicación $g : E \longrightarrow \kappa^+$ mediante

$$g(h) = \bigcup_{u \in \mathcal{D}h} h(u) + 1.$$

Más detalladamente:

$$g = \{(h,\alpha) \in E \times \kappa^+ \mid \bigvee B \in \mathcal{P}\kappa^+ (\bigwedge \delta \in B \bigvee u \in \mathcal{D}h(\delta = h(u)+1) \land$$
$$\land \bigwedge u \in \mathcal{D}h \bigvee \delta \in B(\delta = h(u)+1) \land \alpha = \bigcup B)\},$$

y es fácil desarrollar un poco más esta definición para que la fórmula que aparece en ella sea Δ_0.

Para que g sea realmente una aplicación en κ^+ hay que probar que $g(h) \in \kappa^+$. Esto se cumple porque $\mathcal{D}h \subset A$, luego $|\mathcal{R}h| \leq |\mathcal{D}h| \leq |A| \leq \kappa$ (la primera desigualdad es un uso típico de AE). De aquí se sigue a su vez que el conjunto

$$B = \{h(u)+1 \mid u \in \mathcal{D}h\}$$

que aparece en la definición de g cumple también $|B| \leq \kappa$. Entonces tenemos que $g(h) = \bigcup B \leq \kappa^+$, pero es fácil definir (usando AE una vez más para elegir biyecciones $\kappa \longrightarrow g(h)$) una aplicación $F : \kappa \times \kappa \longrightarrow \bigcup B$ suprayectiva, lo que prueba que $|g(h)| \leq \kappa$, luego $g(h) \in \kappa^+$.

El teorema de recursión nos da así una aplicación $r : A \longrightarrow \kappa^+$ tal que

$$\bigwedge a \in A \ f(a) = r(f|_{A_a^R}) = \bigcup_{u\,R\,a} r(u)+1$$

En particular, $\bigwedge ab \in A(a\,R\,b \rightarrow r(a) < r(b))$.

Ahora basta observar que entre MAC$^+$ y las hipótesis de d) tenemos todos los axiomas de la teoría de Kripke-Platek KP descrita en el capítulo siguiente (sección 4.1), por lo que contamos con el teorema 4.16, según el cual (A, R) es isomorfo a un conjunto transitivo. ■

3.6 Constructibilidad en M

La prueba del teorema 3.32 utiliza el axioma de elección. Sin embargo, ahora vamos a demostrar que si M es consistente también lo es MAC$^+$+H y por consiguiente MAC$^+$ más todas las sentencias indicadas en 3.32.

La prueba consiste esencialmente en construir en M$^+$+H la clase de todos los conjuntos constructibles, si bien esto no puede hacerse por el camino usual, definiendo la jerarquía constructible mediante el operador de partes definibles de un conjunto, pero sí es posible hacerlo siguiendo la técnica empleada por el propio Gödel en uno de los trabajos en que presentó los conjuntos constructibles. Trabajamos, pues, en M$^+$+H.

Consideramos la clase $T = \Omega \times \Omega \times 9$ y en ella el buen orden dado por

$$\begin{aligned}(\alpha,\beta,i) < (\gamma,\delta,j) \quad \leftrightarrow \quad & (\text{máx}\{\alpha,\beta\} < \text{máx}\{\gamma,\delta\}) \lor \\ & (\text{máx}\{\alpha,\beta\} = \text{máx}\{\gamma,\delta\} \land \alpha < \gamma) \lor \\ & (\text{máx}\{\alpha,\beta\} = \text{máx}\{\gamma,\delta\} \land \alpha = \gamma \land \beta < \delta) \lor \\ & (\text{máx}\{\alpha,\beta\} = \text{máx}\{\gamma,\delta\} \land \alpha = \gamma \land \beta = \delta \land i < j).\end{aligned}$$

Notemos que si $(\gamma,\delta,j)\in T$ las ternas menores están contenidas en el conjunto

$$(\max\{\gamma,\delta\}+1)\times(\max\{\gamma,\delta\}+1)\times 9,$$

luego forman un conjunto por Δ_0-especificación. Como contamos con Card, existe un ordinal ζ y una semejanza $f:T^<_{(\gamma,\delta,j)}\longrightarrow\zeta$, luego podemos definir la clase $\pi:T\longrightarrow\Omega$ mediante

$$\pi=\{((\gamma,\delta,j),\zeta)\mid \bigvee f\ f:T^<_{(\gamma,\delta,j)}\longrightarrow\zeta \text{ semejanza}\},$$

y es claro que π es una semejanza. Para probar la suprayectividad observamos que

$$\pi(\gamma,\delta,j)\geq\pi(0,\max\{\gamma,\delta\},0)\geq\max\{\gamma,\delta\},$$

donde la última desigualdad se demuestra como en 2.6. Más aún, si $j\neq 0$ tenemos de hecho que $\pi(\gamma,\delta,j)>\max\{\gamma,\delta\}$.

Por consiguiente podemos definir tres funciones $\phi_1,\phi_2:\Omega\longrightarrow\Omega$, $n:\Omega\longrightarrow 9$ tales que $\pi(\phi_1(\zeta),\phi_2(\zeta),n(\zeta))=\zeta$.

En estos términos $\max\{\phi_1(\zeta),\phi_2(\zeta),n(\zeta)\}\leq\zeta$ (no hemos probado que podemos incluir a $n(\zeta)$, pero esto se justifica calculando explícitamente las funciones para $\zeta\leq 8$, es decir, calculando los 9 primeros elementos de T).

De la propia definición del orden se sigue que $T^<_{(0,\kappa,0)}=\kappa\times\kappa\times 9$, para todo ordinal κ, luego si κ es un cardinal infinito y $(\alpha,\beta,i)\in T^<_{(0,\kappa,0)}$ entonces $|T^<_{(\alpha,\beta,i)}|<\kappa$, mientras que $|T^<_{(0,\kappa,0)}|=\kappa$. Esto significa que $\pi(0,\kappa,0)=\kappa$. Llamaremos

$$\pi_\kappa:\kappa\times\kappa\times 9\longrightarrow\kappa$$

a la restricción de π.

Ahora consideramos las *operaciones de Gödel:*

$$\begin{array}{rcl}
F_1(X,Y) & = & \{X,Y\}\\
F_2(X,Y) & = & \{(u,v)\in X\mid u\in v\}\\
F_3(X,Y) & = & X\setminus Y\\
F_4(X,Y) & = & \{(u,v)\in X\mid u\in Y\}\\
F_5(X,Y) & = & \{x\in X\mid \bigvee y\ (x,y)\in Y\}\\
F_6(X,Y) & = & \{(u,v)\in X\mid (v,u)\in Y\}\\
F_7(X,Y) & = & \{(u,v,w)\in X\mid (v,w,u)\in Y\}\\
F_8(X,Y) & = & \{(u,v,w)\in X\mid (u,w,v)\in Y\}
\end{array}$$

Es fácil ver que todas las definiciones pueden presentarse de forma equivalente para que los conjuntos existan por Δ_0-especificación.

Teorema 3.33 *Para cada ordinal η existe una única aplicación $\mathcal{F}_\eta:\eta\longrightarrow V$ tal que si $\zeta<\eta$*

$$\mathcal{F}_\eta(\zeta)=\begin{cases}\mathcal{F}_\eta[\zeta] & \text{si } n(\zeta)=0,\\ F_{n(\zeta)}(\mathcal{F}_\eta(\phi_1(\zeta)),\mathcal{F}_\eta(\phi_2(\zeta))) & \text{si } n(\zeta)=1,\ldots,8.\end{cases}$$

Demostración: Supongamos en primer lugar que $\eta = \kappa^+$, para cierto cardinal infinito κ y sea H un conjunto transitivo que contenga a todos los conjuntos transitivos Z tales que $\overline{\overline{Z}} \leq \overline{\overline{\kappa}}$. El argumento que sigue es una ligera variante del empleado en el teorema de recursión 3.4. Consideramos el conjunto

$$E = \{h \in \mathcal{P}(\mathcal{P}\kappa^+ \times H) \mid \bigvee \zeta \in \kappa^+ \; h : \zeta \longrightarrow H\}$$

y definimos $g \subset E \times H$ mediante

$$g = \{(h, y) \in E \times H \mid \bigvee \zeta\gamma\delta j \in \kappa^+ (\zeta = \pi_{\kappa^+}(\gamma, \delta, j) \wedge h : \zeta \longrightarrow H$$
$$\wedge\; ((j = 0 \wedge y = h[\zeta]) \vee (j = 1 \wedge y = F_1(h(\gamma), h(\delta)))$$
$$\vee\; (j = 2 \wedge y = F_2(h(\gamma), h(\delta))) \vee (j = 3 \wedge y = F_3(h(\gamma), h(\delta))) \vee \cdots)\}.$$

Es fácil comprobar que la definición de g es Δ_0, por lo que g es un conjunto, y también es claro que $g : \mathcal{D}g \longrightarrow H$. Para aplicar el teorema de recursión necesitaríamos que $\mathcal{D}g = E$, pero no es el caso. Definimos una aproximación h como

$$\bigvee \zeta \in \kappa^+ + 1 (h : \zeta \longrightarrow H \wedge \bigwedge \alpha \in \zeta \; (h|_\alpha \in \mathcal{D}g \wedge h(\alpha) = g(h|_\alpha)).$$

La prueba de 3.4 vale literalmente hasta la demostración de que existe una aproximación $h : \zeta \longrightarrow H$ que contiene a todas las demás, para cierto $\zeta \leq \kappa^+$. Sólo falta probar que $\zeta = \kappa^+$, para lo cual consideramos el conjunto

$$\{\alpha \in \zeta + 1 \mid \bigvee y \in \mathcal{P}H \; (y = h[\alpha] \wedge \bigcup y \subset y)\}.$$

El hecho de que esta clase sea ciertamente un conjunto implica que podemos probar por inducción que $\bigwedge \alpha \leq \zeta \; h[\alpha]$ es transitivo. En efecto, suponemos que $\bigwedge \beta < \alpha \; h[\beta]$ es transitivo. Si $\alpha = 0$ es obvio que $h[\alpha] = \varnothing$ es transitivo, si α es un ordinal límite, entonces

$$h[\alpha] = \bigcup_{\beta < \alpha} h[\beta]$$

es claramente transitivo. Supongamos por último que $\alpha = \beta + 1$, de modo que $h[\beta]$ es transitivo por hipótesis de inducción y $h[\alpha] = h[\beta] \cup \{h(\beta)\}$. Sea $\beta = \pi(\gamma, \delta, j)$.

Si $j = 0$ entonces $h(\beta) = g(h|_\beta) = h[\beta]$, con lo que claramente $h[\alpha]$ es transitivo.

Si $j > 0$ entonces $\gamma, \delta < \beta$, luego sabemos que $h[\gamma], h[\delta]$ son transitivos, y además $h(\beta) = g(h|_\beta) = F_j(h(\gamma), h(\delta))$.

Si $j = 1$ tenemos que $h(\beta) = \{h(\gamma), h(\delta)\} \subset h[\beta]$, lo que implica que $h[\alpha]$ es transitivo.

Si $j > 1$ se cumple que $h(\beta) \subset h(\gamma) \subset h[\beta]$ y la conclusión es la misma.

Con esto estamos en condiciones de probar que $\zeta = \kappa^+$, pues si fuera $\zeta < \kappa^+$ y $\zeta = \pi(\gamma, \delta, j)$, podemos definir $h^* = h \cup \{(\zeta, h[\zeta])\}$ si $j = 0$ o bien $h^* = h \cup \{(\zeta, F_j(h(\gamma), h(\delta)))\}$ para $j > 0$, de modo que $h^* : \zeta + 1 \longrightarrow V$, pero el mismo razonamiento precedente prueba que $Z = h^*[\zeta+1] = h[\zeta] \cup \{h^*(\zeta)\}$ es un conjunto transitivo y podemos definir $f : Z \longrightarrow \zeta+1$ inyectiva (a cada elemento de Z le asignamos la menor antiimagen por h^*), luego $\overline{\overline{Z}} \leq \overline{\overline{\zeta+1}} = \overline{\overline{\kappa}}$, luego $h^*[\zeta+1] \subset H$ por la elección de H, lo que implica que $h \in \mathcal{D}g$ y que $h^*(\zeta) = g(h^*|_\zeta)$, por lo que h^* es una aproximación que extiende a h, contradicción.

Con esto tenemos probada la existencia de $\mathcal{F}_\eta$ cuando $\eta = \kappa^+$. En general, para todo ordinal η existe un cardinal κ tal que $\eta < \kappa^+$ y basta tomar $\mathcal{F}_{\kappa^+}|_\eta$. La prueba de la unicidad es esencialmente la misma que la prueba de que dos aproximaciones coinciden en su dominio común. ■

En la prueba anterior hemos visto que si $\beta < \eta$ entonces $\mathcal{F}_\beta \subset \mathcal{F}_\eta$, así como que $\mathcal{F}_\eta[\beta]$ es un conjunto transitivo y que $\mathcal{F}_\eta(\beta) \subset \mathcal{F}_\eta[\beta]$.

Definición 3.34 Consideramos la clase $\mathcal{F} : \Omega \longrightarrow V$ dada por

$$\mathcal{F} = \{(\alpha, x) \in \Omega \times V \mid \bigvee \eta \in \Omega\ (\alpha, x) \in \mathcal{F}_\eta\}.$$

Llamaremos *clase de los conjuntos constructibles* a $L = \mathcal{R}\mathcal{F}$, es decir,

$$x \in L \leftrightarrow \bigvee \alpha\ x = \mathcal{F}_{\alpha+1}(\alpha).$$

Por la propia construcción es inmediato que L es una clase transitiva, así como que si $x, y \in L$ entonces $F_i(x, y) \in L$.

Si κ es un cardinal infinito, llamaremos $L_\kappa = \mathcal{F}(\kappa) = \mathcal{F}[\kappa]$.

Podemos definir una inversa de la función $\mathcal{F}_\kappa$ mediante

$$i_\kappa = \{(x, \alpha) \in L_\kappa \times \kappa \mid \mathcal{F}_\kappa(\alpha) = x \wedge \bigwedge \beta \in \alpha\ \mathcal{F}_\kappa(\beta) \neq x\},$$

de modo que $i_\kappa : L_\kappa \longrightarrow \kappa$ y $\mathcal{F}_\kappa(i_\kappa(x)) = x$. Además, las aplicaciones i_κ se extienden mutuamente, por lo que determinan una clase $i : L \longrightarrow \Omega$ tal que $\mathcal{F}(i(x)) = x$ para todo $x \in L$ y si $\mathcal{F}(\alpha) = x$ entonces $i(x) \leq \alpha$.

Observemos ahora que

$$\bigwedge xy \in L\ (x \in y \rightarrow i(x) < i(y)),$$

es decir, que todos los elementos de un conjunto constructible aparecen antes en la sucesión transfinita que genera los conjuntos constructibles. Esto se debe a que, como hemos observado tras la prueba de 3.33, $y = \mathcal{F}(i(y)) \subset \mathcal{F}[i(y)]$, luego $x = \mathcal{F}(\alpha)$ con $\alpha < i(y)$, luego $i(x) \leq \alpha < i(y)$.

En particular vemos que L_κ admite un buen orden, y lo mismo vale para todos sus elementos, por lo que podemos concluir que $V = L \rightarrow$ AE.

Más precisamente, podemos definir $E_\kappa : \kappa \longrightarrow \kappa$ mediante

$$E_\kappa = \{(\alpha, \beta) \in \kappa \times \kappa \mid (\mathcal{F}_\kappa(\alpha) = \varnothing \wedge \beta = \varnothing) \vee$$

$$(\mathcal{F}_\kappa(\beta) \in F_\kappa(\alpha) \wedge \bigwedge \gamma < \beta\ \mathcal{F}_\kappa(\gamma) \notin \mathcal{F}_\kappa(\alpha))\}.$$

Así $\mathcal{F}_\kappa(\alpha) \neq \varnothing \rightarrow \mathcal{F}_\kappa(E_\kappa(\alpha)) \in \mathcal{F}_\kappa(\alpha)$ o, equivalentemente, si observamos que cada función E_κ extiende a las anteriores, podemos reunirlas en una clase $E : \Omega \longrightarrow \Omega$ de modo que

$$\bigwedge x \in L(x \neq \varnothing \rightarrow \mathcal{F}(E(i(x))) \in x).$$

En otras palabras, $E(\alpha)$ es el menor ordinal tal que $\mathcal{F}(E(\alpha))$ es un elemento de $\mathcal{F}(\alpha)$, lo cual implica en particular que $E(\alpha)$ es el menor ordinal que da lugar al conjunto $\mathcal{F}(E(\alpha))$, es decir, que $i(\mathcal{F}(E(\alpha))) = E(\alpha)$.

Esto implica a su vez que $\bigwedge \alpha \in \Omega\ E(\alpha) \leq \alpha$, pues de $\mathcal{F}(E(\alpha)) \in \mathcal{F}(\alpha)$ se sigue que

$$E(\alpha) = i(\mathcal{F}(E(\alpha))) < i(\mathcal{F}(\alpha)) \leq \alpha,$$

de modo que la igualdad se da sólo si $\mathcal{F}(\alpha) = \varnothing$.

Teorema 3.35 *Si κ es un cardinal infinito, entonces $L_\kappa \in L$ es un conjunto transitivo y si $x, y \in L_\kappa$ entonces $F_i(x, y) \in L_\kappa$, para $i = 1, \ldots, 8$. Además existe un $\zeta < \kappa$ tal que x, $y \in \mathcal{F}(\zeta) = \mathcal{F}[\zeta]$.*

Demostración: Sabemos que los conjuntos de la forma $\mathcal{F}[\kappa]$ son transitivos. Si $x, y \in L_\kappa$, entonces $x = \mathcal{F}(\alpha)$, $y = \mathcal{F}(\beta)$ con $\alpha, \beta < \kappa$, con lo que $(\alpha, \beta, i) < (0, \kappa, 0)$, luego $\zeta' = \pi(\alpha, \beta, i) < \pi(0, \kappa, 0) = \kappa$ y

$$F_i(x, y) = \mathcal{F}(\zeta') \in \mathcal{F}(\kappa) = L_\kappa.$$

Similarmente, $(\alpha + 1, \beta + 1, 0) < (0, \kappa, 0)$, luego

$$\alpha, \beta < \zeta = \pi(\alpha + 1, \beta + 1, 0) < \pi(0, \kappa, 0) = \kappa,$$

luego x, $y \in \mathcal{F}[\zeta] = \mathcal{F}(\zeta)$. ■

Veamos algunas propiedades más de L:

a) Si x, $y \in L_\kappa$, entonces $x \setminus y$, $x \cap y$, $x \cup y \in L_\kappa$.

   En efecto, $x \setminus y = F_3(x, y) \in L_\kappa$ y $x \cap y = x \setminus (x \setminus y) \in L_\kappa$. Para la unión tomamos $\zeta < \kappa$ tal que x, $y \in A = \mathcal{F}(\zeta) = \mathcal{F}[\zeta]$. Así x, $y \subset A \in L_\kappa$ y

$$x \cup y = A \setminus ((A \setminus x) \cap (A \setminus y)) \in L_\kappa.$$

b) Si x, $y \in L_\kappa$, entonces $\{x, y\} \in L_\kappa$, luego $(x, y) \in L_\kappa$.

   En efecto, $\{x, y\} = F_1(x, y) \in L_\kappa$.

c) Si X, $Y \in L_\kappa$ entonces $X \times Y \in L_\kappa$.

   Tomamos un $\zeta < \kappa$ tal que X, $Y \in A = \mathcal{F}(\zeta) = \mathcal{F}[\zeta] \in L_\kappa$. Entonces $X, Y \subset A$. Sea $\zeta' = \pi(0, \zeta, 0) < \kappa$ y sea $B = \mathcal{F}(\zeta') = \mathcal{F}[\zeta'] \in L_\kappa$. Así, si x, $y \in A$, entonces $x = \mathcal{F}(\alpha)$, $y = \mathcal{F}(\beta)$ con $\alpha, \beta < \zeta$, luego $(\alpha, \beta, 1) < (0, \zeta, 0)$, luego $\pi(\alpha, \beta, 1) < \zeta'$, luego $\{x, y\} \in B$.

Similarmente, tomando $\zeta'' = \pi(0, \zeta', 0)$ y $C = \mathcal{F}(\zeta'') = \mathcal{F}[\zeta''] \in L_\kappa$ se cumple que el par desordenado de dos elementos de B está en C, luego si $x, y \in A$ concluimos que $(x, y) \in C$.

En particular, si $x \in X$ e $y \in Y$, tenemos que $x, y \in A$, luego $(x, y) \in C$, luego $X \times Y \subset C$.

Ahora tomamos $F_4(C, Y) = C \cap (V \times Y) \in L_\kappa$ y

$$F_6(C, F_4(C, X)) = C \cap (X \times V) \in L_\kappa.$$

La intersección de estos dos conjuntos también estará en L_κ, pero ésta es precisamente el producto cartesiano:

$$C \cap (V \times Y) \cap C \cap (X \times V) = C \cap (X \times Y) = X \times Y.$$

d) Más en general, si $X_1, \ldots, X_n \in L_\kappa$, entonces $X_1 \times \cdots \times X_n \in L_\kappa$.

Sean ahora $A, B, C \in L_\kappa$ y sea $P = (A \times B) \times C$.

e) Si $X \subset A \times B$, $X \in L_\kappa$, entonces $\{(x, y, z) \in P \mid (x, y) \in X\} \in L_\kappa$.
En efecto, se trata de $F_4(P, X)$.

f) Si $X \subset A \times C$, $X \in L_\kappa$, entonces $\{(x, y, z) \in P \mid (x, z) \in X\} \in L_\kappa$.
Por el apartado anterior,

$$Y = \{(x, z, y) \in (A \times C) \times B \mid (x, z) \in X\} \in L_\kappa,$$

y basta tomar $F_8(P, Y)$.

g) Si $X \subset B \times C$, $X \in L_\kappa$, entonces $\{(x, y, z) \in P \mid (y, z) \in X\} \in L_\kappa$.
La prueba es idéntica a la anterior pero usando F_7 en lugar de F_8.

Sean ahora $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_k \in L_\kappa$, $X \subset X_1 \times \cdots \times X_n$, $X \in L_\kappa$,

h) $\{(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k) \in X_1 \times \cdots \times X_n \times Y_1 \times \cdots \times Y_k \mid (x_1, \ldots, x_n) \in X\} \in L_\kappa$.

Para $k = 1$ se trata simplemente de $F_4((X_1 \times \cdots \times X_n) \times Y_1, X)$. El caso general se sigue inmediatamente por inducción.

i) $\{(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, \ldots, y_k, x_n) \in X_1 \times \cdots \times X_{n-1} \times Y_1 \times \cdots \times Y_k \times X_n \mid (x_1, \ldots, x_n) \in X\} \in L_\kappa$.
Para $k = 1$ es un caso particular de f), y el caso general se sigue por inducción.

Ahora podemos probar lo siguiente:

Teorema 3.36 *Sea $\phi(x_1, \ldots, x_n, Y_1, \ldots, Y_k)$ una fórmula Δ_0 cuyas variables libres estén entre las indicadas y sean $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_k \in L_\kappa$. Entonces*

$$\{(x_1, \ldots, x_n) \in X_1 \times \cdots \times X_n \mid \phi(x_1, \ldots, x_n, Y_1, \ldots, Y_n)\} \in L_\kappa.$$

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer que ϕ no contiene igualadores y que las variables Y_i sólo aparecen en subfórmulas de tipo $u \in Y_i$, pues toda subfórmula $Y_i \in u$ puede sustituirse por $\bigvee v \in u\ v = Y_i$ y cualquier subfórmula de tipo $u = v$ puede sustituirse por $\bigwedge w \in u\ w \in v \wedge \bigwedge w \in v\ w \in u$. (Observemos que así la fórmula no deja de ser Δ_0.) Notemos también que el teorema es trivial si ninguna variable x_i está libre en ϕ.

Razonamos por inducción sobre la longitud de ϕ. En primer lugar suponemos que $\phi \equiv x_i \in x_j$, con lo que hemos de probar que

$$\{(x_1, \ldots, x_n) \in X_1 \times \cdots \times X_n \mid x_i \in x_j\} \in L_\kappa.$$

En efecto, si $i = j$ se trata de $\varnothing = \mathcal{F}(0) \in L_\kappa$, así que podemos suponer que $i \neq j$. Observemos que

$$F_2(X_i \times X_j, \varnothing) = \{(x_i, x_j) \in X_i \times X_j \mid x_i \in x_j\} \in L_\kappa.$$

Si $j < i$, consideramos

$$F_6(X_j \times X_i, F_2(X_i \times X_j, \varnothing)) = \{(x_j, x_i) \in X_j \times X_i \mid x_i \in x_j\} \in L_\kappa.$$

Así, si llamamos p al mínimo de i, j y q al máximo de i,j, tenemos que

$$\{(x_p, x_q) \in X_p \times X_q \mid x_i \in x_j\} \in L_\kappa.$$

Aplicando g) en el caso en que $p \neq 1$ obtenemos que

$$\{(x_1, \ldots, x_p, x_q) \in X_1 \times \cdots \times X_p \times X_q \mid x_i \in x_j\} \in L_\kappa.$$

Aplicando i) en el caso en que $p + 1 \neq q$ obtenemos que

$$\{(x_1, \ldots, x_q) \in X_1 \times \cdots \times X_q \mid x_i \in x_j\} \in L_\kappa.$$

Por último, aplicando h) en el caso en que $q \neq n$ obtenemos la conclusión.

La única alternativa para una fórmula atómica con las condiciones que hemos impuesto es que $\phi \equiv x_i \in Y_j$, pero entonces basta observar que

$$X_1 \times \cdots \times (X_i \cap Y_j) \times \cdots X_n \in L_\kappa.$$

Supongamos ahora que $\phi \equiv \neg\psi$, y que por hipótesis de inducción

$$A = \{(x_1, \ldots, x_n) \in X_1 \times \cdots \times X_n \mid \psi(x_1, \ldots, x_n, Y_1, \ldots, Y_k)\} \in L_\kappa.$$

Basta observar que $(X_1 \times \cdots \times X_n) \setminus A \in L_\kappa$.

Similarmente se razona cuando $\phi \equiv (\psi \rightarrow \chi)$. Finalmente, suponemos que $\phi \equiv \bigvee x \in Y_j\, \psi$, donde no perdemos generalidad si suponemos que la variable x no es ninguna de $x_1, \ldots, x_n, Y_1, \ldots, Y_k$. Por hipótesis de inducción

$$A = \{(x, x_1, \ldots, x_n) \in Y_j \times X_1 \times \cdots \times X_n \mid \psi(x, x_1, \ldots, x_n, Y_1, \ldots, Y_k)\} \in L_\kappa.$$

Basta tomar $F_5(X_1 \times \cdots \times X_n, A)$. ■

Como caso particular:

Teorema 3.37 *Sea $\phi(x, x_1, \ldots, x_n)$ una fórmula Δ_0 cuyas variables libres estén entre las indicadas y sean $X, x_1, \ldots, x_n \in L_\kappa$. Entonces*

$$\{x \in X \mid \phi(x, x_1, \ldots, x_n)\} \in L_\kappa.$$

Claramente, lo mismo vale cambiando L_κ por L.

Ahora ya es fácil probar:

Teorema 3.38 *L es un modelo transitivo de* $\mathrm{M}^+ - \mathrm{AP}$.

DEMOSTRACIÓN: Como L es transitiva, cumple obviamente el axioma de extensionalidad y el axioma de regularidad. También es claro que cumple el axioma del par, y el de la unión se sigue del teorema anterior: si $X \in L$, entonces existe un κ tal que $X \in L_\kappa$, luego existe un $\zeta < \kappa$ tal que $X \in \mathcal{F}(\zeta) = \mathcal{F}[\zeta]$. Como este conjunto es transitivo, $\bigcup X \subset \mathcal{F}(\zeta)$, luego

$$\bigcup X = \{x \in \mathcal{F}(\zeta) \mid \bigvee u \in X\ x \in u\} \in L_\kappa.$$

El teorema anterior también implica trivialmente que L cumple el axioma de Δ_0-especificación.Si κ es cualquier cardinal infinito, entonces $\omega \cap L_\kappa$ es claramente un conjunto inductivo, luego $\omega \subset L_\kappa$, luego, por el teorema anterior,

$$\omega = \{n \in L_\kappa \mid n \text{ es un número natural}\} \in L_\kappa,$$

pues "ser un número natural" es Δ_0. Por último, es trivial que todo conjunto constructible pertenece a un L_κ, que es un conjunto constructible transitivo, y eso demuestra CT. ■

Para probar que L satisface también los axiomas AP y H necesitamos el teorema siguiente:

Teorema 3.39 *Sea $a \subset \Omega$ un conjunto de ordinales y sea $f : a \longrightarrow \xi$ la semejanza entre a y su ordinal. Supongamos que*

$$\pi[a \times a \times 9] \subset a, \quad \phi_1[a] \subset a, \quad \phi_2[a] \subset a, \quad E[a] \subset a.$$

Entonces

$$\bigwedge \alpha\beta \in a(\mathcal{F}(\alpha) \in \mathcal{F}(\beta) \leftrightarrow \mathcal{F}(f(\alpha)) \in \mathcal{F}(f(\beta))),$$
$$\bigwedge \alpha\beta \in a(\mathcal{F}(\alpha) = \mathcal{F}(\beta) \leftrightarrow \mathcal{F}(f(\alpha)) = \mathcal{F}(f(\beta))).$$

DEMOSTRACIÓN: Por abreviar escribiremos $\alpha^* = f(\alpha)$. En primer lugar demostramos que

$$\bigwedge i \in 9 \bigwedge \alpha\beta \in a\ \pi(\alpha, \beta, i)^* = \pi(\alpha^*, \beta^*, i).$$

En efecto, llamemos $p = \pi|_{a \times a \times 9} : a \times a \times 9 \longrightarrow a$ y veamos que p es suprayectiva. En efecto, si $\zeta \in a$, tenemos que $\alpha = \phi_1(\zeta)$, $\beta = \phi_2(\zeta)$ están en a y $p(\alpha, \beta, n(\zeta)) = a$. Además, si $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in a$ y $i, j < 9$, tenemos que

$$(\alpha, \beta, i) < (\gamma, \delta, j) \rightarrow p(\alpha, \beta, i) < p(\gamma, \delta, j),$$

luego p es una semejanza. Por lo tanto, $p^* = p \circ f : a \times a \times 9 \longrightarrow \xi$ también es una semejanza. Sea ahora $\bar{p} : \xi \times \xi \times 9 \longrightarrow \xi$ la función dada por

$$\bar{p}(\alpha, \beta, i) = f(p(f^{-1}(\alpha), f^{-1}(\beta), i))).$$

Como la relación de orden en $\Omega \times \Omega \times 9$ se define a partir de la relación de orden en Ω y f la conserva, es fácil ver que

$$(\alpha, \beta, i) < (\gamma, \delta, j) \rightarrow (f^{-1}(\alpha), f^{-1}(\beta), i) < (f^{-1}(\gamma), f^{-1}(\delta), j)$$

$$\rightarrow p(f^{-1}(\alpha), f^{-1}(\beta), i)) < p(f^{-1}(\gamma), f^{-1}(\delta), j)) \rightarrow \bar{p}(\alpha, \beta, i) < \bar{p}(\gamma, \delta, j).$$

Por lo tanto, $\bar{p}$ también es una semejanza.

A continuación consideramos $p_\xi = \pi|_{\xi \times \xi \times 9} : \xi \times \xi \times 9 \longrightarrow \Omega$. Recordemos que $\xi \times \xi \times 9 = T^<_{(0,\xi,0)}$, luego la imagen de p_ξ es un ordinal ζ, pero cada conjunto bien ordenado es semejante a un único ordinal mediante una única semejanza, luego $\zeta = \xi$ y $\bar{p} = p_\xi$. Esto significa que si $(\alpha, \beta, i) \in \xi \times \xi \times 9$,

$$f(p(f^{-1}(\alpha), f^{-1}(\beta), i)) = \pi(\alpha, \beta, i)$$

o, equivalentemente, que si $(\alpha, \beta, i) \in a \times a \times 9$ entonces

$$f(p(\alpha, \beta, i)) = \pi(f(\alpha), f(\beta), i),$$

que es lo que había que probar. Más aún, la penúltima igualdad que hemos obtenido prueba que $\pi[\xi \times \xi \times 9] \subset \xi$, y trivialmente se cumple que $\phi_1[\xi] \subset \xi$, $\phi_2\xi] \subset \xi$, $E[\xi] \subset \xi$, pues estas tres funciones cumplen $\phi_1(\alpha) \leq \alpha$, $\phi_2(\alpha) \leq \alpha$, $E(\alpha) \leq \alpha$.

Como consecuencia, basta probar que si a y a^* son conjuntos de ordinales, $f : a \longrightarrow a^*$ es una semejanza y se cumple

$$\pi[a \times a \times 9] \subset a, \quad \phi_1[a] \subset a, \quad \phi_2[a] \subset a, \quad E[a] \subset a,$$

$$\pi[a^* \times a^* \times 9] \subset a^*, \quad \phi_1[a^*] \subset a^*, \quad \phi_2[a^*] \subset a, \quad E[a^*] \subset a^*,$$

entonces

$$\bigwedge \alpha\beta \in a(\mathcal{F}(\alpha) \in \mathcal{F}(\beta) \leftrightarrow \mathcal{F}(\alpha^*) \in \mathcal{F}(\beta^*)),$$
$$\bigwedge \alpha\beta \in a(\mathcal{F}(\alpha) = \mathcal{F}(\beta) \leftrightarrow \mathcal{F}(\alpha^*) = \mathcal{F}(\beta^*)).$$

donde usamos la abreviatura $\alpha^* = f(\alpha)$. Bajo estas hipótesis se cumple que

$$\bigwedge i \in 9 \bigwedge \alpha\beta \in a\ \pi(\alpha, \beta, i)^* = \pi(\alpha^*, \beta^*, i).$$

Notemos que no es exactamente lo que hemos probado antes, sino que esta relación se deduce aplicando la que hemos demostrado a las dos semejanzas $f_1 : a \rightarrow \xi$, $f_2 : a^* \longrightarrow \xi$ (teniendo en cuenta que $f = f_1 \circ f_2^{-1}$):

$$f_1(\pi(\alpha, \beta, i)) = \pi(f_1(\alpha), f_1(\beta), i) = \pi(f_2(f(\alpha)), f_2(f(\beta)), i)$$
$$= f_2(\pi(f(\alpha), f(\beta), i)).$$

También es claro que si $\alpha = \pi(\gamma, \delta, i) \in a$, entonces $\alpha^* = \pi(\gamma^*, \delta^*, i)$.

Terminaremos la prueba por inducción sobre el máximo de α y β. Observemos que podemos tomar un cardinal κ mayor que $\bigcup a \cup \bigcup a^*$ y así todas las clases $\mathcal{F}$, E, i, etc. pueden sustituirse por sus restricciones a κ o L_κ, que son conjuntos que podemos emplear como parámetros (junto con κ o L_κ) a la hora de definir conjuntos. Así, por ejemplo, el conjunto de los ordinales $\eta \in a$ tales que para cada α, $\beta \in a$ con $\eta = \alpha \cup \beta$ se cumplen las dos fórmulas que hemos de probar está bien definido por una sencilla fórmula Δ_0 en función de tales parámetros.

Así pues, suponemos como hipótesis de inducción que las dos fórmulas se cumplen cuando α, $\beta \in a \cap \eta$ y suponemos que α, $\beta \in a$ cumplen $\eta = \alpha \cup \beta$.

Si $\alpha = \beta = \eta$ la conclusión es trivial, pues las dos partes de la primera fórmula son falsas y las dos de la segunda son verdaderas. Por lo tanto, podemos suponer que, o bien $\beta < \alpha = \eta$ o bien $\alpha < \beta = \eta$. Por lo tanto, lo que hemos de probar es que, para todo α, $\beta \in a \cap \eta$,

$$\mathcal{F}(\alpha) \in \mathcal{F}(\eta) \leftrightarrow \mathcal{F}(\alpha^*) \in \mathcal{F}(\eta^*), \qquad \mathcal{F}(\eta) \in \mathcal{F}(\beta) \leftrightarrow \mathcal{F}(\eta^*) \in \mathcal{F}(\beta^*),$$

$$\mathcal{F}(\eta) = \mathcal{F}(\beta) \leftrightarrow \mathcal{F}(\eta^*) = \mathcal{F}(\beta^*).$$

Llamamos $M = \mathcal{F}[a]$, $M_\eta = \mathcal{F}[a \cap \eta]$, $M^* = \mathcal{F}[a^*]$, $M^*_\eta = \mathcal{F}[a^* \cap \eta]$, de modo que $M_\eta \subset M$, $M^*_\eta \subset M^*$. La hipótesis de inducción nos permite definir una biyección $h : M_\eta \longrightarrow M^*_\eta$ de modo que $\bigwedge \alpha \in a \cap \eta\ h(\mathcal{F}(\alpha)) = \mathcal{F}(\alpha^*)$ y

$$\bigwedge xy \in M_\eta (x \in y \leftrightarrow h(x) \in h(y)).$$

Veamos algunas propiedades:

a) Si x, $y \in M$, entonces $F_i(x, y) \in M$, para $i = 1, \ldots, 8$.

Se sigue inmediatamente de la clausura de a respecto de π.

b) Si $x \in M$, entonces $i(x) \in a$.

En efecto, tenemos que $\{x\} \in M$ por el apartado anterior, luego existe $\alpha \in a$ tal que $\mathcal{F}(\alpha) = \{x\}$ y necesariamente $\mathcal{F}(E(\alpha)) = x$, luego

$$i(x) = i(\mathcal{F}(E(\alpha))) = E(\alpha) \in a$$

porque $E[a] \subset a$.

c) Si $x \in M$ y $x \neq \varnothing$, entonces $x \cap M \neq \varnothing$.

Sea $\alpha \in a$ tal que $x = \mathcal{F}(\alpha)$. Entonces $\beta = E(\alpha) \in a$, luego $\mathcal{F}(\beta) \in x \cap M$.

d) Si $\{x, y\} \in M$, entonces x, $y \in M$.

En efecto, por el apartado anterior $x \in M$ o bien $y \in M$. Suponiendo, por ejemplo, $x \in M$, entonces $\{x\} \in M$ por a) y, en caso de que $y \neq x$, también $\{y\} = \{x, y\} \setminus \{x\} \in M$ por a), luego $y \in M$ por c).

e) Si $(x, y) \in M$, entonces x, $y \in M$, e igualmente, si $(x, y, z) \in M$, entonces x, y, $z \in M$.

Basta aplicar el apartado anterior.

f) Si $x \in M_\eta \land y \in M \cap x$, entonces $y \in M_\eta$.

Sea $\alpha = i(x) \in a$. Sabemos que $i(y) < i(x) < \eta$, luego $y \in M_\eta$.

g) $\mathcal{F}(\eta) \cap M \subset M_\eta$.

Tenemos que $\mathcal{F}(\eta) \subset \mathcal{F}[\eta]$, luego si $y \in \mathcal{F}(\eta) \cap M$ se cumple que $i(y) < \eta \cap a$, luego $y \in M_\eta$.

h) Si $\{x, y\} \in M_\eta$ entonces x, $y \in M_\eta$, e igualmente con (x, y) o (x, y, z).

Por d), e) y f).

Observemos que, por la simetría de las hipótesis sobre a y a^*, todos los resultados que acabamos de probar valen igualmente para a^*, M^*, M^*_η, etc. En lo sucesivo escribiremos $x^* = h(x)$, de modo que el asterisco indicará la aplicación de h cuando se aplique a elementos de M_η y f cuando se aplique a elementos de a.

Veamos que si x, y, $z \in M_\eta$, entonces

$$z = \{x, y\} \leftrightarrow z^* = \{x^*, y^*\}.$$

Por simetría basta probar una implicación. Si $z^* = \{x^*, y^*\}$, entonces x^*, $y^* \in z^*$, luego x, $y \in z$, luego $\{x, y\} \subset z$. Por a) tenemos que $z \setminus \{x, y\} \in M$. Si no es vacío, por c) sabemos que existe $u \in M$ tal que $u \in z \setminus \{x, y\}$. Por f) $u \in M_\eta$, luego $u \in z \land u \neq x \land u \neq y$ y, en consecuencia, $u^* \in z^* \land u^* \neq x^* \land u^* \neq y^*$, contradicción. Así pues, $z = \{x, y\}$.

Aplicando este hecho obtenemos fácilmente que

$$z = (x, y) \leftrightarrow z^* = (x^*, y^*), \qquad z = (w, x, y) \leftrightarrow z^* = (w^*, x^*, y^*).$$

Con esto ya estamos en condiciones de demostrar las tres equivalencias:

1. $\mathcal{F}(\alpha) \in \mathcal{F}(\eta) \leftrightarrow \mathcal{F}(\alpha^*) \in \mathcal{F}(\eta^*)$,
2. $\mathcal{F}(\eta) \in \mathcal{F}(\beta) \leftrightarrow \mathcal{F}(\eta^*) \in \mathcal{F}(\beta^*)$,
3. $\mathcal{F}(\eta) = \mathcal{F}(\beta) \leftrightarrow \mathcal{F}(\eta^*) = \mathcal{F}(\beta^*)$.

En primer lugar veamos que la primera implica las otras dos. Empezamos por la tercera: si $\mathcal{F}(\eta) \neq \mathcal{F}(\beta)$, entonces $\mathcal{F}(\eta) \setminus \mathcal{F}(\beta) \neq \varnothing$ o bien $\mathcal{F}(\beta) \setminus \mathcal{F}(\eta) \neq \varnothing$, y ambos conjuntos están en M, luego existe un $u \in M$ tal que $u \in \mathcal{F}(\eta) \setminus \mathcal{F}(\beta)$ o bien $u \in \mathcal{F}(\beta) \setminus \mathcal{F}(\eta)$. En cualquier caso $u \in M_\eta$, por f) o por g). Así pues, $u = \mathcal{F}(\alpha)$, con $\alpha \in a \cap \eta$.

Usando 1.) y la hipótesis de inducción es claro que

$$u^* = \mathcal{F}(\alpha^*) \in \mathcal{F}(\eta^*) \setminus \mathcal{F}(\beta^*) \lor u^* \in \mathcal{F}(\beta^*) \setminus \mathcal{F}(\eta^*),$$

luego $\mathcal{F}(\eta^*) \neq \mathcal{F}(\beta^*)$. El recíproco se demuestra igualmente.

Ahora demostramos 2. a partir de 1. y 3. Supongamos que $\mathcal{F}(\eta) \in \mathcal{F}(\beta)$. Sea $\alpha = i(\mathcal{F}(\eta))$, de modo que $\alpha < \beta < \eta$. Por b) tenemos que $\alpha \in a \cap \eta$ y $\mathcal{F}(\alpha) = \mathcal{F}(\eta)$. Por la hipótesis de inducción y 3. obtenemos que $\mathcal{F}(\alpha^*) \in \mathcal{F}(\beta^*)$ y $\mathcal{F}(\alpha^*) = \mathcal{F}(\eta^*)$, luego $\mathcal{F}(\eta^*) \in \mathcal{F}(\beta^*)$. La implicación inversa es análoga.

Con esto sólo nos falta demostrar 1. y, de nuevo por simetría, basta probar una implicación. Suponemos que $\mathcal{F}(\alpha) \in \mathcal{F}(\eta)$, con $\alpha \in a \cap \eta$, y hemos de demostrar que $\mathcal{F}(\alpha^*) \in \mathcal{F}(\eta^*)$. Sea $\eta = \pi(\gamma, \delta, j)$, donde γ, $\delta \in a$ (con lo que $\eta^* = (\gamma^*, \delta^*, j))$, y vamos a distinguir nueve casos según el valor de j.

- Si $j = 0$ entonces $\mathcal{F}(\eta) = \mathcal{F}[\eta]$ y $\mathcal{F}(\eta^*) = \mathcal{F}[\eta^*]$, luego se cumple trivialmente que $\mathcal{F}(\alpha^*) \in \mathcal{F}(\eta^*)$.

  En todos los casos siguientes $j > 0$, luego $\gamma, \delta < \eta$.

- Si $j = 1$ entonces $\mathcal{F}(\eta) = \{\mathcal{F}(\gamma), \mathcal{F}(\delta)\} \wedge \mathcal{F}(\eta^*) = \{\mathcal{F}(\gamma^*), \mathcal{F}(\delta^*)\}$. Por lo tanto, $\mathcal{F}(\alpha) = \mathcal{F}(\gamma) \vee \mathcal{F}(\alpha) = \mathcal{F}(\delta)$ y, por hipótesis de inducción, $\mathcal{F}(\alpha^*) = \mathcal{F}(\gamma^*) \vee \mathcal{F}(\alpha^*) = \mathcal{F}(\delta^*)$, luego $\mathcal{F}(\alpha^*) \in \mathcal{F}(\eta^*)$.

- Si $j = 2$ entonces

  $$\mathcal{F}(\eta) = \{(u, v) \in \mathcal{F}(\gamma) \mid u \in v\}, \quad \mathcal{F}(\eta^*) = \{(u, v) \in \mathcal{F}(\gamma^*) \mid u \in v\}.$$

  Por lo tanto, $\mathcal{F}(\alpha) = (u, v) \in \mathcal{F}(\gamma)$ con $u \in v$. Por hipótesis de inducción tenemos que $\mathcal{F}(\alpha^*) \in \mathcal{F}(\gamma^*)$ y también hemos demostrado que u, $v \in M_\eta$ y que, al aplicar h, obtenemos $\mathcal{F}(\alpha^*) = (u^*, v^*)$, con $u^* \in v^*$ porque h es un isomorfismo. Por lo tanto $\mathcal{F}(\alpha^*) \in \mathcal{F}(\eta^*)$.

- Si $j = 3$ tenemos que $\mathcal{F}(\eta) = \mathcal{F}(\gamma) \setminus \mathcal{F}(\delta) \wedge \mathcal{F}(\eta^*) = \mathcal{F}(\gamma^*) \setminus \mathcal{F}(\delta^*)$, luego $\mathcal{F}(\alpha^*) \in \mathcal{F}(\eta^*)$ por hipótesis de inducción.

- Si $j = 4$ entonces

  $$\mathcal{F}(\eta) = \{(u, v) \in \mathcal{F}(\gamma) \mid u \in \mathcal{F}(\delta)\}, \quad \mathcal{F}(\eta^*) = \{(u, v) \in \mathcal{F}(\gamma^*) \mid u \in \mathcal{F}(\delta^*)\}$$

  y se concluye de forma similar al caso $j = 2$.

- Si $j = 5$ entonces

  $$\mathcal{F}(\eta) = \{x \in \mathcal{F}(\gamma) \mid \bigvee y\ (x, y) \in \mathcal{F}(\delta)\},$$

  $$\mathcal{F}(\eta^*) = \{x \in \mathcal{F}(\gamma^*) \mid \bigvee y\ (x, y) \in \mathcal{F}(\delta^*)\}.$$

  Por lo tanto, $\mathcal{F}(\alpha) \in \mathcal{F}(\gamma)$ y existe un y tal que $(\mathcal{F}(\alpha), y) \in \mathcal{F}(\delta)$. Por hipótesis de inducción $\mathcal{F}(\alpha^*) \in \mathcal{F}(\gamma^*)$. Hemos probado que $y \in M_\eta$ luego, aplicando h obtenemos que $(\mathcal{F}(\alpha^*), y^*) \in \mathcal{F}(\delta^*)$ (pues hemos probado que h conserva los pares ordenados). Esto implica que $\mathcal{F}(\alpha^*) \in \mathcal{F}(\eta^*)$.

- Los casos $j = 6, 7, 8$ son muy similares, así que veremos únicamente $j = 7$ como ejemplo. Tenemos que

$$\mathcal{F}(\eta) = \{(u, v, w) \in \mathcal{F}(\gamma) \mid (v, w, u) \in \mathcal{F}(\delta)\},$$

$$\mathcal{F}(\eta^*) = \{(u, v, w) \in \mathcal{F}(\gamma^*) \mid (v, w, u) \in \mathcal{F}(\delta^*)\}.$$

Así pues, $\mathcal{F}(\alpha) = (u, v, w) \in \mathcal{F}(\gamma)$ y $(v, w, u) \in \mathcal{F}(\delta)$. Hemos probado que u, v, $w \in M_\eta$, por lo que podemos aplicar h, que conserva las ternas, con lo que $\mathcal{F}(\alpha^*) = (u^*, v^*, w^*) \in \mathcal{F}(\gamma^*)$ y $(v^*, w^*, u^*) \in \mathcal{F}(\delta^*)$, luego $\mathcal{F}(\alpha^*) \in \mathcal{F}(\eta^*)$.

■

El teorema anterior puede enunciarse equivalentemente como sigue:

Teorema 3.40 (Teorema de condensación) *Sea $a \subset \Omega$ un conjunto de ordinales y sea $f : a \longrightarrow \xi$ la semejanza entre a y su ordinal. Supongamos que*

$$\pi[a \times a \times 9] \subset a, \quad \phi_1[a] \subset a, \quad \phi_2[a] \subset a, \quad E[a] \subset a.$$

Entonces la relación de pertenencia es extensional en $\mathcal{F}[a]$, su colapso de transitivo es $\mathcal{F}[\xi]$ y la función colapsante $h : \mathcal{F}[a] \longrightarrow \mathcal{F}[\xi]$ cumple

$$\bigwedge \alpha \in a\ h(\mathcal{F}(\alpha)) = \mathcal{F}(f(\alpha)).$$

Demostración: Lo que prueba el teorema anterior es que la aplicación h está bien definida y es un isomorfismo. Como sabemos que $\mathcal{F}[\xi]$ es transitivo, concluimos que la relación de pertenencia es extensional en $\mathcal{F}[a]$ y que h es la función colapsante. ■

Como primera aplicación:

Teorema 3.41 *Si κ es un cardinal infinito, entonces $L \cap \mathcal{P}L_\kappa \subset L_{\kappa^+}$.*

Demostración: Sea $x \in L \cap \mathcal{P}L_\kappa$, de modo que $x = \mathcal{F}(\zeta)$, para un cierto ordinal ζ. Sea $\mu > \zeta$ un cardinal infinito y sea $a_0 = \kappa \cup \{\zeta\} \subset \mu$. Consideramos las funciones

$$\pi : \mu \times \mu \times 9 \longrightarrow \mu, \quad \phi_1, \phi_2, E : \mu \longrightarrow \mu,$$

con las cuales definimos $I : \mathcal{P}_\kappa\mu \longrightarrow \mathcal{P}_\kappa\mu$ (donde $\mathcal{P}_\kappa\mu$ representa el conjunto de los subconjuntos de μ de cardinal κ) mediante

$$I(a) = a \cup \pi[a \times a \times 9] \cup \phi_1[a] \cup \phi_2[a] \cup E[a].$$

Puesto que no contamos con el axioma de elección, aquí va a ser crucial observar que podemos construir explícitamente una biyección de $I(a)$ en κ a partir de una biyección de a en κ. Esto se debe a que sabemos ordenar explícitamente $\kappa \times \kappa \times 9$ con ordinal κ, lo que nos permite definir una aplicación inyectiva $I(a) \longrightarrow \kappa \times \kappa \times \kappa \times \kappa \times \kappa$, que a su vez nos permite construir una aplicación inyectiva $I(a) \longrightarrow \kappa$ que se convierte en biyectiva usando la prueba del teorema de Cantor-Bernstein.

Más concretamente, esto se traduce en que sabemos construir una aplicación $J : {}^\kappa\mu \longrightarrow {}^\kappa\mu$ tal que si $g : \kappa \longrightarrow a$ es biyectiva, entonces $J(g) : \kappa \longrightarrow I(a)$ biyectiva. Es claro que todas las definiciones necesarias se hacen Δ_0 acotando todas las variables mediante parámetros adecuados μ, $\mathcal{P}\mu$, ${}^\kappa\mu$, $\mathcal{P}({}^\kappa\mu)$, etc.

Ahora podemos aplicar el teorema de recursión para obtener una aplicación $t : \omega \longrightarrow \mathcal{P}_\kappa\mu$ determinada por $t(0) = a_0$ y $\bigwedge n \in \omega\ t(n+1) = I(f(n))$. Si llamamos $a_n = t(n)$, igualmente podemos definir por recurrencia biyecciones $g_n : \kappa \longrightarrow a_n$, las cuales permiten justificar que el conjunto $a = \bigcup\limits_n a_n$ tiene cardinal κ (sin necesidad de usar el axioma de elección.)

Esta construcción hace que a satisfaga las hipótesis del teorema anterior, y además $|\xi| = \kappa$, por lo que $\xi < \kappa^+$. Como $\kappa \subset a_0 \subset a$, la semejanza $f : a \longrightarrow \xi$ se restringe claramente a la identidad en κ. Por consiguiente, la función colapsante $h : \mathcal{F}[a] \longrightarrow \mathcal{F}[\xi] \subset L_{\kappa^+}$ es la identidad sobre L_κ, lo que a su vez implica que $h(x) = \{h(y) \mid y \in x\} = x$, luego $x \in L_{\kappa^+}$. ■

Teorema 3.42 *L es un modelo transitivo de* $\mathrm{M}^+ + \mathrm{H}$.

Demostración: Hemos de probar que L cumple los axiomas AP y H. Para el axioma de partes basta probar que si $x \in L$ entonces $L \cap \mathcal{P}x \in L$. En efecto, existe un cardinal infinito κ tal que $x \in L_\kappa$ (luego $x \subset L_\kappa$), luego $L \cap \mathcal{P}x \subset L \cap \mathcal{P}L_\kappa \subset L_{\kappa^+}$, luego

$$L \cap \mathcal{P}x = \{u \in L_{\kappa^+} \mid u \subset x\} \in L$$

por 3.37.

Para el axioma H tomamos $u \in L$. Sabemos que u admite un buen orden, luego se puede biyectar con un cardinal κ. Llamamos $T = L_{\kappa^+} \in L$ y hemos de probar que si $z \in L$ es transitivo y $(\overline{\overline{z}} \leq \overline{\overline{u}})^L$, entonces $z \subset T$. Por hipótesis $|z| \leq \kappa$, luego $a_0 = i[z] \subset \kappa$ también cumple $|a_0| \leq \kappa$. La misma construcción del teorema 3.41 nos permite construir un conjunto de ordinales a en las hipótesis del teorema de condensación y tal que $a_0 \subset a$, $|a| = \kappa$. Consideramos entonces la función colapsante $h : \mathcal{F}[a] \longrightarrow \mathcal{F}[\xi] \subset L_{\kappa^+} = T$. Como $a_0 \subset a$, tenemos que $z \subset \mathcal{F}[a]$ y como z es transitivo es claro que $h|_z$ es la identidad, luego $z \subset T$. ■

Notemos que en la prueba del teorema anterior hemos visto que todo conjunto transitivo $z \in L$ de cardinal infinito κ está contenido en L_{κ^+}. En particular, todo conjunto $z \in L$ transitivo de cardinal $|z| < \kappa$ está contenido en L_κ (pues si $\mu = \omega \cup |z| < \kappa$ entonces $z \subset L_{\mu^+} \subset L_\kappa$). Usaremos esto para probar el teorema siguiente:

Teorema 3.43 *Para todo cardinal infinito κ se cumple que $L_\kappa \cap \Omega = \kappa$. En particular $\Omega \subset L$.*

Demostración: Veamos en primer lugar que $\Omega \subset L$. En caso contrario, existe un ordinal α no constructible. Sea κ un cardinal infinito tal que $\alpha < \kappa$. Entonces, si $\beta \in L$ es un ordinal, también $\beta+1 \in L$, luego tiene que ser $\beta+1 < \alpha$, luego $|\beta+1| < \kappa$ y, por la observación anterior al teorema, $\beta \in \beta+1 \subset L_\kappa$, es decir, que L_κ contiene a todos los ordinales constructibles. Pero entonces, por el teorema 3.37,

$$\lambda = \{\beta \in L_\kappa \mid \beta \in \Omega\} \in L_{\kappa^+} \subset L$$

y λ es claramente un ordinal, luego $\lambda \in L_\kappa$, luego $\lambda \in \lambda$, contradicción.

Del mismo modo, si $\beta \in \kappa$, tenemos que $|\beta| < \kappa$ y, como ya sabemos que $\beta+1 \in L$, nuevamente $\beta \in \beta+1 \subset L_\kappa$, luego $\kappa \subset L_\kappa \cap \Omega$. Recíprocamente, si $\alpha \in L_\kappa \cap \Omega$, existe un $\zeta < \kappa$ tal que $\alpha \in \mathcal{F}[\zeta]$, luego $|\alpha| \leq |\zeta| < \kappa$, luego $\alpha < \kappa$. ■

Y finalmente:

Teorema 3.44 *L es un modelo transitivo de* MAC$^+$+H+V=L.

Demostración: Sabemos que L es un modelo de M$^+$+H, luego todos los teoremas que hemos probado en esta sección se cumplen relativizados a L. En particular, para cada ordinal η (que está en L por el teorema anterior) existe la función $\mathcal{F}^L_\eta : \eta \longrightarrow L$ que cumple la relativización del teorema 3.33. Ahora bien, es fácil ver que el orden en Ω, el orden en $T = \Omega\times\Omega\times 9$, las funciones π, ϕ_1, ϕ_2 y n y las funciones F_i son absolutas para modelos transitivos de M$_0^+$+H, de donde se sigue que la definición de $\mathcal{F}_\eta$ también lo es, es decir, que $\mathcal{F}^L_\eta = \mathcal{F}_\eta$ para todo ordinal η, por lo que

$$\bigwedge x \in L((x \in L)^L \leftrightarrow x \in L)$$

o, equivalentemente, $\bigwedge x \in L\ (x \in L)^L$, de modo que en L se cumple $V = L$.

A su vez, ya hemos visto que $V = L$ implica el axioma de elección, luego éste también se cumple en L. ■

Las pruebas de consistencia que hemos obtenido hasta aquí se resumen en el teorema siguiente:

Teorema 3.45 *Si* M$_0$+AI *es consistente, también lo es* MAC$^+$+H+V=L.

En particular son consistentes con MAC$^+$+H+$V = L$ todas las afirmaciones incluidas en el teorema 3.32.

Del teorema 3.41 se sigue fácilmente la hipótesis del continuo generalizada:

Teorema 3.46 (MAC$^+$+H+$V = L$) *Para todo cardinal infinito κ se cumple que $|\mathcal{P}\kappa| = \kappa^+$.*

Demostración: Basta tener en cuenta que $|L_\kappa| = \kappa$, luego

$$|\mathcal{P}\kappa| = |\mathcal{P}L_\kappa| \leq |L_{\kappa^+}| = \kappa^+.$$

La desigualdad contraria la proporciona el teorema de Cantor. ■

Capítulo IV

La teoría de Kripke-Platek

La teoría de Mac Lane incluye al axioma de partes como uno de sus axiomas básicos, lo cual permite sacar mucho partido al axioma de Δ_0-especificación, pues con AP es posible a menudo construir parámetros adecuados para acotar las variables en las definiciones de conjuntos. La principal característica de la teoría que vamos a estudiar aquí es la ausencia del axioma de partes, que es compensada con otro axioma de existencia de conjuntos, el esquema de Δ_0-recolección.

4.1 Los axiomas de KP

La *teoría de conjuntos (restringida) de Kripke-Platek* (KP^*) es la teoría determinada por los axiomas siguientes:

Extensionalidad	$\bigwedge xy(\bigwedge u(u \in x \leftrightarrow u \in y) \rightarrow x = y)$
Par	$\bigwedge xy \bigvee z(x \in z \wedge y \in z)$
Unión	$\bigwedge x \bigvee y \bigwedge u \in x \bigwedge v \in u\ v \in y$
$\boldsymbol{\Delta}_0$-especificación	$\bigwedge x \bigvee y \bigwedge u(u \in y \leftrightarrow (u \in x \wedge \phi(u)))$ $(*)$
$\boldsymbol{\Delta}_0$-recolección	$\bigwedge u \bigvee v\, \phi(u,v) \rightarrow \bigwedge a \bigvee b \bigwedge u \in a \bigvee v \in b\ \phi(u,v)$ $(*)$
$\boldsymbol{\Pi}_1$-Regularidad	$\bigvee u\, \phi(u) \rightarrow \bigvee u(\phi(u) \wedge \bigwedge v \in u\, \neg\phi(v))$ $(**)$

$(*)$ para toda fórmula ϕ (con posibles parámetros) de clase Δ_0.
$(**)$ para toda fórmula ϕ (con posibles parámetros) de clase Π_1.

La teoría (completa) de Kripke-Platek (KP) es la que resulta de extender el axioma de regularidad a fórmulas arbitrarias, no necesariamente de clase Π_1.

Notemos que KP^* extiende a T, pues el esquema de Δ_0-especificación implica los axiomas del conjunto vacío y de la diferencia (y las versiones "fuertes" de los axiomas del par y de la unión).

Por lo tanto en KP^* pueden definirse los conceptos conjuntistas básicos (uniones, intersecciones, complementos, pares ordenados) así como los ordinales y los números naturales y, por regularidad, las fórmulas $x \in \Omega$ y $x \in \omega$ son Δ_0.

Observemos que aplicando el axioma de regularidad a la fórmula $u \in x$ obtenemos el axioma de regularidad para conjuntos, es decir,

$$\bigwedge x(x \neq \varnothing \rightarrow \bigvee y(y \in x \land x \cap y = \varnothing)).$$

Recíprocamente, en Z podemos probar el esquema de regularidad para fórmulas arbitrarias $\phi(u)$, pues si existe un conjunto u_0 que cumple $\phi(u_0)$, podemos definir el conjunto

$$u = \{v \in u_0 \mid \phi(v)\}.$$

Si $u = \varnothing$, entonces u_0 es minimal para ϕ y, en caso contrario, un elemento $\in$-minimal para u es también minimal para ϕ.

El esquema de Π_1-regularidad es claramente equivalente al

Principio de $\boldsymbol{\Sigma_1^\epsilon}$-inducción Si $\phi(u)$ es una fórmula de clase Σ_1 (con posibles parámetros), entonces

$$\bigwedge x\,(\bigwedge u \in x\, \phi(u) \rightarrow \phi(x)) \rightarrow \bigwedge x\, \phi(x).$$

En particular:

Principio de $\boldsymbol{\Sigma_1}$-inducción transfinita Si $\phi(u)$ es una fórmula de clase Σ_1 (con posibles parámetros), entonces

$$\bigwedge \alpha \in \Omega\, (\bigwedge \delta \in \alpha\, \phi(\delta) \rightarrow \phi(\alpha)) \rightarrow \bigwedge \alpha \in \Omega\, \phi(\alpha).$$

(Basta aplicar el principio anterior a la fórmula

$$\Psi(x) \equiv (x \in \Omega \land \phi(x)) \lor x \notin \Omega).$$

Lo mismo es válido cambiando Ω por ω. Obviamente, en KP estos principios son válidos para fórmulas cualesquiera, no necesariamente Σ_1.

Aquí trabajaremos en KP^* (salvo que indiquemos explícitamente lo contrario) porque es una subteoría de MAC^++H (teorema 3.32). Más precisamente, según el teorema 3.31, tenemos que KP^* es una subteoría de T+ Δ_0-especificación + Δ_0-recolección fuerte. Por otra parte, KP^*+AP extiende a M_0R.

En particular, tenemos que la consistencia de M implica la consistencia de KP^*+AI+AP, y la de ZC implica la de KP+AI+AP+AE.

Conviene observar también que el esquema de Δ_0-recolección admite una reformulación "local" equivalente:

$$\bigwedge a(\bigwedge u \in a \bigvee v\, \phi(u,v) \rightarrow \bigvee b \bigwedge u \in a \bigvee v \in b\ \phi(u,v)).$$

Es obvio que la versión "local" implica la "global", y para probar la implicación contraria, si suponemos $\bigwedge u \in a \bigvee v\, \phi(u,v)$, aplicamos la versión global a la fórmula Δ_0 dada por $\psi(u,v) \equiv (u \in a \land \phi(u,v)) \lor (u \notin a \land v = \varnothing)$.

4.2 Producto cartesiano, relaciones, funciones

En KF o M_0 se prueba la existencia del producto cartesiano $A \times B$ por especificación a partir de $\mathcal{P}\mathcal{P}(A \cup B)$. En KP* no podemos seguir este camino, pero igualmente podemos justificar la existencia de productos cartesianos.

Para ello recordamos que la fórmula $z = (x, y)$ es (equivalente en T a una fórmula) Δ_0. En efecto:

$$z = (x, y) \leftrightarrow \bigvee uv \in z(u = \{x\} \land v = \{x, y\}) \land \bigwedge u \in z(u = \{x\} \lor u = \{x, y\}),$$

con lo que basta probar que la fórmula $u = \{x, y\}$ es Δ_0, lo cual se sigue a su vez de la equivalencia

$$u = \{x, y\} \leftrightarrow x \in u \land y \in u \land \bigwedge v \in u\,(v = x \lor v = y).$$

Así pues, por Δ_0-recolección, para todo conjunto A existe un conjunto Y tal que $\bigwedge u \in A\ (u, b) \in Y$. Aplicando el axioma de Δ_0-especificación al conjunto Y obtenemos la existencia del conjunto $A \times \{b\}$. Seguidamente consideramos la fórmula Δ_0 dada por $\phi(u, v) \equiv v = A \times \{u\}$ y obtenemos la existencia del conjunto $Z = \{A \times \{u\} \mid u \in B\}$. A su vez esto implica la existencia de

$$A \times B = \bigcup Z.$$

A partir de aquí es inmediato que todas las definiciones sobre relaciones sobre relaciones y funciones presentadas en la sección 2.2 para KF son válidas también para KP* con excepción de la del conjunto Y^X, que requiere AP.

Hay una única excepción aparente, que es la definición del conjunto cociente A/R, que también se construye mediante AP, pero que ahora podemos construir mediante Δ_0-recolección. Basta observar que, si R es una relación de equivalencia en A,

$$v = [u]_R \leftrightarrow \bigwedge x \in v(x \in A \land x\,R\,u) \land \bigwedge x \in A(x\,R\,u \to x \in v),$$

luego la fórmula $v = [u]_R$ es Δ_0, luego existe un conjunto B que contiene a las clases de equivalencia todos los elementos de A, luego podemos definir

$$A/R = \{v \in B \mid \bigvee u \in A\ v = [u]_R\}.$$

Observemos que, en general, la fórmula $u = (u_1, \ldots, u_n)$ es Δ_0, pues

$$u = (u_1, \ldots, u_n) \leftrightarrow \bigvee x \in u \bigvee y \in x(y = (u_2, \ldots, u_n) \land u = (u_1, y))$$

y podemos razonar por inducción. De aquí se sigue inmediatamente la siguiente variante del axioma de Δ_0-especificación:

Teorema 4.1 *Si ϕ es una fórmula Δ_0, la fórmula siguiente es un teorema de* KP:

$$\bigwedge x_1 \cdots x_n \bigvee y \bigwedge u(u \in y \leftrightarrow \bigvee u_1 \in x_1 \cdots \bigvee u_n \in x_n$$
$$(u = (u_1, \ldots, u_n) \land \phi(u_1, \ldots, u_n))).$$

Equivalentemente, existe el conjunto

$$\{(u_1, \ldots, u_n) \in x_1 \times \cdots \times x_n \mid \phi(u_1, \ldots, u_n)\}.$$

4.3 Recolección, especificación y reemplazo

En esta sección demostraremos en KP^* versiones más fuertes de los esquemas de recolección y especificación que hemos tomado como axiomas, así como una versión débil del esquema de reemplazo de ZFC.

Recordemos que si T es una teoría axiomática sobre el lenguaje formal de la teoría de conjuntos, una fórmula es Σ_1^T si es equivalente en T a una fórmula de tipo $\bigvee x\,\phi$, donde ϕ es una fórmula Δ_0.

Teorema 4.2 *Si T es una extensión de* KP, *la clase de fórmulas Σ_1^T es cerrada para $\land, \lor, \bigwedge x \in y, \bigvee x \in y, \bigvee x$.*

Demostración: Si dos fórmulas son equivalentes a $\bigvee x\,\phi$ y $\bigvee x\,\psi$ respectivamente, con ϕ y ψ de clase Δ_0, su disyunción es equivalente a

$$\bigvee x\,\phi \lor \bigvee x\,\psi \leftrightarrow \bigvee x(\phi \lor \psi).$$

Si dos fórmulas son equivalentes a $\bigvee x\,\phi$ y a $\bigvee y\,\psi$, respectivamente con ϕ y ψ de clase Δ_0 (donde podemos suponer que x no está libre en ψ y que y no está libre en ϕ), entonces su conjunción es equivalente a

$$\bigvee x\,\phi \land \bigvee y\,\psi \leftrightarrow \bigvee xy(\phi \land \psi) \leftrightarrow \bigvee z \bigvee xy \in z(\phi \land \psi).$$

Similarmente, $\bigvee z \bigvee x\,\phi \leftrightarrow \bigvee y \bigvee xz \in y\,\phi, \qquad \bigvee z \in w \bigvee x\,\phi \leftrightarrow \bigvee x \bigvee z \in w\,\phi.$

El caso más delicado es el de $\bigwedge x \in y$. Si una fórmula ϕ_0 es equivalente a $\bigvee z\,\phi$, donde ϕ es Δ_0, entonces, usando el axioma de Δ_0-recolección:

$$\bigwedge x \in y \bigvee z\,\phi_0(x,z) \leftrightarrow \bigwedge x \in y \bigvee z\,\phi(x,z) \leftrightarrow \bigvee y' \bigwedge x \in y \bigvee z \in y'\,\phi(x,z).$$

■

Definición 4.3 Llamaremos *fórmulas* Σ_1 a las que se construyen a partir de las fórmulas de clase Δ_0 mediante aplicaciones de $\land$, $\lor$, $\bigwedge x \in y$, $\bigvee x \in y$, $\bigvee x$, mientras que las *fórmulas* Π_1 son las que se construyen del mismo modo pero cambiando $\bigvee x$ por $\bigwedge x$.

Claramente, toda fórmula Δ_0 es de clase Σ_1 y Π_1, y todas las fórmulas Σ_1 (resp. Π_1) son $\Sigma_1^{\mathrm{KP}^*}$ (resp. $\Pi_1^{\mathrm{KP}^*}$) por el teorema anterior. No obstante, vamos a ver que para este tipo de fórmulas podemos encontrar explícitamente una fórmula equivalente de tipo $\bigvee x\,\phi$ (resp. $\bigwedge x\,\phi$) con ϕ de clase Δ_0.

Si ϕ es una fórmula Σ_1 y x es una variable que no esté en ϕ, llamamos $\phi^{(x)}$ a la fórmula Δ_0 que resulta de sustituir en ϕ cada cuantificador no acotado $\bigwedge u$ por $\bigwedge u \in x$.

El teorema siguiente se demuestra trivialmente por inducción sobre la longitud de la fórmula:

Teorema 4.4 *Si ϕ es una fórmula de clase Σ_1 y x, y son variables que no están en ϕ, entonces las fórmulas siguientes son teoremas lógicos:*

$$\phi^{(x)} \land x \subset y \to \phi^{(y)}, \qquad \phi^{(x)} \to \phi.$$

La versión explícita del teorema 4.2 para fórmulas Σ_1 es el teorema siguiente, del que obtendremos muchas consecuencias:

Teorema 4.5 (Σ_1-reflexión) *Si ϕ es una fórmula de clase Σ_1 y x es una variable que no está en ϕ, la fórmula $\phi \leftrightarrow \bigvee x\, \phi^{(x)}$ es un teorema de* KP*.

Demostración: Una implicación es inmediata por el teorema anterior. Probamos la contraria por inducción sobre la longitud de ϕ. Si ϕ es de clase Δ_0 entonces $\phi \equiv \phi^{(x)}$ y el resultado es trivial.

Si $\phi \equiv \psi_1 \land \psi_2$, entonces $\phi^{(x)} \equiv \psi_1^{(x)} \land \psi_2^{(x)}$. Por hipótesis de inducción tenemos que

$$\psi_1 \leftrightarrow \bigvee x\, \psi_1^{(x)}, \qquad \psi_2 \leftrightarrow \bigvee x\, \psi_2^{(x)}.$$

Si se cumple $\phi \equiv \psi_1 \land \psi_2$, entonces existen x_1 y x_2 tales que $\psi_1^{(x_1)}$ y $\psi_2^{(x_2)}$. Si llamamos $x = x_1 \cup x_2$ entonces tenemos $\psi_1^{(x)} \land \psi_2^{(x)}$ por el teorema anterior, luego $\bigvee x\, \phi^{(x)}$.

Si $\phi \equiv \psi_1 \lor \psi_2$ la equivalencia es trivial:

$$\phi \leftrightarrow \bigvee x\, \psi_1^{(x)} \lor \bigvee x\, \psi_2^{(x)} \leftrightarrow \bigvee x(\psi_1^{(x)} \lor \psi_2^{(x)}) \leftrightarrow \bigvee x\, \phi^{(x)}.$$

Si $\phi \equiv \bigvee u \in v\, \psi$, entonces

$$\phi \leftrightarrow \bigvee u \in v \bigvee x\, \psi^{(x)} \leftrightarrow \bigvee x \bigvee u \in v\, \psi^{(x)} \equiv \bigvee x\, \phi^{(x)}.$$

Si $\phi \equiv \bigwedge u \in v\, \psi$, entonces, por hipótesis de inducción, $\phi \leftrightarrow \bigwedge u \in v \bigvee x\, \psi^{(x)}$. Suponiendo ϕ, por Δ_0-recolección existe un y tal que $\bigwedge u \in v \bigvee x \in y\, \psi^{(x)}$. Sea $x' = \bigcup y$. Así $\bigwedge u \in v\, \psi^{(x')}$, luego $\bigvee x \bigwedge u \in v\, \psi^{(x)} \equiv \bigvee x\, \phi^{(x)}$.

Si $\phi \equiv \bigvee u\, \psi$ y suponemos ϕ, entonces sea u tal que $\psi(u)$. Por hipótesis de inducción existe un x tal que $\psi^{(x)}$. Sea $x' = x \cup \{u\}$. Entonces también $\psi^{(x')}$, luego $\bigvee u \in x'\, \psi^{(x')} \equiv \phi^{(x')}$, luego $\bigvee x\, \phi^{(x)}$. ■

Con esto estamos en condiciones de "mejorar" los axiomas de KP*

Teorema 4.6 (Σ_1-recolección) *Para toda fórmula ϕ de clase Σ_1 la fórmula siguiente es un teorema de* KP*:

$$\bigwedge x(\bigwedge u \in x \bigvee v\, \phi(u,v) \to \bigvee y(\bigwedge u \in x \bigvee v \in y\, \phi(u,v) \land \bigwedge v \in y \bigvee u \in x\, \phi(u,v)).$$

Demostración: Por Σ_1-reflexión,

$$\bigwedge u \in x \bigvee v\, \phi(u,v) \to \bigvee z \bigwedge u \in x \bigvee v \in z\, \phi^{(z)}(u,v).$$

Por Δ_0-especificación existe el conjunto

$$y = \{v \in z \mid \bigvee u \in x\, \phi^{(z)}(u,v)\},$$

y claramente cumple lo pedido. ■

Teorema 4.7 ($\boldsymbol{\Sigma}_1$-reducción) *Si ϕ es una fórmula Π_1 y ψ es Σ_1, la fórmula siguiente es un teorema de* KP*:

$$\bigwedge x(\bigwedge u \in x(\phi(u) \rightarrow \psi(u)) \rightarrow$$

$$\bigvee y(\bigwedge u \in x(\phi(u) \rightarrow u \in y) \land \bigwedge u \in y(u \in x \land \psi(u)))).$$

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $\bigwedge u \in x(\phi(u) \rightarrow \psi(u))$ o, lo que es lo mismo, $\bigwedge u \in x(\neg\phi(u) \lor \psi(u))$. Como esta fórmula es equivalente a una fórmula Σ_1, por Σ_1-reflexión existe un z tal que $\bigwedge u \in x(\phi^{(z)}(u) \rightarrow \psi^{(z)}(u))$. Basta tomar $y = \{u \in x \mid \psi^{(z)}(u)\}$. ■

De aquí se sigue inmediatamente:

Teorema 4.8 ($\boldsymbol{\Delta}_1$-especificación) *Si ϕ es una fórmula Π_1 y ψ es Σ_1, la fórmula siguiente es un teorema de* KP*:

$$\bigwedge x(\bigwedge u \in x(\phi(u) \leftrightarrow \psi(u)) \rightarrow \bigvee y \bigwedge u(u \in y \leftrightarrow u \in x \land \psi(u))).$$

Observemos que lo que afirma el teorema anterior es que las fórmulas Δ_1^T, para cualquier teoría T que extienda a KP*, también definen subconjuntos de un conjunto dado (donde una fórmula es Δ_1^T si es equivalente en T tanto a una fórmula Σ_1 como a una fórmula Π_1).

Teorema 4.9 ($\boldsymbol{\Sigma}_1$-reemplazo) *Si ϕ es Σ_1, la fórmula siguiente es un teorema de* KP*:

$$\bigwedge x(\bigwedge u \in x \overset{1}{\bigvee} v\, \phi(u,v) \rightarrow \bigvee fy(f : x \longrightarrow y \ \textit{suprayectiva} \land \bigwedge u \in x\, \phi(u, f(u)))).$$

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $\bigwedge u \in x \overset{1}{\bigvee} v\, \phi(u,v)$. Por Σ_1-recolección, existe un y tal que $\bigwedge u \in x \bigvee v \in y\, \phi(u,v)$ y, claramente de hecho,

$$\bigwedge u \in x \overset{1}{\bigvee} v \in y\, \phi(u,v).$$

Ahora observamos que, para todo $w \in x \times y$ es equivalente

$$\bigvee uv(w = (u,v) \land \phi(u,v)) \leftrightarrow \neg \bigvee uvv'(w = (u,v) \land v \neq v' \land \phi(u,v')),$$

y ambas fórmulas (la de la derecha sin el negador) son Σ_1, luego por Δ_1-especificación existe el conjunto

$$f = \{(u,v) \in x \times y \mid \phi(u,v)\},$$

y cumple lo pedido. ■

4.4 Recursión en KP

En KP* pueden demostrarse teoremas de recursión fuertes. Para obtenerlos demostraremos primero la existencia de clausuras transitivas:

Teorema 4.10

$$\bigwedge x \overset{1}{\bigvee} y\,(x \subset y \land \bigcup y \subset y \land \bigwedge z(x \subset z \land \bigcup z \subset z \to y \subset z)).$$

DEMOSTRACIÓN: Llamamos $\phi(x, y)$ a la fórmula del enunciado sin los dos primeros cuantificadores. Claramente $\phi(x, y) \land \phi(x, y') \to y = y'$, es decir, si existe un y que cumple $\phi(x, y)$, es único. Sea

$$\psi(x, y) \equiv x \subset y \land \bigcup y \subset y \land \bigwedge u \in y \bigvee fn(n \in \omega \land f : n + 1 \longrightarrow y$$
$$\land\, f(0) = u \land f(n) \in x \land \bigwedge i \in n\; f(i) \in f(i + 1)).$$

Es fácil ver que ψ es Σ_1. Además $\psi(x, y) \to \phi(x, y)$, pues si $x \subset z$ y z es transitivo, se cumple que $y \subset z$. En efecto, dado $u \in y$, tomamos $f : n+1 \longrightarrow y$ de acuerdo con ψ y una simple inducción prueba que $\bigwedge i \leq n\; f(n-i) \in z$, luego en particular $u \in z$.

En particular $\psi(x, y) \land \psi(x, y') \to y = y'$, de modo que $\bigvee y\, \psi(x, y)$ es equivalente a $\overset{1}{\bigvee} y\, \phi(x, y)$. Veamos por Σ_1-inducción que $\bigwedge x \bigvee y\, \psi(x, y)$. Para ello suponemos que

$$\bigwedge u \in x \bigvee y\, \psi(u, y),$$

con lo que, de hecho, tenemos que $\bigwedge u \in x \overset{1}{\bigvee} y\, \psi(u, y)$. Por Σ_1-reemplazo existe $g : x \longrightarrow y$ suprayectiva tal que $\bigwedge u \in x\, \psi(u, g(u))$. Sea $z = x \cup \bigcup y$. Es fácil ver que z es un conjunto transitivo y $x \subset z$. Para probar que $\psi(x, z)$ tomamos $u \in z$. Si $u \in x$ basta tomar $n = 1$, $f = \{(0, u)\}$ y se cumple lo requerido. En caso contrario existe $v \in y$ tal que $u \in v$ y existe un $u' \in x$ tal que $\psi(u', v)$. Esto implica a su vez que existe $h : n+1 \longrightarrow v$ tal que $h(0) = u$, $h(n) \in u'$, etc. Basta tomar $f = h \cup \{(n + 1, u')\}$ y se cumple lo requerido.

Así pues, $\bigvee y\, \psi(x, y)$ y esto implica $\overset{1}{\bigvee} y\, \psi(x, y)$. Con esto queda probado que $\bigwedge x \overset{1}{\bigvee} y\, \psi(x, y)$ lo cual implica a su vez que $\bigwedge x \overset{1}{\bigvee} y\, \phi(x, y)$. Más aún, la unicidad implica que $\bigwedge xy(\phi(x, y) \leftrightarrow \psi(x, y))$. ■

Así pues, la definición de clausura transitiva

$$\operatorname{ct} x \equiv y \,|\, \bigcup y \subset y \land x \subset y \land \bigwedge z(x \subset z \land \bigcup z \subset z \to y \subset z).$$

es válida en KP*.

Teniendo en cuenta que las fórmulas $\neg\phi$ y ψ del teorema anterior son Σ_1, vemos que la fórmula $y = \operatorname{ct}(x)$ es Δ_1. La prueba del teorema anterior muestra también que

$$\operatorname{ct}(x) = x \cup \bigcup_{u \in x} \operatorname{ct}(u).$$

Ahora podemos probar un principio fuerte de Σ_1-inducción

Teorema 4.11 *Para toda fórmula $\phi(x)$ (resp. de clase Σ_1), la fórmula siguiente es un teorema de* KP *(resp. de* KP**):*

$$\bigwedge x(\bigwedge u \in \mathrm{ct}(x)\, \phi(u) \to \phi(x)) \to \bigwedge x\, \phi(x).$$

DEMOSTRACIÓN: Veamos por Σ_1-inducción que $\bigwedge x \bigwedge u \in \mathrm{ct}(x)\, \phi(u)$. Notemos que si ϕ es de clase Σ_1, lo mismo sucede con esta fórmula, pues

$$\bigwedge u \in \mathrm{ct}(x)\, \phi(u) \leftrightarrow \bigvee y(y = \mathrm{ct}(x) \land \bigwedge u \in y\ \phi(u)).$$

Para ello suponemos que $\bigwedge v \in x \bigwedge u \in \mathrm{ct}(v)\, \phi(u)$, pero, por la hipótesis del teorema, esto implica $\bigwedge v \in x\, \phi(v)$, luego en total tenemos que $\phi(v)$ se cumple para todos los elementos de

$$x \cup \bigcup_{u \in x} \mathrm{ct}(u) = \mathrm{ct}(x).$$

Esto termina la inducción y, como $x \in \mathrm{ct}(\{x\})$, podemos concluir $\bigwedge x\, \phi(x)$. ■

Teorema 4.12 (Σ_1-recursión) *Si ϕ es una fórmula Σ_1, existe otra fórmula ψ, también Σ_1, tal que la fórmula siguiente es un teorema de* KP*:

$$\bigwedge x_1 \cdots x_n x f \overset{1}{\bigvee} y\ \phi(x_1, \ldots, x_n, x, f, y) \to$$

$$\bigwedge x_1 \cdots x_n x y(\psi(x_1, \ldots, x_n, x, y) \leftrightarrow \phi(x_1, \ldots, x_n, x, [\psi]_x, y)),$$

donde

$$[\psi]_x = \{(u, v) \mid u \in \mathrm{ct}(x) \land \psi(x_1, \ldots, x_n, u, v)\}.$$

DEMOSTRACIÓN: Por simplificar la notación, consideraremos un único parámetro x_1. Consideramos la fórmula Σ_1 siguiente:

$$\chi(x_1, x, y, f) \equiv f \text{ es una función} \land \mathcal{D}f = \mathrm{ct}(x) \land$$

$$\bigwedge u \in \mathcal{D}f\, \phi(x_1, u, f|_{\mathrm{ct}(u)}, f(u)) \land \phi(x_1, x, f, y).$$

Observemos que, en particular,

$$\chi(x_1, x, y, f) \to \phi(x_1, x, f, y), \tag{4.1}$$

así como que

$$\chi(x_1, x, y, f) \land u \in \mathrm{ct}(x) \to \chi(x_1, u, f(u), f|_{\mathrm{ct}(u)}). \tag{4.2}$$

Vamos a probar

$$\bigwedge x_1 x \overset{1}{\bigvee} y \bigvee f\ \chi(x_1, x, y, f). \tag{4.3}$$

En primer lugar demostramos la unicidad, es decir, que

$$\chi(x_1, x, y, f) \land \chi(x_1, x, y', f') \to y = y' \land f = f'. \tag{4.4}$$

Razonamos por inducción sobre $\mathrm{ct}(x)$. Por lo tanto, suponemos que para todo $u \in \mathrm{ct}(x)$ existen a lo sumo unos v y g tales que $\chi(x_1, u, v, g)$, así como que $\chi(x_1, x, y, f) \wedge \chi(x_1, x, y', f')$.

Entonces f y f' son funciones con dominio $\mathrm{ct}(x)$, y la hipótesis de inducción junto con (4.2) implica que para todo $u \in \mathrm{ct}(x)$ se cumple $f(u) = f'(u)$, luego $f = f'$. A su vez, por (4.1) tenemos $\phi(x_1, x, f, y) \wedge \phi(x_1, x, f', y')$, y la unicidad de ϕ implica que $y = y'$.

Seguidamente demostramos la existencia, también por inducción sobre $\mathrm{ct}(x)$. Ello significa suponer que $\bigwedge u \in \mathrm{ct}(x) \bigvee vg\, \chi(x_1, u, v, g)$ y demostrar lo mismo para x. Por (4.4) tenemos, de hecho, que

$$\bigwedge u \in \mathrm{ct}(x) \overset{1}{\bigvee} vg\, \chi(x_1, u, v, g).$$

Por Σ_1-reemplazo existe una función $f : \mathrm{ct}(x) \longrightarrow z$ tal que

$$\bigwedge u \in \mathrm{ct}(x) \overset{1}{\bigvee} g\ \chi(x_1, u, f(u), g).$$

Más concretamente, veamos que

$$\bigwedge u \in \mathrm{ct}(x)\, \chi(x_1, u, f(u), f|_{\mathrm{ct}(u)}).$$

En efecto, dado $u \in \mathrm{ct}(x)$, sea g tal que $\chi(x_1, x, f(u), g)$. Si $v \in \mathrm{ct}(u)$, por (4.2) tenemos $\chi(x_1, v, g(v), g|_{\mathrm{ct}(v)})$, pero, como $v \in \mathrm{ct}(x)$, también existe un g' tal que $\chi(x_1, v, f(v), g'))$ y (4.4) implica que $g(v) = f(v)$. Esto prueba que $g = f|_{\mathrm{ct}(u)}$.

En particular, por (4.1)

$$\bigwedge u \in \mathrm{ct}(x)\, \phi(x_1, u, f|_{\mathrm{ct}(u)}, f(u)).$$

Por la hipótesis sobre ϕ existe un único y tal que $\phi(x_1, x, f, y)$, y ahora es inmediato que $\chi(x_1, x, y, f)$.

Definimos $\psi(x_1, x, y) \equiv \bigvee f\, \chi(x_1, x, y, f)$, que claramente es una fórmula Σ_1. Por (4.3) tenemos que $\bigwedge u \in \mathrm{ct}(x) \overset{1}{\bigvee} v\ \psi(x_1, u, v)$, luego por Σ_1-reemplazo existe el conjunto $[\psi]_x$ indicado en el enunciado (y es una función de dominio $\mathrm{ct}(x)$).

Así, para cada x_1, x existe un único y tal que $\psi(x_1, x, y)$. Esto a su vez implica que existe un f tal que $\chi(x_1, x, y, f)$. Vamos a probar que, necesariamente, $f = [\psi]_x$. Ahora bien, si $u \in \mathrm{ct}(x)$, por (4.2) tenemos $\chi(x_1, u, f(u), f|_{\mathrm{ct}(u)})$, luego $\psi(x_1, u, f(u))$, luego $f(u) = [\psi]_x(u)$.

En definitiva, $\psi(x_1, x, y)$ equivale a que y es el único conjunto tal que $\chi(x_1, x, y, [\psi]_x)$, y por (4.1) es también el único y tal que $\phi(x_1, x, [\psi]_x, y)$. ■

Si llamamos G a la clase definida por la fórmula ϕ del teorema anterior, la unicidad de su hipótesis hace que $G : V^{n+2} \longrightarrow V$, de modo que en lugar de $\phi(x_1, \ldots, x_n, x, f, y)$ podemos escribir $y = G(x_1, \ldots, x_n, f)$. Similarmente, la clase F definida por la fórmula ψ resulta ser una función $F : V^n \times V \longrightarrow V$

con la propiedad de que, para todo conjunto x, la restricción $F|_{\mathrm{ct}(x)}$ (con los parámetros $x_1, \ldots, x_n$ fijos) es un conjunto y la relación del enunciado equivale a

$$F(x_1, \ldots, x_n, x) = G(x_1, \ldots, x_n, x, F|_{\mathrm{ct}(x)}).$$

A menudo resulta práctico restringir los dominios de las aplicaciones, para descartar casos triviales. Concretamente, consideramos una clase $D \subset V^{n+1}$ de clase Δ_1. Esto significa que existen fórmulas $\phi(x_1, \ldots, x_n, x)$ y $\psi(x_1, \ldots, x_n, x)$ de clase Σ_1 y Π_1 respectivamente tales que

$$\bigwedge x_1 \cdots x_n x(\phi(x_1, \ldots, x_n, x) \leftrightarrow \psi(x_1, \ldots, x_n, x)),$$

y entonces escribimos $(x_1, \ldots, x_n, x) \in D$ como abreviatura por cualquiera de las dos fórmulas equivalentes anteriores. A partir de ellas podemos definir a su vez las fórmulas

$$\phi'(x_1, \ldots, x_n, x, f) \equiv \phi(x_1, \ldots, x_n, x) \land f : x \longrightarrow V,$$

$$\psi'(x_1, \ldots, x_n, x, f) \equiv \psi(x_1, \ldots, x_n, x) \land f : x \longrightarrow V,$$

que son también Σ_1 y Π_1 respectivamente, ya que la parte final de ambas es Δ_0. Por lo tanto, este par de fórmulas define una clase Δ_1 que llamaremos $E \subset V^{n+2}$. Supongamos ahora que $\chi(x_1, \ldots, x_n, x, f, y)$ es una fórmula Σ_1 tal que

$$\bigwedge x_1 \ldots x_n x f(\phi'(x_1, \ldots, x_n, x, f) \to \overset{1}{\bigvee} y\ \chi(x_1, \ldots, x_n, x, f, y)).$$

Esta condición puede expresarse diciendo que χ define una función $G : E \longrightarrow V$. Es en estos términos como han de entenderse las hipótesis del teorema siguiente:

Teorema 4.13 ($\mathbf{\Sigma_1}$-recursión) *Sea $D \subset V^{n+1}$ una clase de clase Δ_1, sea E la clase (también Δ_1) dada por*

$$(x_1, \ldots, x_n, x, f) \in E \leftrightarrow (x_1, \ldots, x_n, x) \in D \land f : x \longrightarrow V,$$

sea $G : E \longrightarrow V$ una función de clase Σ_1. Entonces existe $F : D \longrightarrow V$, definida por una fórmula Σ_1, tal que

$$\bigwedge x_1 \cdots x_n x \in D\ F(x_1, \ldots, x_n, x) = G(x_1, \ldots, x_n, x, F|_x).$$

Demostración: Manteniendo la notación previa al enunciado, consideramos la fórmula

$$\phi''(x_1, \ldots, x_n, x, f, y) \equiv \bigvee g(g = f|_x \land (\phi'(x_1, \ldots, x_n, x, g) \land$$

$$\chi(x_1, \ldots, x_n, x, g, y)) \lor (\neg\psi'(x_1, \ldots, x_n, x, g) \land y = \varnothing)).$$

Teniendo en cuenta que $g = f|_x$ $[= f \cap (x \times V)]$ es Δ_0, es claro que ϕ'' es Σ_1 y cumple la hipótesis del teorema 4.12, el cual nos da una fórmula ψ'' de clase Σ_1 que define una función $F : V^{n+1} \longrightarrow V$. Si, concretamente, tomamos $(x_1, \ldots, x_n, x) \in D$, para calcular F hemos de considerar el conjunto

$$f = [\psi'']_x = \{(u, v) \mid u \in \mathrm{ct}(x) \land \psi''(x_1, \ldots, x_n, u, v)\},$$

que es la función $f : \mathrm{ct}(x) \longrightarrow V$ definida por Σ_1-reemplazo a partir de ψ'' y $\mathrm{ct}(x)$. Entonces $F(x_1, \ldots, x_n, x)$ es el único y que cumple $\psi''(x_1, \ldots, x_n, x, f)$. Ahora bien, como $g = f|_x : x \longrightarrow V$ es la función definida por Σ_1-reemplazo a partir de ψ'' y x (es decir, $g = F|_x$), tenemos $\phi'(x_1, \ldots, x_n, x, g)$, luego $F(x_1, \ldots, x_n, x)$ es el único y que cumple $\chi(x_1, \ldots, x_n, g, y)$. Equivalentemente:

$$F(x_1, \ldots, x_n, x) = G(x_1, \ldots, x_n, x, F|_x).$$

■

Nota Si F es una aplicación definida por una fórmula Σ_1, es decir, tal que la fórmula $y = F(x)$ es Σ_1, en realidad dicha fórmula es Δ_1, pues equivale a $\bigwedge z\, (F(x) = z \rightarrow z = y)$ ■

Rango Como primera aplicación definimos la función $\mathrm{rang} : V \longrightarrow \Omega$ mediante

$$\mathrm{rang}(x) = \bigcup_{u \in x} (\mathrm{rang}(u) + 1).$$

Explícitamente, consideramos la función G dada por

$$G(x, f) = \bigcup_{u \in x} (f(u) + 1).$$

Más explícitamente, dado cualquier conjunto f, tenemos que

$$\bigwedge v \in \mathcal{R}f \bigvee w\ (w = v \cup \{v\}),$$

luego por 4.6 (aplicado de hecho a una fórmula Δ_0), existe el conjunto

$$A = \{v \cup \{v\} \mid \bigvee u\ (u, v) \in f\}$$

y a su vez existe el conjunto $y = \bigcup A$, que, en el caso en que $f : x \longrightarrow \Omega$, es $y = \bigcup\limits_{u \in x} (f(u) + 1)$. Así,

$$y = G(x, f) \leftrightarrow \bigvee A(y = \bigcup_{u \in A} u \land \bigwedge w \in A \bigvee u \in x \bigvee v(f(u) = v \land w = v \cup \{v\}))$$
$$\land \bigwedge u \in x \bigvee v \bigvee w \in A(f(u) = v \land w = v \cup \{v\})).$$

La última fórmula $\phi(x, f, y)$ es claramente Σ_1 y satisface la condición de unicidad sobre y (sobre la clase de pares (x, f) tales que $f : x \longrightarrow V$), por lo que define una función G en las condiciones del teorema de recursión y la función F dada por dicho teorema es la función rango.

A partir de aquí se prueba por Σ_1-inducción que de hecho $\mathrm{rang}(x)$ es un ordinal y satisface las propiedades básicas del rango. Notemos que las clases $V_\alpha = \{x \mid \mathrm{rang}(x) < \alpha\}$ no son necesariamente conjuntos.

Aritmética ordinal Para definir la aritmética ordinal es más práctico el siguiente caso particular del teorema de recursión:

Teorema 4.14 (Σ_1-recursión transfinita) *Sea $D \subset V^n$ una clase de clase Δ_0 y sean $G_1 : D \longrightarrow \Omega$ y $G_2 : D \times \Omega \times \Omega \longrightarrow \Omega$ aplicaciones de clase Σ_1. Entonces existe una función $F : D \times \Omega \longrightarrow \Omega$ definida por una fórmula Σ_1 tal que*

a) $F(x_1, \ldots, x_n, 0) = G_1(x_1, \ldots, x_n)$

b) $F(x_1, \ldots, x_n, \alpha + 1) = G_2(x_1, \ldots, x_n, \alpha + 1, F(x_1, \ldots, x_n, \alpha))$

c) $F(x_1, \ldots, x_n, \lambda) = \bigcup\limits_{\delta<\lambda} F(x_1, \ldots, x_n, \delta)$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $D' = D \times \Omega$, sea E la clase definida en el enunciado de 4.13 a partir de D' y sea $G : E \longrightarrow V$ la función dada por

$$y = G(x_1, \ldots, x_n, \alpha, f) \leftrightarrow (\alpha = 0 \land y = G_1(x_1, \ldots, x_n)) \lor$$

$$\bigvee \beta \in \alpha \bigvee \gamma\, (\alpha = \beta + 1 \land \gamma = f(\beta) \land y = G_2(x_1, \ldots, x_n, \alpha, \gamma)) \lor$$

$$(\alpha \text{ es un ordinal límite} \land y = \bigcup_{\delta\in\alpha} f(\delta)).$$

Es fácil ver que G es una función Σ_1 sobre E y la función F dada por 4.13 cumple lo pedido. ■

A partir de aquí podemos definir la suma de ordinales tomando $D = \Omega$, $G_1(\alpha) = \alpha$, $G_2(\alpha, \beta, \gamma) = \gamma \cup \{\gamma\}$, pues la función F que obtenemos así cumple

$$F(\alpha, 0) = \alpha, \quad F(\alpha, \beta + 1) = F(\alpha, \beta) \cup \{F(\alpha, \beta)\}, \quad F(\alpha, \lambda) = \bigcup_{\delta<\lambda} F(\alpha, \delta).$$

Definimos entonces $\alpha + \beta = F(\alpha, \beta)$, de modo que la fórmula $\gamma = \alpha + \beta$ es Σ_1 y, por consiguiente, también Δ_1. A su vez, la suma nos permite definir el producto y éste la exponenciación. Las propiedades de la aritmética ordinal (y en particular las de la aritmética natural) se demuestran por Σ_1-inducción transfinita sin dificultad alguna. ■

Colapsos transitivos En KP no puede probarse el teorema del colapso de Mostowski en toda su generalidad. (De hecho, ni siquiera puede probarse que todo conjunto bien ordenado es semejante a un ordinal, que es un caso particular.) Para probarlo necesitamos suponer el esquema de Π_1-especificación:

Teorema 4.15 (KP*+Π_1-especificación) *Si (A, R) es un conjunto con una relación extensional y bien fundada, entonces (A, R) es isomorfo a un conjunto transitivo.*

Demostración: Llamamos *aproximaciones* a las aplicaciones $f : B \longrightarrow V$ tales que

$$B \subset A \wedge \bigwedge a \in A \bigwedge b \in B(a\,R\,b \rightarrow a \in B)$$

$$\wedge \bigwedge b \in B\, f(b) = \{f(a) \mid a \in B \wedge a\,R\,b\}$$

Es fácil ver que la fórmula "$f : \mathcal{D}f \longrightarrow V$ es una aproximación" es Δ_0. Si f y g son aproximaciones y $X = \mathcal{D}f \cap \mathcal{D}g$, existe el conjunto $\{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$, y es fácil ver que tiene que ser vacío, de modo que dos aproximaciones coinciden en su dominio común.

Ahora aplicamos Π_1-especificación para definir el conjunto

$$Y = \{a \in A \mid \neg \bigvee f \ (f \text{ es una aproximación} \wedge a \in \mathcal{D}f)\}.$$

Si no es vacío, tiene un R-minimal a, de modo que, si $A_a = \{b \in A \mid b\,R\,a\}$,

$$\bigwedge b \in A_a \bigvee f (f \text{ es una aproximación} \wedge b \in \mathcal{D}f).$$

Por Σ_1-recolección existe un conjunto Y de aproximaciones tal que cada elemento de A_a está en el dominio de un elemento de Y. Por la unicidad de las aproximaciones, $f = \bigcup Y$ es también una aproximación cuyo dominio es A. Si llamamos $M = \mathcal{R}f$, tenemos que $f : A \longrightarrow M$ suprayectiva y

$$\bigwedge a \in A \ f(a) = \{f(b) \mid b \in A \wedge b\,R\,a\}.$$

Es obvio que M es un conjunto transitivo y f es biyectiva, pues esto equivale a que el conjunto

$$C = \{a \in A \mid \bigvee b \in A \ (b \neq a \wedge f(a) = f(b))\}$$

sea no vacío. Si no lo fuera, tendría un R-minimal a, para el cual existiría un $b \neq a$ tal que $f(a) = f(b)$, pero entonces, si $x\,R\,a$, entonces $f(x) \in f(a) = f(b)$, luego existe un $y\,R\,b$ tal que $f(x) = f(y)$, pero por minimalidad $x = y\,R\,b$. Recíprocamente, si $x\,R\,b$, entonces $f(x) \in f(b) = f(a)$, luego existe un $y\,R\,a$ tal que $f(x) = f(y)$, y de nuevo por minimalidad $x = y\,R\,a$. Por consiguiente, a y b tienen la misma extensión, luego $a = b$ porque R es extensional, contradicción.

Ahora es inmediato que $\bigwedge ab \in A(a\,R\,b \leftrightarrow f(a) \in f(b)$. Con esto hemos probado que $f : (A, R) \longrightarrow M$ es una función colapsante (un isomorfismo). ■

En KP* podemos demostrar un caso particular:

Teorema 4.16 *Sea (A, R) un conjunto con una relación extensional y bien fundada y supongamos que existe un ordinal θ y una aplicación $r : A \longrightarrow \theta$ tal que $\bigwedge xy \in A \ (x\,R\,y \rightarrow r(x) < r(y))$. Entonces (A, R) es isomorfo a un conjunto transitivo.*

Demostración: Para cada ordinal $\alpha \leq \theta$, definimos

$$A_\alpha = \{a \in A \mid r(a) < \alpha\}.$$

Definimos

$$\phi(\alpha, f) \equiv \alpha \in \Omega \land \alpha \leq \theta \land f : A_\alpha \longrightarrow V \land \bigwedge a \in A_\alpha \ f(a) = \{f(x) \mid x \, R \, a\}.$$

Se trata de una fórmula Δ_0. Por ejemplo, la última parte equivale a

$$\bigwedge u \in f \bigvee v \in u \bigvee az \in v(u = (a, z) \land \bigwedge y \in z \bigvee x \in A(x \, R \, a \land y = f(x)) \land$$
$$\bigwedge x \in A(x \, R \, a \rightarrow \bigvee y \in z \ y = f(x))).$$

Veamos que $\phi(\alpha, f) \land \phi(\alpha, f') \rightarrow f = f'$. En efecto, en caso contrario podemos considerar el conjunto no vacío

$$B = \{a \in A_\alpha \mid f(a) \neq f'(a)\},$$

el cual tendrá un R-minimal $a \in B$, de modo que si $x \, R \, a$, entonces $f(x) = f'(x)$, pero entonces

$$f(a) = \{f(x) \mid x \, R \, a\} = \{f'(x) \mid x \, R \, a\} = f'(a),$$

contradicción.

Ahora probamos por Σ_1-inducción que $\bigwedge \alpha \leq \theta \bigvee f \, \phi(\alpha, f)$. Más precisamente, consideramos la fórmula

$$\psi(\alpha) \equiv (\alpha \in \Omega \land \alpha \leq \theta \land \bigvee f \phi(\alpha, f)) \lor \neg(\alpha \in \Omega \land \alpha \leq \theta).$$

Suponemos que $\alpha \leq \theta$ y que $\bigwedge \beta < \alpha \bigvee f \, \phi(\beta, f)$. Por la unicidad que hemos probado, tenemos de hecho que $\bigwedge \beta < \alpha \overset{1}{\bigvee} f \, \phi(\beta, f)$.

Si $\alpha = 0$, es obvio que $\phi(\alpha, \varnothing)$.

Si $\alpha = \beta + 1$, sea $f : A_\beta \longrightarrow V$ tal que $\phi(\beta, f)$. Es fácil ver que la fórmula

$$y = f[A_a^R]$$

es Δ_0, luego por reemplazo existe $h : \{a \in A \mid r(a) = \beta\} \longrightarrow y$ suprayectiva tal que $h(a) = f[A_a^R] = \{f(x) \mid x \, R \, a\}$, y es fácil ver que $f' = f \cup h$ cumple $\phi(\alpha, f')$.

Si α es un ordinal límite, por Σ_1-reemplazo existe $h : \alpha \longrightarrow y$ suprayectiva tal que $\bigwedge \beta < \alpha \, \phi(\beta, h(\beta))$, y es fácil ver que $f = \bigcup y$ cumple $\phi(\alpha, f)$.

En particular, hemos probado que existe una f tal que $\phi(\theta, f)$, es decir, tal que $f : A \longrightarrow M$ suprayectiva, para cierto conjunto $M = f[A]$ y tal que

$$\bigwedge a \in A \ f(a) = \{f(x) \mid x \, R \, a\}.$$

A partir de aquí la prueba concluye igual que la del teorema anterior. ∎

En particular, dado cualquier conjunto A, por Σ_1-reemplazo existe la función $\operatorname{rang} : A \longrightarrow \theta$ para cierto ordinal θ, luego todo conjunto A sobre el que la relación de pertenencia sea extensional es isomorfo a un conjunto transitivo.

Más en particular:

Teorema 4.17 *Si $\alpha \in \Omega$ y $A \subset \alpha$, entonces $(A, \leq)$ es semejante a un ordinal $\beta \leq \alpha$.*

Demostración: Por la observación precedente podemos considerar el colapso transitivo $f : (A, <) \longrightarrow \beta$, para cierto conjunto transitivo β en el que la relación de pertenencia es un buen orden, luego $\beta \in \Omega$ y claramente f es una semejanza.

Ahora probamos por Σ_1-inducción transfinita que $\bigwedge \delta \in A\; f(\delta) \leq \delta$. Notemos que la propiedad es Σ_1, pues equivale a $\bigwedge \delta \in A \bigvee \gamma\, (\gamma = f(\delta) \wedge \gamma \subset \delta)$.

Para ello suponemos que $\bigwedge \epsilon \in \delta\; f(\epsilon) \leq \epsilon$ y observamos que

$$f(\delta) = \{f(\epsilon) \mid \epsilon \in \delta\} \subset \delta.$$

Por consiguiente, $\beta \subset \alpha$. ■

Recursión en $\boldsymbol{\omega}$ Dejamos al lector la demostración de la siguiente variante del teorema de recursión:

Teorema 4.18 ($\boldsymbol{\Sigma_1}$-recursión en $\boldsymbol{\omega}$) *Sea $D \subset V^n$ una clase de clase Δ_0 y sean $G_1 : D \longrightarrow V$ y $G_2 : D \times \omega \times V \longrightarrow V$ aplicaciones*[1] *de clase Σ_1. Entonces existe una función $F : D \times \omega \longrightarrow V$ definida por una fórmula Σ_1 tal que*

a) $F(x_1, \ldots, x_n, 0) = G_1(x_1, \ldots, x_n)$

b) $F(x_1, \ldots, x_n, n+1) = G_2(x_1, \ldots, x_n, n, F(x_1, \ldots, x_n, n))$.

Como primera aplicación tomamos $D = V$, $G_1(x) = \{\varnothing\}$ y

$$G_2 : V \times \omega \times V \longrightarrow V$$

definida como sigue:

$$y = G_2(x, n, A) \leftrightarrow \bigwedge f \in y\, (f : n+1 \longrightarrow x \wedge f|_n \in A) \wedge$$
$$\bigwedge s \in A \bigwedge u \in x (s : n \longrightarrow x \rightarrow \bigvee f \in y\, (f|_n = s \wedge f(n) = u)).$$

Veamos que G_2 está bien definida, en el sentido de que si x y A son conjuntos arbitrarios y $n \in \omega$, existe un único conjunto y que cumple la definición. De hecho sólo hay que probar la existencia, pues la unicidad es obvia por extensionalidad.

Para ello, dado A, consideramos el subconjunto

$$B = \{s \in A \mid s : n \longrightarrow x\},$$

cuya existencia está garantizada por Δ_0-especificación. Consideramos también la fórmula Δ_0

$$\phi(f, s, u) \equiv f : n+1 \longrightarrow x \wedge f|_n = s \wedge f(n) = u$$

[1] Es fácil probar una variante en la que no está D y G_1 se sustituye por un conjunto (un designador) A tal que la fórmula $y = A$ es Σ_1.

y observamos que $\bigwedge s \in B \bigwedge u \in x \overset{1}{\bigvee} f\ \phi(f, s, u)$, luego por Δ_0-reemplazo existe una aplicación $h : B \times x \longrightarrow y$ suprayectiva tal que

$$\bigwedge s \in B \bigwedge u \in x\ \phi(s, x, h(s, x)).$$

Claramente y es el conjunto buscado.

El teorema de recursión nos da una función $F : V \times \omega \longrightarrow V$ de modo que, llamando $x^n = F(x, n)$, lo que tenemos es que $x^0 = \{\varnothing\}$ y que x^{n+1} es el conjunto de todas las aplicaciones $n + 1 \longrightarrow x$ cuya restricción a n está en x^n. Ahora bien, si $f : n \longrightarrow x$ es cualquier aplicación, podemos probar por Σ_1-inducción que

$$\bigwedge i \in \omega (i \leq n \rightarrow \bigvee y (y = x^i \wedge \bigvee g \in y\ g = f|_i)).$$

En particular, $f \in x^n$, de modo que

$$x^n = \{f \mid f : n \longrightarrow x\}.$$

Así pues, hemos demostrado el teorema siguiente:

Teorema 4.19 $\bigwedge x \bigwedge n \in \omega \overset{1}{\bigvee} y \bigwedge f\, (f \in y \leftrightarrow f : n \longrightarrow x)$.

Además tenemos que la fórmula $y = x^n$ es $\Delta_1^{\mathrm{KP}^*}$.

4.5 Conjuntos finitos

En KP* podemos desarrollar la teoría básica sobre conjuntos finitos partiendo de la definición usual: un conjunto x es *finito* si cumple la fórmula Σ_1:

$$\bigvee n \in \omega \bigvee f\ f : n \longrightarrow x \text{ biyectiva}.$$

Se cumple que tal n es único, pues si existen $m, n \in \omega$ tales que $m < n$ y $f : n \longrightarrow m$ biyectiva, podemos definir el conjunto no vacío

$$A = \{m \in n \mid \bigvee f \in n^n \bigvee k \in m\ f|_m : m \longrightarrow k \text{ biyectiva}\},$$

que tendrá un mínimo elemento m, a partir del cual se llega fácilmente a una contradicción.

Por consiguiente, si x es un conjunto finito podemos definir su cardinal como el único número natural $|x|$ equipotente a x. Notemos que la fórmula $n = |x|$ es de clase Σ_1.

Si $n \in \omega$ y $A \subset n$, el teorema 4.17 nos da que A es semejante (en particular equipotente) a un ordinal $\leq n$, es decir, a un número natural, luego A es finito. Más en general, esto implica que todo subconjunto de un conjunto finito es finito.

Para probar que $\bigwedge mn \in \omega(|(m \times \{0\}) \cup (n \times \{1\})| = m + n)$ fijamos m y demostramos por Σ_1-inducción que

$$\bigwedge n \in \omega \bigvee fyk\ (k = m + n \land y = (m \times \{0\}) \cup (n \times \{1\}) \land f : y \longrightarrow k \text{ biyectiva}).$$

La prueba no ofrece ninguna dificultad. De aquí se sigue que si x e y son conjuntos finitos disjuntos entonces $x \cup y$ es finito y $|x \cup y| = |x| + |y|$.

Similarmente se prueba que $\bigwedge mn \in \omega(|m \times n| = mn)$, para lo cual demostramos por Σ_1-inducción que

$$\bigwedge n \in \omega \bigvee fyk(k = mn \land y = m \times n \land f : y \longrightarrow k \text{ biyectiva}).$$

En la prueba usamos que $m \times (n + 1) = (m \times n) \cup (m \times \{n\})$ junto con el resultado anterior.

De aquí se sigue que si x e y son conjuntos finitos, entonces $x \times y$ es finito y $|x \times y| = |x||y|$.

A su vez esto nos permite probar que si x e y son finitos, entonces x^y también lo es y $|x^y| = |x|^{|y|}$. Para ello fijamos $|x| = m$ y demostramos por Σ_1-inducción que

$$\bigwedge n \in \omega \bigvee fyk(y = x^n \land k = m^n \land f : y \longrightarrow k \text{ biyectiva})$$

usando que es fácil construir una biyección $x^{n+1} \longrightarrow x^n \times x$ junto con el apartado anterior.

Teorema 4.20 $\bigwedge x\ (x \textit{ finito} \rightarrow \bigvee y\ (y \textit{ finito} \land \bigwedge u(u \in y \leftrightarrow u \subset x)))$.

DEMOSTRACIÓN: Es fácil reducir el enunciado al caso particular

$$\bigwedge n \in \omega \bigvee y(y \text{ finito} \land \bigwedge u(u \in y \leftrightarrow u \subset n)).$$

Para probarlo aplicamos Δ_0-reemplazo a la fórmula $u = s^{-1}[1]$, lo que nos da la existencia del conjunto

$$y = \{u \mid \bigvee s \in 2^n\ u = s^{-1}[1]\}$$

junto con una biyección $f : 2^n \longrightarrow y$. Sabemos que 2^n es un conjunto finito, luego y también lo es, y claramente cumple lo pedido. ■

En otras palabras, acabamos de probar que si x es un conjunto finito existe el conjunto

$$\mathcal{P}x = \{u \mid u \subset x\},$$

y éste es a su vez finito.

Más aún, la fórmula $\phi(x, y) \equiv x \text{ finito} \land y = \mathcal{P}x$ es Σ_1, pues

$$\phi(x, y) \leftrightarrow \bigvee n \in \omega \bigvee fgz\ (f : n \longrightarrow x \text{ biyectiva} \land z = 2^n \land g : z \longrightarrow y \text{ biyectiva}$$

$$\land \bigwedge u \in y\ u \subset x \land \bigwedge s \in z \bigwedge u \in x(u \in g(s) \leftrightarrow \bigvee i \in n\ (s(i) = 1 \land f(i) = u))).$$

Usando esta fórmula, el teorema 4.18 nos da una aplicación $f:\omega \longrightarrow V$ tal que, llamando $V_n = f(n)$, se cumple que

$$V_0 = \varnothing \land \bigwedge n \in \omega \; V_{n+1} = \mathcal{P}V_n.$$

Además, la fórmula $n \in \omega \land y = V_n$ es Σ_1. Una simple inducción prueba que cada V_n es un conjunto finito. Mas aún:

$$V_n = \{x \mid \operatorname{rang} x < n\}.$$

En efecto, para probar una inclusión (así como que los conjuntos V_n son transitivos) probamos que

$$\bigwedge n \bigvee y(y = V_n \land \bigcup y \subset y \land \bigwedge x \in y \bigvee m(m = \operatorname{rang} x \land m < n)),$$

y para probar la otra, fijado un conjunto x tal que $\operatorname{rang} x < n$ tomamos $y = \operatorname{ct} x \cup \{x\}$ y probamos, siempre por Σ_1-inducción, que

$$\bigwedge u(u \in y \to \bigvee mz(m \in \omega \land \operatorname{rang} u = m \land z = V_m \land u \subset z)).$$

Esto implica que $x \in V_n$.

4.6 La teoría KPI

Llamaremos KPI* (resp. KPI) a la teoría KP* (resp. KP) más el axioma de infinitud

$$\mathrm{AI} \equiv \bigvee X(\varnothing \in X \land \bigwedge n \in X \; n \cup \{n\} \in X).$$

Obviamente AI equivale a $\omega \in V$.

Aplicando Σ_1-reemplazo a la fórmula $n \in \omega \land y = V_n$ obtenemos una aplicación suprayectiva $f:\omega \longrightarrow y$ tal que $\bigwedge n \in \omega \; f(n) = V_n$. Por lo tanto, podemos considerar el conjunto $z = \bigcup y$, que claramente cumple

$$\bigwedge u \; (u \in z \leftrightarrow \bigvee n \in \omega \; u \in V_n).$$

Esta propiedad determina a z, luego acabamos de probar la existencia del conjunto

$$V_\omega = \bigcup_{n\in\omega} V_n = \{x \mid \operatorname{rang} x < \omega\}.$$

Es fácil probar las propiedades básicas de los conjuntos V_n y V_ω: son transitivos, forman una sucesión creciente, $\bigwedge n \in \omega \; V_n \cap \Omega = n$, y de aquí a su vez $V_\omega \cap \Omega = \omega$.

Similarmente, puesto que la fórmula $n \in \omega \land y = x^n$ también es Σ_1, por Σ_1-reemplazo existe una función $f:\omega \longrightarrow V$ que cumple $\bigwedge n \in \omega \; f(n) = x^n$. Considerando la unión de su rango obtenemos la existencia del conjunto

$$x^{<\omega} = \bigcup_{n\in\omega} x^n.$$

Notemos que $y = x^{<\omega}$ también es Σ_1 (luego de hecho Δ_1), pues

$$y = x^{<\omega} \leftrightarrow \bigwedge n \in \omega \bigvee z(z = x^n \land z \subset y) \land \bigwedge u \in y \bigvee n \in \omega \bigvee z(z = x^n \land u \in z).$$

La formalización de la lógica Ahora es fácil formalizar la lógica en KPI*. Como en el caso de $\mathrm{M}_0{+}\omega \in V$, no hay ninguna dificultad en definir la concatenación de sucesiones de $\omega^{<\omega}$, así como los conjuntos de términos y fórmulas de un lenguaje formal, pues se definen por Δ_0-especificación a partir de $\omega^{<\omega}$ acotando todas las variables necesarias por ω, $\omega^{<\omega}$, $(\omega^{<\omega})^{<\omega}$. Todos los conceptos son Δ_0 en estos parámetros.

En particular podemos considerar (la formalización de) el lenguaje formal $\mathcal{L}$ de la teoría de conjuntos. A la hora de definir la fórmula $M \vDash \phi[v]$ nos encontramos con una pequeña dificultad, y es que en general no podemos asegurar la existencia del conjunto de todas las valoraciones $v : \mathrm{Var}(\mathcal{L}) \longrightarrow M$, pero, como cada fórmula tiene un número finito de variables, basta considerar valoraciones finalmente constantes. Para ello consideramos la fórmula Σ_1:

$$\phi(v, M, s, x) \equiv s \in M^{<\omega} \land x \in M \land \bigvee y(y = \mathrm{Var}(\mathcal{L}) \land v : y \longrightarrow M \land$$

$$\bigvee n \in \omega(n = \ell(s) \land \bigwedge i \in y((i < n \to v(i) = s(i)) \land (n \leq i \to v(i) = x)).$$

Por Σ_1-reemplazo tenemos asegurada la existencia del conjunto

$$\mathrm{Val}(M) = \{v \mid v : \mathrm{Var}(\mathcal{L}) \longrightarrow M \land \bigvee n \in \omega\ v|_{\mathrm{Var}(\mathcal{L})\setminus n} \text{ es constante}\}.$$

Notemos que $y = \mathrm{Val}(M)$ es Σ_1 (luego de hecho Δ_1), pues equivale a

$$\bigvee f(f : M^{<\omega} \times M \longrightarrow y \text{ suprayectiva} \land$$

$$\bigwedge s \in M^{<\omega} \bigwedge x \in M \bigvee v \in y\, \phi(v, M, s, x)).$$

Ahora, si llamamos $\mathrm{Form}_n(\mathcal{L}) = \{\phi \in \mathrm{Form}(\mathcal{L}) \mid \ell(\phi) < n\}$, podemos definir por Σ_1-recursión una función $F : V \times \omega \longrightarrow V$ tal que

$$F(M, n) : \mathrm{Form}_n(\mathcal{L}) \times \mathrm{Var}(M) \longrightarrow 2$$

de modo que $F(M, n+1)$ extienda a $F(M, n)$, por lo que podemos definir una función $F^* : V \longrightarrow V$ de modo que $F^*(M) : \mathrm{Form}(\mathcal{L}) \times \mathrm{Var}(M) \longrightarrow 2$ nos permita definir $M \vDash \phi[v] \equiv F^*(M)(\phi, v) = 1$.

La función F se define mediante el teorema 4.18. Puesto que $\mathrm{Form}_0(\mathcal{L}) = \varnothing$, podemos tomar $G_1(M) = \{\varnothing\}$, y sólo hay que definir una función (de clase Σ_1) $G_2 : V \times \omega \times V \longrightarrow V$ que nos permita definir

$$F(M, n+1) = G_2(M, n, F(M, n)).$$

La definición de G_2 es de la forma

$$f = G_2(M, n, g) \leftrightarrow \bigvee y y' z(y = \mathrm{Form}_n(\mathcal{L}) \land y' = \mathrm{Form}_{n+1}(\mathcal{L}) \land z = \mathrm{Var}(M)$$

$$\land (\neg g : y \times z \longrightarrow 2 \land f = \varnothing) \lor (g : y \times z \longrightarrow 2 \land f : y' \times z \longrightarrow 2 \land$$

$$\bigwedge \phi \in y' \bigwedge v \in z(\cdots))),$$

donde los puntos suspensivos representan la definición de $f(\phi, v)$ en función de ϕ, v y g. (Hay que distinguir casos: por ejemplo, si $\phi \equiv x = y$, entonces $f(\phi, v) = 1 \leftrightarrow v(x) = v(y)$, mientras que si $\phi \equiv \neg\psi$, entonces $f(\phi, v) = 1 \leftrightarrow g(\psi, v) = 0$, etc.) Se comprueba sin dificultad que G_2 puede definirse realmente mediante una fórmula Σ_1.

A partir de aquí se demuestra por Σ_1-inducción que

$$\bigwedge n \in \omega \bigwedge m \in n \bigvee yy'(y = F(M, n) \land y' = F(M, n) \land y \subset y'))$$

lo que justifica la definición de F^* y a su vez la de $M \vDash \phi[v]$, que claramente es una fórmula Σ_1, y de hecho Δ_1, pues

$$M \vDash \phi[v] \leftrightarrow \bigvee \psi \in \omega^{<\omega}(\psi = \{(0, \neg)\}^\frown \phi \land \neg M \vDash \psi[v]).$$

Dejamos al lector la sencilla comprobación de que es posible definir en el seno de KPI* el concepto de variable libre en una fórmula o, más concretamente, el conjunto $\mathrm{Form}^n(\mathcal{L})$ formado por las fórmulas de $\mathcal{L}$ cuyo conjunto de variables libres está contenido en el de las n primeras variables de $\mathcal{L}$, que es lo único que necesitaremos en el apartado siguiente.

Es fácil modificar la fórmula $M \vDash \phi[s]$ para que esté definida para fórmulas $\phi \in \mathrm{Form}^n(\mathcal{L})$ y $s \in M^n$ (y siga siendo Δ_1).

Constructibilidad Veamos ahora que en KPI* se puede construir la clase L de los conjuntos constructibles de la forma usual. Para ello empezamos observando que la fórmula siguiente es Σ_1:

$$\Phi(\phi, R) \equiv \bigvee FY(F = \mathrm{Form}^n(\mathcal{L}) \land Y = X^n \land \phi \in F \land R \subset Y \land$$
$$\bigwedge s \in Y(s \in R \leftrightarrow X \vDash \phi[s]).$$

Además, por Δ_1-especificación, para cada $\phi \in \mathrm{Form}^n(\mathcal{L})$ existe un único R tal que $\Phi(\phi, R)$. Por consiguiente, por Σ_1-reemplazo, para todo conjunto X, existe el conjunto

$$\mathrm{Df}(X, n) = \{R \mid R \subset X^n \land \bigvee \phi \in \mathrm{Form}^n(\mathcal{L}) \bigwedge s \in X^n(s \in R \leftrightarrow X \vDash \phi[s])\}$$

de las relaciones n-ádicas definibles en X. Además, la fórmula $Y = \mathrm{Df}(X, n)$ es de clase Σ_1, pues equivale a

$$\bigvee Ff(F = \mathrm{Form}^n(\mathcal{L}) \land f : F \longrightarrow Y \text{ suprayectiva} \land$$
$$\bigwedge \phi \in F \bigvee R \in Y(R = f(\phi) \land \Phi(\phi, R))).$$

Seguidamente observamos que $y = \{n\} \times X^n \times \mathrm{Df}(X, n+1)$ es Σ_1, pues

$$y = \{n\} \times X^n \times \mathrm{Df}(X, n+1) \leftrightarrow \bigvee uvwm(u = \{n\} \land v = X^n \land m = n+1$$
$$\land\ w = \mathrm{Df}(X, m) \land y = u \times v \times w).$$

Por lo tanto, por Σ_1-reemplazo podemos construir

$$\{\{n\} \times X^n \times \mathrm{Df}(X, n+1) \mid n \in \omega\},$$

cuya unión es el conjunto

$$D = \{(n, s, R) \mid n \in \omega \land s \in X^n \land R \in \mathrm{Df}(X, n+1)\}.$$

Para cada $(n, s, R) \in D$, el conjunto $x = \{u \in X \mid s \cup \{(n, u)\} \in R\}$ existe por Δ_0-especificación, y

$$x = \{u \in X \mid s \cup \{(n, u)\} \in R\} \leftrightarrow \bigwedge u \in x(u \in X \land s \cup \{(n, u)\} \in R)$$
$$\land \bigwedge u \in X(s \cup \{(n, u)\} \in R \rightarrow u \in x),$$

luego la fórmula es Σ_1 y podemos aplicar Σ_1-reemplazo para definir el conjunto

$$\mathcal{D}X = \{x \mid \bigvee nsR((n, s, R) \in D \land x = \{u \in X \mid s \cup \{(n, u)\} \in R\})\}.$$

Además

$$y = \mathcal{D}X \leftrightarrow \bigwedge x \in y \bigvee unmvwsR\ (u = \omega \land n \in u \land m = n + 1 \land v = X^n \land$$
$$s \in v \land w = \mathrm{Df}(X, n) \land R \in w \land x = \{u \in X \mid s \cup \{(n, u)\} \in R\}) \land$$
$$\bigvee u(u = \omega \land \bigwedge n \in u \bigvee mvw(m = n + 1 \land v = X^n \land w = \mathrm{Df}(X, m) \land$$
$$\bigwedge R \in w \bigvee x(x = \{u \in X \mid s \cup \{(n, u)\} \in R\} \land x \in y))),$$

luego es una fórmula Σ_1.

Es fácil ver ahora que los elementos de $\mathcal{D}X$ son los conjuntos de la forma

$$\{u \in X \mid X \vDash \phi[x_1, \ldots, x_n, u]\},$$

para cierto $n \in \omega$, ciertos $x_1, \ldots, x_n \in X$ y cierta fórmula $\phi \in \mathrm{Form}^{n+1}(\mathcal{L})$. En particular, si $\phi(x_1, \ldots, x_n, u)$ es una fórmula metamatemática y $x_1, \ldots, x_n \in X$, tenemos que

$$\{u \in X \mid \phi^X(x_1, \ldots, x_n, u)\} \in \mathcal{D}X.$$

Finalmente, para definir la función $F(A, \alpha) = L_\alpha$ sólo necesitamos aplicar el teorema de recursión a la función

$$y = G(\alpha, f) \leftrightarrow \alpha \in \Omega \land f : \alpha \longrightarrow V \land ((\alpha = 0 \land y = \varnothing) \lor$$
$$\bigvee \beta\ (\alpha = \beta + 1 \land y = \mathcal{D}f(\beta)) \lor (\alpha \text{ límite} \land y = \bigcup \mathcal{R}f)) \lor$$
$$((\alpha \notin \Omega \lor \neg f : \alpha \longrightarrow V) \land y = \varnothing).$$

El propio teorema de recursión nos da que la fórmula[2] $y = L_\alpha$ es $\Sigma_1^{\mathrm{KPI}^*}$ y, por consiguiente, $\Delta_1^{\mathrm{KPI}^*}$, luego es absoluta para modelos transitivos de KPI^*.

[2]Aunque algunas de las subfórmulas que estamos considerando puedan tener parámetros de la forma ω, $\omega^{<\omega}$, $(\omega^{<\omega})^{<\omega}$, etc., todos ellos se pueden eliminar escribiendo

$$\bigvee xyz \cdots (x = \omega \land y = \omega^{<\omega} \land z = (\omega^{<\omega})^{<\omega} \land \cdots),$$

por lo que $y = L_\alpha[A]$ es equivalente a una fórmula Σ_1 cuyas únicas variables libres son y, α, A, es decir, sin parámetros.

Así:

$$L_0 = \varnothing \wedge \bigwedge \alpha \in \Omega\ L_{\alpha+1} = \mathcal{P}L_\alpha \wedge \bigwedge \lambda \in \Omega\ L_\lambda = \bigcup_{\delta<\lambda} L_\delta,$$

donde λ recorre los ordinales límite.

Ahora tenemos definida la fórmula $x \in L \equiv \bigvee \alpha \in \Omega\ x \in L_\alpha$, que también es Σ_1 (pero no Π_1, pues no es absoluta para modelos transitivos).

Ahora es fácil probar las propiedades básicas de los conjuntos L_α, como

a) $\bigwedge \alpha \in \Omega\ L_\alpha$ es transitivo,

b) $\bigwedge \alpha\beta \in \Omega(\alpha \leq \beta \rightarrow L_\alpha \subset L_\beta)$,

c) $\bigwedge \alpha \in \Omega\ L_\alpha \cap \Omega = \alpha$.

d) $\bigwedge x(x \subset L \rightarrow \bigvee \alpha \in \Omega\ x \subset L_\alpha)$

La única comprobación que hay que añadir a la prueba usual en ZF es que todas las fórmulas son Σ_1 para aplicar Σ_1-inducción, pero eso no ofrece ninguna dificultad. Por ejemplo, en el caso b) basta probarlo cuando $\alpha < \beta$ y entonces la fórmula equivale a

$$\bigwedge \beta \in \Omega(\bigwedge \alpha \in \beta \bigvee yz(y = L_\alpha \wedge z = L_\beta \wedge y \subset z).$$

El apartado d) se prueba en ZFC usando reemplazo, pero aquí contamos con la Σ_1-recolección: como $\bigwedge u \in x \bigvee \alpha \in \Omega\ u \in L_\alpha$ y la fórmula $u \in L_\alpha$ es de clase Σ_1, existe $y \subset \Omega$ tal que $\bigwedge u \in x \bigvee \alpha \in y\ u \in L_\alpha$, y basta tomar $\alpha = \bigcup y$.

Dejamos al lector la comprobación de que el buen orden constructible, es decir, la fórmula $x \trianglelefteq y$, también puede definirse en KPI*.

Teorema 4.21 *La clase L es un modelo transitivo de* KPI* *(o de* KPI*, si trabajamos en* KPI*).*

Demostración: El axioma de extensionalidad se cumple en L por ser una clase transitiva. El axioma del par es trivial: si $x, y \in L$, existe un $\alpha \in \Omega$ tal que $x, y \in L_\alpha$, luego $\{x, y\} \in \mathcal{D}L_\alpha = L_{\alpha+1} \subset L$, e igualmente con el axioma de la unión.

Para probar el axioma de Δ_0-especificación observamos que, como las fórmulas Δ_0 son absolutas para clases transitivas, lo que hemos de probar es

$$\bigwedge x_1 \cdots x_n x \in L \bigvee y \in L \bigwedge u(u \in y \leftrightarrow (u \in x \wedge \phi(u))).$$

Para ello tomamos un α tal que $x_1, \ldots, x_n, x \in L_\alpha$ y consideramos el conjunto

$$y = \{u \in x \mid \phi(u)\} \subset x \subset L_\alpha,$$

que existe por Δ_0-especificación. Basta observar que

$$y = \{u \in L_\alpha \mid (u \in x \wedge \phi(u))^{L_\alpha}\} \in \mathcal{D}L_\alpha = L_{\alpha+1}.$$

El axioma de infinitud se cumple porque $\omega \in L_{\omega+1} \subset L$.

Sea ahora ϕ una fórmula de clase Π_1 y vamos a probar la relativización del axioma de regularidad:

$$\bigvee u \in L\ \phi^{L[A]}(u) \rightarrow \bigvee u \in L(\phi^L(u) \wedge \bigwedge v \in u\, \neg\phi^L(v)).$$

Notemos que, como $u \in L$ es Σ_1, la fórmula ϕ^L es Π_1. Tomamos $u \in L$ tal que $\phi^L(u)$. Sea $\alpha \in \Omega$ tal que $u \in L_\alpha$. Esta fórmula es Δ_1, luego tenemos que

$$\bigvee u(u \in L_\alpha \wedge \phi^L(u)),$$

donde la fórmula es Π_1. Por Π_1-regularidad

$$\bigvee u(u \in L_\alpha \wedge \phi^L(u) \wedge \bigwedge v \in u \neg(v \in L_\alpha \wedge \phi^L(v))).$$

Como L_α es transitiva, tenemos que $v \in u \in L_\alpha$ implica que $v \in L_\alpha$, luego la fórmula anterior equivale a la que queremos probar.

Falta probar el axioma de Δ_0-recolección. Para probarlo fijamos unos conjuntos $x_1, \ldots, x_n, x \in L$ y suponemos $\bigwedge u \in x \bigvee v \in L\ \phi(u, v)$. Entonces podemos afirmar también que

$$\bigwedge u \in x \bigvee \alpha \in \Omega \bigvee vw\,(v \in w \wedge w = L_\alpha \wedge \phi(u, v)).$$

La fórmula tras $\bigvee \alpha \in \Omega$ es Σ_1, luego por el teorema de Σ_1-recolección existe un conjunto $B \subset \Omega$ tal que $\bigwedge u \in x \bigvee \alpha \in B \bigvee v \in L_\alpha\, \phi(u, v)$. Llamando $\alpha = \bigcup B$ tenemos que $\alpha \in \Omega$ y $\bigwedge u \in x \bigvee v \in L_\alpha[A]\, \phi(u, v)$. Teniendo en cuenta que $y = L_\alpha \in L_{\alpha+1} \subset L$, concluimos que

$$\bigvee y \in L \bigwedge u \in x \bigvee v \in y\, \phi(u, v),$$

que es lo que había que probar. ■

Teniendo en cuenta que la fórmula $y = L_\alpha$ es absoluta para modelos transitivos de KPI* (porque es $\Delta_1^{\mathrm{KPI}^*}$), ahora es inmediato que la clase L está contenida en todo modelo transitivo M de KPI* que contenga a Ω, y que $L^M = L$. Análogamente, si un conjunto M es un modelo transitivo de KPI*, entonces $\lambda = M \cap \Omega$ es un ordinal límite y $L_\lambda = L^M \subset M$.

Por último observamos que el buen orden constructible hace que $V = L$ implique AE, por lo que la consistencia de KPI* (resp. KPI) implica la de KPI*+AE (resp. KPI+AE).

Capítulo V

La teoría de Mostowski

En los capítulos anteriores hemos presentado dos extensiones de la teoría básica T: las teorías que hemos llamado MAC y KPI*, y el teorema 3.32 implica que ambas son subteorías de MAC$^+$+ H. Ésta es la teoría de Mostowski que vamos a estudiar ahora, aunque vamos a presentarla en un contexto más general:

5.1 Subteorías de KP*+Z

Para cada número natural n, consideramos la teoría KZ_n determinada por los axiomas siguientes:

Extensionalidad	$\bigwedge xy(\bigwedge u(u \in x \leftrightarrow u \in y) \rightarrow x = y)$
Par	$\bigwedge xy\bigvee z(x \in z \land y \in z)$
Unión	$\bigwedge x\bigvee y\bigwedge u \in x\bigwedge v \in u\ v \in y$
Partes	$\bigwedge x\bigvee y\bigwedge u(u \subset x \rightarrow u \in y)$
$\mathbf{\Pi}_n$-especificación	$\bigwedge x\bigvee y\bigwedge u(u \in y \leftrightarrow u \in x \land \phi(u))\quad (*)$
$\mathbf{\Delta}_0$-recolección	$\bigwedge u\bigvee v\, \phi(u,v) \rightarrow \bigwedge a\bigvee b\bigwedge u \in a\bigvee v \in b\ \phi(u,v)\quad (*)$
$\mathbf{\Pi}_1$-Regularidad	$\bigvee u\, \phi(u) \rightarrow \bigvee u(\phi(u) \land \bigwedge v \in u\, \neg\phi(v))\quad (*)$
Infinitud	$\bigvee x(\varnothing \in x \land \bigwedge n \in x\ n \cup \{n\} \in x)$

$(*)$ para toda fórmula ϕ (con posibles parámetros) de la clase indicada en cada caso, con el convenio de que Π_0 significa Δ_0.

De este modo, KZ_n consta de los axiomas de KP* más los axiomas de Z_n, que es la teoría de Zermelo con el esquema de especificación restringido a fórmulas Π_n (o, equivalentemente, Σ_n).

Observemos que en KZ_n podemos probar el esquema de Π_n-regularidad. En efecto, claramente KZ_n extiende a KP, luego podemos probar CT. Si ϕ es una fórmula de clase Π_n y suponemos $\phi(u)$, por Π_n-especificación podemos formar el conjunto

$$A = \{v \in \operatorname{ct} u \mid \phi(v)\}.$$

Entonces, o bien $A = \varnothing$, en cuyo caso $\phi(u) \wedge \bigwedge v \in u\ \neg\phi(u)$, o bien, considerando la fórmula Δ_0 "$v \in A$", existe un $v \in A$ tal que $\bigwedge w \in v\ w \notin A$, y así $\phi(v) \wedge \bigwedge w \in v\ \neg\phi(w)$.

Es inmediato que $\mathrm{KZ}_0 = \mathrm{KP}^* + \mathrm{M} = \mathrm{KPI}^* + \mathrm{AP}$ y, en general,

$$\mathrm{KZ}_n = \mathrm{KZ}_0 + \Pi_n\text{-especificación}.$$

Puesto que CT es un teorema de KP^*, también $\mathrm{KZ}_0 = \mathrm{KP}^* + \mathrm{M}^+$, luego

$$\mathrm{KZ}_0 + \mathrm{AE} = \mathrm{KP}^* + \mathrm{MAC}^+.$$

Observemos ahora que, según el teorema 4.15, en KZ_1 se puede probar el teorema del colapso de Mostowski, que sobre M_0 es equivalente al axioma H. Así pues, KZ_1 extiende a $\mathrm{KP}^*+\mathrm{M}^++\mathrm{H}$. En principio, KZ_1 añade a esta teoría el esquema de Π_1-especificación, pero el teorema 3.32 afirma que, en presencia de AE, dicho esquema puede deducirse del axioma H, al igual que todos los axiomas de KP^*. Por ello, la *teoría de Mostowski* (MOST) puede definirse indistintamente como

$$\mathrm{MOST} = \mathrm{KZ}_1 + \mathrm{AE} = \mathrm{MAC}^+ + \mathrm{H}.$$

Definimos

$$\mathrm{KLZ}_n = \mathrm{KZ}_n + V = L.$$

Así, $\mathrm{KLZ}_0 = \mathrm{KP}^* + \mathrm{MAC}^+ + V = L$ y $\mathrm{KLZ}_1 = \mathrm{MOST} + V = L$.

La teoría KLZ_1 es la teoría más fuerte cuya consistencia hemos probado a partir de la de M_0+AI. En particular, entre ambas teorías se encuentran KZ_0, KZ_1, KLZ_0 y KLZ_1, luego estas cuatro teorías son equiconsistentes.

En principio estamos considerando la clase L de los conjuntos constructibles definida en el capítulo anterior a partir de los axiomas de KPI^*. Ésta es la única opción en el caso de KZ_0, pero en KZ_1 podemos construir también L por el método seguido en el capítulo precedente, a partir de los axiomas de M^++H. Vamos a probar que el resultado es el mismo. Para ello llamaremos L_M a la clase construida en M^++H y L_K a la construida en KPI^* y demostraremos que son la misma.

Sabemos que L_M y L_K contienen a la clase Ω de todos los ordinales, que L_M es un modelo de $\mathrm{MOST} + V = L$ y que L_K es un modelo de $\mathrm{KPI}^*+V = L$.

En particular, en L_M podemos llevar a cabo la construcción de L_K, y es fácil ver que ésta es absoluta para modelos de $\mathrm{M}^+ + \mathrm{H}$ que contengan a Ω. Esto implica que la clase L_K construida en L_M es la misma que la construida en V, es decir, que $L_K \subset L_M$. El mismo argumento prueba la inclusión opuesta si demostramos (en KZ_1) que L_K es un modelo de M^++H. Destacamos este hecho, que tiene interés en sí mismo:

Teorema 5.1 ($\mathbf{KZ}_1$) *La clase L de los conjuntos constructibles es un modelo transitivo de* KLZ_1.

Demostración: Continuando con el razonamiento precedente, vamos a probar que esto es así para la clase L_K, lo que automáticamente probará que $L_K = L_M$. Por 4.21 sabemos que L_K es un modelo de KPI* (y la discusión tras el teorema prueba que también cumple $V = L$). Veamos ahora que cumple AP.

Si $a \in L_K$, teniendo en cuenta que la fórmula "$a \in L_K$" es Σ_1 (y que el esquema de Π_1-especificación es trivialmente equivalente al de Σ_1-especificación), concluimos que $A = \mathcal{P}a \cap L_K$ es un conjunto.

Tenemos que $\bigwedge x \in A \bigvee \alpha \in \Omega\ x \in L_\alpha$, luego por Σ_1-recolección existe un conjunto de ordinales Y tal que $\bigwedge x \in A \bigvee \alpha \in Y\ x \in L_\alpha$. Si $\alpha = \bigcup Y \in \Omega$, tenemos que $A \subset L_\alpha$, luego

$$\mathcal{P}a \cap L = \{x \in L_\alpha \mid x \subset a\} \in L_{\alpha+1} \in L.$$

Esto prueba AP^L, luego L_K es un modelo de KLZ_0. Ahora basta probar que también cumple el axioma H, pues, sobre MAC^+, éste implica el esquema de Π_1-especificación. Ahora bien, como sabemos que $L_K \subset L_M$ y, más aún, que L_K coincide con el modelo construido en L_M y éste es un modelo de MOST, podemos razonar en MOST en lugar de en KZ_1. En particular podemos suponer el axioma H.

Tomamos $u \in L_K$ y consideramos el conjunto transitivo T que cumple el axioma H para u, es decir, tal que todo conjunto transitivo z con $\overline{\overline{z}} \leq \overline{\overline{u}}$ esté contenido en T. El mismo razonamiento que acabamos de emplear para probar AP muestra que $T \cap L_K$ es un conjunto y que existe un cierto ordinal α tal que $T \cap L_K \subset L_\alpha$. Así, si $z \in L_K$ es transitivo y cumple $(\overline{\overline{z}} \leq \overline{\overline{u}})^{L_K}$, también $\overline{\overline{z}} \leq \overline{\overline{u}}$, luego $z \subset T \cap L_K \subset L_\alpha$, luego L_α cumple el axioma H para u en L_K. ■

Nota Hemos visto (teorema 4.21) que en KPI* se puede probar que L es un modelo de KPI*. Sin embargo, cabe destacar que en KPI* + AP (esto es, en KZ_0) no puede probarse que L cumpla AP, mientras que sí que hemos probado que en KZ_1 se demuestra que L cumple KLZ_1 (y en particular AP). ■

Ahora vamos a probar que las teorías KLZ_0 y KLZ_1 no sólo son equiconsistentes, como ya hemos probado, sino que de hecho son la misma teoría. Para ello basta demostrar el axioma H en KLZ_0. Necesitamos algunos resultados previos:

Teorema 5.2 ($\mathbf{KZ_0}$+AE) *Si α es un ordinal infinito entonces $|L_\alpha| = |\alpha|$.*

Demostración: El obstáculo principal es que no podemos asegurar que todo conjunto tenga cardinal. Sabemos que (en M_0 se demuestra que)

$$|\mathrm{Form}(\mathcal{L})| \leq |\omega^{<\omega}| = \omega, \qquad |\mathrm{Df}(X, n)| \leq |\mathrm{Form}(\mathcal{L})| = \omega.$$

Si X tiene cardinal, entonces

$$|\mathcal{D}X| \leq |\bigcup_{n\in\omega} \{n\} \times X^n \times \mathrm{Df}(X, n)| \leq |\omega \times X \times \omega| = \omega|X|.$$

Ahora suponemos que existe un ordinal infinito α tal que $|L_\alpha| \neq |\alpha|$ y consideramos el conjunto

$$Y = \{\delta \in \alpha \mid \omega \leq \delta \wedge \neg \bigvee f \in \mathcal{P}(L_\alpha \times \alpha)\ f : L_\delta \longrightarrow \delta \text{ biyectiva}\}$$

Cambiando α por el mínimo de Y si es que $Y \neq \varnothing$ podemos suponer que para todo $\delta < \alpha$ infinito se cumple que $|L_\delta| = |\delta|$. Una simple inducción prueba que si $n \in \omega$ entonces L_n es finito, luego si $\delta < \alpha$ entonces $|L_\delta| \leq |\alpha|$, tanto si δ es finito como si es infinito.

Si α es un ordinal límite, entonces

$$|L_\alpha| = |\bigcup_{\delta<\alpha} L_\delta| \leq |\alpha \times \alpha| = |\alpha|,$$

donde usamos AE para elegir inyecciones $f_\delta : L_\delta \longrightarrow \alpha$ con las que construir una inyección de la unión en $\alpha \times \alpha$. Como $\alpha \subset L_\alpha$, tenemos que $|L_\alpha| = |\alpha|$, contradicción.

Nos queda la posibilidad de que $\alpha = \delta + 1$, en cuyo caso

$$|L_\alpha| = |\mathcal{D}L_\delta| \leq |L_\delta| = |\delta| \leq |\alpha|$$

y llegamos a la misma contradicción. ■

De aquí se desprende que en KLZ_0 todo conjunto tiene cardinal, pues todo conjunto está contenido en un L_α.

Teorema 5.3 ($\mathbf{KZ}_0$) *Si κ es un cardinal regular no numerable (en particular si es el sucesor de un cardinal infinito) entonces L_κ es un modelo transitivo de* $\mathrm{KPI}^* + V = L$.

Demostración: La prueba del teorema 4.21 se adapta trivialmente para probar que L_κ satisface KPI^*. La regularidad de κ sólo es necesaria para probar el esquema de Δ_0-recolección, donde tomamos un $x \in L_\kappa$, de modo que $x \in L_\delta$, para un $\delta < \kappa$ (que podemos tomar infinito), luego $|x| = |L_\delta| = |\delta| < \kappa$. A partir de x obtenemos un conjunto $B \subset \Omega$ de modo que $|B| \leq |x| < \kappa$ y la regularidad de κ nos permite concluir que $\alpha = \bigcup B \in \kappa$.

Por lo tanto, L puede ser definida en L_κ y, como la fórmula "$y = L_\alpha$" es absoluta para modelos transitivos de KPI^* y $L_\kappa \cap \Omega = \kappa$, es fácil concluir que $L^{L_\kappa} = L_\kappa$, luego L_κ cumple $V = L$. ■

Teorema 5.4 *En* KLZ_0 *se puede probar el axioma* H, *por lo que es la misma teoría que* KLZ_1.

Demostración: En primer lugar demostraremos que todo cardinal infinito κ tiene un sucesor. Sea $A = \mathcal{P}\kappa$. Tenemos que $\bigwedge x \in A \bigvee \alpha \in \Omega\ x \in L_\alpha$, luego por Σ_1-recolección existe un conjunto $X \subset \Omega$ tal que $\bigwedge x \in A \bigvee \alpha \in X\ x \in L_\alpha$, luego $\lambda = \bigcup X \in \Omega$ cumple que $A \subset L_\lambda$. Por el teorema de Cantor 3.2 y 5.2 tenemos que $\kappa < |A| \leq |L_\lambda| = |\lambda|$, luego existe un cardinal mayor que κ, y es fácil ver entonces que existe el menor cardinal κ^+ mayor que κ.

Pasamos a probar el axioma H, para lo cual tomamos un conjunto arbitrario u. Sea η un ordinal infinito tal que $u \in L_\eta$. Así $|u| \leq |L_\eta| = |\eta| = \kappa$. Sea $T = L_{\kappa^+}$ y vamos a probar que cumple la condición que exige el axioma H. Para ello tomamos un conjunto transitivo z tal que $|z| \leq |u|$. Sea μ un cardinal (que podemos tomar sucesor) tal que $z \in L_\mu$. Por el teorema anterior L_μ es un modelo transitivo de KPI*+ $V = L$.

Llamamos N al núcleo de Skolem de $z \cup \{z\}$ en L_μ, que puede construirse en MAC y cumple que $|N| = \omega|z| \leq \kappa$. Por la observación tras el teorema 4.16 en KPI* se prueba la existencia del colapso transitivo $\pi : N \longrightarrow M$, de modo que M es un modelo transitivo de KPI*+$V = L$. Sea $\lambda = M \cap \Omega$, que es un conjunto por Δ_0-especificación. El hecho de que L_α sea absoluto para modelos transitivos de KPI* implica que $M = L_\lambda$, luego $|\lambda| = |L_\lambda| = |N| \leq \kappa$, luego $\lambda < \kappa^+$. Por otra parte, como $z \cup \{z\} \subset N$ es un conjunto transitivo, es claro que π es la identidad sobre él, luego $z \in M = L_\lambda \subset T$, luego $z \subset T$. ■

5.2 Los modelos $H(\kappa)$

En MOST podemos dar una interpretación natural del axioma H. Dado un cardinal infinito κ, podemos considerar el conjunto T dado por el axioma H para κ, y definir el conjunto

$$A = \{x \in \mathcal{P}T \mid \bigcup x \subset x \land \bigvee f \in \mathcal{P}(T \times \kappa)\ f : x \longrightarrow \kappa \text{ inyectiva} \land$$
$$\neg \bigvee f \in \mathcal{P}(T \times \kappa)\ f : x \longrightarrow \kappa \text{ biyectiva}\}.$$

En definitiva, A es el conjunto de los $x \subset T$ transitivos tales que $|x| < \kappa$ y $B = \bigcup A$ cumple entonces que

$$\bigwedge u(u \in B \leftrightarrow |\mathrm{ct}(u)| < \kappa).$$

En efecto, si $u \in B$ entonces existe un $x \in A$ tal que $u \in x$, a su vez, x es transitivo y $|x| < \kappa$, luego $u \subset x$ y $\mathrm{ct}(u) \subset x$, luego $|\mathrm{ct}(u)| \leq |x| < \kappa$. Recíprocamente, si u cumple esto, entonces $\mathrm{ct}(u) \cup \{u\} \subset T$, de manera que $\mathrm{ct}(u) \cup \{u\} \in A$, luego $u \in B$. En particular B no depende de la elección de T, luego podemos definir

$$H(\kappa) \equiv z \mid \bigwedge u(u \in z \leftrightarrow |\mathrm{ct}(u)| < \kappa).$$

Se dice que $H(\kappa)$ es el *conjunto de todos los conjuntos hereditariamente de cardinal menor que* κ, y es un conjunto transitivo. En estos términos, el conjunto $H(|u|^+)$ cumple el axioma H para un conjunto u.

Recordemos que en KP* (y por lo tanto en MOST) hemos definido la aplicación $\mathrm{rang} : V \longrightarrow \Omega$, que nos permite a su vez considerar las clases

$$V_\alpha = \{x \mid \mathrm{rang}\, x < \alpha\},$$

aunque ya hemos comentado que no son necesariamente conjuntos.

Teorema 5.5 (MOST) *Si κ es un cardinal infinito, $H(\kappa) \subset V_\kappa$.*

Demostración: Si $x \in H(\kappa)$, entonces $z = \mathrm{ct}(x) \cup \{x\}$ cumple $|z| < \kappa$. Vamos a probar que la imagen de la restricción $\mathrm{rng} : z \longrightarrow \Omega$ es transitiva y, por consiguiente, un ordinal. En efecto, si $A = \mathrm{rng}[z]$ y existe un $\alpha \in A$ para el que existe un $\beta \in \alpha \setminus A$, podemos tomar el mínimo β posible, con lo que $\beta \subset A$, pero $\beta \neq A$, ya que $\beta \in \alpha \in A$. Podemos cambiar α por el mínimo elemento de A mayor que β. Sea $u \in z$ tal que $\mathrm{rang}\, u = \alpha$. Así, si $v \in u$, entonces $v \in z$ y $\mathrm{rang}\, v < \alpha$, luego por la minimalidad de α, de hecho $\mathrm{rang}\, v < \beta$, luego

$$\alpha = \mathrm{rang}\, u = \bigcup_{v \in u} (\mathrm{rang}\, v + 1) \leq \beta,$$

contradicción. Así pues, $\mathrm{rang} : z \longrightarrow \alpha$, para cierto ordinal α, de modo que $|\alpha| \leq |z| < \kappa$, luego $\alpha < \kappa$ y, como $x \in z$, tenemos que $\mathrm{rang}\, x < \alpha < \kappa$, luego $x \in V_\kappa$. ■

Teorema 5.6 (MOST) *Si κ es un cardinal infinito regular, entonces*

$$\bigwedge x\, (x \in H(\kappa) \leftrightarrow x \subset H(\kappa) \land |x| < \kappa).$$

Demostración: Una implicación es trivial. Si $x \subset H(\kappa)$ y $|x| < \kappa$, entonces, como

$$\mathrm{ct}(x) = x \cup \bigcup_{u \in x} \mathrm{ct}(u)$$

y, por hipótesis, $|\mathrm{ct}(u)| < \kappa$. Así pues, tenemos expresado $\mathrm{ct}(x)$ como unión de menos de κ conjuntos de cardinal menor que κ. Como κ es regular, esto implica que $|\mathrm{ct}(x)| < \kappa$, luego $x \in H(\kappa)$. ■

Teorema 5.7 (MOST) *Si κ es un cardinal no numerable, entonces $H(\kappa)$ es un modelo transitivo de* KPI+AE *y, si κ es regular, también de* ZFC − AP.

Demostración: Claramente, $H(\kappa)$ cumple el axioma de extensionalidad porque es un conjunto transitivo. Si $x, y \in H(\kappa)$, entonces

$$\mathrm{ct}(\{x, y\}) = \mathrm{ct}\, x \cup \mathrm{ct}\, y \cup \{x, y\},$$

y es claro entonces que $|\mathrm{ct}(\{x, y\})| < \kappa$, luego $\{x, y\} \in H(\kappa)$, y esto prueba el axioma del par. Similarmente, como $\mathrm{ct}(\bigcup x) \subset \mathrm{ct}\, x$, también $\bigcup x \in H(\kappa)$ y se cumple el axioma de la unión.

Observemos ahora que $H(\kappa)$ cumple el esquema de especificación completo (no sólo para fórmulas Δ_0). En efecto, dada $\phi \in \mathrm{Form}(\mathcal{L})$ con variables libres $u, x_1 \ldots, x_n$, si $x, x_1, \ldots, x_n \in H(\kappa)$ tenemos que la clase

$$A = \{u \in x \mid H(\kappa) \vDash \phi[u, x_1, \ldots, x_n]\}$$

es un conjunto, porque la fórmula $M \vDash \phi[v]$ es Δ_0 en los parámetros adecuados, y $A \in H(\kappa)$ porque $\mathrm{ct}\, A \subset \mathrm{ct}\, x$, luego $|\mathrm{ct}\, A| < \kappa$. Esto prueba el esquema de especificación.

Es inmediato que si $x \in H(\kappa)$ entonces $\operatorname{ct} x \in H(\kappa)$, luego $H(\kappa)$ cumple CT. Por otro lado, cumple el axioma de regularidad para conjuntos (cualquier clase transitiva lo cumple) y estos dos axiomas junto con el esquema de especificación demuestran el axioma de regularidad para fórmulas cualesquiera.

Puesto que $\omega \in H(\kappa)$ (éste es el único punto en el que la prueba requiere que κ sea no numerable), tenemos el axioma de infinitud, y para el axioma de elección observamos que si $x \in H(\kappa)$ y $R \subset x \times x$ es un buen orden en x, se prueba sin dificultad que $R \in H(\kappa)$.

Así, para probar que $H(\kappa)$ cumple KPI sólo falta probar el esquema de Δ_0-recolección y para probar que cumple ZFC$-$AP sólo falta probar el esquema de reemplazo. Probaremos primero ambos axiomas suponiendo que κ es regular.

Para el reemplazo tomamos $\phi \in \mathrm{Form}(\mathcal{L})$, suponemos que

$$\bigwedge xyz \in H(\kappa)(H(\kappa) \vDash \phi[x,y] \land H(\kappa) \vDash \phi[x,z] \rightarrow y = z)$$

y fijamos un conjunto $A \in H(\kappa)$. Basta probar que el conjunto

$$B = \{y \in H(\kappa) \mid \bigvee x \in A\ H(\kappa) \vDash \phi[x,y]\}$$

cumple $B \in H(\kappa)$. Por 5.6 basta probar que $|B| < \kappa$, pero claramente

$$f = \{(x,y) \in A \times B \mid H(\kappa) \vDash \phi[x,y]\}$$

es una aplicación $f : A_0 \longrightarrow B$ suprayectiva, donde

$$A_0 = \{x \in A \mid \bigvee y \in B\ H(\kappa) \vDash \phi[x,y]\},$$

luego $|B| \leq |A_0| \leq |A| < \kappa$.

Para probar el esquema de Δ_0-recolección tomamos $\phi \in \mathrm{Form}(\mathcal{L})$ de clase Δ_0 y un conjunto $x \in H(\kappa)$ de modo que

$$\bigwedge u \in x \bigvee v \in H(\kappa)\ H(\kappa) \vDash \phi[u,v].$$

Por AE existe una aplicación suprayectiva $f : x \longrightarrow y \subset H(\kappa)$ tal que

$$\bigwedge u \in x\ H(\kappa) \vDash \phi[u, f(u)],$$

luego, en particular, $\bigwedge u \in x \bigvee v \in y\ H(\kappa) \vDash \phi[u,v]$. Finalmente basta observar que $|y| \leq |x| < \kappa$, luego $y \in H(\kappa)$.

Nos falta demostrar el esquema de Δ_0-recolección cuando κ es singular. Empezamos demostrando un hecho general:

Si $\mu < \kappa$ son cardinales no numerables, $\phi(x_1,\ldots,x_n) \in \mathrm{Form}(\mathcal{L})$ es una fórmula Σ_1 y $x_1,\ldots,x_n \in H(\mu)$, entonces

$$H(\kappa) \vDash \phi[x_1,\ldots,x_n] \rightarrow H(\mu) \vDash \phi[x_1,\ldots,x_n].$$

En efecto, tenemos que $\{(x_1,\ldots,x_n)\}\in H(\mu)$, luego $W=\mathrm{ct}(\{x_1,\ldots,x_n\})$ cumple $|W|<\mu$. Además $W\subset H(\mu)\subset H(\kappa)$. Por el teorema de Löwenheim-Skolem podemos tomar un submodelo elemental $M\prec H(\kappa)$ tal que $W\subset M$ y $|M|=|W|<\mu$. Sea $\pi: M\longrightarrow N$ el colapso transitivo de M. Entonces $|N|=|M|<\mu$, luego $N\in H(\mu)$ y $N\subset H(\mu)$.

Si llamamos $i=\pi^{-1}$, tenemos que $i:N\longrightarrow H(\kappa)$ es una inmersión elemental tal que $i|_W$ es la identidad. Por lo tanto,

$$H(\kappa)\vDash\phi[x_1,\ldots,x_n]\rightarrow H(\kappa)\vDash\phi[i(x_1),\ldots,i(x_n)]\rightarrow N\vDash\phi[x_1,\ldots,x_n],$$

pero ϕ es de la forma $\phi=\bigvee x\,\psi$, donde ψ es Δ_0 y lo que tenemos es que $\bigvee x\in N\ N\vDash\psi[x,x_1,\ldots,x_n]$. Como ψ es Δ_0, es claro que

$$\bigvee x\in H(\mu)\ H(\mu)\vDash\psi[x,x_1,\ldots,x_n],$$

luego $H(\mu)\vDash\phi[x_1,\ldots,x_n]$, como había que probar.

Para probar que $H(\kappa)$ cumple el axioma de Δ_0-recolección tomamos una fórmula $\psi(u,v,x_1,\ldots,x_n)\in\mathrm{Form}(\mathcal{L})$ de clase Δ_0 y fijamos unos conjuntos $x_1,\ldots,x_n,x\in H(\kappa)$ tales que

$$\bigwedge u\in x\bigvee v\in H(\kappa)\,H(\kappa)\vDash\psi[u,v,x_1,\ldots,x_n].$$

Entonces $\{(x,x_1,\ldots,x_n)\}\in H(\kappa)$, luego $W=\mathrm{ct}(\{(x,x_1,\ldots,x_n)\})$ cumple $|W|<\kappa$. Como κ es singular, existe un cardinal regular $\mu<\kappa$ tal que $|W|<\mu$ y $x,x_1,\ldots,x_n\in H(\mu)$, con lo que $W\subset H(\mu)$.

Fijado $u\in x$, el resultado que hemos probado aplicado a la fórmula $\phi\equiv\bigvee v\psi$ nos da que

$$\bigvee v\in H(\mu)\ H(\mu)\vDash\phi[u,v,x_1,\ldots,x_n].$$

De este modo tenemos que

$$\bigwedge u\in x\bigvee v\in H(\mu)\ H(\mu)\vDash\phi[u,v,x_1,\ldots,x_n].$$

Como μ es regular, tenemos probado que $H(\mu)$ es un modelo de KP, luego, por el axioma de Δ_0-recolección en $H(\mu)$ tenemos que

$$\bigvee y\in H(\mu)\bigwedge u\in x\bigvee v\in y\ H(\mu)\vDash\phi[u,v,x_1,\ldots,x_n].$$

Como ϕ es Δ_0, es claro que esto implica que

$$\bigvee y\in H(\kappa)\bigwedge u\in x\bigvee v\in y\ H(\kappa)\vDash\phi[u,v,x_1,\ldots,x_n],$$

que es lo que había que probar. ■

Así pues, la consistencia de MAC no sólo implica la de KPI*, sino también la de KPI y la de ZFC−AP.

Ahora podemos refinar el teorema 5.3:

Teorema 5.8 (MOST) *Si $\kappa>\omega$ es un cardinal infinito^L, entonces L_κ es un modelo transitivo de* KPI.

DEMOSTRACIÓN: Tenemos que L es un modelo transitivo de MOST, luego, por el teorema anterior, $M = H(\kappa)^L$ es un modelo transitivo de KPI (esto es absoluto). Ahora bien, en KPI se demuestra que L es un modelo de KPI, luego la relativización de este teorema a M afirma que L^M es un modelo transitivo de KPI. Pero $M \cap \Omega = \kappa$, luego $L^M = L_\kappa$. ■

Teorema 5.9 (KLZ$_1$) *Si κ es un cardinal infinito, entonces $H(\kappa) = L_\kappa$.*

DEMOSTRACIÓN: Si $\kappa = \omega$ el resultado es trivial, así que supondremos que κ no es numerable. La inclusión $L_\kappa \subset H(\kappa)$ se sigue de que si α es un ordinal infinito $|L_\alpha| = |\alpha|$. Así, si $x \in L_\kappa$, existe un $\alpha < \kappa$ (infinito) tal que $x \in L_\alpha$, con lo que $\mathrm{ct}(x) \subset L_\alpha$, luego $|\mathrm{ct}(x)| \leq |L_\alpha| = |\alpha| < \kappa$. Por consiguiente $x \in H(\kappa)$.

Para probar la inclusión contraria consideramos primero el caso en que κ es regular. Si existe $x \in H(\kappa) \setminus L_\kappa$, por el axioma de regularidad podemos exigir que $x \cap (H(\kappa) \setminus L_\kappa) = \varnothing$. Como $H(\kappa)$ es transitivo, esto equivale a que $x \subset L_\kappa$. Como $y = L_\alpha$ es Δ_1, podemos definir

$$f = \{(u, \alpha) \in x \times \kappa \mid \bigvee y \in L_\kappa (y = L_\alpha \wedge u \in y \wedge$$
$$\bigwedge \beta < \alpha \bigvee y \in L_\kappa (y = L_\beta \wedge u \notin y)\}$$

Así $f : x \longrightarrow \kappa$ y $\bigwedge u \in x\ u \in L_{f(u)}$. Como $|\mathcal{R}f| \leq |x| < \kappa$, existe un $\alpha \in \kappa$ tal que $\mathcal{R}f \subset \alpha$, lo que se traduce en que $x \subset L_\alpha$. Pero entonces[1] $x \in \mathcal{P}L_\alpha \subset L_{\alpha^+} \subset L_\kappa$.

Si κ es singular y $x \in H(\kappa)$, entonces existe un cardinal regular $\mu < \kappa$ tal que $x \in H(\mu)$, luego $x \in L_\mu \subset L_\kappa$. ■

Terminamos con una propiedad notable de estos modelos, y es que las fórmulas Σ_1 son absolutas para ellos:

Teorema 5.10 (MOST) *Sea $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ una fórmula Σ_1. Entonces, si κ es un cardinal no numerable, se cumple que*

$$\bigwedge x_1 \cdots x_n \in H(\kappa)\, (\phi^{H(\kappa)}(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \phi(x_1, \ldots, x_n)).$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $\phi \equiv \bigvee x\, \psi(x, x_1, \ldots, x_n)$, donde ψ es Δ_0. Una implicación es inmediata, y sólo hemos de probar que si existe un x tal que $\psi(x, x_1, \ldots, x_n)$ entonces existe un $y \in H(\kappa)$ tal que $\psi(y, x_1, \ldots, x_n)$, pues esto equivale a $\psi^{H(\kappa)}(y, x_1, \ldots, x_n)$.

Sea $\alpha \geq \kappa$ tal que $x \in V_\alpha$. Así $\{x_1, \ldots, x_n, x\} \subset V_\alpha$ y $\phi^{V_\alpha}(x_1, \ldots, x_n)$. Como V_α es transitivo, $X = \mathrm{ct}\, x_1 \cup \cdots \cup \mathrm{ct}\, x_n \cup \{x_1, \ldots, x_n\} \subset V_\alpha$ y $|X| < \kappa$. Podemos considerar el núcleo de Skolem $N = N(X)$, que cumple $|N| < \kappa$. (Aquí usamos que κ es no numerable.) Sea M el colapso transitivo de N y sea $i : M \longrightarrow V_\alpha$ la inversa de la función colapsante, que es una inmersión elemental. Como $\mathrm{ct}\, x_i \cup \{x_i\} \subset N$ y es un conjunto transitivo, la función colapsante es la

[1] No hemos probado que $L \cap \mathcal{P}L_\alpha \subset L_{\alpha^+}$, pero el argumento usual es válido en MOST: si $x \in L \cap \mathcal{P}L_\alpha$, tomamos un cardinal μ tal que $x \in L_\mu$ y consideramos el núcleo de Skolem N de $L_\alpha \cup \{x\}$ en L_μ. Entonces su colapso transitivo es un L_δ con $\delta < \kappa^+$ y $x \in L_\delta$.

identidad sobre él, luego $x_i \in M$ y $i(x_i) = x_i$. Como $\phi^{V_\alpha}(x_1, \ldots, x_n)$, también $\phi^M(x_1, \ldots, x_n)$.

Ahora bien, M es un conjunto transitivo y $|M| < \kappa$, luego $M \subset H(\kappa)$, y por consiguiente $\phi^{H(\kappa)}(x_1, \ldots, x_n)$. ■

5.3 El axioma de los rangos

Como ya hemos comentado, en KP* podemos definir el rango de un conjunto arbitrario, pero no podemos probar que las clases

$$V_\alpha = \{x \mid \operatorname{rang} x < \alpha\}$$

sean conjuntos. (Sabemos que en KP* se prueba que V_n es un conjunto cuando $n \in \omega$ y en KPI* tenemos además que V_ω es un conjunto.) Vamos a estudiar ahora las consecuencias de tomar este hecho como axioma, es decir, de añadir (como mínimo a KPI*) el axioma siguiente:

Axioma de los rangos (RNG) $\bigwedge \alpha \in \Omega \bigvee A \bigwedge x(x \in A \leftrightarrow \operatorname{rang} x < \alpha)$.

Llamaremos

$$\mathrm{KPR}^* = \mathrm{KPI}^* + \mathrm{RNG}, \qquad \mathrm{KPR} = \mathrm{KPI} + \mathrm{RNG}.$$

Lo primero que observamos es que en KPR* podemos demostrar el axioma de partes, pues si x es un conjunto y $\operatorname{rang} x = \alpha$, entonces todo $y \subset x$ cumple que $\bigwedge u \in y \operatorname{rang} u < \alpha$, luego $\operatorname{rang} y \leq \alpha < \alpha + 1$, luego $y \in V_{\alpha+1}$, luego

$$\mathcal{P}x = \{y \in V_{\alpha+1} \mid y \subset x\}$$

es un conjunto por Δ_0-especificación.

Así pues, KPR* extiende a KZ_0 y en particular a M^+.

En MOST + RNG puede definirse la función beth como $\beth_\alpha = |V_{\omega+\alpha}|$, y es inmediato entonces que

$$\beth_0 = \aleph_0 \wedge \bigwedge \alpha\, \beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha} \wedge \bigwedge \lambda\, \beth_\lambda = \bigcup_{\delta<\lambda} \beth_\delta.$$

Teorema 5.11 (MOST+RNG) *Si κ es un cardinal infinito, $H(\kappa) = V_\kappa$ si y sólo si $\kappa = \aleph_0$ o $\kappa = \beth_\kappa$.*

DEMOSTRACIÓN: La igualdad $H(\aleph_0) = V_\omega$ es inmediata, así que podemos restringirnos al caso en que κ es no numerable. La clave está en que $|V_{\omega+\alpha}| = \beth_\alpha$, de modo que si $\kappa = \beth_\kappa$ y $x \in V_\kappa$, entonces existe un $\alpha < \kappa$ tal que $x \in V_\alpha$, luego $\mathrm{ct}(x) \subset V_\alpha$, luego $|\mathrm{ct}(x)| \leq |V_\alpha| \leq |V_{\omega+\alpha}| = \beth_\alpha < \beth_\kappa = \kappa$, luego $x \in H(\kappa)$.

Recíprocamente, si $H(\kappa) = V_\kappa$ entonces, para todo $\alpha < \kappa$, tenemos que $\omega + \alpha < \kappa$ y, como $V_{\omega+\alpha} \in V_\kappa = H(\kappa)$, tenemos que $\beth_\alpha < \kappa$, luego $\beth_\kappa \leq \kappa$, y la desigualdad opuesta se da siempre. ■

No podemos probar que KPR es consistente si lo es KP. Ni siquiera si lo es Z (cuya consistencia es más fuerte que la de MAC, que a su vez es más fuerte que la de KP). La razón está en el teorema siguiente:

Teorema 5.12 (KPR*) *El conjunto $V_{\omega\cdot 2}$ es un modelo transitivo de Z^+.*

DEMOSTRACIÓN: El axioma de extensionalidad y el de regularidad se cumplen porque $V_{\omega\cdot 2}$ es transitivo. El axioma del par, el de la unión y el de partes se comprueban fácilmente. Por ejemplo, para probar AP observamos que si $x \in V_{\omega\cdot 2}$ existe un $n \in \omega$ tal que $x \in V_{\omega+n}$, luego $x \subset V_{\omega+n}$, luego $\mathcal{P}x \subset \mathcal{P}V_{\omega+n} = V_{\omega+n+1}$, luego $\mathcal{P}x \in \mathcal{P}V_{\omega+n+1} = V_{\omega+n+2} \subset V_{\omega\cdot 2}$.

Si $\phi(u, x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{Form}(\mathcal{L})$ y $x, x_1, \ldots, x_n \in V_{\omega\cdot 2}$, existe un $m \in \omega$ tal que $x, x_1, \ldots, x_n \in V_{\omega+n}$, luego

$$A = \{u \in x \mid V_{\omega\cdot 2} \vDash \phi[u, x_1, \ldots, x_n]\}$$

es un conjunto por Δ_0-especificación, luego $A \in \mathcal{P}x \subset V_{\omega\cdot 2}$ y esto prueba el esquema de especificación.

Claramente $\omega \in V_{\omega+1} \subset V_{\omega\cdot 2}$, luego tenemos el axioma de infinitud y, como cada $V_{\omega+n}$ es transitivo, se cumple claramente CT. ■

Por lo tanto $\mathrm{KPR}^* \vdash \mathrm{Consis}\,\mathrm{Z}^+$, pero KPR* es suficientemente potente como para formalizar cualquier argumento metamatemáticamente aceptable. Por lo tanto, si pudiéramos probar que la consistencia de Z^+ implica la de KPR* mediante un argumento metamatemáticamente aceptable, podríamos formalizarlo en KPR*, de modo que

$$\mathrm{KPR}^* \vdash \ \mathrm{Consis}\,\mathrm{Z}^+ \rightarrow \mathrm{Consis}\,\mathrm{KPR}^*,$$

de donde $\mathrm{KPR}^* \vdash \mathrm{Consis}\,\mathrm{KPR}^*$, lo que implica que KPR* sería contradictorio, por el teorema de incompletitud.

Nota El modelo $V_{\omega\cdot 2}$ prueba que en Z^+ no puede probarse la existencia de cardinales de von Neumann no numerables, luego en particular no puede probarse el axioma H. Más aún, si $R \subset \omega \times \omega$ es cualquier buen orden en ω (por ejemplo, de ordinal $\omega \cdot 3$, que puede construirse explícitamente), tenemos que $R \in V_{\omega\cdot 2}$, pero (ω, R) no es semejante a un ordinal en $V_{\omega\cdot 2}$ (ya que no hay más ordinales que los menores que $\omega \cdot 2$), luego en Z^+ no puede probarse que todo conjunto bien ordenado sea semejante a un ordinal.

Por otra parte, en ZFC podemos definir

$$V_0(\omega) = \omega \wedge \bigwedge n \in \omega \ V_{n+1}(\omega) = \mathcal{P}V_n(\omega) \wedge V_\omega(\omega) = \bigcup_{n\in\omega} V_n(\omega)$$

y es fácil ver que $V_\omega(\omega)$ es un modelo de Z^+ en el que la clase V_ω no es un conjunto, luego en Z^+ no puede probarse la existencia de V_ω. ■

El axioma RNG presupone la definición del rango de un conjunto, que puede darse en KP*, pero no en MAC. Ahora introducimos un axioma que sólo presupone M_0, que sobre KZ_1 es equivalente a RNG, pero cuya consistencia puede probarse a partir de la de MAC. Hasta el final de esta sección trabajaremos en la teoría M_0.

Definición 5.13 Una *jerarquía* es un conjunto H que cumpla las propiedades siguientes:

a) $\bigwedge A(A \subset H \land A \neq \varnothing \rightarrow \bigcap\limits_{x\in A} x \in H)$.

   Esto implica que la relación de orden
   $$\leq\, = \{u \in H \times H \mid \bigvee xy \in H(u = (x, y) \land x \subset y)\},$$
   que existe por Δ_0-especificación, es un buen orden, y en particular un orden total.

b) $\bigwedge A(A \subset H \rightarrow \bigcup\limits_{x\in A} x \in H)$.

   Esto significa que todo subconjunto de H tiene supremo respecto a la inclusión. En particular, tomando $A = \varnothing$ vemos que $\varnothing \in H$, luego toda jerarquía tiene por mínimo al conjunto vacío, y por máximo a $H_M = \bigcup\limits_{x\in H} x$.

c) Para todo $h \in H$ tal que $h \neq H_M$, el menor elemento de H mayor que h es $h^+ = \mathcal{P}h$.

De este modo, si H es una jerarquía y $h \in H$, hay tres posibilidades: o bien $h = \varnothing$ es el mínimo de H, o bien h tiene un inmediato anterior h', con lo que $h = \mathcal{P}h'$, o bien no tiene un inmediato anterior, en cuyo caso
$$h = \bigcup_{x\in H_h^<} x.$$

En efecto, el conjunto $H_h^< = \{x \in H \mid x \subset h \land x \neq h\}$ está bien definido por Δ_0-especificación y, llamando h' a la unión, tenemos que $h' \in H$ por la propiedad b) y trivialmente $h' \subset h$. Si fuera $h' \subsetneq h$ entonces, como h no tiene un inmediato anterior, existiría $h' \subsetneq h'^+ \subsetneq h$, pero entonces $h'^+ \in H_h^< \subset h'$, contradicción, luego $h = h'$.

Teorema 5.14 *Si H_1 y H_2 son jerarquías, entonces $H_1 \subset H_2 \lor H_2 \subset H_1$, y en tal caso (si no se da la igualdad) una es un segmento inicial de la otra.*

Demostración: Supongamos en primer lugar que $H_1 \subsetneq H_2$ y veamos que H_1 es un segmento inicial de H_2. Para ello sea $h = \bigcap\limits_{x\in H_2\setminus H_1} x$, es decir, el mínimo de $H_2 \setminus H_1$.

Entonces $(H_2)_h^< \subset H_1$, luego $h' = \bigcup\limits_{x\in(H_2)_h^<} x \in H_1$ y $h' \subsetneq h$. No puede haber ningún elemento $h' \subsetneq h'' \subsetneq h$, porque entonces $h'' \in (H_2)_h^<$, luego $h'' \subset h'$. Por consiguiente, $h = h'^+ = \mathcal{P}h \in H_1$ (contradicción) salvo que $h' = (H_1)_M$, con lo que $H_1 \subset (H_2)_{h'}^{\leq} = (H_2)_h^<$.

Si H_1 y H_2 son jerarquías arbitrarias, es claro que $H_1 \cap H_2$ es también una jerarquía, y basta probar que no puede estar estrictamente contenida en ambas. Si así fuera, por la parte ya probada, existirían $h_1 \in H_1$ y $h_2 \in H_2$ tales que

$$H_1 \cap H_2 = (H_1)^{<}_{h_1} = (H_2)^{<}_{h_2}.$$

Más aún, hemos visto que tienen que ser $h_1 = h_2 = \mathcal{P}(H_1 \cap H_2)_M$, y esto es una contradicción, pues entonces $h_1 \in H_1 \cap H_2$. ■

Definición 5.15 Un conjunto r es un *rango* si existe una jerarquía H tal que $r \in H$. Llamaremos R_0 a la clase de todos los rangos y

$$R = \{x \mid \bigvee r \in R_0\ x \in r\}.$$

Es fácil ver que la clase R_0 está bien ordenada por la inclusión.

Observemos que si r es un rango entonces $r' = \mathcal{P}r$ también lo es, pues si $r \in H$, para una jerarquía H, o bien $r \neq H_M$ y entonces $r' \in H$, o bien $H' = H \cup \{r'\}$ es también una jerarquía y $r' \in H'$.

Así pues, todo rango r tiene un siguiente y, o bien es vacío, o bien tiene un inmediato anterior (de modo que $r = \mathcal{P}r'$), o bien es la unión de los rangos anteriores a él.

También es claro que $R_0 \subset R$, pues todo rango r cumple que $r \in \mathcal{P}r \in R_0$.

Teorema 5.16 *Los rangos son conjuntos transitivos, la clase R es transitiva.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que existe un rango r no transitivo, sea H una jerarquía tal que $r \in H$. El conjunto de los elementos de H que no son transitivos existe por Δ_0-especificación, luego podemos cambiar r por el mínimo de dicho conjunto. Obviamente, $r \neq \varnothing$. Si r tiene un inmediato anterior r', entonces r' es transitivo por la minimalidad de r, y $r = \mathcal{P}r'$ es transitivo también, contradicción. Si r no tiene un inmediato anterior, entonces $r = \bigcup\limits_{r' \in H^{<}_{r}} r'$ sería unión de conjuntos transitivos, luego sería transitivo.

Esta contradicción prueba que todo rango es transitivo, y la segunda parte es trivial. ■

Más aún:

Teorema 5.17 $\bigwedge y \in R\ \mathcal{P}y \in R$. *En particular,* $\bigwedge xy(x \subset y \in R \rightarrow x \in R)$.

DEMOSTRACIÓN: Existe un rango r tal que $x \in r$, luego $x \subset r$, luego $\mathcal{P}x \in \mathcal{P}\mathcal{P}r \in R_0$. ■

Definición 5.18 El *axioma de regularidad fuerte* es la sentencia $V = R$, es decir,

$$\bigwedge x \bigvee rH(H \text{ es una jerarquía} \land x \in r \in H).$$

Teorema 5.19 *La clase R es un modelo transitivo de* $\mathrm{M}_0^+ + V = R$.

Demostración: El axioma de extensionalidad se cumple porque R es transitiva. El axioma del par se cumple porque si x, $y \in R$, entonces existe un $r \in R_0$ tal que x, $y \in r$, luego $\{x, y\} \in R$ por 5.17. Similarmente sucede con el axioma de la unión: si $x \in r \in R_0$ entonces $\bigcup x \subset r$, luego $\bigcup x \in R$. El axioma de partes se cumple directamente por 5.17. Si ϕ es una fórmula Δ_0 y $x, x_1, \ldots, x_n \in R$, entonces

$$\{u \in x \mid \phi(u, x_1, \ldots, x_n)\} \in \mathcal{P}x \in R,$$

luego el conjunto de la izquierda está en R y se cumple el esquema de Δ_0-especificación.

Para probar el axioma de regularidad tomamos $x \in R$ no vacío. Entonces $x \in r \in H$, donde H es una jerarquía, y $x \subset r$, luego $x \cap r \neq \varnothing$ y el conjunto $\{r' \in H \mid x \cap r' \neq \varnothing\}$ (que existe por Δ_0-especificación) tiene un mínimo elemento, al que podemos seguir llamando r.

No puede ser $r = \varnothing$, ni tampoco que r no tenga un inmediato anterior, pues en tal caso sería $r = \bigcup\limits_{r' \in H_r^<} r'$ y existiría un $r' < r$ tal que $x \cap r' \neq \varnothing$. Por lo tanto, $r = \mathcal{P}r'$, para cierto rango $r' < r$, que cumple $x \cap r' = \varnothing$. Tomamos $u \in x \cap r$, con lo que $u \subset r'$, y se cumple que $u \cap x = \varnothing$, pues si $v \in u \cap x$, entonces $v \in x \cap r'$, contradicción.

Teniendo en cuenta que los rangos son transitivos, el axioma CT se cumple trivialmente en R.

Por último, si H es una jerarquía, es claro que es una jerarquía^R, pues todo $A \subset H$ cumple $A \in R$ y si $h \in H$ entonces $\mathcal{P}h = (\mathcal{P}h)^R$. De aquí se sigue trivialmente que R cumple $V = R$. ■

En particular del teorema anterior se sigue que $V = R$ implica (en M_0) el axioma de regularidad y el axioma CT.

Teorema 5.20 (KZ$_1$) $V = R \leftrightarrow \mathrm{RNG}$

Demostración: Puesto que todo conjunto bien ordenado es semejante a un ordinal, si H es una jerarquía existe un ordinal η y una semejanza $f : \eta \longrightarrow H$. Veamos que

$$\bigwedge \alpha < \eta \; f(\alpha) = V_\alpha.$$

En efecto, es claro que

$$f(0) = \varnothing, \quad f(\alpha + 1) = \mathcal{P}f(\alpha), \quad f(\lambda) = \bigcup_{\delta < \lambda} f(\delta).$$

Considerando la restricción de la función rango al conjunto $\bigcup H$ podemos definir el conjunto

$$\{\alpha < \eta \mid \bigwedge u \in f(\alpha) \; \operatorname{rang} u < \alpha\},$$

luego podemos probar por inducción que $\bigwedge \alpha < \eta \; f(\alpha) \subset V_\alpha$. La prueba es trivial: si para todo $\beta < \alpha$ se cumple que $f(\beta) \subset V_\beta$ y $u \in f(\alpha)$, no puede ser $\alpha = 0$, pues $f(0) = \varnothing$; si $\alpha = \beta + 1$ entonces $f(\alpha) = \mathcal{P}f(\beta)$, luego $u \subset f(\beta) \subset V_\beta$, luego $u \in V_\alpha$; y si α es un ordinal límite, entonces existe un $\delta < \alpha$ tal que $u \in f(\delta) \subset V_\delta$, luego $u \in V_\alpha$.

Supongamos ahora que existen un $\alpha < \eta$ y un conjunto u tal que $\operatorname{rang} u < \alpha$ pero $u \notin f(\alpha)$. Sea $z = \operatorname{ct} u \cup \{u\}$. El conjunto

$$\{\beta \leq \alpha \mid \bigvee v \in z\, (\operatorname{rang} v < \beta \land v \notin f(\beta))\}$$

no es vacío, pues contiene a α, luego podemos tomar su mínimo elemento α_0. Así, existe un $v_0 \in z$ tal que $\operatorname{rang} v_0 = \beta_0 < \alpha_0$, $v_0 \notin f(\alpha_0)$ y para todo $\beta < \alpha_0$, si $v \in z$ cumple $\operatorname{rang} v < \beta$, entonces $v \in f(\beta)$.

Observemos que $\{v \in \operatorname{ct} v_0 \mid \operatorname{rang} v < \beta_0\}$ es un conjunto transitivo que contiene a v_0, luego es todo $\operatorname{ct} v_0$. Esto significa que si $v \in \operatorname{ct} v_0 \subset z$, necesariamente $\operatorname{rang} v < \beta_0$ y, por consiguiente, $v \in f(\beta_0)$. En particular esto vale para $v \in v_0$, luego $v_0 \subset f(\beta_0)$, luego $v_0 \in \mathcal{P}(f(\beta_0)) = f(\beta_0 + 1) \subset f(\alpha_0)$, pues $\beta_0 + 1 \leq \alpha_0$ y f es una semejanza. Tenemos así una contradicción.

Así pues, toda jerarquía es de la forma $H_\eta = \{V_\alpha \mid \alpha \leq \eta\}$ (con una desigualdad no estricta porque las jerarquías tienen máximo), y la existencia de la jerarquía H_η de longitud η implica que V_η es un conjunto. Recíprocamente, si V_η es un conjunto, también lo son todos los V_α con $\alpha \leq \eta$, pues

$$V_\alpha = \{x \in V_\eta \mid \operatorname{rang} x < \alpha\},$$

así como

$$H_\eta = \{r \in \mathcal{P}V_\eta \mid \bigvee \alpha \leq \eta \bigwedge x \in V_\eta (x \in r \leftrightarrow \operatorname{rang} x < \alpha)\},$$

que es la jerarquía de longitud η.

Así pues, si suponemos RNG y x es un conjunto arbitrario, sea $\eta = \operatorname{rang} x+1$, de modo que existe H_η y $x \in V_\eta \in H_\eta$, luego todo conjunto pertenece a un rango y $V = R$.

Recíprocamente, si $V = R$, dado $\alpha \in \Omega$ existe una jerarquía H_η que contiene un rango V_δ tal que $\alpha \in V_\delta$, es decir, que $\alpha = \operatorname{rang} \alpha < \delta$, luego V_α es un conjunto, y esto prueba RNG. ■

Ahora podemos probar:

Teorema 5.21 (MOST) *R es un modelo transitivo de* $\mathrm{MAC}^+ + V = R$.

DEMOSTRACIÓN: Ya sabemos que R es un modelo de $\mathrm{M}_0^+ + V = R$. En KPI^* se prueba que V_ω es un conjunto, luego en MOST tenemos además que $V_{\omega+1} = \mathcal{P}V_\omega$ también lo es, luego $H_{\omega+1} = \{V_\alpha \mid \alpha \leq \omega + 1\}$ es una jerarquía tal que $\omega \in V_\omega \in H_{\omega+1}$. Esto prueba que $\omega \in R$, luego R cumple el axioma de infinitud. El axioma de elección es inmediato: si $X \in R$, entonces (por los axiomas ya probados) $X \times X \in R$ y si S es un buen orden en X, tenemos que $S \in \mathcal{P}(X \times X) \in R$, luego $S \in R$ y es claro que S también es un buen orden^R en X. ■

Así pues, la consistencia de M_0+AI implica la de MOST y ésta a su vez la de $\mathrm{MAC}^+ + V = R$.

5.4 Modelos de KP

En esta sección trabajamos en KZ_1. Es fácil ver que si M es un conjunto y $R \subset M \times M$ podemos definir la relación $(M, R) \vDash \phi[v]$ que expresa que la fórmula ϕ es verdadera en M cuando el relator de pertenencia se interpreta como la relación R. Se trata de una modificación trivial de la construcción que hemos hecho en la sección 4.6, donde hemos considerado únicamente modelos naturales.

A lo largo de esta sección supondremos que $(M, R) \vDash \mathrm{KP}$. Para cada $a \in M$, llamaremos *extensión* de a al conjunto

$$e_M(a) = \{b \in M \mid b\, R\, a\}.$$

El hecho de que (M, R) cumpla el axioma de extensionalidad se traduce en que la relación R es extensional en M, es decir, que si $e_M(a) = e_M(b)$ entonces $a = b$, pero el axioma de regularidad no garantiza que R esté bien fundada.

Para estudiar la situación, puesto que $(M, R) \vDash \mathrm{CT}$, podemos definir

$$\mathrm{ct}_M = \{(a, b) \in M \times \mathcal{P}M \mid \bigvee c \in M\ ((M, R) \vDash [c] = \mathrm{ct}[a] \wedge b = e_M(c))\},$$

de modo que $\mathrm{ct}_M : M \longrightarrow \mathcal{P}M$. Además, como

$$(M, R) \vDash \bigwedge x\ \mathrm{ct}\, x \text{ es transitiva}$$

se cumple que si $u\, R\, v \wedge v \in \mathrm{ct}_M(a)$, entonces $u \in \mathrm{ct}_M(a)$. Además, como

$$(M, R) \vDash \bigwedge x\ \mathrm{ct}\, x = x \cup \bigcup_{u \in x} \mathrm{ct}\, u,$$

resulta que

$$\mathrm{ct}_M(a) = e_M(a) \cup \bigcup_{u \in e_M(a)} \mathrm{ct}_M(u).$$

Diremos que $a \in M$ está *bien fundado* si la relación R está bien fundada en $\mathrm{ct}_M(a)$. Notemos que se trata de una propiedad Δ_0 tomando a M y $\mathcal{P}M$ como parámetros, por lo que podemos considerar el conjunto $\overline{M}_{\mathrm{bf}} \subset M$ de los elementos bien fundados de M.

Observemos que R está bien fundada en $\overline{M}_{\mathrm{bf}}$, pues si $X \subset \overline{M}_{\mathrm{bf}}$ es un subconjunto no vacío, tomamos $a \in X$ y consideramos $Y = X \cap \mathrm{ct}_M(a)$. Si $Y = \varnothing$, entonces a es un R-minimal de X, y en caso contrario Y tiene un R-minimal b, que también es un R-minimal de X, pues si existe $u \in X \cap e_M(b)$ entonces $u\, R\, b \in \mathrm{ct}_M(a)$, luego $u \in \mathrm{ct}_M(a)$, luego $u \in Y \cap e_M(b)$, contradicción.

Teorema 5.22 *Si $x \in M$, las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

a) $x \in \overline{M}_{\mathrm{bf}}$,

b) $e_M(x) \subset \overline{M}_{\mathrm{bf}}$,

c) $\mathrm{ct}_M(x) \subset \overline{M}_{\mathrm{bf}}$.

Si se cumplen estas afirmaciones, $e_M(x) = e_{\bar{M}_{\mathrm{bf}}}(x)$.

DEMOSTRACIÓN: a) $\Rightarrow$ b) Si $u \in e_M(x)$, entonces $\mathrm{ct}_M(u) \subset \mathrm{ct}_M(x)$ y, como R está bien fundada en $\mathrm{ct}_M(x)$, también lo está en $\mathrm{ct}_M(u)$, luego $u \in \overline{M}_{\mathrm{bf}}$ y en particular $u \in e_{\bar{M}_{\mathrm{bf}}}(x)$. Con esto hemos probado que $e_M(x) \subset e_{\bar{M}_{\mathrm{bf}}}(x)$, y la inclusión opuesta es obvia.

b) $\Rightarrow$ c) Si $u \in e_M(x)$, tenemos que R está bien fundada en $\mathrm{ct}_M(u)$, luego si $v \in \mathrm{ct}_M(u)$, como $\mathrm{ct}_M(v) \subset \mathrm{ct}_M(u)$, resulta que R también está bien fundada en $\mathrm{ct}_M(v)$, luego $v \in \overline{M}_{\mathrm{bf}}$, luego $\mathrm{ct}_M(u) \subset \overline{M}_{\mathrm{bv}}$, luego

$$\mathrm{ct}_M(x) = e_M(x) \cup \bigcup_{u \in e_M(x)} \mathrm{ct}_M(u) \subset \overline{M}_{\mathrm{bf}}.$$

c) $\Rightarrow$ a) Como R está bien fundada en $\overline{M}_{\mathrm{bf}}$, también lo está en $\mathrm{ct}_M(x)$, luego $x \in \overline{M}_{\mathrm{bf}}$. ■

Definición 5.23 Como R es una relación extensional y bien fundada sobre $\overline{M}_{\mathrm{bf}}$, podemos considerar su colapso transitivo, que representaremos por M_{bf}. Llamaremos $i : M_{\mathrm{bf}} \longrightarrow M$ a la inversa de la función colapsante, que claramente es una inmersión de modelos (no necesariamente elemental). Diremos que M_{bf} es la *parte bien fundada* del modelo M.

Observemos que i es al menos Δ_0-elemental, en el sentido de que para toda $\phi(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{Form}(\mathcal{L})$ de clase Δ_0 y $x_1, \ldots, x_n \in M_{\mathrm{bf}}$,

$$M_{\mathrm{bf}} \vDash \phi[x_1, \ldots, x_n] \leftrightarrow (M, R) \vDash \phi[i(x_1), \ldots, i(x_n)].$$

Esto se debe a que los cuantificadores acotados $\bigwedge x \in y$ o $\bigvee x \in y$ tienen la misma interpretación en M y en $\overline{M}_{\mathrm{bf}}$, ya que la extensión de un $y \in \overline{M}_{\mathrm{bf}}$ es la misma en M que en $\overline{M}_{\mathrm{bf}}$.

En realidad, para considerar a M_{bf} o $\overline{M}_{\mathrm{bf}}$ como modelos de $\mathcal{L}$ necesitamos garantizar que no son vacíos, pero esto es inmediato: teniendo en cuenta que $(M, R) \vDash \bigvee x \bigwedge u\, u \notin x$, vemos que existe un $x \in M$ tal que $e_M(x) = \varnothing$, luego $x \in \overline{M}_{\mathrm{bf}}$ y su colapso transitivo es $\varnothing \in M_{\mathrm{bf}}$.

Más aún, tenemos que

$$(M, R) \vDash \bigwedge x \bigvee y \bigwedge u\, (u \in y \leftrightarrow u \in x \vee u = x),$$

pues la sentencia es un teorema de KP, luego, para cada $x \in M$ existe un $y \in M$ tal que $e_M(y) = e_M(x) \cup \{x\}$. En particular, si $x \in \overline{M}_{\mathrm{bf}}$ tenemos que $e_M(y) \subset \overline{M}_{\mathrm{bf}}$, luego $y \in \overline{M}_{\mathrm{bf}}$. Esto prueba que

$$(\overline{M}_{\mathrm{bf}}, R) \vDash \bigwedge x \bigvee y \bigwedge u\, (u \in y \leftrightarrow u \in x \vee u = x),$$

luego lo mismo vale para el modelo isomorfo M_{bf}, y esto significa que

$$\bigwedge x \in M_{\mathrm{bf}}\ x \cup \{x\} \in M_{\mathrm{bf}}.$$

En particular, una simple inducción prueba ahora que $\omega \subset M_{\mathrm{bf}}$. Más en general, consideremos el conjunto

$$\Omega^M = \{x \in M \mid (M, R) \vDash [x] \text{ es un ordinal}\}.$$

Como la fórmula "x es un ordinal" es Δ_0, tenemos que

$$\Omega^M \cap \overline{M}_{\mathrm{bf}} = \{x \in \overline{M}_{\mathrm{bf}} \mid (\overline{M}_{\mathrm{bf}}, R) \vDash [x] \text{ es un ordinal}\}$$

y

$$\Omega^M_{\mathrm{bf}} = i^{-1}[\Omega^M \cap \overline{M}_{\mathrm{bf}}] = \{x \in M_{\mathrm{bf}} \mid x \text{ es un ordinal}^{M_{\mathrm{bf}}}\} = M_{\mathrm{bf}} \cap \Omega.$$

Como M_{bf} es transitivo, Ω^M_{bf} también lo es, luego $\Omega^M_{\mathrm{bf}} \in \Omega$. Antes hemos probado que $\omega \leq \Omega^M_{\mathrm{bf}}$. Más aún, hemos probado que Ω^M_{bf} es un ordinal límite.

El hecho de que en KP pueda probarse que la clase Ω está bien ordenada por la relación $\alpha \leq \beta \leftrightarrow \alpha \in \beta \vee \alpha = \beta$ se traduce en que el conjunto Ω^M está totalmente ordenado por la relación $\alpha \leq_R \beta \leftrightarrow \alpha \, R \, \beta \vee \alpha = \beta$, si bien no podemos garantizar que $\leq_R$ sea un buen orden, pues un subconjunto no vacío de Ω^M no tiene por qué ser la extensión de un elemento de M, luego no tiene por qué tener mínimo elemento.

Ahora usamos que

$$(M, R) \vDash \bigwedge x \overset{1}{\bigvee} \alpha \in \Omega \ \alpha = \operatorname{rang}(x),$$

lo que se traduce en que existe una función $\operatorname{rang}^R_M : M \longrightarrow \Omega^M$ tal que

$$\bigwedge x \in M \ (M, R) \vDash [\operatorname{rang}^R_M(x)] = \operatorname{rang}([x]).$$

Más precisamente, tenemos que

$$(M, R) \vDash \bigwedge x \alpha (\alpha \in \operatorname{rang}(x) \leftrightarrow \bigvee u \in x \ \alpha \in \operatorname{rang}(u) + 1),$$

lo cual se traduce en que

$$e_M(\operatorname{rang}^R_M(x)) = \bigcup_{u \in e_M(x)} e_M(\operatorname{rang}^R_M(u)) \cup \{\operatorname{rang}^R_M(u)\}.$$

De aquí deducimos primero que si $x \in \overline{M}_{\mathrm{bf}}$, entonces $\operatorname{rang}^R_M(x) \in \overline{M}_{\mathrm{bf}}$. Lo probamos por inducción sobre R, es decir, lo suponemos cierto para los elementos de $e_M(x)$ y hemos de probarlo para x. Así, en la fórmula anterior, por hipótesis de inducción tenemos que $\operatorname{rang}^R_M(u) \in \overline{M}_{\mathrm{bf}}$, de donde resulta que $e_M(\operatorname{rang}^R_M(x)) \subset \overline{M}_{\mathrm{bf}}$, luego $\operatorname{rang}^R_M(x) \in \overline{M}_{\mathrm{bf}}$.

Por lo tanto, si $x \in M_{\mathrm{bf}}$ tenemos que $\operatorname{rang}^R_M(i(x)) \in \overline{M}_{\mathrm{bf}} \cap \Omega^M$, luego existe un único $r(x) \in \Omega^M_{\mathrm{bf}}$ tal que $\operatorname{rang}^R_M(i(x)) = i(r(x))$. En otras palabras, tenemos una aplicación r que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
M_{\mathrm{bf}} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "r"'] & M \arrow[d, "\operatorname{rang}^R_M"] \\
\Omega^M_{\mathrm{bf}} \arrow[r, "i"'] & \Omega^M
\end{tikzcd}$$

En términos de r tenemos que, para todo $x \in M_{\mathrm{bf}}$,

$$e_M(\operatorname{rang}_M^R(i(x))) = \bigcup_{u \in e_M(i(x))} e_M(\operatorname{rang}_M^R(u)) \cup \{\operatorname{rang}_M^R(u)\},$$

es decir,

$$\begin{aligned} i[r(x)] = e_M(i(r(x))) &= \bigcup_{u\in x} e_M(\operatorname{rang}_M^R(i(u))) \cup \{\operatorname{rang}_M^R(i(u))\} \\ &= \bigcup_{u\in x} e_M(i(r(u))) \cup \{i(r(u))\} = \bigcup_{u\in x} i[r(u)] \cup \{i(r(u))\} \\ &= \bigcup_{u\in x} i[r(u) \cup \{r(u)\}] = i\left[\bigcup_{u\in x} r(u)+1\right], \end{aligned}$$

luego

$$r(x) = \bigcup_{u\in x} r(u)+1,$$

y esto implica que $\bigwedge x \in M_{\mathrm{bf}}\ r(x) = \operatorname{rang}(x)$, luego el diagrama conmutativo anterior se reduce a

$$\begin{tikzcd} M_{\mathrm{bf}} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\operatorname{rang}"'] & M \arrow[d, "\operatorname{rang}_M^R"] \\ \Omega_{\mathrm{bf}}^M \arrow[r, "i"'] & \Omega^M \end{tikzcd}$$

Ahora podemos probar que un elemento de M está bien fundado si y sólo si lo está su rango:

$$\overline{M}_{\mathrm{bf}} = \{x \in M \mid \operatorname{rang}_M^R(x) \in \overline{M}_{\mathrm{bf}}\}.$$

En efecto, una inclusión ya la tenemos probada y, si $\operatorname{rang}_M^R(x) \in \overline{M}_{\mathrm{bf}}$, observamos que[2]

$$(M,R) \vDash \bigwedge ux(u \in \operatorname{ct} x \rightarrow \operatorname{rang} u < \operatorname{rang} x),$$

luego $\bigwedge u \in \operatorname{ct}_M(x)\ \operatorname{rang}_M^R(x) \in e_M(\operatorname{rang}_M^R(x))$, luego

$$\bigwedge u \in \operatorname{ct}_M(x)\ \operatorname{rang}_M^R(x) \in \overline{M}_{\mathrm{bf}}.$$

Si $X \subset \operatorname{ct}_M(x)$ es un conjunto no vacío, entonces $Y = \operatorname{rang}_M^R[X] \subset \overline{M}_{\mathrm{bf}}$ es un conjunto no vacío, luego tiene un elemento R-minimal, que será de la forma $a = \operatorname{rang}_M^R(u)$ para un cierto $u \in X$. Este u es un R-minimal de X, pues si existe $v \in X$ tal que $v\,R\,u$, entonces $r = \operatorname{rang}_M^R(v)$ cumple $r \in Y$ y $r\,R\,a$, contradicción. Esto prueba que R está bien fundada en $\operatorname{ct}_M(x)$, luego $x \in \overline{M}_{\mathrm{bf}}$.

En particular, el modelo M está bien fundado, es decir, $M = \overline{M}_{\mathrm{bf}}$, si y sólo si $i[\Omega_{\mathrm{bf}}^M] = \Omega^M \cap \overline{M}_{\mathrm{bf}} = \Omega^M$, es decir, si y sólo si todos los ordinales de M están bien fundados.

El teorema siguiente es uno de los que hacen relevante la teoría KP:

[2]En efecto, basta observar que el conjunto $\{u \in \operatorname{ct} x \mid \operatorname{rang} u < \operatorname{rang} x\}$ es transitivo y contiene a x, luego es $\operatorname{ct} x$.

Teorema 5.24 *Si* (M,R) *es un modelo de* KP^*, *entonces su parte bien fundada* M_{bf} *es un modelo de* KP.

DEMOSTRACIÓN: El modelo M_{bf} cumple el axioma de extensionalidad simplemente por ser transitivo, y por el mismo motivo cumple el axioma de regularidad para fórmulas arbitrarias (no necesariamente de clase Π_1). En efecto, si $\bigvee x\in M_{\mathrm{bf}}\ M_{\mathrm{bf}}\vDash\phi[x,x_1,\ldots,x_n]$, podemos formar el conjunto

$$A=\{x\in M_{\mathrm{bf}}\mid M_{\mathrm{bf}}\vDash\phi[x,x_1,\ldots,x_n]\},$$

que está bien definido por Δ_0-especificación, donde ϕ es simplemente un parámetro y es irrelevante que como fórmula no sea Δ_0.

Ahora basta tomar un $x\in A$ de rango mínimo y así

$$M_{\mathrm{bf}}\vDash(\phi[x]\land\bigwedge y\in[x]\,\neg\phi(y)).$$

El axioma del par y el de la unión se traspasan fácilmente de M a M_{bf}. Comprobamos el caso de la unión y dejamos al lector el del par, que es más fácil. Dado $x\in M_{\mathrm{bf}}$, tenemos que

$$(M,R)\vDash\bigvee y\bigwedge u\,(u\in y\leftrightarrow\bigvee v\in[i(x)]\ u\in v)$$

Teniendo en cuenta que $e(i(x))=i[x]$, esto equivale a que existe un $y\in M$ tal que

$$e_M(y)=\bigcup_{v\in x}e_M(i(v))=\bigcup_{v\in x}i[v]=i\left[\bigcup_{v\in x}v\right].$$

Esto implica que $y\in\overline{M}_{\mathrm{bf}}$, luego $y=i(y')$, para un $y'\in M_{\mathrm{bf}}$ tal que

$$i[y']=i\left[\bigcup_{v\in x}v\right],$$

luego $y'=\bigcup\limits_{v\in x}v\in M_{\mathrm{bf}}$.

También es fácil demostrar el axioma de Δ_0-especificación: dados conjuntos $x_1,\ldots,x_n,x\in M_{\mathrm{bf}}$ y una fórmula $\phi(u,x_0,\ldots,x_n)$ de clase Δ_0, tenemos que existe un $y\in M$ tal que

$$(M,R)\vDash\bigwedge u(u\in[y]\leftrightarrow(u\in[i(x)]\land\phi(u,[i(x_1)],\ldots,[i(x_n)])))$$

con lo que $e_M(y)\subset e_M(i(x))\subset\overline{M}_{\mathrm{bf}}$, luego $y\in\overline{M}_{\mathrm{bf}}$, luego $y=i(y')$ para un cierto $y'\in M_{\mathrm{bf}}$ tal que

$$(M,R)\vDash\bigwedge u(u\in[i(y')]\leftrightarrow(u\in[i(x)]\land\phi(u,[i(x_1)],\ldots,[i(x_n)]))).$$

Teniendo en cuenta que ϕ es Δ_0 esto equivale a que

$$(\overline{M}_{\mathrm{bf}},R)\vDash\bigwedge u(u\in[i(y')]\leftrightarrow(u\in[i(x)]\land\phi(u,[i(x_1)],\ldots,[i(x_n)])))$$

y, como i es un isomorfismo de modelos,

$$M_{\mathrm{bf}} \vDash \bigwedge u(u \in [y'] \leftrightarrow (u \in [x] \wedge \phi(u, [x_1], \ldots, [x_n]))).$$

De aquí concluimos que

$$M_{\mathrm{bf}} \vDash \bigwedge x \bigvee y \bigwedge u(u \in y \leftrightarrow (u \in x \wedge \phi(u, [x_1], \ldots, [x_n]))),$$

que es el axioma de Δ_0-especificación.

El único axioma para el que la transferencia no es inmediata es el de Δ_0-recolección. Para probarlo fijamos una fórmula $\phi(u, v, x_1, \ldots, x_n)$ de clase Δ_0 y conjuntos $x, x_1, \ldots, x_n \in M_{\mathrm{bf}}$ y suponemos que

$$M_{\mathrm{bf}} \vDash \bigwedge u \in [x] \bigvee v\, \phi(u, v, [x_1], \ldots, [x_n]).$$

Podemos suponer que $M \neq \overline{M}_{\mathrm{bf}}$ o de lo contrario el resultado es trivial. Según hemos visto, esto implica que $\Omega^M \neq i[\Omega^M_{\mathrm{bf}}]$, luego existe $\alpha \in \Omega^M \setminus i[\Omega^M_{\mathrm{bf}}]$.

Para cada $u \in x$ existe un $v \in M_{\mathrm{bf}}$ tal que $M_{\mathrm{bf}} \vDash \phi[u, v, x_1, \ldots, x_n]$. Como i es Δ_0-elemental $(M, R) \vDash \phi[i(u), i(v), i(x_1), \ldots, i(x_n)]$.

Por otra parte, $\mathrm{rang}^R_M(i(v))\, R\, \alpha$, porque en caso contrario tendría que ser $\mathrm{rang}^R_M(i(v)) = \alpha$ o bien $\alpha\ R\ \mathrm{rang}^R_M(i(v))$, y en ambos casos concluiríamos que $\alpha \in i[\Omega^M_{\mathrm{bf}}]$.

Por consiguiente tenemos que

$$(M, R) \vDash \bigwedge u \in [i(x)] \bigvee v\, (\phi(u, v, [i(x_1)], \ldots, [i(x_n)]) \wedge \mathrm{rang}(v) < [\alpha]).$$

Pero la fórmula $\mathrm{rang}(v) < \alpha$ es Δ_1^{KP}, ya que

$$\mathrm{rang}(v) < \alpha \leftrightarrow \bigvee y(y = \mathrm{rang}(v) \wedge y \in \alpha) \leftrightarrow \bigwedge y(y = \mathrm{rang}(v) \to y \in \alpha).$$

Como (M, R) verifica el teorema de Δ_1-recolección, existe un $y \in M$ tal que

$$(M, R) \vDash \bigwedge u \in [i(x)] \bigvee v \in [y]\, (\phi(u, v, [i(x_1)], \ldots, [i(x_n)]) \wedge \mathrm{rang}(v) < [\alpha]).$$

Ahora usamos que M satisface el teorema de Δ_1-especificación, por lo que existe un $a \in M$ tal que

$$(M, R) \vDash \bigwedge \beta\, (\beta \in [a] \leftrightarrow \beta \in [\alpha] \wedge$$
$$\bigwedge u \in [i(x)] \bigvee v \in [y](\phi(u, v, [i(x_1)], \ldots, [i(x_n)]) \wedge \mathrm{rang}(v) < \beta)).$$

Como M satisface el axioma de regularidad, el conjunto a tiene un mínimo elemento, es decir, existe un $\alpha_0 \in M$ (más concretamente, $\alpha_0 \in \Omega^M$) tal que

$$(M, R) \vDash ([\alpha_0] \in [a] \wedge \bigwedge \beta \in [\alpha_0]\ \beta \notin [a]).$$

Veamos que $e_M(\alpha_0) \subset \overline{M}_{\mathrm{bf}}$. En efecto, si $\beta\, R\, \alpha_0$ no fuera estándar (no estuviera bien fundado), entonces

$$(M, R) \vDash \bigwedge u \in [i(x)] \bigvee v \in [y]\, (\phi(u, v, [i(x_1)], \ldots, [i(x_n)]) \wedge \mathrm{rang}(v) < [\beta]),$$

pues antes hemos probado esto mismo para α usando tan sólo que α es un ordinal no estándar, luego lo mismo vale para β. Además $\beta\, R\, \alpha_0 \land \alpha_0\, R\, \alpha$ implica que $\beta\, R\, \alpha$, pues R es transitiva sobre los elementos de Ω^M. Esto implica que $\beta\, R\, a$, en contradicción con la minimalidad de α_0.

Por consiguiente $\alpha_0 \in \overline{M}_{\mathrm{bf}}$, luego $\alpha_0 = i(\alpha_1)$, para un cierto $\alpha_1 \in \Omega^M_{\mathrm{bf}}$. Así

$$(M,R) \vDash \bigwedge u \in [i(x)] \bigvee v \in [y]\, (\phi(u,v,[i(x_1)],\ldots,[i(x_n)]) \land \mathrm{rang}(v) < [i(\alpha_1)]).$$

De nuevo por Δ_1-selección existe un $z \in M$ tal que

$$(M,R) \vDash \bigwedge v\, (v \in [z] \leftrightarrow v \in [y] \land \mathrm{rang}(v) < [i(\alpha_1)]).$$

Esto implica que $(M,R) \vDash \mathrm{rang}([z]) \leq [i(\alpha_1)]$, luego $\mathrm{rang}^R_M(z) \in \overline{M}_{\mathrm{bf}}$, luego $z \in \overline{M}_{\mathrm{bf}}$, luego $z = i(z')$, para cierto $z' \in M_{\mathrm{bf}}$. En total

$$(M,R) \vDash \bigwedge u \in [i(x)] \bigvee v \in [i(z')]\, \phi(u,v,[i(x_1)],\ldots,[i(x_n)]),$$

pero esta fórmula es de clase Δ_0, luego

$$(\overline{M}_{\mathrm{bf}},R) \vDash \bigwedge u \in [i(x)] \bigvee v \in [i(z')]\, \phi(u,v,[i(x_1)],\ldots,[i(x_n)]),$$

de donde

$$M_{\mathrm{bf}} \vDash \bigwedge u \in [x] \bigvee v \in [z']\, \phi(u,v,[x_1],\ldots,[x_n]),$$

o también

$$M_{\mathrm{bf}} \vDash \bigvee y \bigwedge u \in [x] \bigvee v \in y\, \phi(u,v,[x_1],\ldots,[x_n]),$$

que es lo que había que probar. ■

En particular tenemos que la consistencia de KP* implica la consistencia de KP. Notemos que, aunque M sea un modelo de KPI*, no podemos asegurar que M_{bf} también cumpla AI, sino que esto equivale a que $\Omega^M_{\mathrm{bf}} > \omega$. Conviene reformular esta condición, para lo cual definimos

$$\omega^M = \{x \in M \mid (M,R) \vDash [x] \text{ es un número natural}\}.$$

Como la fórmula "x es un número natural" es Δ_0 e i es Δ_0-elemental, tenemos que $i[\omega] \subset \omega^M \subset \Omega^M$.

Definición 5.25 Un modelo (M,R) de KP es un *modelo* ω si $i[\omega] = \omega^M$, es decir, si todos sus números naturales son estándar.

Obviamente, todo modelo bien fundado (en particular, todo modelo transitivo) es un modelo ω. Observemos que si M no es un modelo ω, entonces $\Omega^M_{\mathrm{bf}} = \omega$, pues si $\omega \in \Omega^M_{\mathrm{bf}}$, entonces, como la fórmula

$$\phi(x) \equiv x \in \Omega \land 0 \in x \land \bigwedge n \in x\; n+1 \in x$$

es Δ_0 y $M_{\mathrm{bf}} \vDash \phi[\omega]$, concluimos que $(M,R) \vDash \phi(i(\omega))$. Pero

$$(M,R) \vDash \bigwedge x\, (\phi(x) \to \bigwedge n\, (n \text{ es un número natural} \to n \in x),$$

pues la sentencia es un teorema de KP, luego $\omega^M \subset e_M(i(\omega)) = i[\omega]$, contradicción.

Así pues, para que M_{bf} pueda cumplir AI es necesario que M sea un modelo ω. La condición es claramente suficiente (siempre y cuando M satisfaga AI, por supuesto):

Teorema 5.26 *Si (M, R) es un modelo ω de* KPI**, entonces M_{bf} es un modelo transitivo de* KPI.

DEMOSTRACIÓN: Que M satisfaga AI equivale a que existe un $w \in M$ tal que $e_M(w) = \omega^M$. Como $\omega^M = i[\omega]$, resulta que $e_M(w) \subset \overline{M}_{\mathrm{bf}}$, luego $w \in \overline{M}_{\mathrm{bf}}$, luego existe un ordinal $\alpha \in \Omega_{\mathrm{bf}}^M$ tal que $i(\alpha) = w$, luego $i[\alpha] = e_M(i(\alpha)) = e_M(w) = i[\omega]$, luego $\omega = \alpha \in \Omega_{\mathrm{bf}}^M$, luego $M_{\mathrm{bf}} \vDash$ AI. ■

Conviene observar que $i[\omega]$ está formado por todos los números naturales de M que pueden ser definidos explícitamente, en el sentido siguiente:

Teorema 5.27 *Para cada $n \in \omega$ existe una fórmula $\phi_n \in \mathrm{Form}(\mathcal{L}_0)$ de clase Δ_0 tal que si (M, R) es un modelo de* KP*, entonces*

$$(M, R) \vDash \bigwedge x\, (x = [i(n)] \leftrightarrow \phi_n(x)).$$

DEMOSTRACIÓN: Basta tomar $\phi_0(x) \equiv \bigwedge u\, u \notin x$,

$$\phi_{n+1}(x) \equiv \bigvee y \in x\, (\phi_n(y) \land y \subset x \land \bigwedge u \in x(u \in y \lor u = y)).$$

■

Vemos así que una de las razones por las que tiene interés el estudio de la teoría KPI es que si tenemos un modelo no natural (M, R) de ZFC (por ejemplo, un modelo construido como un ultraproducto o un límite inductivo de otros modelos) su parte bien fundada M_{bf} no es necesariamente un modelo de ZFC, pero tan sólo bajo la hipótesis de que $\omega \in M_{\mathrm{bf}}$ (o, equivalentemente, que (M, R) sea un modelo ω) tenemos garantizado que M_{bf} cumple KPI, luego al estudiar KPI estamos estudiando la parte bien fundada de cualquier modelo no natural de ZFC (salvo los casos triviales en que ésta se reduce a V_ω).

A la vista del teorema 5.26, resulta natural preguntarse ahora si bajo el supuesto de que M cumpla AP podemos probar que M_{bf} también cumple AP. El problema se simplifica si consideramos RNG en lugar de AP:

Teorema 5.28 *Si (M, R) es un modelo ω de* KPR*, *entonces M_{bf} es un modelo transitivo de* KPR. *Si (M, R) cumple* AE, *lo mismo vale para M_{bf}.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\alpha \in M_{\mathrm{bf}} \cap \Omega$. Entonces $M \vDash [i(\alpha) \in \Omega]$, luego existe un $\overline{A} \in M$ tal que

$$e_M(\overline{A}) = \{x \in M \mid \mathrm{rang}_M^R(x) < i(\alpha)\}.$$

Ahora bien, $\operatorname{rang}_M^R(x) < i(\alpha)$ implica que $\operatorname{rang}_M^R(x) \in \overline{M}_{\mathrm{bf}}$, luego $x \in \overline{M}_{\mathrm{bf}}$. Por lo tanto, $e_M(\overline{A}) \subset \overline{M}_{\mathrm{bf}}$, luego $\overline{A} \in \overline{M}_{\mathrm{bf}}$, luego $\overline{A} = i(A)$, para cierto $A \in M_{\mathrm{bf}}$. Así, para todo $x \in M_{\mathrm{bf}}$,

$$x \in A \leftrightarrow i(x) \in \overline{A} \leftrightarrow \operatorname{rang}_M^R(i(x)) < i(\alpha) \leftrightarrow \operatorname{rang} x < \alpha,$$

lo que prueba que M_{bf} cumple RNG.

Si M cumple AE, dado $X \in M_{\mathrm{bf}}$, sea $\overline{S} \in M$ tal que

$$(M, R) \vDash [\overline{S}] \text{ es un buen orden en } [i(X)].$$

Entonces $e_M(\overline{S}) \subset i(X \times X)$, luego $\overline{S} \in \overline{M}_{\mathrm{bf}}$, luego existe un $S \in M_{\mathrm{bf}}$ tal que $\overline{S} = i(S)$. Es fácil ver que

$$(\overline{M}_{\mathrm{bf}}, R) \vDash [\overline{S}] \text{ es un buen orden en } [i(X)],$$

luego $M_{\mathrm{bf}} \vDash S$ es un buen orden en X, luego $M \vDash \mathrm{AE}$. ■

En particular, si (M, R) es un modelo ω de ZFC, podemos asegurar que M_{bf} es un modelo transitivo de KPR + AE y, más en particular, de KPI + MAC$^+$.

5.5 La teoría $\mathrm{Z_2F_2C}$

Todas las teorías que estamos estudiando son subteorías de ZFC. Vamos a explicitarlo mostrando que todos los axiomas de MOST + RNG se demuestran en la teoría $\mathrm{Z_2F_2C}$ que resulta de restringir el esquema de reemplazo en ZFC a fórmulas Σ_2 y añadir el esquema de Π_2-especificación o, equivalentemente, de Σ_2-especificación.[3] Obviamente $\mathrm{Z_2F_2C}$ extiende a MAC.

Vamos a probar CT. Para ello consideramos la fórmula

$$\phi(f, n, m, x) \equiv m = n + 1 \wedge f : m \longrightarrow V \wedge f(0) = x$$
$$\wedge \textstyle\bigwedge r \in n\ f(r + 1) = f(r) \cup \bigcup f(r).$$

Es fácil ver que es Δ_0, y claramente si $\phi(f, n, m, x) \wedge \phi(f', n, m', x)$ se cumple $m = m'$, y $f = f'$. En efecto, es claro que $m = m'$ y podemos considerar el conjunto

$$X = \{i \in m \mid f(i) \neq f'(i)\},$$

bien definido por Δ_0-especificación. Si no fuera vacío, tendría un mínimo elemento, lo cual lleva claramente a una contradicción. Por lo tanto, $f = f'$.

Ahora consideramos $\{n \in \omega \mid \neg \bigvee fm\, \phi(f, n, m, x)\}$, bien definido por Π_1-especificación. Si no es vacío tiene un mínimo elemento n, que no puede ser $n = 0$, ya que $f = \{(0, x)\}$ cumple $\phi(f, 0, 1, x)$, luego $n = k + 1$, y entonces

[3] Es fácil ver que a partir del esquema de Σ_{n+1}-reemplazo se puede demostrar el esquema de Π_n-especificación. En particular, $\mathrm{ZF_3C}$, es decir, la teoría que se obtiene de ZFC restringiendo el axioma del reemplazo a fórmulas Σ_2, extiende a $\mathrm{Z_2F_2C}$.

existe f tal que $\phi(f,k,n,x)$, con lo que $f' = f \cup \{(n, f(k) \cup \bigcup f(k))\}$ cumple $\phi(f', n, n+1, x)$, contradicción.

Esto prueba que $\bigwedge n \in \omega \overset{1}{\bigvee} fm\, \phi(f,n,m,x)$. Por Σ_1-reemplazo existe el conjunto

$$F = \{f \mid \bigvee n \in \omega \bigvee m\ \phi(f,n,m,x)\}.$$

Además, si $\phi(f,n,m,x) \wedge \phi(f',n',m',x)$ con $n < n'$, se cumple claramente $\phi(f'|_m, n, m, x)$, luego $f = f'|_m$. Esto implica que $f_x = \bigcup F$ es una aplicación $f_x : \omega \longrightarrow V$. Además

$$f(0) = x \wedge \bigwedge n \in \omega\ f(n+1) = f(n) \cup \bigcup f(n).$$

Ahora es fácil ver que $\{x\} \cup \bigcup f_x[\omega]$ es un conjunto transitivo que contiene a x, luego se cumple CT. Con esto hemos probado que $\mathrm{Z_2F_2C}$ extiende[4] a MAC^+. En particular tenemos definida la clausura transitiva $\operatorname{ct} x$ de todo conjunto x.

Ahora consideramos la fórmula

$$\phi(f,\alpha,\alpha',y) \equiv \alpha \in \Omega \wedge \alpha' = \alpha \cup \{\alpha\} \wedge f : \alpha' \longrightarrow V \wedge f(\alpha) = y \wedge f(0) = \varnothing \wedge$$

$$\bigwedge \lambda \in \alpha'(\lambda \text{ límite} \rightarrow f(\lambda) = \bigcup f[\lambda]) \wedge \bigwedge \delta \in \alpha\ f(\delta+1) = \mathcal{P}f(\delta).$$

Es fácil desarrollar esta fórmula para mostrar que es Δ_0 excepto por la última igualdad, que podemos desarrollar así:

$$\bigvee uu' \in f \bigvee v \in u \bigvee v' \in u' \bigvee z \in v \bigvee \delta' z' \in v'(u = (\delta, z) \wedge u' = (\delta', z')$$

$$\wedge\ \delta' = \delta \cup \{\delta\} \wedge z' = \mathcal{P}z).$$

De este modo, vemos que toda la fórmula ϕ sería Δ_0 excepto por $z' = \mathcal{P}z$, que a su vez se desarrolla como

$$\bigwedge w \in z'\ w \subset z \wedge \bigwedge w'(w' \subset z \rightarrow w' \in z').$$

Es claro que el cuantificador no acotado $\bigwedge w'$ se puede extraer, de modo que ϕ equivale a $\bigwedge w' \chi(f,\alpha,\alpha',w',y)$, donde la fórmula χ es Δ_0. Así pues, ϕ es de clase Π_1 y la fórmula $\psi(\alpha, y) \equiv \bigvee f\alpha'\ \phi(f,\alpha,\alpha',y)$ es Σ_2.

Si $\phi(f,\alpha,\alpha',y) \wedge \phi(f',\alpha,\alpha'',y')$, entonces $\alpha' = \alpha''$, $f = f'$ y por consiguiente $y = y'$. En efecto, es obvio que $\alpha' = \alpha''$ y basta considerar el conjunto

$$X = \{\delta \in \alpha' \mid f(\delta) \neq f'(\delta)\},$$

que está bien definido, por Δ_0-especificación, y comprobar que es vacío. En caso contrario tendría un mínimo elemento y eso lleva claramente a una contradicción.

[4] Más precisamente, acabamos de ver que MAC^+ es una subteoría de $\mathrm{Z_0F_1C}$, es decir, de la teoría que resulta de restringir el esquema de reemplazo de ZFC a fórmulas Σ_1, lo que permite probar fácilmente el esquema de Δ_0-especificación.

Por consiguiente, $\psi(\alpha, y) \land \psi(\alpha, y') \to y = y'$.

Ahora podemos probar que $\bigwedge \alpha \bigvee y\, \psi(\alpha, y)$. En efecto, supongamos que existe un $\alpha_0 \in \Omega$ tal que $\neg \bigvee y\, \psi(\alpha_0, y)$. Sea

$$Y = \{\alpha \in \alpha_0 \mid \neg \bigvee y\, \psi(\alpha, y)\},$$

que está bien definido por Π_2-especificación. Si no es vacío, tiene un mínimo elemento α, y si es vacío entonces tomamos $\alpha = \alpha_0$, de modo que, en cualquier caso, $\neg \bigvee y\, \psi(\alpha, y) \land \bigwedge \delta < \alpha \bigvee y\, \psi(\delta, y)$.

No puede ser $\alpha = 0$, pues $\psi(0, \varnothing)$ se cumple con $\alpha' = 1$ y $f = \{(0, \varnothing)\}$.

Si fuera $\alpha = \delta + 1$, entonces sean f, y tales que $\phi(f, \delta, \alpha, y)$. Es fácil ver entonces que $f' = f \cup \{(\delta, \mathcal{P}y)\}$ cumple $\phi(f', \alpha, \alpha + 1, \mathcal{P}y)$, luego $\psi(\alpha, \mathcal{P}y)$, contradicción.

Por último, si α es un ordinal límite, tenemos que

$$\bigwedge \delta \in \alpha \overset{1}{\bigvee} f \bigvee \delta' y\, \phi(f, \delta, \delta', y),$$

y la fórmula es Σ_2, luego por Σ_2-reemplazo existe

$$F = \{f \mid \bigvee \delta \in \alpha \bigvee \delta' y\ \phi(f, \delta, \delta', y)\}.$$

Observemos además que si $\phi(f, \delta, \delta', y) \land \phi(f', \epsilon, \epsilon', y')$ y $\delta < \epsilon$, entonces $\phi(f'|_{\delta'}, \delta, \delta', f'(\delta))$, luego por la unicidad que hemos probado $f = f'|_{\delta'}$. Esto implica que $f^* = \bigcup F : \alpha \longrightarrow V$ y a su vez $f^{**} = f^* \cup \{(\alpha, f^*[\alpha])\}$ cumple $\phi(f^{**}, \alpha, \alpha + 1, f^*[\alpha])$, luego $\psi(\alpha, f^*[\alpha])$, contradicción.

Así pues, concluimos que $\bigwedge \alpha \overset{1}{\bigvee} y\, \psi(\alpha, y)$. Definimos $V_\alpha \equiv y \mid \psi(\alpha, y)$. Así, la fórmula $y = V_\alpha$ es Δ_2, pues equivale a $\psi(\alpha, y)$ y también a $\bigwedge z(\psi(\alpha, z) \to z = y)$.

Más en general, si $\phi(f, \alpha, \alpha', V_\alpha)$, entonces, para todo $\delta \leq \alpha$ se cumple $\phi(f|_{\delta+1}, \delta, \delta + 1, f(\delta))$, luego $f(\delta) = V_\delta$. Esto implica que

$$V_0 = \varnothing \land \bigwedge \alpha\ V_{\alpha+1} = \mathcal{P}V_\alpha \land \bigwedge \lambda\ V_\lambda = \bigcup_{\delta < \lambda} V_\delta.$$

A partir de aquí es fácil probar por inducción que los conjuntos V_α son transitivos y que $\alpha \leq \beta \to V_\alpha \subset V_\beta$.

Veamos ahora que $V = \bigcup\limits_\alpha V_\alpha$. En caso contrario, sea x un conjunto que no esté en ningún V_α y sea $A = \operatorname{ct} x \cup \{x\}$. Podemos definir por Σ_1-especificación

$$B = \{u \in A \mid \neg \bigvee \alpha y(y = V_\alpha \land u \in y)\}.$$

Tenemos que $x \in B$, luego por el axioma de regularidad existe un $u \in B$ tal que $u \cap B = \varnothing$. Así, $\bigwedge v \in u \bigvee \alpha\ v \in V_\alpha$. Más precisamente:

$$\bigwedge v \in u \overset{1}{\bigvee} \alpha \bigvee \beta y z(\beta = \alpha + 1 \land y = V_\alpha \land z = V_\beta \land v \in z \land v \notin y),$$

luego por Σ_1-reemplazo existe un conjunto $Z \subset \Omega$ tal que

$$\bigwedge v \in u \bigvee \alpha \in B \; v \in V_\alpha.$$

Llamando $\alpha = \bigcup B$ tenemos que $u \subset V_\alpha$, luego $u \in V_{\alpha+1}$, contradicción.

Ahora probamos el esquema de Σ_1-recolección fuerte que, según 3.32, equivale al axioma H. Para ello fijamos una fórmula $\phi(x, y)$ de clase Σ_1 (con posibles parámetros) y un conjunto a, y consideramos la fórmula

$$\psi(x, \alpha) \equiv (x \in a \wedge \bigvee yz(\phi(x, y) \wedge z = V_\alpha \wedge y \in z) \wedge$$
$$\bigwedge \beta yz(\beta < \alpha \wedge z = V_\beta \wedge y \in z \rightarrow \neg\phi(x, y))) \vee$$
$$((x \notin a \vee \neg \bigvee y \, \phi(x, y)) \wedge \alpha = 0).$$

Claramente es una fórmula Σ_2, y por Σ_2-reemplazo existe un conjunto $X \subset \Omega$ tal que

$$\bigwedge x \in a(\bigvee y \; \phi(x, y) \rightarrow \bigvee \alpha \in X \bigvee y \in V_\alpha \; \phi(x, y)).$$

Ahora tomamos $\alpha = \bigcup X$ y $b = V_\alpha$, de modo que

$$\bigwedge x \in a(\bigvee y \; \phi(x, y) \rightarrow \bigvee y \in b \; \phi(x, y)).$$

Con esto tenemos probado que $\mathrm{Z_2F_2C}$ extiende a MOST.

Finalmente observamos que, para todo ordinal α, por Σ_2 reemplazo podemos formar el conjunto

$$H_\alpha = \{V_\delta \mid \delta \leq \alpha\},$$

y es fácil ver que es una jerarquía en el sentido de la definición 5.13. Esto implica todos los conjuntos V_α son rangos en el sentido de 5.15 y se cumple obviamente $V = R$ en el sentido de 5.18, que por 5.20 equivale a RNG sobre MOST. Con esto concluye la prueba de que $\mathrm{Z_2F_2C}$ extiende a MOST + RNG.

Capítulo VI

Los Nuevos Fundamentos de Quine

Todas las teorías de conjuntos que hemos estudiado hasta aquí son subteorías de ZFC (o de ZFC + $V = L$). En cambio, ahora vamos a estudiar una teoría incompatible con ZFC, o incluso con M_0, a saber, la que resulta de añadir a la teoría KFA de Kaye-Forster el axioma $V \in V$ que afirma la existencia de un conjunto universal. Si prescindimos de átomos, la teoría resultante es la que se conoce como *Nuevos Fundamentos* de Quine, (NF), si bien resulta ser incompatible con el axioma de elección, inconveniente que se subsana precisamente admitiendo átomos, lo que nos lleva a la teoría NFA.

6.1 Los axiomas de NFA

En principio, tal y como hemos indicado, los axiomas de NFA son los de KF más $V \in V$, es decir:

Extensionalidad	$\bigwedge XY(\bigwedge u(u \in X \leftrightarrow u \in Y) \rightarrow X = Y)$
Par	$\bigwedge xy \bigvee Z(x \in Z \land y \in Z)$
Unión	$\bigwedge X \bigvee Y \bigwedge U \in X \bigwedge v \in U\ v \in Y$
Partes	$\bigwedge X \bigvee Y \bigwedge u(u \subset X \rightarrow u \in Y)$
$\boldsymbol{\Delta_0^e}$**-especificación**	$\bigwedge X \bigvee Y \bigwedge u(u \in Y \leftrightarrow u \in X \land \phi(u)) \quad (*)$
$\boldsymbol{V \in V}$	$\bigvee X \bigwedge u\ u \in X$

$(*)$ para toda fórmula ϕ (con posibles parámetros) de clase Δ_0 y estratificada.

Aquí volvemos a aplicar el convenio de usar las mayúsculas en referencia a conjuntos y las minúsculas para objetos cualesquiera, conjuntos o átomos. Ahora bien, es fácil ver que todos estos axiomas pueden reducirse al axioma de extensionalidad y un único esquema axiomático de formación de conjuntos:

Extensionalidad	$\bigwedge XY(\bigwedge u(u \in X \leftrightarrow u \in Y) \rightarrow X = Y)$
Formación de conjuntos	$\bigvee Y \bigwedge u(u \in Y \leftrightarrow \phi(u)) \quad (*)$

$(*)$ para toda fórmula estratificada[1] ϕ (con posibles parámetros).

Antes de probar la equivalencia entre ambos grupos de axiomas observamos que el esquema de formación de conjuntos equivale a que

$$\{x \mid \phi(x)\} \equiv Y|\bigwedge x(x \in Y \leftrightarrow \phi(u))$$

es una descripción propia siempre que la fórmula ϕ está estratificada.

Ahora observamos que el axioma $V \in V$, junto con el axioma de extensionalidad, nos permite definir el *conjunto universal*

$$V \equiv X|\bigwedge u\ u \in X,$$

de modo que en NFA se cumple $\bigwedge u\ u \in V$, y esto hace que en NFA toda fórmula sea equivalente a una fórmula Δ_0 con parámetro V, ya que todo cuantificador puede acotarse trivialmente en la forma $\bigwedge x \in V$ o $\bigvee x \in V$. Por lo tanto, el esquema de especificación es válido para fórmulas estratificadas cualesquiera, no necesariamente Δ_0. Más aún, al aplicarlo a $X = V$ obtenemos lo que hemos llamado esquema de formación de conjuntos.

Recíprocamente, a partir del esquema de formación de conjuntos, tomando $\phi(u) \equiv u = u$ recuperamos el axioma $V \in V$, y a partir de $u \in X \wedge \phi(u)$ recuperamos el esquema de Δ_0^e-especificación, y también es fácil deducir los axiomas del par, de la unión y de partes. En la sección siguiente veremos esto con más detalle.

Similarmente, la teoría NF se obtiene de añadir a los axiomas de extensionalidad y formación de conjuntos el axioma

$$\bigwedge x \ \mathrm{cto}\, x$$

o, equivalentemente, eliminando el relator cto de la teoría y con él la distinción entre mayúsculas y minúsculas en los dos axiomas de NFA.

Al igual que con las otras teorías con átomos que hemos considerado, NFA puede completarse con el axioma de los átomos

$$\bigwedge ux(u \in x \rightarrow \mathrm{cto}\, x),$$

si bien nunca necesitaremos realmente este axioma.

[1]Basta tomar como axiomas los casos del esquema de formación de conjuntos correspondientes a fórmulas estratificadas sin descriptores, pero así el correspondiente a la fórmula $u \neq u$ implica la existencia de $\varnothing$, y la existencia del conjunto vacío junto con el axioma de extensionalidad es todo lo necesario para que valga el argumento del teorema 2.3, según el cual toda fórmula estratificada es equivalente a una fórmula estratificada sin descriptores, por lo que los casos del esquema de formación de conjuntos para fórmulas con descriptores son teoremas de NFA.

6.2 Resultados básicos en NFA

Aunque sabemos que NFA extiende a KFA, con lo que automáticamente todos los teoremas de KFA son también teoremas de NFA, es interesante observar cómo se construye de forma natural toda la teoría de conjuntos a partir de los meros principios de extensionalidad y formación de conjuntos. Remitiremos a las pruebas que hemos dado en KFA únicamente cuando el contexto de NFA no aporte ninguna diferencia relevante o las posibles diferencias se reduzcan a simplificaciones obvias de las pruebas que ya hemos visto.

El álgebra de conjuntos Los conceptos básicos del álgebra de conjuntos se definen de forma inmediata:

$$A \subset B \equiv \operatorname{cto} A \land \operatorname{cto} B \land \bigwedge x(x \in A \to x \in B).$$

$$A \cup B \equiv \{x \mid x \in A \lor x \in B\}, \qquad A \cap B \equiv \{x \mid x \in A \land x \in B\},$$

$$\overline{A} \equiv \{x \mid x \notin A\}, \qquad A \setminus B \equiv \{x \mid x \in A \land x \notin B\},$$

$$\varnothing \equiv \{x \mid x \neq x\}, \qquad V \equiv \{x \mid x = x\}.$$

Es inmediato que todas las fórmulas que aparecen en las definiciones están estratificadas, por lo que todas ellas son descripciones propias cuando se aplican a conjuntos. En comparación con ZFC destaca la existencia del conjunto universal V, que contiene a todos los objetos (y en particular $V \in V$, por lo que en NFA no hay nada equivalente a un axioma de regularidad) y la existencia del complementario $\overline{A}$ de cualquier conjunto A.

Todas las propiedades básicas de uniones, intersecciones, complementos, etc. se demuestran trivialmente.

También podemos definir uniones e intersecciones generales:

$$\bigcup A \equiv \{x \mid \bigvee B \in A\; x \in B\}, \qquad \bigcap A \equiv \{x \mid \bigwedge B \in A\; x \in B\}.$$

(Notemos que si A no contiene conjuntos la intersección es igual a V.)

Igualmente introducimos el *conjunto de partes:*

$$\mathcal{P}A \equiv \{x \mid x \subset A\}.$$

Observemos que la condición $x \subset A$ ya presupone que x es un conjunto.

En particular tenemos el conjunto $[\mathrm{cto}] = \mathcal{P}V$, que es "el conjunto de todos los conjuntos", y el conjunto $\mathcal{F} = \mathcal{P}\mathcal{P}V$, que es "el conjunto de todas las familias de conjuntos", donde definimos una *familia de conjuntos* como un conjunto cuyos elementos son todos conjuntos.

Pares ordenados Los conceptos relacionados con los pares ordenados se introducen también de forma inmediata:

$$\{x, y\} \equiv \{u \mid u = x \lor u = y\}, \qquad (x, y) \equiv \{\{x\}, \{x, y\}\},$$

$$A \times B \equiv \{x \mid \bigvee uv(u \in A \land v \in B \land x = (u, v))\},$$

La comprobación de que una fórmula está estratificada es relativamente más simple en el caso de NFA que en el de KF, puesto que no aquí no hemos de comprobar a la vez de que es de clase Δ_0. Consideremos primeramente el caso más simple de $\{x, y\}$. De acuerdo con la definición 2.2, para estratificar una fórmula que contenga el subtérmino $\{x, y\}$, al designador

$$\{x, y\} \equiv z \mid \bigwedge u(u \in z \leftrightarrow u = x \lor u = y)$$

hemos de asignarle el mismo tipo que a la variable z, que claramente ha de ser a su vez una unidad mayor que el tipo asignado a las variables x e y (y para que ello sea posible basta con que ambas tengan el mismo tipo). Puesto que las variables u y z podemos elegirlas entre las que no aparecen (explícitamente) en la fórmula dada, sucede que nunca necesitaremos asignarles un tipo explícitamente, pues esto podrá hacerse siempre que se respete la condición de que x e y tengan el mismo tipo.

Similarmente, puesto que

$$(x, y) \equiv z \mid \bigwedge u(u \in z \leftrightarrow u = \{x\} \lor u = \{x, y\}),$$

para estratificar una sentencia que contenga un término (x, y) hemos de asignar a éste el mismo tipo que a z, que es dos unidades superior que el tipo de las variables x e y (si no tienen ambas el mismo tipo, no es posible estratificar).

Teniendo esto en cuenta, es fácil ver que la fórmula que define, por ejemplo, a $A \times B$ está estratificada y, al estratificar fórmulas, el término $A \times B$ debe recibir un tipo dos unidades mayor que los tipos de las variables A y B. En general, observemos que

$$\{x \mid \phi\} \equiv z \mid \bigwedge x(x \in z \leftrightarrow \phi(x)),$$

por lo que el tipo que hay que asignar a un término de la forma $\{x \mid \phi\}$ debe ser una unidad más que el tipo asignado a x por una estratificación de $\phi(x)$.

Al final de esta sección incluimos una tabla con las condiciones requeridas para estratificar las descripciones que estamos introduciendo.

Por supuesto, las propiedades básicas sobre pares ordenados y productos cartesianos se demuestran sin dificultad alguna.

Relaciones Una *relación binaria* R en un conjunto A se define igual que en ZFC, es decir, como un subconjunto de $A \times A$. Es fácil ver que todos los conceptos siguientes están bien definidos (por fórmulas estratificadas), así como que cumplen las propiedades que cabe esperar.

$$\mathcal{D}R \equiv \{x \mid \bigvee y\,(x,y) \in R\}, \qquad \mathcal{R}R \equiv \{x \mid \bigvee y\,(y,x) \in R\},$$
$$R^{-1} \equiv \{x \mid \bigvee uv(x = (u,v) \land (v,u) \in R)\},$$
$$R \circ S \equiv \{x \mid \bigvee uvw(x = (u,w) \land (u,v) \in R \land (v,w) \in S)\}.$$
$$[=] \equiv \{x \mid \bigvee u\ x = (u,u)\}, \qquad [\subset] \equiv \{x \mid \bigvee uv(x = (u,v) \land u \subset v)\}.$$

Nota Observemos que al estratificar una fórmula ϕ no hemos de preocuparnos por asignar un tipo a los designadores como $[=]$, pues el único requisito para asignar un tipo a un designador $x \mid \alpha$ es que el tipo sea el mismo que una estratificación de α asigna a la variable x, pero si x es la única variable libre de α, podemos modificar la estratificación de α para que x tenga cualquier tipo deseado a partir de un mínimo, sin que ello afecte en nada a la estratificación de las restantes variables de ϕ. ■

Los conceptos de relación de equivalencia y de orden, así como los derivados de ellos (máximo, mínimo, cota, supremo, ínfimo, etc.) se definen en NFA de forma natural y sus propiedades básicas se demuestran sin dificultad. Observemos en particular que, si $R \subset A \times A$ es una relación de equivalencia el el conjunto A, para cada $a \in A$ podemos definir su clase de equivalencia

$$[a]_R = \{x \mid x \in A \land x\,R\,a\}$$

y a su vez podemos definir el conjunto cociente

$$A/R = \{x \mid \bigvee a \in A\ x = [a]_R\}.$$

Es fácil ver que A/R es una *partición* de A, es decir, que sus elementos son no vacíos, disjuntos dos a dos y que $A = \bigcup A$.

Clases propias Notemos que en NFA podemos hablar de clases propias exactamente en el mismo sentido que en ZFC. Veamos algunos ejemplos:

Teorema 6.1 *Las clases*

$$[\in] \equiv \{x \mid \bigvee yZ(x = (y,Z) \land y \in Z)\}, \qquad \{x \mid x \in x\}, \qquad \{x \mid x \notin x\}$$

no son conjuntos.

Demostración: Notemos que las fórmulas no están estratificadas, luego la existencia de tales conjuntos no puede probarse mediante el esquema de formación de conjuntos. Además no pueden existir, pues si existiera la primera existiría el conjunto

$$[=] \cap [\in] = \{x \mid \bigvee Z(x = (Z,Z) \land Z \in Z)\},$$

luego también el dominio de este conjunto que es la segunda clase del enunciado, y a su vez, si ésta fuera un conjunto, también lo sería su complementario, que es la tercera clase del enunciado, la cual daría lugar a la paradoja de Russell. ■

Funciones Podemos definir el concepto de función del modo usual:

$$f : A \longrightarrow B \equiv f \subset A \times B \land \bigwedge uvw((u, v) \in f \land (u, w) \in f \to v = w)$$

$$\land \bigwedge u \in A \bigvee v \in B\ (u, v) \in f,$$

$$f(x) \equiv y \mid (x, y) \in f,$$

$$f : A \longrightarrow B \text{ inyectiva} \equiv f : A \longrightarrow B \land \bigwedge xy \in A(f(x) = f(y) \to x = y),$$

$$f : A \longrightarrow B \text{ suprayectiva} \equiv f : A \longrightarrow B \land \bigwedge y \in B \bigvee x \in A\ f(x) = y,$$

$$f : A \longrightarrow B \text{ biyectiva} \equiv f : A \longrightarrow B \text{ inyectiva} \land f : A \longrightarrow B \text{ suprayectiva},$$

$$f[X] \equiv \{y \mid \bigvee x \in X\ (x, y) \in f\}, \qquad f^{-1}[Y] \equiv \{x \mid \bigvee y \in Y\ (x, y) \in f\},$$

$$f|_X = f \cap (X \times V), \qquad B^A = \{f \mid f : A \longrightarrow B\}.$$

No es necesario definir la aplicación inversa de una aplicación biyectiva, o la composición de aplicaciones, pues las definiciones correspondientes son un caso particular de las definiciones para relaciones cualesquiera.

Nota Conviene observar que para que un término $t(x)$ (tal vez con más variables libres) defina una función $f : A \longrightarrow B$ mediante $x \mapsto t(x)$ es suficiente con que la fórmula $x \in A \land y = t(x)$ pueda estratificarse de modo que x e y tengan el mismo tipo, pues entonces

$$f = \{u \mid \bigvee xy(u = (x, y) \land y = t(x))\}$$

(aparte, por supuesto de que se ha de poder demostrar que $\bigwedge x \in A\ f(x) \in B$, aunque siempre se puede tomar $B = V$ para que esto se cumpla). ■

Notemos que no es posible definir una proyección $f : A \times B \longrightarrow A$, pues se trata de la clase

$$\{x \mid \bigvee uv(u \in A \land v \in B \land x = ((u, v), u))\},$$

y la fórmula no está estratificada, pues las componentes (u, v) y u del par ordenado deberían tener el mismo tipo, por un lado, pero tipos distintos por otro.

Por ello conviene definir

$$\mathcal{P}_1 A = \{x \mid \bigvee a \in A\ x = \{a\}\}, \qquad \mathcal{P}_1^2 A = \{x \mid \bigvee a \in A\ x = \{\{a\}\}\},$$

con lo que podemos formar las proyecciones

$$\pi_A : A \times B \longrightarrow \mathcal{P}_1^2 A, \qquad \pi_B : A \times B \longrightarrow \mathcal{P}_1^2 B$$

dadas por $\pi_A(a, b) = \{\{a\}\}$, $\pi_B(a, b) = \{\{b\}\}$.

Similarmente, si R es una relación de equivalencia en un conjunto A, tampoco podemos definir la aplicación canónica $p : A \longrightarrow A/R$ dada por $p(a) = [a]_R$, pues el tipo de $[a]_R$ es una unidad mayor que el de A. Sólo podemos definir $p : \mathcal{P}_1 A \longrightarrow A$ de modo que $p(\{a\}) = [a]_R$.

Expresión	Condición	Efecto
$A \subset B$	$t(A) = t(B)$	
$A \cup B$	$t(A) = t(B)$	0
$A \cap B$	$t(A) = t(B)$	0
$\overline{A}$		0
$A \setminus B$	$t(A) = t(B)$	0
$\bigcup A$		-1
$\bigcap A$		-1
$\mathcal{P}A$		1
$\{x, y\}$	$t(x) = t(y)$	1
(x, y)	$t(x) = t(y)$	2
$A \times B$	$t(A) = t(B)$	2
$\mathcal{D}R$		-2
$\mathcal{R}R$		-2
R^{-1}		0
$R \circ S$	$t(R) = t(S)$	0
$f : A \longrightarrow B$	$t(f) = t(A) + 2 = t(B) + 2$	
$f(x)$	$t(f) = t(x) + 3$	$-3/0$
$f[X]$	$t(f) = t(X) + 2$	$-2/0$
$f^{-1}[X]$	$t(f) = t(X) + 2$	$-2/0$
$f\vert_X$	$t(f) = t(X) + 2$	$0/-2$
B^A	$t(A) = t(B)$	3
$\mathcal{P}_1A$		1
$\mathcal{P}_1^2A$		2

Estratificación La tabla precedente recoge las condiciones que han de cumplir las expresiones que hemos definido para definir fórmulas estratificadas, así como la diferencia del grado de la expresión y el grado de sus variables en el caso de términos. Las comprobaciones son muy simples a partir de la expresión que define a cada concepto.

6.3 El axioma de infinitud

En esta sección definiremos los números naturales en NFA. Más precisamente, definiremos el conjunto de los números naturales, pero veremos que para demostrar que es infinito es necesario añadir a NFA el axioma de infinitud (AI), que afirma precisamente la existencia de conjuntos infinitos. A partir de ahí ya no habrá dificultad en demostrar que los números naturales cumplen los axiomas de Peano y que, por consiguiente, NFA+AI es una teoría aritmética.

Empezamos introduciendo el concepto general de cardinal de un conjunto y algunos hechos básicos, aunque inmediatamente nos restringiremos al caso finito.

Definición 6.2 Diremos que dos conjuntos A y B son *equipotentes* si existe

$f : A \longrightarrow B$ biyectiva. La equipotencia define una relación de equivalencia sobre el conjunto [cto] de todos los conjuntos:

$$\sim \equiv \{x \mid \bigvee ABf(x = (A, B) \land f : A \longrightarrow B \text{ biyectiva})\}.$$

Llamaremos *cardinales* a los elementos del conjunto cociente $K = [\text{cto}]/\sim$. Si A es un conjunto, su clase de equivalencia en K se llama *cardinal* de A, y lo representaremos por

$$|A| = \{B \mid B \sim A\}.$$

Como sucede con todo conjunto cociente, tenemos que K es una partición de [cto] en conjuntos disjuntos dos a dos. Además, tenemos trivialmente la equivalencia:

$$A \sim B \leftrightarrow |A| = |B|.$$

Diremos que un conjunto A es *minuspotente* a un conjunto B si existe una aplicación $f : A \longrightarrow B$ inyectiva. Más concretamente, podemos definir la relación en [cto] dada por

$$\preceq \equiv \{x \mid \bigvee ABf(x = (A, B) \land f : A \longrightarrow B \text{ inyectiva})\}.$$

Es fácil probar que si $A \sim A'$ y $B \sim B'$, entonces $A \preceq B \leftrightarrow A' \preceq B'$, lo cual justifica la definición siguiente[2]

$$\leq \equiv \{x \mid \bigvee \kappa\mu AB(x = (\kappa, \mu) \land \kappa = |A| \land \mu = |B| \land A \preceq B)\}.$$

Es claro que $\leq$ es una relación en el conjunto K de todos los cardinales de modo que, para todo par de conjuntos A y B, se cumple que

$$A \preceq B \leftrightarrow |A| \leq |B|.$$

Omitimos la prueba del teorema siguiente porque es idéntica a la de 2.4, salvo que no hace falta comprobar que las fórmulas implicadas sean Δ_0:

Teorema 6.3 (Cantor-Bernstein) *La relación $\leq$ es una relación de orden sobre el conjunto K.*

A partir de aquí nos restringimos al caso de los cardinales finitos, para lo cual primero tenemos que definirlos.

Empezamos observando que el único conjunto equipotente a $\varnothing$ es él mismo, por lo que, si definimos $0 = |\varnothing|$, tenemos que $0 = \{\varnothing\}$.

Los cardinales finitos pueden obtenerse a partir de 0 mediante el operador "siguiente":

Definición 6.4 Para cada conjunto A, definimos

$$A' = \{x \mid \bigvee Bu(x = B \cup \{u\} \land B \in A \land u \notin B)\}.$$

Claramente la fórmula $B = A'$ está estratificada y A' tiene el mismo tipo que A. Por lo tanto podemos definir la aplicación $S : [\text{cto}] \longrightarrow [\text{cto}]$ mediante $S(A) = A'$.

[2]Notemos que para comprobar que la fórmula que define a $\leq$ está estratificada no necesitamos entrar en las definiciones de los términos que aparecen en ella, sino que basta asignar el tipo 0 a las variables A y B, tipo 1 a $\kappa, \mu, |A|, |B|$ y tipo 3 a x y al designador $\preceq$.

Ejemplo Si definimos $1 = S(0)$, es fácil ver que

$$1 = \{x \mid \bigvee u\ x = \{u\}\},$$

es decir, 1 es el cardinal de todos los conjuntos con un elemento. Igualmente, si llamamos $2 = S(1)$ se comprueba que

$$2 = \{x \mid \bigvee uv(x = \{u, v\} \land u \neq v)\},$$

luego 2 es el cardinal de los conjuntos con dos elementos, y así sucesivamente.

■

En general:

Teorema 6.5 *Si $\kappa \in K$ es un cardinal, entonces $S(\kappa) = \varnothing$ o bien $S(\kappa) \in K$.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $S(\kappa) \neq \varnothing$ y sea $A \in S(\kappa)$. Vamos a probar que $S(\kappa) = |A|$. En principio sabemos que $A = B \cup \{u\}$, para un cierto $B \in \kappa$, de modo que $|B| = \kappa$.

Si $C \in S(\kappa)$, entonces $C = D \cup \{v\}$, donde $D \in \kappa$ y $v \notin D$. Por consiguiente, $|D| = \kappa = |B|$, luego existe $f : B \longrightarrow D$ biyectiva, y $g = f \cup \{(u, v)\}$ es claramente una biyección $g : A \longrightarrow C$, la cual demuestra que $C \in |A|$.

Recíprocamente, si $C \in |A|$, existe una aplicación $f : A \longrightarrow C$ biyectiva. Sea $D = f[B]$ y sea $v = f(u)$. Entonces es claro que $C = D \cup \{v\}$, $v \notin D$ y $|D| = |B| = \kappa$, luego $D \in \kappa$. Esto prueba que $C \in S(\kappa)$. ■

La posibilidad $S(\kappa) = \varnothing$ es "patológica" y será descartada por el axioma de infinitud. Para discutirla con más detalle conviene que introduzcamos primero los conceptos de "número natural" y "conjunto finito". La idea básica es definir los números naturales como los cardinales que se obtienen a partir de 0 aplicando un número finito de veces la operación S, pero necesitamos expresar esto sin recurrir al concepto de finitud, que definiremos después. Empleamos la técnica usual de Dedekind:

Definición 6.6 Llamaremos *conjuntos inductivos* a los elementos del conjunto

$$\mathrm{Ind} = \{X \mid 0 \in X \land \bigwedge A \in X\ A' \in X\}.$$

Es claro que Ind está bien definido (la fórmula que lo define está estratificada) y no es vacío, pues V es un conjunto inductivo. Así podemos definir el conjunto de los *números naturales* como el menor conjunto inductivo:

$$\mathbb{N} = \bigcap \mathrm{Ind}.$$

Es claro que $\mathbb{N}$ es inductivo, pues si $A \in \mathrm{Ind}$ entonces $0 \in A$, luego $0 \in \mathbb{N}$, y si $n \in \mathbb{N}$, dado $A \in \mathrm{Ind}$, tenemos que $n \in A$, por definición de $\mathbb{N}$, luego $n' \in A$, por definición de conjunto inductivo, luego $n' \in \mathbb{N}$, por definición de $\mathbb{N}$. Además la definición implica que $\mathbb{N}$ está contenido en todos los conjuntos inductivos.

En particular, si seguimos llamando S a la restricción de S a $\mathbb{N}$ tenemos que $S : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$. Con esto podemos demostrar casi todos los axiomas de Peano:

Teorema 6.7 *Se cumple:*

a) $0 \in \mathbb{N}$ *(El cero es un número natural).*

b) $S : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *(El sucesor de todo número natural es un número natural).*

c) $\bigwedge n \in \mathbb{N}\ S(n) \neq 0$ *(El cero no es el sucesor de ningún número natural).*

d) $\bigwedge X(X \subset \mathbb{N} \wedge 0 \in X \wedge \bigwedge n \in X\ n+1 \in X \rightarrow X = \mathbb{N})$.

DEMOSTRACIÓN: Todo es consecuencia inmediata del hecho de que $\mathbb{N}$ es el menor conjunto inductivo excepto el hecho de que 0 no es el siguiente de ningún número natural. Ahora bien, si $n \in \mathbb{N}$, es obvio que $\varnothing \notin S(n)$, pues ello supondría que $\varnothing = a \cup \{u\}$, lo cual es absurdo y, como $\varnothing \in 0$, concluimos que $S(n) \neq 0$. ■

Los cuatro axiomas de Peano que hemos probado garantizan, de hecho, que todo número natural no nulo tiene un predecesor:

Teorema 6.8 *La aplicación sucesor* $S : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *es suprayectiva.*

DEMOSTRACIÓN: Basta considerar el conjunto

$$X = \{n \in \mathbb{N} \mid n = 0 \vee \bigvee m \in \mathbb{N}\ n = S(m)\}$$

y aplicarle el principio de inducción[3] (apartado d. del teorema anterior) para concluir que $X = \mathbb{N}$. ■

Otra aplicación trivial del principio de inducción en combinación con el teorema 6.5 nos da que todo número natural es un cardinal o bien es el conjunto vacío.

Definición 6.9 Llamaremos *cardinales finitos* a los números naturales no vacíos, y llamaremos *cardinales infinitos* a los cardinales que no sean números naturales.

Según veremos, el axioma de infinitud nos asegurará que todos los números naturales son no vacíos y, por consiguiente, que los cardinales finitos son exactamente los números naturales.

El axioma de Peano que falta en el teorema 6.7 es el que afirma la inyectividad de la aplicación sucesor S, y su posible fallo se reduce una vez más a la posibilidad patológica de que haya números naturales vacíos:

Teorema 6.10 *Si* $m, n \in \mathbb{N}$ *cumplen* $S(m) = S(n) \neq \varnothing$, *entonces* $m = n$.

[3] En toda demostración por inducción es crucial comprobar que la propiedad considerada define realmente un subconjunto de $\mathbb{N}$.

Demostración: Sea $A \in S(m) = S(n)$. Entonces $A = B \cup \{u\} = C \cup \{v\}$, donde $B \in m$, $C \in n$, $u \notin B$, $v \notin C$. (En particular m y n son no vacíos, luego son cardinales.) Distinguimos dos casos:

Si $u = v$ entonces $B = C$, luego $m = |B| = |C| = n$.

Si $u \neq v$, entonces $v \in B$ y $u \in C$, y podemos definir $f : B \longrightarrow C$ biyectiva sin más que exigir $f(v) = u$ y dejando invariantes a los demás elementos de B. Así llegamos nuevamente a que $m = |B| = |C| = n$. ■

Veamos una variante:

Teorema 6.11 *Si n y $S(n)$ son cardinales finitos, entonces $n < S(n)$ y si $\kappa \in K$ cumple $n < \kappa$, entonces $S(n) \leq \kappa$. En particular, no hay cardinales intermedios entre n y $S(n)$.*

Demostración: Notemos que, en general, $n \leq S(n)$, pues si $A \in S(n)$, entonces $A = B \cup \{u\}$ con $B \in n$ y es obvio que $B \subset A$ implica que

$$n = |B| \leq |A| = S(n).$$

Consideramos el conjunto

$$X = \{n \in \mathbb{N} \mid S(n) = \varnothing \vee (S(n) \neq \varnothing \wedge n < S(n))\}.$$

Veamos que $X = \mathbb{N}$ por inducción. Es claro que $0 < 1$, luego $0 \in \mathbb{N}$.

Si $n \in X$ y $S(S(n)) \neq \varnothing$, entonces $n < S(n)$ y sabemos que $S(n) \leq S(S(n))$, pero no puede ser $S(n) = S(S(n))$, pues entonces el teorema anterior nos daría que $n = S(n)$, luego $S(n) < S(S(n))$ y $S(n) \in X$.

Si $n < \kappa$, tomamos $A \in S(n)$, de modo que $A = B \cup \{u\}$, donde $|B| = n$ y $u \notin B$ y sea $\kappa = |C|$. Sea $f : B \longrightarrow C$ inyectiva. Como no puede ser biyectiva, existe $v \in C \setminus f[B]$, luego $f' = f \cup \{(u, v)\}$ cumple que $f' : A \longrightarrow C$ inyectiva, luego $S(n) = |A| \leq |C| = \kappa$. ■

El teorema siguiente nos asegura que la restricción al conjunto de los cardinales finitos de la relación de orden en K es un orden total, así como que todo cardinal finito es menor que todo cardinal infinito.

Teorema 6.12 *Si n es un cardinal finito y κ es un cardinal arbitrario, entonces $n \leq \kappa$ o bien $\kappa \leq n$, y en el segundo caso κ es también finito.*

Demostración: Consideremos el conjunto

$$X = \{n \in \mathbb{N} \mid n = \varnothing \vee (n \neq \varnothing \wedge \bigwedge \kappa \in K(n \leq \kappa \vee (\kappa \leq n \wedge \kappa \in \mathbb{N})))\}.$$

Basta probar por inducción que $X = \mathbb{N}$. Obviamente $0 \in X$, porque para todo cardinal κ se cumple trivialmente que $0 \leq \kappa$.

Supongamos que $n \in X$ y que $S(n) \neq \varnothing$. Dado $\kappa \in K$, por hipótesis de inducción $n \leq \kappa$ o bien $\kappa \leq n$, y en el segundo caso κ es finito.

En dicho segundo caso, tenemos que $\kappa \leq n \leq S(n)$.

Si, por el contrario, $n < \kappa$, tenemos que $S(n) \leq \kappa$ por el teorema anterior. ■

Teorema 6.13 *El conjunto de los cardinales finitos está bien ordenado.*

Demostración: Sea A un subconjunto no vacío del conjunto de los cardinales finitos. Hemos de probar que tiene un mínimo elemento. Basta aplicar el principio de inducción al conjunto

$$X = \{n \in \mathbb{N} \mid n = \varnothing \lor \bigwedge m \in \mathbb{N}(m \leq n \rightarrow m \notin A)$$

$$\land \bigvee m \in \mathbb{N}(m \leq n \land m \in A \land \bigwedge p \in \mathbb{N}(p < m \rightarrow p \notin A))\}.$$

Informalmente, X es el conjunto formado por los cardinales finitos que no dejan tras de sí ningún elemento de A o bien dejan tras de sí un mínimo elemento de A.

De este modo, tenemos que $0 \in X$ tanto si $0 \in A$ (en cuyo caso es obviamente el mínimo elemento de A) como si $0 \notin A$. Si $n \in X$ y $S(n) \neq \varnothing$, supongamos en primer lugar que

$$\bigwedge m \in \mathbb{N}(m \leq n \rightarrow m \notin A).$$

Si $S(n) \notin A$, cumple esta misma condición, mientras que si $S(n) \in A$ entonces es el mínimo de A y, en cualquiera de los dos casos, $S(n) \in X$.

Por otra parte, si n deja tras de sí un mínimo elemento de A, es obvio que lo mismo le ocurre a $S(n)$, luego también $S(n) \in X$.

Concluimos que $X = \mathbb{N}$ y, como A no es vacío, existe un cardinal infinito $n \in A$ que también cumple $n \in X$, y la única posibilidad es que deje tras de sí un mínimo elemento de A. ■

Definición 6.14 Llamaremos *conjuntos finitos* a los elementos del conjunto

$$F = \bigcup \mathbb{N}.$$

Un conjunto es *infinito* si no es finito.

En otras palabras, los conjuntos finitos son los conjuntos cuyo cardinal es finito[4] según la definición 6.9.

El teorema 6.11 implica que todo subconjunto de un conjunto finito es finito. Más aún, si $B \subsetneq A$ y A es finito, entonces $|B| < |A|$.

En efecto, podemos tomar $u \in A \setminus B$ y consideramos $C = A \setminus \{u\}$, de modo que $B \subset C \subset C \cup \{u\} = A$. Sabemos que C es finito, luego $n = |C| \in \mathbb{N}$ y entonces $|B| \leq |C| = n < S(n) = |A|$. Así pues:

Teorema 6.15 *Un conjunto finito A no es equipotente a ninguno de sus subconjuntos propios. Equivalentemente, no existe ninguna aplicación $f : A \longrightarrow A$ inyectiva no suprayectiva.*

Teorema 6.16 *La unión de dos conjuntos finitos es un conjunto finito.*

[4]Notemos que si n es un cardinal finito no nulo, eso no significa que n sea un conjunto finito. De hecho, el axioma de infinitud nos asegurará que es infinito (es decir, que hay infinitos conjuntos de cardinal n).

DEMOSTRACIÓN: Basta probar por inducción que el conjunto

$$X = \{n \in \mathbb{N} \mid \bigwedge AB(A \text{ finito} \land |B| = n \rightarrow A \cup B \text{ finito})\}.$$

Claramente $0 \in X$. Si $n \in X$, tomamos A finito y $|B| = S(n)$, con lo que $B = C \cup \{u\}$ con $|C| = n$. Por hipótesis de inducción $A \cup C$ es finito, digamos que $|A \cup C| = m$. Entonces, o bien $u \in A \cup B$ y $A \cup B = A \cup C$, con lo que $A \cup B$ es finito, o bien $u \notin A \cup B$, con lo que $A \cup B = (A \cup C) \cup \{u\}$ y entonces $|A \cup B| = S(m)$, luego $A \cup B$ es finito. ■

Ejercicio: Probar que la unión de una familia finita de conjuntos finitos es finita.

Poco más puede probarse sin el axioma de infinitud. Ahora estamos en condiciones de apreciar el papel que representa en la teoría:

Teorema 6.17 *Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

a) Existe un conjunto infinito.

b) $\mathbb{N}$ *es infinito.*

c) V *es infinito.*

d) Todos los números naturales son no vacíos.

e) Todos los números naturales son cardinales.

f) La aplicación $S : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *es inyectiva.*

g) Existe una aplicación $f : X \longrightarrow X$ *inyectiva y no suprayectiva.*

DEMOSTRACIÓN: b) $\Rightarrow$ c) es inmediato, pues $\mathbb{N} \subset V$.

c) $\Rightarrow$ d) Razonamos por inducción. Obviamente $0 \neq \varnothing$. Si $n \neq \varnothing$, sea $A \in n$. Por hipótesis $A \neq V$, luego existe un $u \in V \setminus A$, luego $A \cup \{u\} \in S(n) \neq \varnothing$.

d) $\Leftrightarrow$ e) es inmediato, pues hemos visto que todo número natural es vacío o bien un cardinal infinito.

d) $\Rightarrow$ f) se sigue del teorema 6.10.

f) $\Rightarrow$ b) $\land$ g) por 6.7 c).

g) $\Rightarrow$ a) por 6.15 y claramente a) $\Rightarrow$ c). ■

Definición 6.18 Llamaremos *axioma de infinitud* (AI) a cualquiera de las afirmaciones equivalentes del teorema anterior. (Notemos que g) es AID).

Puede probarse que AI no puede demostrarse (ni refutarse) en NFA (supuesto que sea consistente).

Observemos lo peculiar de la situación: Como $\varnothing \in 0$, sabemos que $0 \neq \varnothing$; como $\{\varnothing\} \in 1$, sabemos que $1 \neq \varnothing$; como $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \in 2$, sabemos que $2 \neq \varnothing$, y de este modo podemos probar en NFA que cualquier número natural es no vacío. Sin embargo, puede probarse que en NFA no se puede demostrar que todos los números naturales son no vacíos. Equivalentemente, podemos encontrar infinitos elementos en $\mathbb{N}$ (y en particular en V), pero no podemos demostrar que estos conjuntos sean infinitos.

En particular, si añadimos como axioma ¬AI a NFA, estamos postulando la existencia de un número natural $N = |V| = \{V\}$ que no es 0, ni 1, ni 2, etc.

Naturalmente, no es esto lo que vamos a hacer, sino todo lo contrario. A partir de este momento trabajamos en NFA+AI.

El primer uso que vamos a hacer de AI será demostrar un resultado técnico fundamental para continuar el estudio de los conjuntos finitos. Imaginemos, por ejemplo, que queremos probar algo tan simple como que $|A \times \{u\}| = |A|$. La forma obvia de probarlo sería considerar la biyección $f : A \longrightarrow A \times \{u\}$ dada por $f(a) = (a, u)$, pero dicha biyección "no existe" (o, al menos, no sabemos justificar que exista), ya que la fórmula $y = (a, u)$ no se puede estratificar asignando el mismo tipo a las variables a e y, pues los pares ordenados elevan el rango dos unidades.

Vamos a probar que, con la ayuda del axioma de infinitud, podemos definir pares ordenados entre familias de conjuntos que no suban el tipo.

Definición 6.19 Definimos la aplicación $s_1 : [\mathrm{cto}] \longrightarrow [\mathrm{cto}]$ dada por

$$s_1(A) = (A \setminus \mathbb{N}) \cup S[A \cap \mathbb{N}]$$

La definición es correcta porque la fórmula $y =$ "miembro derecho" está estratificada y la variable y tiene el mismo tipo que A. El axioma de infinitud equivale a que S sea inyectiva y esto implica a su vez que s_1 también lo es, y a su vez esto implica la inyectividad de la aplicación $s_2 : [\mathrm{cto}] \longrightarrow [\mathrm{cto}]$ dada por

$$s_2(A) = s_1(A) \cup \{0\}.$$

Finalmente, si $X, Y \in \mathcal{F}$ son dos familias de conjuntos, podemos definir su *par ordenado nivelado* como

$$(X, Y)^* \equiv s_1[X] \cup s_2[Y] \in \mathcal{F},$$

de modo que la fórmula $Z = (X, Y)^*$ admite una estratificación en la que las tres variables tienen el mismo tipo. Además, es fácil comprobar lo siguiente:

Teorema 6.20 *Si X, Y, Z, $W \in \mathcal{F}$ son familias de conjuntos, entonces*

$$(X, Y)^* = (Z, W)^* \leftrightarrow X = Z \land Y = W.$$

La clave está en que ningún elemento de $s_1[X]$ contiene al cero, mientras que todos los elementos de $s_2[Y]$ lo contienen, luego a partir de $(X, Y)^*$ se pueden recuperar $s_1[X]$ y $s_2[Y]$ y a partir de estos se recuperan X e Y.

De este modo tenemos una definición alternativa de par ordenado (válida para familias de conjuntos[5]) que no aumenta el tipo de las variables. Esto nos permite definir a su vez un *producto cartesiano nivelado:*

Definición 6.21 Para A, $B \subset \mathcal{F}$, definimos

$$A \times^* B \equiv \{x \mid \bigvee XY(X \in A \land Y \in B \land x = (X,Y)^*)\} \subset \mathcal{F}.$$

Así la fórmula $Z = A \times^* B$ admite una estratificación en la que las tres variables tienen el mismo tipo. Esto nos permite definir proyecciones

$$p_1 : A \times^* B \longrightarrow A, \qquad p_2 : A \times^* B \longrightarrow B,$$

pero en realidad podemos ir más lejos y considerar *relaciones binarias niveladas,* es decir, subconjuntos $R \subset A \times^* B$ y definir los conceptos de dominio, codominio, aplicación, etc. usando pares nivelados en lugar de los usuales. El resultado es que, con estas definiciones (que sólo son válidas para subconjuntos de $\mathcal{F}$), las diferencias de tipo pasan a ser las siguientes:

Expresión	**Condición**	**Efecto**
(x, y)	$t(x) = t(y)$	0
$A \times B$	$t(A) = t(B)$	0
$\mathcal{D}R$		0
$\mathcal{R}R$		0
R^{-1}		0
$R \circ S$	$t(R) = t(S)$	0
$f : A \longrightarrow B$	$t(f) = t(A) = t(B)$	
$f(x)$	$t(f) = t(x) + 1$	$-1/0$
$f[X]$	$t(f) = t(X)$	0
$f^{-1}[X]$	$t(f) = t(X)$	0
$f\vert_X$	$t(f) = t(X)$	0
B^A	$t(A) = t(B)$	1

Observemos que, si $A, B \subset \mathcal{F}$, para cada relación binaria usual $R \subset A \times B$ podemos definir

$$R^* \equiv \{x \mid \bigvee aby(y = (a,b) \land y \in R \land x = (a,b)^*)\}$$

y así R^* es una relación binaria equilibrada entre A y B (es decir, $R^* \subset A \times^* B$) tal que

$$(a,b) \in R \leftrightarrow (a,b)^* \in R^*.$$

Recíprocamente, dada $R \subset A \times^* B$, podemos definir

$$R_* \equiv \{x \mid \bigvee aby(y = (a,b)^* \land y \in R \land x = (a,b))\},$$

de modo que $R_* \subset A \times B$ y $(a,b) \in R_* \leftrightarrow (a,b)^* \in R$.

[5]Observemos que en NF se cumple que $\mathcal{P}V = V$, luego $V = [\text{cto}] = \mathcal{F}$ y tenemos definidos pares nivelados para conjuntos arbitrarios.

Notemos que R^* disminuye el tipo en dos unidades, mientras que R_* lo sube dos unidades. En inmediato que

$$f : A \longrightarrow B \leftrightarrow f^* : A \longrightarrow B, \qquad f : A \longrightarrow B \leftrightarrow f_* : A \longrightarrow B,$$

y lo mismo sucede con los conceptos de aplicación inyectiva, suprayectiva, biyectiva, relación de orden, relación de equivalencia, etc. En particular, si $A, B \subset \mathcal{F}$, se cumple que A y B son equipotentes si y sólo si existe una biyección nivelada entre ambos conjuntos.

El teorema siguiente nos asegura que podemos usar aplicaciones niveladas para estudiar los cardinales finitos:

Teorema 6.22 *Todo cardinal finito contiene un subconjunto de $\mathcal{F}$.*

DEMOSTRACIÓN: Como $\mathbb{N} \subset \mathcal{F}$, tenemos que $\mathcal{F}$ es infinito, luego 6.12 nos da que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe una aplicación $f : A \longrightarrow \mathcal{F}$ inyectiva con $|A| = n$. Entonces $f[A] \subset \mathcal{F}$ cumple $f[A] \in n$. ■

Como primera aplicación demostramos lo siguiente:

Teorema 6.23 *Si m y n son números naturales, existen conjuntos disjuntos A y B (contenidos en $\mathcal{F}$) tales que $|A| = m$ y $|B| = n$.*

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema anterior existen $A_0, B_0 \subset \mathcal{F}$ tales que $|A_0| = m$, $|B_0| = n$. Basta tomar $A = A_0 \times^* \{\varnothing\}$, $B = B_0 \times^* \{\{\varnothing\}\}$. Ciertamente son conjuntos disjuntos y existen aplicaciones biyectivas

$$f : A_0 \longrightarrow A, \qquad g : B_0 \longrightarrow B,$$

dadas por $f(a) = (a, \varnothing)^*$, $g(b) = (b, \{\varnothing\})^*$. Notemos que para justificar la existencia de f y g es esencial que los pares ordenados sean nivelados. ■

Definición 6.24 Se demuestra sin dificultad que si A, B, C, D son conjuntos finitos (no necesariamente contenidos en $\mathcal{F}$) tales que

$$|A| = |C|, \qquad |B| = |D|, \qquad A \cap B = C \cap D = \varnothing,$$

entonces $|A \cup B| = |C \cup D|$. Esto nos permite definir como sigue la *suma* de números naturales $+ : \mathbb{N} \times^* \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ mediante

$$+ \equiv \{x \mid \bigvee mnr \in \mathbb{N} \bigvee ABC(x = ((m, n)^*, r)^* \wedge A \in m \wedge B \in n \wedge C \in r \wedge$$
$$A \cap B = \varnothing \wedge C = A \cup B)\}.$$

Observemos que el uso de los pares nivelados (que es correcto, pues $\mathbb{N} \subset \mathcal{F}$) es necesario para que el par $(m, n)^*$ tenga el mismo tipo que su imagen r. Así, si A y B son conjuntos finitos disjuntos, entonces

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Ahora es claro que $S(n) = n + 1$, y las propiedades usuales de la suma se demuestran sin dificultad:

La propiedad asociativa y la conmutativa son consecuencia de las propiedades análogas de la unión de conjuntos.[6] De aquí se deduce la propiedad de simplificación:

$$m + n = m + r \rightarrow n = r.$$

En efecto, basta razonar por inducción sobre m, pues la propiedad se cumple para $m = 0$ y, si vale para m, entonces

$$m + 1 + n = m + 1 + r \rightarrow S(m + n) = S(m + r) \rightarrow m + n = m + r \rightarrow n = r.$$

Otro hecho obvio es que $m \leq n$ si y sólo si existe un r tal que $m+r = n$, pues si $|A| = m$ y $|B| = n$, existe $f : A \longrightarrow B$ inyectiva y basta tomar $r = |B \setminus f[A]|$.

La propiedad de simplificación implica que en tal caso r es único, por lo que podemos llamarlo $n - m$, con lo que tenemos definida la *resta* de números naturales.

Ahora es fácil ver que si A y B son conjuntos finitos cualesquiera, entonces

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Para definir el producto de números naturales necesitamos el teorema siguiente:

Teorema 6.25 *Si A, B son subconjuntos finitos de $\mathcal{F}$, entonces $A \times^* B$ también es finito.*

Demostración: Por inducción sobre el cardinal de B, es decir, aplicando el principio de inducción al conjunto

$$X = \{n \in \mathbb{N} \mid \bigvee B(B \in n \land B \subset \mathcal{F} \land A \times^* B \text{ es finito})\}.$$

Obviamente $0 \in X$ y si, $n \in X$, tomamos $B \subset \mathcal{F}$ tal que $|B| = n + 1$, de modo que $B = C \cup \{u\}$, donde $|C| = n$ y $u \notin C$. Entonces

$$A \times^* B = |(A \times^* C) \cup (A \times^* \{u\})| = |A \times^* C| + |A \times^* \{u\}| = |A \times^* C| + |A|,$$

donde hemos usado que podemos definir $f : A \longrightarrow A \times^* \{u\}$ biyectiva mediante $f(a) = (a, u)$ (y aquí es esencial que el producto sea nivelado). Por lo tanto, $A \times^* B$ también es finito. ■

Definición 6.26 Se demuestra fácilmente que si A, B, C, D son conjuntos finitos contenidos en $\mathcal{F}$ tales que $|A| = |C|$ y $|B| = |D|$, entonces también $|A \times^* B| = |C \times^* D|$. Esto nos permite definir el *producto* de números naturales $\cdot : \mathbb{N} \times^* \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ mediante

$$\cdot \equiv \{x \mid \bigvee mnr \in \mathbb{N}(x = ((m, n)^*, r)^* \land \bigvee ABC(A \in m \land B \in n \land C \in r$$
$$\land\, A, B, C \subset \mathcal{F} \land C = A \times^* B)\}.$$

[6]Para la asociatividad hay que generalizar trivialmente el teorema 6.23 al caso de tres números.

Ahora tenemos que si A, B son subconjuntos finitos de $\mathcal{F}$, se cumple que

$$|A \times^* B| = |A| \cdot |B|.$$

Las propiedades del producto de números naturales se deducen inmediatamente de las propiedades del producto cartesiano (nivelado). Por ejemplo, en la prueba del teorema anterior hemos visto que $\bigwedge n \in \mathbb{N}\ n \cdot 1 = n$.

Con esto termina la prueba de que NFA+AI es un sistema aritmético, es decir, que permite demostrar las propiedades básicas de los números naturales, la suma y el producto.

6.4 El axioma de elección

En NFA conviene considerar funciones de elección estratificadas como las que ya consideramos al estudiar la teoría de Kaye-Forster, si bien la existencia de un conjunto universal hace que baste con postular la existencia de una de ellas.

Axioma de elección estratificado (AE*)

$\bigvee F(F : \mathcal{P}V \setminus \{\varnothing\} \longrightarrow V \land \forall A \in \mathcal{P}V \setminus \{\varnothing\}\ F(A) \in \mathcal{P}_1 A)$

Omitimos la prueba del lema de Zorn a partir de AE, pues resulta de simplificar la dada en 2.13 para KFA eliminando la comprobación de que las fórmulas implicadas son Δ_0. La prueba del teorema de buena ordenación 2.14 admite una leve variante, pues se puede particularizar al caso de V:

Teorema 6.27 *V admite un buen orden.*

Demostración: Sea X el conjunto de todos los buenos órdenes, es decir, cada elemento de X es un conjunto R tal que existe un conjunto A tal que $R \subset A \times A$ es un buen orden en A. El conjunto A es necesariamente $A = \mathcal{D}R$.

Definimos en X el orden parcial dado por $R \leq S$ si $R \subset S$ y, para todo $r \in \mathcal{D}R$ y todo $s \in \mathcal{D}S \setminus \mathcal{D}R$ se cumple $r\,S\,s$. En otras palabras, todos los elementos de $\mathcal{D}S$ que no están en $\mathcal{D}R$ son posteriores a los de $\mathcal{D}R$.

Es fácil ver que $(X, \leq)$ satisface las hipótesis del lema de Zorn y un elemento maximal es necesariamente un buen orden sobre todo V. ■

A su vez de aquí se sigue trivialmente:

Teorema 6.28 (Teorema de buena ordenación) *Todo conjunto puede ser bien ordenado.*

Y a su vez es claro que esto implica el axioma de elección, por lo que el principio de buena ordenación es también equivalente a AE.

De aquí deducimos que la relación de orden sobre los cardinales es total:

Teorema 6.29 *Si κ y μ son dos cardinales, o bien $\kappa \leq \mu$, o bien $\mu \leq \kappa$.*

Demostración: Sean A y B conjuntos tales que $|A| = \kappa$, $|B| = \mu$. (Podemos suponer que los cardinales son no nulos, o el resultado es trivial.) Sea

$$X = \{f \mid \bigvee PQ(P \subset A \land Q \subset B \land f : P \longrightarrow Q \text{ biyectiva})\}.$$

Claramente X no es vacío y, considerado como conjunto parcialmente ordenado por la inclusión, satisface las hipótesis del lema de Zorn, luego podemos tomar una aplicación $f : P \longrightarrow Q$ biyectiva maximal.

No puede ser que $P \subsetneq A$ y $Q \subsetneq B$ simultáneamente, pues entonces sería fácil extender f. Por lo tanto, o bien $P = A$, en cuyo caso $f : A \longrightarrow B$ inyectiva, o bien $Q = B$, en cuyo caso $g : B \longrightarrow A$ inyectiva, es decir, o bien $\kappa \leq \mu$, o bien $\mu \leq \kappa$. ■

Otra consecuencia de AE es la caracterización siguiente de los conjuntos infinitos:

Teorema 6.30 *Si A es un conjunto, las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

a) A es infinito.

b) $\mathbb{N}$ es infinito y existe una aplicación inyectiva $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$.

c) A se puede biyectar con un subconjunto propio.

Demostración: a) $\Rightarrow$ b) Si A es infinito, entonces se cumple el axioma de infinitud (no hace falta suponerlo como hipótesis del teorema), luego $\mathbb{N}$ es infinito. Si existe una biyección $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$, entonces no hay nada que probar. En caso contrario, sea X el conjunto de todas las aplicaciones inyectivas de un subconjunto de $\mathbb{N}$ en A, considerado como conjunto parcialmente ordenado por la inclusión. Es fácil ver que cumple las hipótesis del lema de Zorn, y un elemento maximal de X es necesariamente una aplicación inyectiva $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$.

b) $\Rightarrow$ c) Claramente, $f[\mathbb{N}]$ es un subconjunto de A que se puede biyectar con un subconjunto propio, y extendiendo dicha biyección con la identidad en $A \setminus f[\mathbb{N}]$ obtenemos que lo mismo le sucede a A.

c) $\Rightarrow$ a) Es el teorema 6.15 (que hemos demostrado sin AI). ■

Ejercicio: Probar que existe $f : A \longrightarrow B$ inyectiva si y sólo si existe $g : B \longrightarrow A$ suprayectiva.

6.5 Pares ordenados nivelados

Hemos visto cómo la existencia de pares ordenados nivelados para subconjuntos de $\mathcal{F}$ ha sido fundamental para desarrollar la aritmética de los conjuntos finitos. A la hora de desarrollar la aritmética cardinal en general nos encontramos con el problema de que la definición que hemos dado de par ordenado nivelado no es válida para conjuntos cualesquiera y se vuelve insuficiente. En esta sección demostraremos que en NFA+AI+AE se puede definir un par ordenado nivelado aplicable a objetos cualesquiera. Para probarlo tendremos que demostrar precariamente algunos resultados de aritmética cardinal bajo hipótesis restrictivas, que serán innecesarias en cuanto dispongamos de los nuevos pares ordenados.

Por ejemplo, el teorema siguiente afirma en esencia que si κ es un cardinal infinito entonces $\kappa + \kappa = \kappa$, pero de momento tenemos que enunciarlo así:

Teorema 6.31 *Si A y B son conjuntos infinitos disjuntos y $|A| = |B|$, entonces $|A \cup B| = |A| = |B|$.*

Demostración: Sea $f : A \longrightarrow B$ biyectiva y sea X el conjunto de las aplicaciones $f : U \cup f[U] \longrightarrow U$ biyectivas, donde $U \subset A$. Teniendo en cuenta que A contiene un subconjunto numerable, es fácil ver que $X \neq \varnothing$ y, considerándolo como conjunto parcialmente ordenado por la inclusión, es fácil ver que cumple las condiciones del lema de Zorn, luego existe una aplicación f en las condiciones indicadas que es maximal respecto de la inclusión.

Supongamos que $A \backslash U$ es infinito. Entonces contiene un subconjunto numerable $N \subset A \backslash U$. Es fácil ver entonces que existe una biyección $g : N \cup f[N] \longrightarrow N$, luego $f \cup g : (U \cup N) \cup f[U \cup N] \longrightarrow U \cup N$ biyectiva, en contradicción con la maximalidad de f.

Esto prueba que el conjunto $A \setminus U$ es finito. Ahora bien, si expresamos $U = (U \setminus N) \cup N$, para un cierto subconjunto numerable N de U, es fácil ver que existe una biyección $N \cup (A \setminus U) \longrightarrow N$, con lo que

$$|A| = |(U \setminus N) \cup N \cup (A \setminus U)| = |(U \setminus N) \cup N| = |U|.$$

Una biyección $A \longrightarrow U$ induce a su vez una biyección $B \longrightarrow f[U]$, que a su vez nos da una biyección $A \cup B \longrightarrow U \cup f[U] \longrightarrow U \longrightarrow A$. ■

Más en general:

Teorema 6.32 *Si A y B son conjuntos disjuntos y al menos uno de ellos es infinito, entonces $|A \cup B| = \max\{|A|, |B|\}$.*

Demostración: No perdemos generalidad si suponemos que $|A| \leq |B|$. Supongamos, por reducción al absurdo, que $|A \cup B| > |B|$. Consideremos los conjuntos $A' = A \cup \{0\}$ y $B' = B \times \{1\}$. Entonces $|A' \cup B'| > |B'|$, pues si existiera una biyección $f : B' \longrightarrow A' \cup B'$, podríamos definir

$$g = \{x \mid \bigvee bc(x = (b, c) \land f(b, 1) \in \{(c, 0), (c, 1)\})\},$$

y entonces $g : B \longrightarrow A \cup B$ biyectiva. Podemos tomar $A_0 \subset B$ de modo que $|A_0| = |A|$. Entonces $|A_0 \times \{0\}| = |A \times \{0\}|$, luego

$$|A' \cup B'| = |(A_0 \times \{0\}) \cup (B \times \{1\})| \leq |(B \times \{0\}) \cup (B \times \{1\})| = |B \times \{1\}| = |B'|,$$

donde hemos usado el teorema anterior. Esta contradicción prueba el teorema. ■

Similarmente, en lugar de probar que, si κ es un cardinal infinito, se cumple que $\kappa \cdot \kappa = \kappa$, no podemos probar siquiera que, dado un conjunto infinito A, existe una biyección $f : A \times A \longrightarrow A$, pues esta fórmula no está estratificada. En su lugar demostramos:

Teorema 6.33 *Si A es un conjunto infinito, existe $f : A \times A \longrightarrow \mathcal{P}_1^2 A$ biyectiva.*

DEMOSTRACIÓN: Consideramos el conjunto X formado por las aplicaciones $f : U \times U \longrightarrow \mathcal{P}_1^2 U$ biyectivas, que es no vacío porque A contiene subconjuntos numerables, para los cuales podemos construirlas explícitamente. Por el lema de Zorn existe una aplicación f maximal respecto de la inclusión.

Supongamos que $|U| < |A|$. Entonces, $|A \setminus U| = |A|$, por el teorema anterior. Por lo tanto, podemos tomar $U' \subset A \setminus U$ tal que $|U'| = |U|$. Así

$$(U \cup U') \times (U \cup U') = (U \times U) \cup (U \times U') \cup (U' \times U) \cup (U' \times U').$$

Claramente podemos formar una biyección

$$(U \times U') \longrightarrow (U \times U) \longrightarrow \mathcal{P}_1^2 U \longrightarrow \mathcal{P}_1^2 U',$$

e igualmente con $U' \times U$ y con $U' \times U'$, luego los tres conjuntos tienen el mismo cardinal (infinito) y son disjuntos dos a dos. Por el teorema anterior la unión de los tres tiene también el mismo cardinal que $\mathcal{P}_1^2 U'$, luego existe una biyección

$$g : (U \times U') \cup (U' \times U) \cup (U' \times U') \longrightarrow \mathcal{P}_1^2 U'$$

que permite extender a f hasta una biyección

$$f' : (U \cup U') \times (U \cup U') \longrightarrow \mathcal{P}_1^2 U \cup \mathcal{P}_1^2 U' = \mathcal{P}_1^2 (U \cup U'),$$

lo que contradice la maximalidad de f. Concluimos que $|U| = |A|$, y una biyección entre ambos conjuntos nos permite transformar f en una biyección en las condiciones del enunciado. ■

Definición 6.34 Sea $f : V \times V \longrightarrow \mathcal{P}_1^2 V$ biyectiva. Definimos

$$(x, y)_f^0 \equiv \bigcup\bigcup f(x, y).$$

Observemos que si asignamos tipo 0 a las variables x, y, entonces el par (x, y) tiene tipo 2, luego $f(x, y)$ tiene también tipo 2 (asignando tipo 5 a la variable f) y las dos uniones rebajan el tipo a 0 nuevamente.

En términos del par que acabamos de definir, se cumple que

$$f(x, y) = \{\{(x, y)_f^0\}\},$$

con lo que es inmediato el teorema siguiente:

Teorema 6.35 *Si $f : V \times V \longrightarrow \mathcal{P}_1^2 V$ biyectiva, entonces*

$$\bigwedge xyzw((x, y)_f^0 = (z, w)_f^0 \leftrightarrow x = z \land y = w).$$

En definitiva, tenemos definido un par ordenado nivelado aplicable a todos los objetos (sin más que prefijar una biyección f adecuada, cuya existencia hemos demostrado).

A partir de este par podemos definir un producto cartesiano nivelado

$$A \times_f^0 B = \{x \mid \bigvee ab(a \in A \land b \in B \land x = (a,b)_f^0)\},$$

del mismo tipo que A y B, y a partir de él definir relaciones y funciones niveladas entre conjuntos arbitrarios, de modo que se cumplen las condiciones de estratificación indicadas en la tabla de la página 139.

Observemos que $V \times_f^0 V = V$.

Presentamos ahora una teoría ligeramente más fuerte que NFA+AI y más débil que NFA+AI+AE (aunque equiconsistente con ambas), en la que los pares ordenados nivelados se introducen como un concepto primitivo.

Sea $\mathcal{L}_a$ es el lenguaje formal de NFA (cuyos signos no lógicos son los relatores cto y $\in$) y sea $\mathcal{L}_{ap}$ el lenguaje que resulta de añadirle un relator triádico P. Extendemos la definición de fórmula estratificada exigiendo que en las subfórmulas de tipo $Pxyz$ las tres variables tengan el mismo tipo, y llamamos NFA$_p$ a la teoría cuyos axiomas son:

Extensionalidad	$\bigwedge XY(\bigwedge u(u \in X \leftrightarrow u \in Y) \rightarrow X = Y)$
Formación de conjuntos	$\bigvee Y \bigwedge u(u \in Y \leftrightarrow \phi(u)) \quad (*)$
Pares ordenados	$\bigwedge xy \overset{1}{\bigvee} zPxyz \land$ $\bigwedge xyuvz(Pxyz \land Puvz \rightarrow x = u \land y = v)$

$(*)$ para toda fórmula estratificada ϕ (con posibles parámetros) de $\mathcal{L}_{ap}$.

Notemos que el esquema de formación de conjuntos de NFA$_p$ no es el mismo que el de NFA, pues ahora incluye muchos más casos particulares: los correspondientes a fórmulas que incluyen el relator P.

En esta teoría podemos definir

$$(x,y) \equiv z \mid Pxyz,$$

y entonces se cumple que

$$\bigwedge xyuv((x,y) = (u,v) \leftrightarrow x = u \land y = v).$$

Además, a efectos de estratificación, el término (x,y) tiene el mismo tipo que las variables x, y, es decir, se trata de un par ordenado nivelado.

A su vez, el esquema de formación de conjuntos generalizado nos permite definir el producto cartesiano nivelado

$$A \times B = \{x \mid \bigvee ab(a \in A \land b \in B \land x = (a,b))\},$$

a partir del cual se pueden definir relaciones y funciones niveladas sobre conjuntos arbitrarios.

Si T es una extensión de NFA+AI+AE (es decir, una teoría tal que los teoremas de NFA+AI+AE sean teoremas de T, normalmente porque sus axiomas incluyen a los de NFA+AI+AE), se cumple que la teoría T_p que resulta de añadir a T las nuevas instancias del esquema de formación de conjuntos más el axioma de los pares ordenados es una extensión conservativa de T, es decir, que todo modelo de T se extiende a un modelo de T_p.

En efecto, si M es un modelo de T, puesto que en la sección 6.5 hemos visto que en T puede probarse que $\bigvee f\ f : V \times V \longrightarrow \mathcal{P}_1^2 V$ biyectiva, existe un objeto f en M tal que

$$M \vDash f : V \times V \longrightarrow \mathcal{P}_1^2 V \text{biyectiva},$$

y basta interpretar el relator P mediante la relación en M dada por

$$M(P)(x, y, z) \text{ si y sólo si } M \vDash z = (x, y)_f^0.$$

Así M se convierte en un modelo del lenguaje de T_p y es fácil ver que cumple tanto el axioma de los pares ordenados como los nuevos casos del esquema de formación de conjuntos. La razón de esto último es que cada nuevo caso particular del esquema de formación de conjuntos es equivalente a un caso particular del esquema original sin más que sustituir cada subfórmula $Pxyz$ por $z = (x, y)_f^0$.

Esto implica que todo teorema de T_p expresable en el lenguaje $\mathcal{L}_a$ (sin el relator P) es demostrable también en T, puesto que es verdadero en todos los modelos de T.

Más precisamente, lo que sucede es que todo teorema de T_p puede probarse en T fijando una biyección f e interpretando cada subfórmula de tipo $Pxyz$ como $z = (x, y)_f^0$, o, equivalentemente, cada par (x, y) como $(x, y)_f^0$.

Todo esto se aplica en particular cuando T es NFA+AI+AE, de modo que NFA$_p$+AI+AE es una extensión conservativa de NFA+AI+AE.

Ahora bien, sucede que AI es un teorema de NFA$_p$.

En efecto, basta probar que todos los números naturales son no vacíos. Para ello probamos a su vez que si $n \in \mathbb{N}$ y $A \in n$, entonces $A \times \{0\} \in n$, donde el producto cartesiano es el nivelado. Esto es correcto porque podemos definir la biyección $f : A \longrightarrow A \times \{0\}$ dada por $f(a) = (a, 0)$ (cosa que no podríamos hacer con pares ordenados no nivelados). Con esto es fácil probar por inducción que $\bigwedge n \in \mathbb{N}\ n \neq \varnothing$: Es claro que se cumple para $n = 0$ y, si es cierto para $n \in \mathbb{N}$, tomamos $A \in n$, pasamos a $A \times \{0\} \in n$ y observamos que $(1, 1) \notin A \times \{0\}$, luego $(A \times \{0\}) \cup \{(1, 1)\} \in S(n)$, con lo que $S(n) \neq \varnothing$. ■

Por consiguiente, la teoría NFA$_p$+AI+AE es en realidad la misma teoría que NFA$_p$+AE. La teoría NFA$_p$ es, pues, intermedia entre NFA+AI y NFA+AI+AE, en el sentido de que en ella se puede probar todo teorema de NFA+AI y todos sus teoremas (reinterpretando los pares nivelados (x, y) como pares $(x, y)^0_f$, para cierta biyección f prefijada) son teoremas de NFA+AI+AE.

Recordemos por otra parte que, en NF, la definición de par ordenado que hemos visto 6.19 es válida para conjuntos cualesquiera, lo que implica que en NF (sin AI ni AE) se puede definir una relación P que cumpla el axioma de los pares ordenados o, equivalentemente, que la teoría NF_p que resulta de añadir a NFA_p el axioma que afirma que no existen átomos es una extensión elemental de NF. Puesto que la existencia de pares ordenados nivelados implica el axioma de infinitud, concluimos que AI es un teorema de NF.

NOTA En el resto del capítulo trabajaremos en NFA_p (aunque normalmente escribiremos NFA). Cuando necesitemos AE lo indicaremos explícitamente. Ya que NFA_p ya lleva “incorporado” el axioma de infinitud, en la sección 6.7 volveremos a construir los números naturales apoyándonos en los resultados generales sobre cardinales que hemos probado en la sección 6.3, pero no en los resultados específicos sobre números naturales o conjuntos finitos, de modo que pueda verse cuál es el tratamiento natural de esta parte de la teoría en NFA_p.

6.6 Ordinales

Definición 6.36 Recordemos que un *buen orden* en un conjunto A es un orden respecto al que todo subconjunto no vacío de A tiene un mínimo elemento. Notemos que si $X \subset A$, entonces

$$\text{mín}(X, \leq) \equiv x \mid (x \in X \land \bigwedge a(a \in X \rightarrow x \leq a)),$$

que es un término estratificado de tipo una unidad inferior al de X o $\leq$. Observemos que la existencia de mínimo (aplicada a los subconjuntos de dos elementos) implica que todo buen orden es un orden total.

Si $(A, \leq)$ es un conjunto ordenado, definimos

$$A^<_a \equiv \{x \in A \mid x < a\}, \qquad A^\leq_a \equiv \{x \in A \mid x \leq a\}.$$

Recordemos en primer lugar dos hechos básicos sobre conjuntos bien ordenados:

Teorema 6.37 (Inducción transfinita) *Si $(A, \leq)$ es un conjunto bien ordenado y $X \subset A$ cumple que $\bigwedge a \in A(A^<_a \subset X \rightarrow a \in X)$, entonces $X = A$.*

DEMOSTRACIÓN: Si $A \setminus X \neq \varnothing$, tomamos $a = \text{mín}(A \setminus X)$ y resulta que $A^<_a \subset X$, pero $a \notin X$. ■

El enunciado del teorema de recursión debe retocarse ligeramente para preservar la estratificación:

Teorema 6.38 (Recursión transfinita) *Sea $(A, \leq)$ un conjunto bien ordenado, sea $X = \{f \mid \bigvee a \in A\ f : A^<_a \longrightarrow B)\}$ y sea $G : X \longrightarrow \mathcal{P}_1 B$. Entonces existe una única función $f : A \longrightarrow B$ tal que $\bigwedge a \in A\ \{f(a)\} = G(f|_{A^<_a})$.*

Demostración: La unicidad es clara, si hubiera dos aplicaciones f y g que cumplieran el enunciado pero no fueran iguales, existiría un mínimo $a \in A$ tal que $f(a) \neq g(a)$, con lo que $f|_{A_a^<} = g|_{A_a^<}$, luego

$$\{f(a)\} = G(f|_{A_a^<}) = G(g|_{A_a^<}) = \{g(a)\},$$

luego $f(a) = g(a)$, contradicción. Definimos

$$\mathrm{Rec}(f, a) \equiv f : A_a^{\leq} \longrightarrow B \land \bigwedge x \in A_a^{\leq}\ \{f(x)\} = G(f|_{A_x^<}).$$

(Notemos que las llaves $\{\}$ están para que esta fórmula esté estratificada.) Una variante del argumento anterior prueba que

$$\bigwedge aa'fg(a \in A \land a' \in A \land a \leq a' \land \mathrm{Rec}(f, a) \land \mathrm{Rec}(g, a') \rightarrow f = g|_{A_a^{\leq}}).$$

En otras palabras, para cada $a \in A$ existe a lo sumo una función f en $A_a^{\leq}$ que cumple $\mathrm{Rec}(f, a)$ y si $a \leq a'$ y existen funciones para a y a', la segunda extiende a la primera. Sea ahora

$$X = \{a \in A \mid \bigvee f\ \mathrm{Rec}(f, a)\}$$

y veamos que $X = A$ por inducción transfinita. En efecto, si $A_a^< \subset X$ consideramos el conjunto

$$Y = \{f \mid \bigvee a' \in A_a^<\ \mathrm{Rec}(f, a')\}.$$

Hemos probado que dos elementos cualesquiera de f se extienden el uno al otro, y por hipótesis de inducción existe uno para cada $a' \in A_a^<$, luego $f' = \bigcup Y$ es una función cuyo dominio es

$$\{x \mid x \in A \land \bigvee a' \in A(x \leq a' < a)\} = A_a^<.$$

Claramente, para todo $a' < a$ se cumple que $\{f'(a')\} = G(f'|_{A_{a'}^<})$. Por último tomamos $f = f' \cup (\{a\} \times G(f'))$ y es fácil ver que $\mathrm{Rec}(f, a)$, luego $a \in X$.

Ahora consideramos el conjunto

$$Z = \{f \mid \bigvee a \in A\ \mathrm{Rec}(f, a)\}.$$

Nuevamente tenemos que existe una función en Z para cada $a \in A$ y que dos cualesquiera se extienden una a la otra, luego $\bigcup Z$ es claramente una función $f : A \longrightarrow B$ y claramente cumple el teorema. ■

Ordinales Llamaremos CBO al conjunto de todos los pares $(A, \leq)$, donde A es un conjunto y $\leq$ es un buen orden en A. Es fácil comprobar que la fórmula que expresa esta definición está estratificada.

Una *semejanza* $f : (A, \leq_A) \longrightarrow (B, \leq_B)$ entre dos conjuntos bien ordenados es una biyección que conserva el orden.

Definimos la relación en CBO dada por

$$\sim\ \equiv \{x \mid \bigvee AB \leq_A \leq_B f(x = ((A, \leq_A), (B, \leq_B)) \land (A, \leq_A), (B, \leq_B) \in \mathrm{CBO}$$

$$\land\, f : (A, \leq_A) \longrightarrow (B, \leq_B) \text{ semejanza})\}.$$

De este modo, se cumple que $(A, \leq_A) \sim (B, \leq_B)$ si y sólo si existe una semejanza $f : (A, \leq_A) \longrightarrow (B, \leq_B)$. Es inmediato comprobar que se trata de una relación de equivalencia. Llamaremos *ordinales* a los elementos del conjunto cociente $\mathrm{Ord} = \mathrm{CBO}/\sim$.

Si $(A, \leq) \in \mathrm{CBO}$, llamaremos *ordinal* de $(A, \leq)$ a su clase de equivalencia:

$$\mathrm{ord}(A, \leq) \equiv \{x \mid \bigvee B \leq_B (x = (B, \leq_B) \land (A, \leq) \sim (B, \leq_B))\}.$$

De este modo, si $(A, \leq_A), (B, \leq_B) \in \mathrm{CBO}$, tenemos que

$$(A, \leq_A) \sim (B, \leq_B) \leftrightarrow \mathrm{ord}(A, \leq_A) = \mathrm{ord}(B, \leq_B).$$

La relación de orden Es fácil ver que si dos pares de conjuntos bien ordenados cumplen $(A, \leq_A) \sim (A' \leq_{A'})$ y $(B, \leq_B) \sim (B', \leq_{B'})$, entonces

$$\bigvee b \in B\ (A, \leq_A) \sim (B_b^<, \leq_B) \leftrightarrow \bigvee b' \in B'\ (A', \leq_{A'}) \sim (B'^{<}_{b'}, \leq_{B'}).$$

Por lo tanto, podemos definir una relación en Ord mediante

$$\leq\ \equiv \{x \mid \bigvee AB \leq_A \leq_B ((A, \leq_A), (B, \leq_B) \in \mathrm{CBO}) \land$$

$$x = (\mathrm{ord}(A, \leq_A), \mathrm{ord}(B, \leq_B)) \land ((A, \leq_A) \sim (B, \leq_B) \lor$$

$$\bigvee b \in B\ (A, \leq_A) \sim (B_b^<, \leq_B)))\}.$$

De este modo, para cualquier par de conjuntos bien ordenados $(A, \leq_A)$ y $(B, \leq_B)$, se cumple que

$$\mathrm{ord}(A, \leq_A) \leq \mathrm{ord}(B, \leq_B) \leftrightarrow (A, \leq_A) \sim (B, \leq_B)$$

$$\lor \bigvee b \in B\ (A, \leq_A) \sim (B_b^<, \leq_B).$$

Equivalentemente, $\mathrm{ord}(A, \leq_A) \leq \mathrm{ord}(B, \leq_B)$ si y sólo si los dos órdenes son semejantes o bien el primero es semejante a un segmento inicial del segundo.

Vamos a probar que esta relación es una relación de orden, pero conviene enunciar aparte el resultado elemental en que se basa la prueba:

Teorema 6.39 *Un conjunto bien ordenado $(A, \leq)$ no puede ser semejante a una sección inicial $(A_a^<, \leq)$.*

DEMOSTRACIÓN: Si existiera una semejanza $f : (A, \leq) \longrightarrow (A_a^<, \leq)$, se cumpliría que $f(a) < a$, pero entonces el conjunto

$$X = \{x \in A \mid f(x) < x\}$$

es no vacío, luego tiene un mínimo elemento $m \in X$, que cumple $f(m) < m$, luego $f(f(m)) < f(m)$, luego $f(m) \in X$ a pesar de que $f(m) < m$, contradicción. ■

Esto implica que las dos alternativas que permite la definición de la relación $\leq$ en Ord, a saber,

$$(A, \leq_A) \sim (B, \leq_B) \vee \bigvee b \in B\ (A, \leq_A) \sim (B_b^<, \leq_B),$$

no pueden darse simultáneamente. Puesto que la primera equivale a la igualdad de los ordinales correspondientes, vemos que la segunda corresponde a la desigualdad estricta $\alpha < \beta$, entendida como $\alpha \leq \beta \wedge \alpha \neq \beta$. Recogemos este hecho como parte del teorema siguiente:

Teorema 6.40 *La relación $\leq$ es una relación de orden en* Ord. *Además, para todo par de conjuntos bien ordenados $(A, \leq_A)$ y $(B, \leq_B)$, se cumple que*

$$\operatorname{ord}(A, \leq_A) < \operatorname{ord}(B, \leq_B) \leftrightarrow \bigvee b \in B\ (A, \leq_A) \sim (B_b^<, \leq_B).$$

DEMOSTRACIÓN: La relación $\leq$ es trivialmente reflexiva y transitiva. Si dos ordinales cumplen que $\alpha \leq \beta$ y $\beta \leq \alpha$, pero $\alpha \neq \beta$, entonces podemos tomar un conjunto bien ordenado $(B, \leq)$ tal que $\beta = \operatorname{ord}(B, \leq)$, y los elementos de α han de ser buenos órdenes semejantes a segmentos iniciales de B, luego podemos tomar $\alpha = \operatorname{ord}(B_b^<, \leq)$, para cierto $b \in B$. Pero entonces la condición $\beta \leq \alpha$ significa que, o bien $(B, \leq)$ es semejante a $(B_b^<, \leq)$, o bien es semejante a un segmento inicial de $(B_b^<, \leq)$, que será también un segmento inicial de $(B, \leq)$, y eso es imposible por el teorema anterior. Concluimos que $\alpha = \beta$. ■

Teorema 6.41 *La relación de orden en* Ord *es una relación de orden total.*

DEMOSTRACIÓN: Si α y β son dos ordinales, entonces existen conjuntos bien ordenados tales que $\alpha = \operatorname{ord}(A, \leq_A)$ y $\beta = \operatorname{ord}(B, \leq_B)$.

Para cada $a \in A$, si existe un $b \in B$ tal que $(A_a^{\leq}, \leq_A) \sim (B_b^{\leq}, \leq_B)$, entonces b es único, pues si hubiera dos, digamos $b < b'$, y $b < c \leq b'$ es el mínimo elemento de B mayor que b, entonces $B_b^{\leq} = (B_{b'}^{\leq})_c^<$, con lo que tendríamos un conjunto bien ordenado semejante a un segmento inicial, y eso es imposible. Similarmente, para cada $b \in B$ hay a lo sumo un $a \in A$ tal que $(A_a^{\leq}, \leq_A) \sim (B_b^{\leq}, \leq_B)$. Esto se traduce en que el conjunto

$$f = \{x \mid \bigvee ab(a \in A \wedge b \in B \wedge x = (a, b) \wedge (A_a^{\leq}, \leq_A) \sim (B_b^{\leq}, \leq_B))\}$$

es una biyección de un subconjunto de A en un subconjunto de B.

Si $a \leq a'$ están en $\mathcal{D}f$ y $g : (A^{\leq}_{a'}, \leq_A) \longrightarrow (B^{\leq}_{f(a')}, \leq_B)$ es una semejanza, entonces $g|_{A^{\leq}_a} : (A^{\leq}_a, \leq_A) \longrightarrow (B^{\leq}_{g(a)}, \leq_B)$ es una semejanza, luego resulta que $f(a) = g(a) \leq f(a')$ y, por consiguiente, $f : (\mathcal{D}f, \leq_A) \longrightarrow (\mathcal{R}f, \leq_B)$ es una semejanza.

Es fácil ver que si $a \in \mathcal{D}f$ y $x \in A$ cumple $x \leq a$, entonces $x \in \mathcal{D}f$. A su vez esto implica que si $\mathcal{D}f \neq A$, entonces $\mathcal{D}f = A^{<}_a$, donde $a = \min(A \setminus \mathcal{D}f)$. Igualmente, $\mathcal{R}f = B$ o bien $\mathcal{R}f = B^{<}_b$ para cierto $b \in B$. Así pues, tenemos cuatro casos:

O bien $\mathcal{D}f = A \wedge \mathcal{R}f = B$, en cuyo caso $\alpha = \beta$, o bien $\mathcal{D}f = A \wedge \mathcal{R}f = B^{<}_a$, en cuyo caso $\alpha < \beta$, o bien $\mathcal{D}f = A^{<}_A \wedge \mathcal{R}f = B$, en cuyo caso $\beta < \alpha$ y, finalmente, vamos a ver que no puede suceder que $\mathcal{D}f = A^{<}_a$ y $\mathcal{R}f = B^{<}_b$.

Si de diera este cuarto caso, es claro que $f' = f \cup \{(a, b)\}$ es una semejanza $f' : (A^{\leq}_a, \leq_A) \longrightarrow (B^{\leq}_b, \leq_B)$, luego $(a, b) \in f$, luego $a \in \mathcal{D}f$, contradicción. ■

Teorema 6.42 *La relación de orden en* Ord *es un buen orden.*

Demostración: Sea $X \subset \mathrm{Ord}$ un conjunto no vacío, sea $\alpha \in X$ y sea $(A, \leq)$ un conjunto bien ordenado tal que $\alpha = \mathrm{ord}(A, \leq)$. Consideramos el conjunto

$$Y = \{a \mid a \in A \wedge \mathrm{ord}(A^{<}_a, \leq) \in X\}.$$

Si $Y = \varnothing$, entonces, para cada $\beta \in X$, tenemos que $\beta = \mathrm{ord}(B, \leq_B)$, pero $(B, \leq_B)$ no es semejante a ninguna sección inicial de A de la forma $(A^{<}_a, \leq)$, luego $\alpha \leq \beta$ y α es, por lo tanto, el mínimo de X.

Si, por el contrario, $Y \neq \varnothing$, podemos tomar $a = \min Y$, así como el ordinal $\alpha_0 = \mathrm{ord}(A^{<}_a, \leq) \in X$. Se cumple que α_0 es el mínimo de X, pues para todo $\beta = \mathrm{ord}(B, \leq_B) \in X$ se cumple que $(B, \leq_B)$ no es semejante a ninguna sección inicial de $(A^{<}_a, \leq)$, es decir, a un conjunto de la forma $(A^{<}_a)^{<}_x = A^{<}_x$, para un cierto $x \in A$, $x < a$, pues en tal caso $x \in Y$ y sería un elemento menor que el mínimo. Por consiguiente, $\alpha_0 \leq \beta$. ■

Definición 6.43 Es fácil ver que el mínimo elemento de Ord es el ordinal *cero,* definido como

$$0 = \mathrm{ord}(\varnothing, \varnothing).$$

Definimos

$$1 = \mathrm{ord}(\{\varnothing\}, \{(\varnothing, \varnothing)\}),$$

de modo que 1 es el ordinal del conjunto $\{\varnothing\}$ con el único (buen) orden que puede definirse sobre él, a saber, el dado por $\varnothing \leq \varnothing$.

Como el único segmento inicial de $\{\varnothing\}$ es $\varnothing$, resulta que 0 es el único ordinal menor que 1 o, equivalentemente, 1 es el menor ordinal mayor que 0.

Suma de ordinales Sean $(A, \leq_A)$ y $(B, \leq_B)$ dos conjuntos ordenados. Definimos su *suma* como el conjunto ordenado $(A \oplus B, \leq_{AB})$, donde[7]

$$A \oplus B \equiv (A \times \{\varnothing\}) \cup (B \times \{\{\varnothing\}\})$$

y

$$\leq_{AB} \equiv \{x \mid \bigvee uvpq(x = ((u,p),(v,q)) \land (u,p) \in A \oplus B \land (v,q) \in A \oplus B$$
$$\land ((p = \varnothing \land q = \varnothing \land u \leq_A v) \lor (p = \{\varnothing\} \land q = \{\varnothing\} \land u \leq_B v)$$
$$\lor\, p = \varnothing \land q = \{\varnothing\}))\}.$$

Se comprueba sin dificultad que

$$(A, \leq_A) \sim (A \times \{\varnothing\}, \leq_{AB}) \land (B, \leq_B) \sim (B \times \{\{\varnothing\}\}), \leq_{AB}),$$

así como que todo elemento de $A \times \{\varnothing\}$ es anterior respecto de $\leq_{AB}$ a todo elemento de $B \times \{\{\varnothing\}\}$, de modo que $(A \oplus B, \leq_{AB})$ consta de "una copia de $(A, \leq_A)$ seguida de una copia de $(B, \leq_B)$". Es fácil ver que si ambos sumandos están bien ordenados, la suma también lo está.

Otra comprobación elemental muestra que si dos pares de conjuntos ordenados cumplen $(A, \leq_A) \sim (A', \leq_{A'})$ y $(B, \leq_B) \sim (B', \leq_{B'})$, entonces

$$(A \oplus B, \leq_{AB}) \sim (A' \oplus B', \leq_{A'B'}),$$

lo que justifica la definición siguiente de *suma de ordinales:*

$$+ \equiv \{x \mid \bigvee AB \leq_A \leq_B ((A, \leq_A) \in \mathrm{CBO} \land (B, \leq_B) \in \mathrm{CBO} \land$$
$$x = (((\mathrm{ord}(A, \leq), \mathrm{ord}(B, \leq_B)), \mathrm{ord}(A \oplus B, \leq_{AB})))\}.$$

De este modo, $+ : \mathrm{Ord} \times \mathrm{Ord} \longrightarrow \mathrm{Ord}$ cumple que

$$\mathrm{ord}(A \oplus B, \leq_{AB}) = \mathrm{ord}(A, \leq_A) + \mathrm{ord}(B, \leq_B).$$

Si consideramos un tercer conjunto bien ordenado $(C, \leq_C)$ de manera que $\mathrm{ord}(B, \leq_B) < \mathrm{ord}(C, \leq_C)$, entonces existe un elemento $c \in C$ y una semejanza $f : (B, \leq_B) \longrightarrow (C_c^<, \leq_C)$, la cual induce fácilmente una semejanza

$$f' : (A \oplus B, \leq_{AB}) \longrightarrow ((A \oplus C)^<_{(c,\{\varnothing\})}, \leq_{AC}).$$

Esto prueba la propiedad siguiente de la suma de ordinales:

$$\bigwedge \alpha\beta\gamma \in \mathrm{Ord}\ (\beta < \gamma \rightarrow \alpha + \beta < \alpha + \gamma),$$

de la que se siguen inmediatamente las variantes:

$$\bigwedge \alpha\beta\gamma \in \mathrm{Ord}\ (\beta \leq \gamma \rightarrow \alpha + \beta \leq \alpha + \gamma),$$

$$\bigwedge \alpha\beta\gamma \in \mathrm{Ord}\ (\alpha + \beta = \alpha + \gamma \rightarrow \beta = \gamma).$$

[7]Notemos que el término está estratificado porque no necesitamos asignar un tipo al designador $\varnothing$. Podemos reemplazarlo en primer lugar por $x \mid \mathrm{cto}\, x \land \bigwedge u\ u \notin x$ y luego por $y \mid \mathrm{cto}\, y \land \bigwedge v\ v \notin y$, y asignar tipos distintos a las variables.

Otro hecho obvio es que $\bigwedge\alpha \in \mathrm{Ord}(\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha)$.

Veamos ahora que $\bigwedge\alpha\beta(\alpha \leq \beta \to \overset{1}{\bigvee}\delta\ \alpha + \delta = \beta)$.

En efecto, la unicidad se sigue inmediatamente de la propiedad de simplificación que hemos probado. Si $\alpha = \beta$ basta tomar $\delta = 0$, luego podemos suponer que $\alpha < \beta$. Entonces podemos tomar $\beta = \mathrm{ord}(B, \leq)$ y $\alpha = (B_b^<, \leq)$ para cierto $b \in B$. Sea $B_b^\geq = \{x \mid x \in B \land b \leq x\}$, de modo que $(B_b^\geq, \leq)$ es un conjunto bien ordenado y, tomando $\delta = \mathrm{ord}(B_b^\geq, \leq)$, se comprueba fácilmente que

$$\alpha + \delta = \mathrm{ord}(B_b^< \oplus B_b^\geq, \leq) = \mathrm{ord}(B, \leq) = \beta.$$

■

Como consecuencia:

Teorema 6.44 *Para todo ordinal α existe un ordinal mayor que α y, concretamente, $\alpha + 1$ es el menor ordinal mayor*[8] *que α.*

Demostración: Como $0 < 1$ hemos probado que $\alpha = \alpha + 0 < \alpha + 1$ y, si $\alpha \leq \beta < \alpha + 1$, entonces $\beta = \alpha + \delta$, de modo que $\alpha + \delta < \alpha + 1$, luego $\delta < 1$, luego $\delta = 0$, luego $\alpha = \beta$. ■

Ejercicio: Probar que la suma de ordinales es asociativa.

Producto de ordinales Si $(A, \leq_A)$ y $(B, \leq_B)$ son dos conjuntos ordenados, definimos su *producto lexicográfico* como el conjunto ordenado $(A \times B, \leq_{AB})$ dado por

$$\leq_{AB} \equiv \{x \mid \bigvee aba'b'(x = ((a, b), (a', b')) \land (a, b) \in A \times B \land (a', b') \in A \times B$$

$$\land\ (b <_B b' \lor (b = b' \land a \leq_A a')))\}$$

Es fácil ver que si los dos órdenes dados son buenos órdenes, entonces su producto lexicográfico también lo es, así como que si dos pares de conjuntos ordenados cumplen $(A, \leq_A) \sim (A', \leq_{A'})$ y $(B, \leq_B) \sim (B', \leq_{B'})$, entonces

$$(A \times B, \leq_{AB}) \sim (A' \times B', \leq_{A'B'}),$$

lo que justifica la definición siguiente de *producto de ordinales:*

$$\cdot \equiv \{x \mid \bigvee AB \leq_A \leq_B ((A, \leq_A) \in \mathrm{CBO} \land (B, \leq_B) \in \mathrm{CBO}\ \land$$

$$x = (((\mathrm{ord}(A, \leq), \mathrm{ord}(B, \leq_B)), \mathrm{ord}(A \times B, \leq_{AB})))\}.$$

[8]Podríamos definir los números naturales a partir del ordinal 0 y la función $S(\alpha) = \alpha + 1$ de forma similar a como hemos hecho en la sección 6.3, con lo que $\mathbb{N}$ sería un conjunto de ordinales. Sin embargo, resulta más práctico construir $\mathbb{N}$ a partir de los cardinales en lugar de los ordinales, y así lo haremos en la sección siguiente.

Así $\cdot : \mathrm{Ord} \times \mathrm{Ord} \longrightarrow \mathrm{Ord}$ cumple que

$$\mathrm{ord}(A, \leq_A) \cdot \mathrm{ord}(B, \leq_B) = \mathrm{ord}(A \times B, \leq_{AB}).$$

Si $(C, \leq_C)$ es un tercer conjunto bien ordenado, es fácil construir una semejanza de

$$C \times (A \oplus B) = (C \times (A \times \{\varnothing\})) \cup (C \times (B \times \{\{\varnothing\}\})$$

en

$$(C \times A) \oplus (C \times B) = ((C \times A) \times \{\varnothing\}) \cup ((C \times B) \times \{\{\varnothing\}\}),$$

de donde se sigue que

$$\bigwedge \alpha\beta\gamma \in \mathrm{Ord}\ \alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma.$$

También es fácil ver que

$$\bigwedge \alpha \in \mathrm{Ord}\ \alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0, \qquad \bigwedge \alpha \in \mathrm{Ord}\ \alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha.$$

Ejercicio: Probar que el producto de ordinales es asociativo.

La antinomia de Burali-Forti Ya hemos visto cómo NFA no se ve afectada por la paradoja de Russell, y la razón es esencialmente que la fórmula $x \notin x$ no está estratificada y no define un conjunto. Ahora podemos ver qué sucede con otra de las paradojas clásicas de la teoría de conjuntos: la antinomia de Burali-Forti, asociada al conjunto de todos los ordinales.

En la teoría de conjuntos Cantoriana podía probarse que el conjunto de los ordinales menores que un ordinal dado α era un conjunto bien ordenado de ordinal α. La antinomia de Burali-Forti surgía al aplicar este hecho al ordinal Ω del conjunto Ord de todos los ordinales. La sección $\mathrm{Ord}^<_\Omega$ debía entonces tener ordinal Ω, pero, por ser una sección inicial de Ord, su ordinal debía a la vez ser menor que Ω, con lo que se llegaba a que $\Omega < \Omega$.

Este razonamiento falla en NFA en el punto en que afirma que $\mathrm{Ord}^<_\Omega$ debe tener ordinal Ω. Más en general, el argumento según el cual, para todo ordinal α, tiene que ser $\mathrm{ord}(\mathrm{Ord}^<_\alpha, \leq) = \alpha$ consiste en tomar un conjunto bien ordenado tal que $\mathrm{ord}(A, \leq) = \alpha$ y construir la semejanza $f : (A, \leq) \longrightarrow (\mathrm{Ord}^<_\alpha, \leq)$ dada por $f(a) = \mathrm{ord}(A^<_a, \leq)$, pero esta semejanza no puede construirse en NFA, porque el término $\mathrm{ord}(A^<_a, \leq)$ tiene tipo dos unidades superior al de a.

Así pues, el propio argumento de Burali-Forti lleva a la conclusión de que $\mathrm{ord}(\mathrm{Ord}^<_\Omega, \leq) < \Omega$, lo cual puede resultar extraño, pero no es paradójico.

La definición siguiente nos permitirá precisar la situación:

Definición 6.45 Si $(A, \leq)$ es un conjunto ordenado, definimos

$$\leq_1 \equiv \{x \mid \bigvee uv(x = (\{u\}, \{v\}) \wedge u \leq v))\},$$

y llamamos $(A, \leq)_1 = (\mathcal{P}_1 A, \leq_1)$.

Es claro entonces que $(A, \leq)_1$ es un conjunto ordenado, de modo que, si $a, b \in A$, tenemos que

$$\{a\} \leq_1 \{b\} \leftrightarrow a \leq b.$$

Es fácil ver que $(A, \leq)_1$ está bien ordenado si y sólo si $(A, \leq)$ lo está. Además, si $(A, \leq_A)$, $(B, \leq_B)$ son dos conjuntos bien ordenados,

$$(A, \leq_A) \sim (B, \leq_B) \rightarrow (A, \leq_A)_1 \sim (B, \leq_B)_1,$$

por lo que podemos definir, para cada ordinal α,

$$T(\alpha) \equiv \beta \mid \bigvee A \leq (\alpha = \operatorname{ord}(A, \leq) \wedge \beta = \operatorname{ord}((A, \leq)_1)).$$

Notemos que el término $T(\alpha)$ está estratificado y su tipo es una unidad mayor que el de α.

De este modo, si $\alpha = \operatorname{ord}(A, \leq)$, entonces $T(\alpha) = \operatorname{ord}((A, \leq)_1)$. Por consiguiente, $T(T(\alpha)) = \operatorname{ord}((A, \leq)_2)$, donde $(A, \leq)_2 = (\mathcal{P}_1^2 A, \leq_2)$, donde a su vez $\leq_2$ es el buen orden dado por

$$\{\{a\}\} \leq_2 \{\{b\}\} \leftrightarrow a \leq b.$$

El interés de este concepto radica en que, para cada ordinal $\alpha = \operatorname{ord}(A, \leq)$, podemos definir una biyección $f : \mathcal{P}_1^2 A \longrightarrow \operatorname{Ord}_\alpha^<$ mediante

$$f(\{\{a\}\}) = \operatorname{ord}(A_a^<, \leq).$$

La definición es correcta porque $\{\{a\}\}$ y $\operatorname{ord}(A_a^<, \leq)$ tienen el mismo tipo. Además, es claro que

$$f : (A, \leq)_2 \longrightarrow (\operatorname{Ord}_\alpha^<, \leq) \text{ semejanza},$$

luego tomando ordinales concluimos que $\operatorname{ord}(\operatorname{Ord}_\alpha^<, \leq) = T^2(\alpha)$.

El teorema siguiente se prueba sin dificultad:

Teorema 6.46 *Para todo par de ordinales α y β se cumple:*

a) $\alpha \leq \beta \leftrightarrow T(\alpha) \leq T(\beta)$.

b) $\alpha = \beta \leftrightarrow T(\alpha) = T(\beta)$.

c) $T(\alpha + \beta) = T(\alpha) + T(\beta)$.

d) $T(\alpha\beta) = T(\alpha)T(\beta)$.

Así pues, la "paradoja" de Burali-Forti se reduce en NFA a la constatación de que $T^2(\Omega) < \Omega$, lo cual puede a su vez generalizarse a $T(\Omega) < \Omega$, pues si fuera $\Omega \leq T(\Omega)$, aplicando T concluiríamos que $\Omega \leq T(\Omega) \leq T^2(\Omega)$. En particular resulta que $(\Omega, \leq)_1$ no es similar a $(\Omega, \leq)$. Como consecuencia:

Teorema 6.47 *La clase $F = \{(x, \{x\}) \mid x \in V\}$ no es un conjunto.*

DEMOSTRACIÓN: Si fuera un conjunto podríamos definir una semejanza $f : (\Omega, \leq) \longrightarrow (\Omega, \leq)_1$ mediante $f(\alpha) = \{\alpha\}$ (concretamente, $f = F \cap (\Omega \times V)$). ■

Por otra parte, tenemos la sucesión decreciente de ordinales

$$\cdots < T^4(\Omega) < T^3(\Omega) < T^2(\Omega) < T(\Omega) < \Omega.$$

Esto no contradice, en principio, la buena ordenación de Ω, sino que únicamente nos garantiza que no es posible definir el conjunto

$$\{\alpha \mid \bigvee n \in \mathbb{N}\ \alpha = T^n(\Omega)\},$$

pues sería un conjunto de ordinales sin mínimo elemento.

Veamos una interpretación alternativa del ordinal $T(\alpha)$: Si $(A, \leq)$ es un conjunto bien ordenado, podemos considerar el conjunto

$$\mathrm{Sec}(A, \leq) \equiv \{x \mid \bigvee a \in A\ x = A_a^<\},$$

ordenado por la inclusión $[\subset]$. Notemos que el término $\mathrm{Sec}(A, \leq)$ aumenta una unidad el tipo de sus variables, por lo que podemos definir una semejanza $f : (A, \leq)_1 \longrightarrow (\mathrm{Sec}(A, \leq), [\subset])$ dada por $f(\{a\}) = A_a^<$. En particular esto prueba que $(\mathrm{Sec}(A, \leq), [\subset])$ es un conjunto bien ordenado.

Así pues, si $\alpha = \mathrm{ord}(A, \leq)$, concluimos que $T(\alpha) = \mathrm{ord}(\mathrm{Sec}(A, \leq), [\subset])$. En particular $T(\Omega)$ es el ordinal del conjunto Sec(Ord) con el buen orden dado por la inclusión.

6.7 Cardinales

Recordamos aquí las definiciones y hechos básicos que ya hemos introducido en la sección 6.3 sobre la teoría de cardinales:

Definición 6.48 La relación de *equipotencia* entre conjuntos es la dada por

$$\sim \equiv \{x \mid \bigvee ABf(x = (A, B) \land f : A \longrightarrow B \text{ biyectiva})\},$$

de modo que $A \sim B \leftrightarrow \bigvee f\ f : A \longrightarrow B$ biyectiva.

Es claro que $\sim$ es una relación de equivalencia en el conjunto [cto] de todos los conjuntos. Llamaremos *cardinales* a los elementos del conjunto cociente $K = [\mathrm{cto}]/\sim$. Más concretamente, el *cardinal* de un conjunto A es su clase de equivalencia:

$$|A| = \{B \mid \bigvee f\ f : A \longrightarrow B \text{ biyectiva}\}.$$

Similarmente, la relación de *minuspotencia* es la dada por

$$\preceq \equiv \{x \mid \bigvee ABf(x = (A, B) \land f : A \longrightarrow B \text{ inyectiva})\}.$$

Se comprueba sin dificultad que si $|A| = |A'|$ y $|B| = |B'|$, entonces

$$A \preceq B \leftrightarrow A' \preceq B',$$

lo cual permite definir la relación en K dada por

$$\leq\ \equiv \{x \mid \bigvee \kappa\mu AB(x = (\kappa, \mu) \land \kappa = |A| \land \mu = |B| \land A \preceq B)\}.$$

Repetimos el enunciado del teorema 6.3:

Teorema 6.49 (Cantor-Bernstein) *La relación $\leq$ es una relación de orden sobre el conjunto K.*

Es obvio que si dos conjuntos bien ordenados $(A, \leq_A)$ y $(B, \leq_B)$ son semejantes entonces son equipotentes, por lo que podemos definir

$$\mathrm{card} \equiv \{x \mid \bigvee A \leq ((A, \leq) \in \mathrm{CBO} \land x = (\mathrm{ord}(A, \leq), |A|))\}.$$

Es fácil ver que la definición es correcta y que $\mathrm{card} : \mathrm{Ord} \longrightarrow K$, de modo que, para todo conjunto bien ordenado $(A, \leq)$, tenemos que $\mathrm{card}(\mathrm{ord}(A, \leq)) = |A|$.

Es claro que imagen de card es el conjunto de los cardinales de conjuntos que admiten un buen orden (luego AE implica que card es suprayectiva). Más concretamente:

Si $\alpha \in \mathrm{card}^{-1}(|A|)$ y $(B, \leq_B) \in \alpha$, entonces $|B| = |A|$ luego existe una aplicación $f : A \longrightarrow B$ biyectiva, a través de la cual podemos definir un buen orden $\leq_A$ en A tal que $f : (A, \leq_A) \longrightarrow (B, \leq_B)$ sea una semejanza, luego $(A, \leq_A) \in \alpha$.

En definitiva: $\mathrm{card}^{-1}(|A|)$ *es el conjunto de los ordinales de los buenos órdenes definidos sobre el conjunto A.*

Definimos seguidamente la función $\mathrm{In} : K \longrightarrow \mathrm{Ord}$ dada por[9]

$$\mathrm{In}(\kappa) = \mathrm{mín}(\mathrm{card}^{-1}[\{\kappa\}]).$$

Diremos que $\mathrm{In}(\kappa)$ es el *ordinal inicial* de κ. El teorema siguiente lo caracteriza:

Teorema 6.50 *Dado un cardinal κ, un buen orden $(A, \leq)$ determina el ordinal* $\mathrm{In}(\kappa)$ *si y sólo si $|A| = \kappa$ y $\bigwedge a \in A\ |A_a^<| < \kappa$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\alpha = \mathrm{ord}(A, \leq)$. Se cumple que $\alpha = \mathrm{In}(\kappa)$ si y sólo si α es el mínimo ordinal tal que $\mathrm{card}(\alpha) = \kappa$. La condición $\mathrm{card}(\alpha) = \kappa$ equivale a que $|A| = \kappa$ y, para cada $a \in A$, tenemos que $\mathrm{ord}(A_a^<, \leq) < \alpha$, y todo ordinal menor que α es de esta forma. Así pues, que ningún ordinal $< \alpha$ cumpla que su cardinal sea κ equivale a que $\bigwedge a \in A\ |A_a^<| < \kappa$. ■

[9]El dominio de In es K si suponemos AE. En caso contrario es el subconjunto de los cardinales de los conjuntos que admiten un buen orden. Todo lo que diremos a continuación no depende de AE, sino que es válido para todo cardinal $\kappa \in \mathcal{D}\,\mathrm{In}$. (El interés de esta observación es que teniéndola en cuenta veremos que los resultados sobre cardinales finitos y numerables no depende del axioma de elección.)

Teorema 6.51 (AE) *La aplicación* $\mathrm{In} : (K, \leq) \longrightarrow (\mathrm{Ord}, \leq)$ *es una semejanza en su imagen.*

Demostración: Como no hemos demostrado que el orden de K sea total, hemos de probar que, para todo par de cardinales κ, μ, se cumple

$$\kappa \leq \mu \leftrightarrow \mathrm{In}(\kappa) \leq \mathrm{In}(\mu).$$

Sea $\kappa = |A|$, $\mu = |B|$, $\mathrm{In}(\kappa) = \mathrm{ord}(A, \leq_A)$, $\mathrm{In}(\mu) = \mathrm{ord}(B, \leq_B)$. Si se cumple $\mathrm{In}(\kappa) \leq \mathrm{In}(\mu)$, entonces, o bien $(A, \leq_A)$ es semejante a $(B, \leq_B)$, o bien es semejante a un segmento inicial de $(B, \leq)$, y en ambos casos existe $f : A \longrightarrow B$ inyectiva, luego $\kappa = |A| \leq |B| = \mu$.

Si $\mathrm{In}(\mu) < \mathrm{In}(\kappa)$ entonces $(B, \leq_B)$ es semejante a un segmento inicial de $(A, \leq_A)$, luego existe $f : B \longrightarrow A$ inyectiva, luego $\mu \leq \kappa$ y, de hecho, $\mu < \kappa$, porque si no sería $\mathrm{In}(\mu) = \mathrm{In}(\kappa)$. ■

Como consecuencia inmediata del teorema anterior:

Teorema 6.52 (AE) *La relación de orden en* K *es un buen orden.*

Observemos que, trivialmente, si $A \subset B$ se cumple $|A| \leq |B|$, luego existe un máximo cardinal, que es $\kappa_0 = |V|$. El mínimo cardinal es

$$0 = |\varnothing| = \{\varnothing\}.$$

Definimos también $1 = |\{\varnothing\}| = \mathcal{P}_1 V$.

Suma y producto de cardinales La definición de la suma y el producto de cardinales no ofrece ninguna dificultad:

En primer lugar se comprueba fácilmente que si κ y μ son dos cardinales existen conjuntos A y B tales que $|A| = \kappa$, $|B| = \mu$ y $A \cap B = \varnothing$. Esto se debe a que si A y B son dos conjuntos cualesquiera de cardinales κ y μ respectivamente, entonces $|A \times \{\varnothing\}| = |A| = \kappa$ y $|B \times \{\{\varnothing\}\}| = |B| = \mu$ y los conjuntos $A \times \{\varnothing\}$ y $B \times \{\{\varnothing\}\}$ son disjuntos.

En segundo lugar se comprueba que si los conjuntos A, A', B, B' cumplen $|A| = |A'|$ y $|B| = |B'|$ entonces $|A \times B| = |A' \times B'|$ y, si $A \cap B = A' \cap B' = \varnothing$, entonces $|A \cup B| = |A' \cup B'|$.

Esto permite definir aplicaciones $+,\ \cdot : K \times K \longrightarrow K$ mediante

$$+ \equiv \{x \mid \bigvee AB(A \cap B = \varnothing \wedge x = ((|A|, |B|), |A \cup B|))\},$$

$$\cdot\ \equiv \{x \mid \bigvee AB\ x = ((|A|, |B|), |A \times B|)\}.$$

Las propiedades básicas de estas operaciones (asociatividad, conmutatividad, distributividad, etc.) se demuestran sin ninguna dificultad.

Números naturales Presentamos ahora la construcción de los números naturales en NFA_p, para la cual no nos basaremos en la construcción previa que hemos hecho en NFA+AI. Definimos los *conjuntos inductivos* como los elementos del conjunto

$$\mathrm{Ind} \equiv \{A \mid A \subset K \land 0 \in A \land \bigwedge n \in A\ n+1 \in A\},$$

donde 0 y 1 son los cardinales que hemos definido y la suma es la suma de cardinales. Obviamente $K \in \mathrm{Ind}$, luego $\mathrm{Ind} \neq \varnothing$. Definimos el conjunto de los *números naturales* como

$$\mathbb{N} \equiv \bigcap \mathrm{Ind} \subset K.$$

Teorema 6.53 (Axiomas de Peano) *Se cumple:*

a) $0 \in \mathbb{N}$,

b) $\bigwedge n \in \mathbb{N}\ n+1 \in \mathbb{N}$,

c) $\bigwedge mn \in \mathbb{N}(m+1 = n+1 \to m = n)$,

d) $\bigwedge n \in \mathbb{N}\ n+1 \neq 0$,

e) $\bigwedge X(X \subset \mathbb{N} \land 0 \in X \land \bigwedge n \in X\ n+1 \in X \to X = \mathbb{N})$.

Demostración: Las propiedades a), b) y e) son inmediatas a partir de la definición.

Para probar c) tomamos conjuntos $|A| = m$, $|B| = n$, $|\{u\}| = |\{v\}| = 1$ con $A \cap \{u\} = B \cap \{v\} = \varnothing$. Entonces $|A \cup \{u\}| = m+1$ y $|B \cup \{v\}| = n+1$, luego existe una biyección $f : A \cup \{u\} \longrightarrow B \cup \{v\}$. Es fácil modificarla para que cumpla $f(u) = v$, con lo que $f|_A : A \longrightarrow B$ y así $m = |A| = |B| = n$.

d) Si $|A| = n$ y $|\{u\}| = 1$, con $A \cap \{u\}| = \varnothing$, entonces $|A \cup \{u\}| = n+1$ y $A \cup \{u\} \neq \varnothing$, luego $n+1 \neq 0$. ■

Ahora es inmediato que la aplicación siguiente $S : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$ dada por $S(n) = n+1$ es biyectiva, pues la inyectividad es el tercer axioma de Peano y la suprayectividad se obtiene por inducción a partir del conjunto

$$X = \{n \mid n \in \mathbb{N} \land (n = 0 \lor \bigvee m \in \mathbb{N}\ n = m+1)\}.$$

Teorema 6.54 *Si $n \in \mathbb{N}$, entonces $n+1$ es el menor cardinal mayor que n.*

Demostración: Obviamente $n \leq n+1$. Que la desigualdad es estricta se prueba por inducción sobre el conjunto

$$X = \{n \mid n \in \mathbb{N} \land n < n+1\}.$$

Obviamente $0 \in X$ y, si $n \neq n+1$, no puede ser $n+1 = n+1+1$, por el tercer axioma de Peano.

Si $n < \kappa$, para cierto cardinal κ, sea $|A| = n$, $|B| = \kappa$. Existe una aplicación $f : A \longrightarrow B$ inyectiva, pero no biyectiva. Cambiando A y B por $A \times \{\varnothing\}$ y

$B \times \{\varnothing\}$ podemos suponer que existe un $u \in V \setminus A$. Como f no es suprayectiva existe $v \in B \setminus f[A]$, luego $f' = f \cup \{(u, v)\}$ cumple que $f' : A \cup \{u\} \longrightarrow B$ inyectiva, luego $n + 1 = |A \cup \{u\}| \leq |B| = \kappa$. ■

Teorema 6.55 *Si $\kappa \in K$, $n \in \mathbb{N}$, entonces $n \leq \kappa$ o $\kappa \leq n$, y en el segundo caso además $\kappa \in \mathbb{N}$.*

DEMOSTRACIÓN: Por inducción sobre n. Si $n = 0$ es trivial y, si vale para n, o bien $\kappa \leq n$, en cuyo caso también $\kappa \leq n + 1$ y κ es finito, o bien $n \leq \kappa$, en cuyo caso, o bien $n = \kappa \leq n + 1$ y κ es finito, o bien $n < \kappa$, con lo que $n + 1 \leq \kappa$ por el teorema anterior. ■

Teorema 6.56 *Si m, $n \in \mathbb{N}$, entonces $m + n$, $mn \in \mathbb{N}$.*

DEMOSTRACIÓN: Por inducción sobre n. Claramente $m + 0 = m \in \mathbb{N}$ y, si $m + n \in \mathbb{N}$, entonces $m + n + 1 \in \mathbb{N}$ por el segundo axioma de Peano.

Para el producto tenemos que $m \cdot 0 = 0 \in \mathbb{N}$ y, si $mn \in \mathbb{N}$, entonces $m(n+1) = mn + n \in \mathbb{N}$ por hipótesis de inducción y por la parte ya probada. ■

Con esto tenemos probado que ZFA_p es un sistema aritmético, por lo que a partir de aquí supondremos conocidas las propiedades básicas de la aritmética de los números naturales (es decir, supondremos conocido que son teoremas de ZFA_p).

Nota: Podemos probar sin AE que $(\mathbb{N}, \leq)$ está bien ordenado. Dado $A \subset \mathbb{N}$ no vacío, basta razonar por inducción que el conjunto

$$X = \{n \in \mathbb{N} \mid \mathbb{N}_n^< \cap A = \varnothing \lor \bigvee m \in \mathbb{N}(m \leq n \land m \text{ es mínimo de } A)\}$$

es $\mathbb{N}$. ■

Definición 6.57 Llamaremos *conjuntos finitos* a los elementos de

$$F = \bigcup \mathbb{N}.$$

Un conjunto es *infinito* si no es finito. A los números naturales los llamaremos también *cardinales finitos* (aunque no son finitos como conjuntos) y a los cardinales que no son números naturales los llamaremos *cardinales infinitos*

Equivalentemente, un conjunto es finito si y sólo si su cardinal es finito. Los teoremas precedentes implican inmediatamente que todo subconjunto de un conjunto finito es finito y que la unión y el producto cartesiano de dos conjuntos finitos son también conjuntos finitos. (Para la unión descomponemos $|A \cup B| = |A \setminus B| + |B|$ y usamos que $|A \setminus B| \leq |A|$.)

Definición 6.58 Llamaremos $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$ y $\omega = \operatorname{ord}(\mathbb{N}, \leq)$.

Teorema 6.59 $\bigwedge n \in \mathbb{N}\ \aleph_0 + n = \aleph_0, \qquad \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0.$

Demostración: Es fácil ver que

$$\mathbb{N} = \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge \bigvee k \in \mathbb{N}\ n = 2k\} \cup \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge \bigvee k \in \mathbb{N}\ n = 2k+1\},$$

donde los dos conjuntos son disjuntos y tienen cardinal $\aleph_0$, luego $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$. Igualmente, la descomposición

$$\mathbb{N} = \{0\} \cup \{n \in \mathbb{N} \mid n > 0\}$$

prueba que $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$, lo cual implica a su vez que $\aleph_0$ es un cardinal infinito (pues si $n \in \mathbb{N}$ sabemos que $n < n+1$), luego $\bigwedge n \in \mathbb{N}\ n < \aleph_0$, luego

$$\aleph_0 \leq \aleph_0 + n \leq \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0.$$

■

Ejercicio: Probar que $\aleph_0\aleph_0 = \aleph_0$.

Teorema 6.60 *Un cardinal n es finito si y sólo si $n < \aleph_0$.*

Demostración: Supongamos que $n < \aleph_0$. Entonces existe un $A \subset \mathbb{N}$ tal que $|A| = n$. El ordinal de $(A, \leq)$ (donde $\leq$ es la restricción a A del buen orden de $\mathbb{N}$), tiene que ser semejante a un segmento $\mathbb{N}^<_m$, para cierto $m < n$, luego $n = |\mathbb{N}^<_m|$, y una simple inducción sobre m demuestra que $|\mathbb{N}^<_m|$ es finito. ■

Según hemos observado en la prueba del teorema anterior, $(\mathbb{N}, \leq)$ es un conjunto infinito cuyos segmentos iniciales son todos finitos. Por 6.50 podemos concluir que $\mathrm{In}(\aleph_0) = \omega$.

Definición 6.61 Llamaremos *ordinales finitos* a los ordinales menores que ω. Es claro que los ordinales finitos son los ordinales determinados por los buenos órdenes en los conjuntos finitos.

Teorema 6.62 *La restricción* $\mathrm{card} : \mathrm{Ord}^<_\omega \longrightarrow \mathbb{N}$ *es biyectiva y transforma la suma y el producto de ordinales en la suma y el producto de cardinales.*

Demostración: Claramente la aplicación es suprayectiva (todo cardinal finito es el cardinal de un subconjunto de $\mathbb{N}$, luego admite un buen orden, luego viene inducido por un ordinal finito). Para ver que es inyectiva basta observar que un conjunto finito no es equipotente a ningún subconjunto propio (Si A es finito y $B \subsetneq A$, entonces existe $a \in A \setminus B$ y $|B| \leq |A \setminus \{b\}| = |A| - 1$.)

Por lo tanto, si $\alpha < \omega$ y $\mathrm{ord}(A, \leq) = \alpha$, entonces A es un conjunto finito, luego sus secciones iniciales $A^<_a$ tienen cardinal estrictamente menor que $|A|$, luego $\alpha = \mathrm{ord}(n)$, para cierto cardinal n, necesariamente finito, luego la aplicación $\mathrm{ord} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathrm{Ord}^<_\omega$ es suprayectiva, y esto implica que card es inyectiva.

Dados α, $\beta < \omega$, sean $\mathrm{ord}(A, \leq_A) = \alpha$, $\mathrm{ord}(B, \leq_B) = \beta$. Entonces

$$\mathrm{card}(\alpha+\beta) = \mathrm{card}(\mathrm{ord}(A \oplus B, \leq_{AB})) = |A \oplus B| = |A| + |B| = \mathrm{card}(\alpha) + \mathrm{card}(\beta).$$

Similarmente se razona con el producto. ■

Así pues, los ordinales finitos son esencialmente lo mismo que los cardinales finitos. Más concretamente, el teorema anterior implica que todos los buenos órdenes que pueden definirse sobre un mismo conjunto finito son semejantes, y su ordinal depende únicamente del cardinal del conjunto. Más aún, es fácil probar por inducción sobre el cardinal de un conjunto que todo orden total en un conjunto finito es un buen orden.

Ejercicio: Probar que la suma ordinal cumple: $\bigwedge n \in \mathbb{N}(n + \omega = \omega < \omega + n)$, así como $\bigwedge n \in \mathbb{N}\ n \cdot \omega = \omega$

Teorema 6.63 *Si A es un conjunto finito, entonces $\mathcal{P}A$ también lo es.*

DEMOSTRACIÓN: Por inducción sobre $|A|$. Si $|A| = 0$ es inmediato. Supuesto cierto para n, sea $|A| = n+1$, de modo que $A = B \cup \{u\}$, donde $|B| = n$ y $u \notin B$. Podemos definir

$$f : \mathcal{P}A \longrightarrow (\mathcal{P}B \times \{\varnothing\}) \cup (\mathcal{P}B \times \{\{\varnothing\}\})$$

mediante

$$f(X) = \begin{cases} (X, \varnothing) & \text{si } u \notin X, \\ (X \setminus \{u\}, \{\varnothing\}) & \text{si } u \in X, \end{cases}$$

y claramente f es biyectiva, por lo que

$$|\mathcal{P}A| = |\mathcal{P}B| + |\mathcal{P}B| = 2 \cdot |\mathcal{P}B|$$

es finito. ■

Cardinales infinitos Para estudiar los cardinales infinitos necesitamos el axioma de elección, incluso en un resultado tan simple como el siguiente:

Teorema 6.64 (AE) *Un cardinal κ es infinito si y sólo si $\aleph_0 \leq \kappa$.*

DEMOSTRACIÓN: Ya hemos visto que si $\kappa < \aleph_0$ entonces κ es finito, pero necesitamos el axioma de elección para asegurar que el orden en K es total, de modo que si no se cumple $\aleph_0 \leq \kappa$ es porque $\kappa < \aleph_0$. ■

La aritmética básica de los cardinales infinitos es trivial:

Teorema 6.65 (AE) *Si $1 \leq \kappa \leq \mu$ son cardinales y μ es infinito, $\kappa\mu = \mu$.*

DEMOSTRACIÓN: Obviamente $\mu = 1 \cdot \mu \leq \kappa\mu \leq \mu\mu$, luego basta probar que $\mu\mu = \mu$. Si esto no es cierto, sea μ el menor cardinal infinito tal que $\mu < \mu\mu$. Sea $|A| = \mu$ y consideremos un buen orden $\leq$ en A cuyos segmentos iniciales tengan todos cardinal $< \mu$. Consideramos en $A \times A$ el orden dado por

$$(a, b) \leq (c, d) \leftrightarrow \text{máx}\{a, b\} < \text{máx}\{c, d\} \vee$$

$$(\text{máx}\{a, b\} = \text{máx}\{b, d\} \wedge (c < d \vee (c = d \wedge a \leq c))).$$

Es fácil ver que se trata de un buen orden respecto al cual

$$(A\times A)^{<}_{(a,b)}\subset A^{\leq}_{\text{máx}\{\text{a,b}\}}\times A^{\leq}_{\text{máx}\{\text{a,b}\}},$$

luego

$$|(A\times A)^{<}_{(a,b)}|=|A^{\leq}_{\text{máx}\{\text{a,b}\}}||A^{\leq}_{\text{máx}\{\text{a,b}\}}|<\mu.$$

Esto prueba que $\operatorname{ord}(A\times A,\leq)\leq\operatorname{In}(\mu)$, luego $\mu\mu=|A\times A|\leq\mu$, contradicción. ■

Teorema 6.66 (AE) *Si $\kappa\leq\mu$ son cardinales y μ es infinito, $\kappa+\mu=\mu$.*

Demostración: $\mu\leq\kappa+\mu\leq\mu+\mu=2\mu\leq\mu\mu=\mu$. ■

La paradoja de Cantor Veamos ahora cómo evita NFA la paradoja de Cantor. Recordemos que ésta consiste en que, según el teorema de Cantor, todo conjunto A cumple que $|A|<|\mathcal{P}A|$, pero esto da lugar a una contradicción cuando se aplica al conjunto universal V, ya que debería ser $|V|<|\mathcal{P}V|$ mientras que, evidentemente, $\mathcal{P}V\subset V$, luego $|\mathcal{P}V|\leq|V|$.

Sucede que en NFA, no sólo no se puede demostrar que $|V|<|\mathcal{P}V|$, sino tampoco $|V|\leq|\mathcal{P}V|$, pues el argumento que prueba esto para un conjunto arbitrario X en ZFC consiste en considerar la aplicación $f:X\longrightarrow\mathcal{P}X$ dada por $f(x)=\{x\}$, lo cual no es posible en NFA porque dicha definición no está estratificada. De hecho, en 6.47 hemos probado que la aplicación $x\mapsto\{x\}$ no existe.

La versión del teorema de Cantor que podemos probar en NFA es la siguiente:

Teorema 6.67 (Teorema de Cantor) *Para todo conjunto X, se cumple que $|\mathcal{P}_1X|<|\mathcal{P}X|$.*

Demostración: Como $\mathcal{P}_1X\subset\mathcal{P}X$, tenemos la desigualdad $|\mathcal{P}_1X|\leq|\mathcal{P}X|$. Supongamos que existiera una biyección $f:\mathcal{P}_1X\longrightarrow\mathcal{P}X$. En tal caso podríamos definir el conjunto

$$R=\{x\mid x\in X\land\{x\}\not\subset f(\{x\})\},$$

y la definición es correcta, pues la fórmula que define a R está estratificada. Por lo tanto, $R\in\mathcal{P}X$ y debe existir un $x\in X$ tal que $f(\{x\})=R$, pero entonces

$$x\in R\leftrightarrow\{x\}\subset f(\{x\})\leftrightarrow x\notin R,$$

y tenemos una contradicción. ■

Así pues, al aplicar el teorema de Cantor en NFA al conjunto V no obtenemos la contradicción $|V|<|\mathcal{P}V|$, sino la desigualdad $|\mathcal{P}_1V|<|\mathcal{P}V|\leq|V|$. La relación $|\mathcal{P}_1V|<|V|$ es extraña, pero no contradictoria.

Para situar esto en el contexto debido observamos que, trivialmente, si se cumple $|A|=|B|$ entonces $|\mathcal{P}_1A|=|\mathcal{P}_1B|$, luego podemos definir:

Definición 6.68 $T(\kappa) \equiv \mu \mid \bigvee A(|A| = \kappa \wedge \mu = |\mathcal{P}_1 A|)$.

Observemos que $T(\kappa)$ tiene tipo una unidad mayor que κ. No hay que confundirlo con el término análogo definido en 6.45 para ordinales. La relación obvia entre ambos es que

$$\mathrm{card}(T(\alpha)) = T(\mathrm{card}(\alpha)).$$

En estos términos hemos probado que $T(|V|) < |V|$.

Si A es un conjunto finito, por 6.63 sabemos que $\mathcal{P}A$ es finito y $\mathcal{P}_1 A \subset \mathcal{P}A$, luego $\mathcal{P}_1 A$ también es finito. Por consiguiente:

$$\bigwedge n \in \mathbb{N}\ T(n) \in \mathbb{N}.$$

Algunas propiedades obvias del término T que acabamos de introducir son:

a) $\bigwedge \kappa\mu \in K(\kappa \leq \mu \leftrightarrow T(\kappa) \leq T(\mu))$,

b) $\bigwedge \kappa\mu \in K(\kappa = \mu \leftrightarrow T(\kappa) = T(\mu))$,

c) $\bigwedge \kappa\mu \in K\ T(\kappa + \mu) = T(\kappa) + T(\mu)$,

d) $\bigwedge \kappa\mu \in K\ T(\kappa\mu) = T(\kappa)T(\mu)$.

En particular, vemos que este operador T determina también una sucesión decreciente “metamatemática” de cardinales, pues si llamamos $\kappa_n = T^n(|V|)$ (entendiendo que $\kappa_0 = |V|$), tenemos que

$$\cdots < \kappa_3 < \kappa_2 < \kappa_1 < \kappa_0.$$

Teorema 6.69 *Un cardinal κ es de la forma $\kappa = T(\mu)$, para cierto cardinal μ si y sólo si $\kappa \leq \kappa_1$. Un ordinal α es de la forma $\alpha = T(\beta)$, para cierto ordinal β, si y sólo si* $\mathrm{card}(\alpha) \leq \kappa_1$.

DEMOSTRACIÓN: Obviamente $T(\mu) \leq T(\kappa_0) = \kappa_1$. Recíprocamente, si se cumple $\kappa \leq \kappa_1$, podemos tomar $B \subset \mathcal{P}_1 V$ tal que $|B| = \kappa$ y entonces el conjunto $A = \{x \mid \{x\} \in B\}$ cumple $B = \mathcal{P}_1 A$, luego $\mu = |A|$ cumple $T(\mu) = \kappa$.

Por otra parte, $\mathrm{card}(T(\beta)) = T(\mathrm{card}(\beta)) \leq T(\kappa_0) = \kappa_1$. Recíprocamente, si $\mathrm{card}(\alpha) \leq \kappa_1$, tomamos un conjunto $A \subset \mathcal{P}_1 V$ con $|A| = \mathrm{card}(\alpha)$ y un conjunto bien ordenado tal que $\mathrm{ord}(B, \leq_B) = \alpha$. Entonces $|A| = |B|$, luego existe $f : A \longrightarrow B$ biyectiva, y esto permite definir un buen orden en A tal que $f : (A, \leq_A) \longrightarrow (B, \leq_B)$ semejanza, luego $\alpha = \mathrm{ord}(A, \leq_A)$. Como $A \subset \mathcal{P}_1 V$, podemos definir $A' = \{a \mid \{a\} \in A\}$ y $\leq' = \{(a, b) \mid (\{a\}, \{b\}) \in \leq_A\}$, con lo que $\beta = \mathrm{ord}(A', \leq')$ cumple $T(\beta) = \alpha$. ■

Así pues, podemos definir

$$T^{-1}(\alpha) \equiv \beta \mid (\beta \in \mathrm{Ord} \wedge T(\beta) = \alpha), \qquad T^{-1}(\kappa) \equiv \mu \mid (\mu \in K \wedge T(\mu) = \kappa),$$

pero estos términos sólo son descripciones propias en las condiciones dadas por el teorema anterior.

Teorema 6.70 *Un conjunto A es finito si y sólo si $\mathcal{P}_1 A$ es finito.*

DEMOSTRACIÓN: Si A es finito, también lo es $\mathcal{P}A$, luego también $\mathcal{P}_1 A$. La implicación opuesta la probamos por inducción, para lo cual consideramos el conjunto

$$X = \{n \mid n \in \mathbb{N} \land \bigwedge A(\mathcal{P}_1 A \in n \rightarrow A \text{ es finito})\}.$$

Observamos que si $\mathcal{P}_1 A \in 0$, necesariamente $A = \varnothing$, luego $0 \in X$. Si $n \in X$ y $\mathcal{P}_1 A \in n+1$, entonces $A \neq \varnothing$, luego podemos tomar $u \in A$ y llamamos $B = A \setminus \{u\}$. Entonces $A = B \cup \{u\}$ y $\mathcal{P}_1 A = \mathcal{P}_1 B \cup \{\{u\}\}$. Esto implica que $|\mathcal{P}_1 B| = n$, luego por hipótesis de inducción B es finito, luego A también lo es. ■

Esto se traduce en que si κ es infinito entonces $T(\kappa)$ también lo es. En particular κ_1 es infinito, $T^{-1}(n)$ está definido sobre todo número natural n, y

$$\bigwedge n \in \mathbb{N}\ T^{-1}(n) \in \mathbb{N}.$$

Admitiendo AE, la buena ordenación de K hace que todo cardinal $\kappa < \kappa_0$ tiene un sucesor inmediato (el mínimo cardinal mayor que κ) al que representaremos por κ^+.

Teorema 6.71 (AE) $|\mathrm{Ord}| = \kappa_2^+$.

DEMOSTRACIÓN: Hemos visto que, para todo ordinal α, se cumple que $\mathrm{ord}(\mathrm{Ord}_\alpha^<, \leq) = T^2(\alpha)$, luego, aplicando la función card obtenemos la relación

$$T^2(\mathrm{card}(\alpha)) = |\mathrm{Ord}_\alpha^<| \leq |\mathrm{Ord}|.$$

Aplicando esto al ordinal de un buen orden de V concluimos que $\kappa_2 \leq |\mathrm{Ord}|$. Más aún, todos los segmentos iniciales de Ord tienen cardinal $\leq \kappa_2$. Esto implica que $|\mathrm{Ord}| = \kappa_2$ o bien $|\mathrm{Ord}| = \kappa_2^+$, pues si $|\mathrm{Ord}| > \kappa_2^+$ podríamos tomar un conjunto ordenado de cardinal κ_2^+ y tendría que ser semejante a un segmento de Ord. Así pues, para probar el teorema basta ver que $|\mathrm{Ord}| \neq \kappa_2$. Si se diera el caso estaría definido $\alpha = T^{-2}(\Omega)$, de modo que $\Omega = T^2(\alpha) = \mathrm{ord}(\mathrm{Ord}_\alpha^<, \leq)$, pero esto es absurdo, pues significa que Ord es semejante a uno de sus segmentos iniciales. ■

La sucesión de los álefs Todos los resultados de este apartado usan AE.

Definición 6.72 El conjunto K_i de todos los cardinales infinitos es un conjunto bien ordenado que tiene un máximo elemento, $\kappa_0 = |V|$, luego su ordinal será de la forma $\alpha_0 + 1$, para un cierto ordinal α_0. Concretamente:

$$\alpha_0 \equiv \mathrm{ord}(\{\kappa \mid \kappa \in K \land \aleph_0 \leq \kappa < \kappa_0\}, \leq).$$

Así, cada ordinal $\alpha \leq \alpha_0$ es el ordinal de un segmento inicial de K_i, determinado por un único cardinal infinito κ. Definimos

$$\aleph_\alpha \equiv \kappa \mid \mathrm{ord}(\{\mu \mid \mu \in K \land |\mathbb{N}| \leq \mu < \kappa\}, \leq) = \alpha.$$

Así, $\aleph_\alpha$ está definido para todo ordinal $\leq \alpha_0$, de modo que, según esta definición, $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$, tal y como ya lo habíamos definido, y $\aleph_{\alpha_0} = \kappa_0 = |V|$.

También es inmediato que $\alpha < \beta \leftrightarrow \aleph_\alpha < \aleph_\beta$, así como que

$$\bigwedge \alpha < \alpha_0 \ \aleph_{\alpha+1} = \aleph_\alpha^+.$$

Es importante observar que el tipo de $\aleph_\alpha$ es dos unidades inferior al de α, por lo que no podemos definir una función $\alpha \mapsto \aleph_\alpha$.

Para cada $\alpha \leq \alpha_0$, llamaremos $\omega_\alpha = \mathrm{In}(\aleph_\alpha)$, de modo que ω_α es el menor ordinal cuyo cardinal asociado es $\aleph_\alpha$.

Teorema 6.73 $\bigwedge \alpha(\alpha \in \mathrm{Ord} \wedge \alpha \leq \alpha_0 \to T(\alpha) \leq \alpha_0 \wedge T(\aleph_\alpha) = \aleph_{T(\alpha)})$.

DEMOSTRACIÓN: La estratificación nos permite considerar el conjunto

$$X = \{\alpha \mid \alpha \in \mathrm{Ord} \wedge \alpha \leq \alpha_0 \wedge (\alpha_0 < T(\alpha) \vee (T(\alpha) \leq \alpha_0 \wedge T(\aleph_\alpha) \neq \aleph_{T(\alpha)}))\},$$

y basta probar que es vacío. En caso contrario tendría un mínimo elemento α. Así, para todo $\delta < \alpha$, tenemos que $T(\delta) \leq \alpha_0$ y $T(\aleph_\delta) = \aleph_{T(\delta)}$, luego podemos considerar el conjunto

$$Y = \{x \mid \bigvee \delta(\delta \in \mathrm{Ord} \wedge \delta < \alpha \wedge x = \aleph_{T(\delta)})\}.$$

Observemos que se trata del conjunto de todos los cardinales infinitos menores que $T(\aleph_\alpha)$, pues si $\aleph_0 \leq \mu < T(\aleph_\alpha)$, entonces $\aleph_0 \leq T^{-1}(\mu) < \aleph_\alpha$ (aquí usamos que, como μ es infinito, $T^{-1}(\mu)$ también lo es), luego existe un $\delta < \alpha$ tal que $T^{-1}(\mu) = \aleph_\delta$, luego $\mu = T(\aleph_\delta) = \aleph_{T(\delta)} \in Y$.

Por otra parte, si $\mathrm{ord}(A, \leq) = \alpha$, la aplicación $f : \mathcal{P}_1 A \longrightarrow Y$ dada por

$$f(\{a\}) = \aleph_{T(\mathrm{ord}(\mathrm{A}_\mathrm{a}^{<}, \leq))}$$

está bien definida y es una semejanza, lo que prueba que $\mathrm{ord}(Y, \leq) = T(\alpha)$ y, por consiguiente, existe $\aleph_{T(\alpha)} = T(\aleph_\alpha)$. ■

Ahora observamos que $\aleph_{T(\alpha_0)} = T(\aleph_{\alpha_0}) = T(\kappa_0) < \kappa_0 = \aleph_{\alpha_0}$, luego concluimos que

$$T(\alpha_0) < \alpha_0.$$

Esto vuelve trivial una parte del teorema anterior: si $\alpha \leq \alpha_0$, entonces es inmediato que $T(\alpha) \leq T(\alpha_0) < \alpha_0$.

Por otra parte, como $T(0) = 0$, $T(1) = 1$, $T(2) = 2$, etc., podemos asegurar que $\alpha_0 > 0$, $\alpha_0 > 1$, $\alpha_0 > 2$, etc., por lo que existen los cardinales infinitos

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \cdots$$

Sin embargo, esto no significa que podamos demostrar que α_0 es un ordinal infinito.

6.8 Cofinalidad

Definición 6.74 Si $(A, \leq)$ es un conjunto bien ordenado sin máximo, un conjunto $B \subset A$ es *cofinal* si no está acotado en A. Llamaremos *cofinalidad* de A al menor ordinal λ tal que $(A, \leq)$ tiene un subconjunto cofinal de ordinal λ, y lo representaremos por $\mathrm{cf}^*(A, \leq)$. Explícitamente:

$$\mathrm{cf}^*(A, \leq) = \min\{\lambda \mid \bigvee B(B \subset A \land B \text{ cofinal en } (A, \leq) \land \mathrm{ord}(B, \leq)) = \lambda\}.$$

Es fácil ver que el término $\mathrm{cf}^*(A, \leq)$ está estratificado y tiene tipo una unidad mayor que A y $\leq$.

Teorema 6.75 *Si $(A, \leq)$ es un conjunto bien ordenado sin máximo, entonces $\mathrm{cf}^*(A, \leq)$ es un ordinal inicial.*

DEMOSTRACIÓN: Sea B cofinal en $(A, \leq)$ tal que $\mathrm{ord}(B, \leq) = \mathrm{cf}^*(A, \leq)$. Según el teorema 6.50 hemos de probar que si $b \in B$ entonces $|B_b^<| < |B|$. En caso contrario, sea $f : B_b^< \longrightarrow B$ biyectiva.

Para cada $a \in B_b^<$ y cada $h : B_a^< \longrightarrow A$ creciente, como

$$\mathrm{ord}(h[B_a], \leq) = \mathrm{ord}(B_a, \leq) < \mathrm{ord}(B, \leq) = \mathrm{cf}^*(A, \leq),$$

tenemos que $h[B_a]$ está acotado en A, luego podemos definir

$$G(h) = \{\min\{x \mid x \in A \land x > f(a) \land \bigwedge y \in B_a(h(y) < x)\}\}.$$

Si h no es creciente, definimos $G(h) = \{b\}$. Observamos que la definición está estratificada, por lo que G es una función en las condiciones del teorema de recursión 6.38. Así pues, dicho teorema nos da una función $F : B_b^< \longrightarrow A$ con la propiedad de que $\bigwedge a \in B_b^< \{F(a)\} = G(F|_{B_a^<})$. Una simple inducción demuestra que cada $F|_{B_a^<}$ es creciente, por lo que, de hecho,

$$F(a) = \min\{x \mid x \in A \land x > f(a) \land \bigwedge y \in B_a(F(y) < x)\}.$$

En particular, $\bigwedge a \in B_b^<\ f(a) < F(a)$, lo que implica que $F[B_b^<]$ es cofinal en A y $\mathrm{ord}(F[B_b^<], \leq) = \mathrm{ord}(B_b^<, \leq) < \mathrm{ord}(B, \leq) = \mathrm{cf}^*(A, \leq)$, contradicción. ■

Este teorema hace conveniente modificar la definición de cofinalidad:

Definición 6.76 Si $(A, \leq)$ es un conjunto bien ordenado sin máximo, llamaremos *cofinalidad* de $(A, \leq)$ al cardinal $\mathrm{cf}(A, \leq) = \mathrm{card}(\mathrm{cf}^*(A, \leq))$.

Es obvio que la cofinalidad en este sentido es el mínimo cardinal posible de un conjunto cofinal en $(A, \leq)$, pero ahora sabemos que si dicho conjunto cofinal lo tomamos de ordinal mínimo, dicho ordinal resulta ser $\mathrm{In}(\mathrm{cf}(A, \leq))$.

Definimos la *cofinalidad* de un ordinal límite λ como la cofinalidad $\mathrm{cf}\,\lambda$ de cualquier conjunto bien ordenado de ordinal λ. La *cofinalidad*[10] de un cardinal infinito κ se define como $\mathrm{cf}\,\kappa = \mathrm{cf}(\mathrm{In}(\kappa)) \leq \kappa$.

[10] La definición de cofinalidad de un cardinal requiere el axioma de elección.

Un cardinal infinito κ es *regular* si $\kappa = \operatorname{cf} \kappa$ y es *singular* si $\kappa > \operatorname{cf} \kappa$.

Dejamos al lector la comprobación de que los cardinales sucesores son regulares. Nosotros terminaremos la sección demostrando un resultado que necesitaremos más adelante:

Teorema 6.77 (AE) *Si κ es un cardinal límite,* $\operatorname{cf}(K_\kappa^<, \leq) = T^2(\operatorname{cf} \kappa)$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $\operatorname{ord}(A, \leq) = \operatorname{In}(\kappa)$ y tomemos un conjunto $B \subset A$ tal que $\operatorname{ord}(B, \leq) = \operatorname{In}(\operatorname{cf} \kappa)$. Entonces podemos definir $f : \mathcal{P}_1^2 B \longrightarrow K_\kappa^<$ mediante $f(\{\{b\}\}) = |A_b^<|$, que claramente tiene imagen cofinal, luego vemos que $\operatorname{cf}(K_\kappa^<, \leq) \leq T^2(\operatorname{cf} \kappa)$.

Por otra parte, sea $B \subset K_\kappa^<$ un conjunto cofinal tal que

$$|B| = \operatorname{cf}(K_\kappa^<, \leq) \leq T^2(\operatorname{cf} \kappa),$$

luego está definido $T^{-2}(|B|) = |B'|$. Tomemos $f : \mathcal{P}_1^2 B' \longrightarrow B$ biyectiva, de modo que $|B'| \leq \operatorname{cf} \kappa$. Definimos $g : B' \longrightarrow A$ mediante

$$g(b) = \text{mín}\{a \mid a \in A \wedge |A_a^<| = f(\{\{b\}\})\}.$$

Es claro que la definición de g cumple los requisitos de estratificación, así como que $g[B']$ es cofinal, luego $\operatorname{cf} \kappa \leq |B'|$ y $T^2(\operatorname{cf} \kappa) \leq |B| = \operatorname{cf}(K_\kappa^<, \leq))$. ■

6.9 La exponenciación cardinal

A la hora de definir la exponenciación cardinal nos encontramos con el inconveniente de que el término A^B tiene tipo una unidad superior al de las variables A y B, razón por la cual conviene definir:

$$(\ )^{(\ )} \equiv \{x \mid \bigvee AB(|A^B| \leq \kappa_1 \wedge x = ((|A|, |B|), T^{-1}(|A^B|))\},$$

con lo que tenemos definida una exponenciación $(\kappa, \mu) \mapsto \kappa^\mu$ que no está definida sobre todos los pares de cardinales, sino únicamente sobre los pares con $\kappa = |A|$, $\mu = |B|$ tales que $|A^B| \leq \kappa_1$. En tal caso, tenemos que

$$|A|^{|B|} = T^{-1}(|A^B|).$$

Observemos que la presencia de T^{-1} es necesaria, por ejemplo, para que se cumpla la relación $\kappa^1 = \kappa$. En efecto, si $|A| = \kappa$, tenemos una biyección $f : \mathcal{P}_1 A \longrightarrow A^{\{\varnothing\}}$ dada por

$$f \equiv \{x \mid \bigvee a(a \in A \wedge x = \{(\{a\}, \{(\varnothing, a)\}\})\},$$

de donde se sigue que $T(|A|) = |A^{\{\varnothing\}}|$, luego $|A| = |A|^1$.

La condición de existencia de κ^μ no es muy práctica, pues casi depende del propio κ^μ. En la práctica nos bastará esta condición suficiente:

Teorema 6.78 *Si $\kappa, \mu \leq \kappa_1$, está definido κ^μ y $T(\kappa)^{T(\mu)} = T(\kappa^\mu)$. Más en general, para todo par de conjuntos A y B se cumple que $|A^B| = T(|A|)^{T(|B|)}$.*

DEMOSTRACIÓN: Dados dos conjuntos A y B, consideramos la biyección $F : \mathcal{P}_1 A^{\mathcal{P}_1 B} \longrightarrow \mathcal{P}_1(A^B)$ dada por

$$F(f) = x \mid \bigvee g(x = \{g\} \wedge g : B \longrightarrow A \wedge \bigwedge b \in B(f(\{b\}) = \{g(b)\})).$$

De ella se sigue que $|\mathcal{P}_1 A^{\mathcal{P}_1 B}| = T(|A^B|) \leq \kappa_1$, luego está definido

$$T(|A|)^{T(|B|)} = |\mathcal{P}_1 A|^{|\mathcal{P}_1 B|} = |A^B|.$$

En particular, si $\kappa, \mu \leq \kappa_1$, podemos tomar conjuntos A y B tales que $\kappa = T(|A|)$, $\mu = T(|B|)$ y concluimos que está definido κ^μ.

Por último, si tomamos $|A| = \kappa$, $|B| = \mu$, la relación que hemos probado es

$$T(\kappa)^{T(\mu)} = T(|A|)^{T(|B|)} = |A^B| = T(\kappa^\mu). \qquad \blacksquare$$

En particular vemos que m^n está definido para todo par de números naturales. Las propiedades

$$\kappa^{\mu+\nu} = \kappa^\mu \kappa^\nu, \qquad (\kappa\mu)^\nu = \kappa^\nu \mu^\nu, \qquad (\kappa^\mu)^\nu = \kappa^{\mu\nu},$$

se prueban sin dificultad a partir de biyecciones entre los conjuntos correspondientes (bajo la hipótesis de que exista al menos uno de los dos miembros). En particular vemos que la exponenciación de números naturales es la usual, es decir, la que se define en cualquier sistema aritmético.

Teorema 6.79 *Para todo conjunto A se cumple que $|\mathcal{P}A| = 2^{T(|A|)}$.*

DEMOSTRACIÓN: Es fácil ver que la biyección natural $\{0,1\}^A \longrightarrow \mathcal{P}A$ está bien definida, lo que nos da que $|\mathcal{P}A| = |\{0,1\}^A| = T(2)^{T(|A|)} = 2^{T(|A|)}$. $\blacksquare$

El teorema de Cantor afirma que $|\mathcal{P}A| > T(|A|)$ luego, si 2^κ está definido (en particular si $\kappa \leq \kappa_1$) tenemos la desigualdad

$$\kappa < 2^\kappa.$$

En particular $\kappa_1 < 2^{\kappa_1} = |\mathcal{P}V| \leq \kappa_0$.

Definición 6.80 Llamaremos

$$\exp \equiv \{x \mid \bigvee \kappa\mu(\kappa \in K \wedge x = (\kappa, \mu) \wedge ((\kappa \leq \kappa_1 \wedge \mu = 2^\kappa) \vee (\kappa_1 < \kappa \wedge \mu = \varnothing)\}$$
$$\cup \{(\varnothing, \varnothing)\}$$

Así $\exp : K \cup \{\varnothing\} \longrightarrow K \cup \{\varnothing\}$ es la aplicación dada por

$$\exp \kappa = \begin{cases} 2^\kappa & \text{si } \kappa \leq \kappa_1, \\ \varnothing & \text{si } \kappa_1 < \kappa \vee \kappa = \varnothing. \end{cases}$$

Los hechos siguientes son inmediatos:

- $\bigwedge \kappa\mu \in K(\kappa \leq \mu \leq \kappa_1 \to \exp\kappa \leq \exp\mu)$
- $\bigwedge \kappa \in K(\kappa \leq \kappa_1 \to \kappa < \exp\kappa)$
- $\bigwedge \kappa \in K(\kappa \leq \kappa_1 \to \exp T(\kappa) = T(\exp\kappa))$
- $\exp\kappa_1 = 2^{\kappa_1} = |\mathcal{P}V| > \kappa_1$

Definimos

$$I(\kappa) \equiv \{A \mid A \subset K \cup \{\varnothing\} \land \kappa \in A \land \bigwedge \mu(\mu \in A \to \exp\mu \in A) \land$$
$$\bigwedge B(B \subset A \cap K \land B \neq \varnothing \land \bigwedge \mu \in B\ \exp\mu \in B \to \sup B \in A)\},$$
$$C(\kappa) = \bigcap I(\kappa), \qquad \Phi(\kappa) = C(\kappa) \setminus \{\varnothing\}.$$

Observemos que el tipo de $\Phi(\kappa)$ es una unidad mayor que el de κ. De las propiedades siguientes, las cuatro primeras son consecuencias inmediatas de que $C(\kappa) \in I(\kappa)$.

a) $\Phi(\kappa) \subset K \land \kappa \in \Phi(\kappa)$.

b) $\bigwedge \mu(\mu \in \Phi(\kappa) \land \exp\mu \neq \varnothing \to \exp\mu \in \Phi(\kappa))$.

c) $\bigwedge B(B \subset \Phi(\kappa) \land B \neq \varnothing \land \bigwedge \mu \in B\ \exp\mu \in B \to \sup B \in \Phi(\kappa))$.

d) Para todo conjunto $A \subset K$:

$$\kappa \in A \land \bigwedge \mu(\mu \in A \land \exp\mu \neq \varnothing \to \exp\mu \in A) \land$$
$$\bigwedge B(B \subset A \land B \neq \varnothing \land \bigwedge \mu \in B\ \exp\mu \in B \to \sup B \in A) \to \Phi(\kappa) \subset A.$$

e) $\mu \in \Phi(\kappa) \leftrightarrow \mu = \kappa \lor \bigvee \nu \in \Phi(\kappa)\ \mu = \exp\nu \lor$

$$\bigvee B(B \subset \phi(\kappa) \land B \neq \varnothing \land \bigwedge \mu \in B\ \exp\mu \in B \land \mu = \sup B).$$

Basta aplicar d) al conjunto

$$A \equiv \{\mu \mid \mu \in \Phi(\kappa) \land (\mu = \kappa \lor \bigvee \nu \in \Phi(\kappa)\ \mu = \exp\nu \lor$$
$$\bigvee B(B \subset \Phi(\kappa) \land B \neq \varnothing \land \bigwedge \mu \in B\ \exp\mu \in B \land \mu = \sup B))\}.$$

f) $\mu \in \Phi(\kappa) \to \kappa \leq \mu$.

Basta considerar $A = \{\mu \mid \mu \in K \land \kappa \leq \mu\}$.

g) $\bigwedge \mu\nu \in \Phi(\kappa)(\exp(\nu) \neq \varnothing \to \mu \leq \nu \lor 2^\nu \leq \mu)$.

En efecto, fijamos $\nu \in \Phi(\kappa)$ tal que $\exp\nu \neq \varnothing$ y supongamos que existe un $\mu \in \Phi(\kappa)$ tal que $\nu < \mu < 2^\nu$. Podemos tomar el menor ν posible y, para dicho ν, tomamos el menor μ posible.

No puede ser $\mu = \kappa$, pues entonces $\mu \leq \nu$, por f).

No puede ser $\mu = \sup B$, para cierto $B \subset \Phi(\kappa)$ no vacío que cumpla $\bigwedge \xi \in B\ \exp\xi \in B$, pues entonces, o bien $\bigwedge \xi \in B\ \xi \leq \nu$, en cuyo caso $\mu \leq \nu$, o bien existe $\xi \in B$ tal que $\nu \leq \xi$, pero $\xi < \exp\xi \in B$ (se da la desigualdad porque $\exp\xi \neq \varnothing$, ya que en caso contrario no estaría en B), luego $\xi < \mu$ y, por la minimalidad de μ, tenemos $2^\nu \leq \xi < \mu$. Así pues, según e) existe $\xi \in \Phi(\kappa)$ tal que $\mu = 2^\xi$. Como $\nu < 2^\xi < 2^\nu$, tiene que ser $\xi < \nu$.

Ahora distingamos las tres posibilidades para ν:

No puede ser $\nu = \kappa$, pues entonces $\nu \leq \xi$.

Tampoco puede ser que ν sea el supremo de un subconjunto de $\Phi(\kappa)$, pues entonces $\xi < \nu \to \mu = 2^\xi \leq \nu$.

Luego $\nu = 2^\pi$ para cierto $\pi \in \Phi(\kappa)$, luego $\pi < \nu$ y $2^\pi < 2^\xi < 2^\nu$, luego $\pi < \xi < \nu = 2^\pi$, en contra de la minimalidad de ν.

h) $\Phi(\kappa)$ tiene un máximo elemento $\mu_0(\kappa)$, que es el único elemento de $\Phi(\kappa)$ tal que $\exp\mu = \varnothing$.

En efecto, si $\bigwedge \mu \in \Phi(\kappa)\ \exp\mu \neq \varnothing$ podríamos aplicar c) a $B = \Phi(\kappa)$ y concluir que $\mu = \sup\Phi(\kappa) \in \Phi(\kappa)$, pero entonces $\mu < \exp\mu \in \Phi(\kappa)$, contradicción.

Vamos a probar que un tal μ es necesariamente el máximo de $\Phi(\kappa)$, para lo cual suponemos que existe un $\nu \in \Phi(\kappa)$ tal que $\mu < \nu$. Podemos tomar el mínimo posible.

Obviamente $\nu \neq \kappa$, y no puede suceder tampoco que ν sea el supremo de un conjunto cerrado para exp, pues entonces existiría un ξ en dicho conjunto tal que $\mu \leq \xi \leq \kappa_1$, con lo que $\exp\mu \neq \varnothing$.

Por lo tanto, $\nu = \exp\xi$, para cierto $\xi \in \Phi(\kappa)$, que cumplirá $\xi < \mu < 2^\xi$, en contra de g).

i) $\mu \in \Phi(\kappa) \leftrightarrow T(\mu) \in \Phi(T(\kappa))$.

Si existe un $\mu \in \Phi(\kappa)$ tal que $T(\mu) \notin \Phi(T(\kappa))$, podemos tomar el mínimo posible. Obviamente no puede ser $\mu = \kappa$. Si $\mu = 2^\nu$, para un $\nu \in \Phi(\kappa)$, por la minimalidad $T(\nu) \in \Phi(T(\kappa))$, luego $T(\mu) = 2^{T(\nu)} \in \Phi(T(\kappa))$. Si $\mu = \sup B$, para cierto $B \subset \Phi(\kappa)$ en las condiciones de e), entonces $C = \{T(\nu) \mid \nu \in B\} \subset \Phi(T(\kappa))$ por la minimalidad de μ y es fácil ver que $T(\mu) = \sup C$. Esto implica que $T(\mu) \in \Phi(T(\kappa))$, contradicción. La implicación contraria se prueba igualmente.

Definición 6.81 Dado $\kappa \in K$, llamamos $\beta_0(\kappa) + 1 = \operatorname{ord}(\Phi(\kappa), \leq)$. Así cada ordinal $\alpha \leq \beta_0(\kappa)$ es el ordinal de un segmento inicial de $\Phi(\kappa)$, luego podemos definir

$$\beth_\alpha(\kappa) \equiv \mu \mid (\mu \in \Phi(\kappa) \land \operatorname{ord}(\Phi(\kappa)^<_\mu, \leq) = \alpha).$$

Notemos que el tipo de $\beth_\alpha(\kappa)$ es dos unidades menor que el de α y el mismo que el de κ.

Llamaremos $\beta_0 \equiv \beta_0(\aleph_0)$ y $\beth_\alpha \equiv \beth_\alpha(\aleph_0)$.

Teorema 6.82 *Para todo cardinal κ se cumple que $\beth_0(\kappa) = \kappa$, si $\alpha < \beta_0(\kappa)$ entonces $\beth_{\alpha+1}(\kappa) = 2^{\beth_\alpha(\kappa)}$ y si $\lambda \leq \beta_0(\kappa)$ es un ordinal límite, entonces*

$$\beth_\lambda(\kappa) = \sup\{\beth_\delta(\kappa) \mid \delta < \lambda\}.$$

DEMOSTRACIÓN: $\beth_0(\kappa)$ es el elemento de $\Phi(\kappa)$ cuya sección inicial es vacía, es decir, su mínimo, luego es κ por f).

$\beth_\alpha(\kappa)$ y $\beth_{\alpha+1}(\kappa)$ son los elementos de $\Phi(\kappa)$ cuyas secciones iniciales tienen ordinal α y $\alpha+1$, respectivamente, luego el segundo es el menor elemento de $\Phi(\kappa)$ mayor que el primero, luego es $2^{\beth_\alpha(\kappa)}$ por g).

Si $B = \{\beth_\delta(\kappa) \mid \delta < \lambda\}$, entonces $\mu = \sup B \in \Phi(\kappa)$ por c) y la parte ya probada. Sea $\alpha = \operatorname{ord}(\Phi(\kappa)^<_\mu, \leq)$, de modo que $\mu = \beth_\alpha(\kappa)$. Hemos de probar que $\alpha = \lambda$. Si $\delta < \lambda$, entonces $\beth_\delta(\kappa) < \mu$ determina un segmento de ordinal δ, necesariamente menor que α, luego $\lambda \leq \alpha$. Si $\delta < \alpha$, entonces existe un $\nu < \mu$ cuyo segmento tiene ordinal δ, pero entonces existe un $\delta' < \lambda$ tal que $\nu < \beth_{\delta'}(\kappa)$, luego δ (el ordinal del segmento de ν) es menor que δ' (el ordinal del segmento de $\beth_{\delta'}(\kappa)$), luego $\delta < \lambda$, con lo que $\alpha \leq \lambda$. ∎

Teorema 6.83 *Para todo cardinal κ, se cumple*

$$\bigwedge\alpha(\alpha \in \mathrm{Ord} \land \alpha \leq \beta_0(\kappa) \rightarrow T(\alpha) \leq \beta_0(T(\kappa)) \land T(\beth_\alpha(\kappa)) = \beth_{T(\alpha)}(T(\kappa))).$$

DEMOSTRACIÓN: Consideramos el conjunto

$$X = \{\alpha \mid \alpha \in \mathrm{Ord} \land \alpha \leq \beta_0(\kappa) \land (\beta_0(T(\kappa)) < T(\alpha) \lor$$
$$(T(\alpha) \leq \beta_0(T(\kappa)) \land T(\beth_\alpha(\kappa)) \neq \beth_{T(\alpha)}(T(\kappa))))\}.$$

Hemos de probar que es vacío. En caso contrario tiene un mínimo elemento $\alpha \leq \beta_0(\kappa)$, de modo que si $\delta < \alpha$ entonces

$$T(\delta) \leq \beta_0(T(\kappa)) \land T(\beth_\delta(\kappa)) = \beth_{T(\delta)}(T(\kappa)).$$

Por i) tenemos que $T(\beth_\alpha(\kappa)) \in \Phi(T(\kappa))$. Veamos que el conjunto

$$Y = \{\beth_{T(\delta)}(T(\kappa)) \mid \delta < \alpha\}$$

está formado por los elementos de $\Phi(T(\kappa))$ menores que $T(\beth_\alpha(\kappa))$. En efecto, si $\mu \in \Phi(T(\kappa))$ cumple $\mu < T(\beth_\alpha(\kappa))$, por i) tenemos que $T^{-1}(\mu) \in \Phi(\kappa)$, luego $T^{-1}(\mu) < \beth_\alpha(\kappa)$, luego el segmento determinado por $T^{-1}(\mu)$ tiene ordinal $\delta < \alpha$, luego $T^{-1}(\mu) = \beth_\delta(\kappa)$ y $\mu = \beth_{T(\delta)}(T(\kappa))$.

Así pues, basta probar que el ordinal de $Y = \Phi(T(\kappa))^<_{T(\beth_\alpha(\kappa))}$ es $T(\alpha)$. Para ello tomamos $\operatorname{ord}(A, \leq) = \alpha$ y definimos una aplicación $f : \mathcal{P}_1 A \longrightarrow Y$ mediante

$$f(\{a\}) = \beth_{T(\operatorname{ord}(A^<_a, \leq))}(T(\kappa)).$$

(Aquí es crucial que el miembro derecho y $\{a\}$ tienen el mismo tipo.) Es claro que f es una semejanza, luego $\operatorname{ord}(Y, \leq) = \operatorname{ord}(\mathcal{P}_1 A, \leq) = T(\alpha)$, como había que probar. ∎

Para terminar observemos que β_0 es un ordinal no cantoriano, ya que si fuera cantoriano el teorema anterior nos daría que $\beth_{\beta_0}$ sería un cardinal cantoriano, luego sería $\beth_{\beta_0} \leq \kappa_2$ y estaría definido $2^{\beth_{\beta_0}}$, lo cual es absurdo. Por consiguiente, $\beth_\alpha$ está definido para todo ordinal fuertemente cantoriano α. En particular tenemos la sucesión de cardinales cantorianos

$$\beth_0 < \beth_1 < \beth_2 < \beth_3 < \cdots$$

lo cual no significa que $\beth_n$ esté definido para todo $n \in \mathbb{N}$.

6.10 Existencia de átomos

Hasta aquí no hemos mencionado los átomos en ninguna prueba. Todo lo que hemos demostrado "parece" ser consistente con el axioma $\bigwedge x \ \mathrm{cto}\, x$. Sin embargo, en esta sección demostraremos la existencia de átomos. No se conoce ninguna prueba de este hecho que no use el axioma de elección.

Mantenemos la notación introducida en la sección anterior para definir $\beth_\alpha$. Necesitamos algunos hechos adicionales:

a) Si $\kappa \leq \kappa_1$, entonces $|\Phi(\kappa)| \geq 2$.

En efecto, pues $\kappa,\ \exp\kappa \in \Phi(\kappa)$.

b) Si $\kappa_1 < \kappa$ entonces $|\Phi(\kappa)| = 1$.

En efecto, se cumple que $\Phi(\kappa) = \{\kappa\}$, pues $\exp\kappa = \varnothing$ y basta tomar $A = \{\kappa\}$ en la propiedad d) de la sección anterior.

c) Si $\kappa \leq \kappa_1$ entonces $|\Phi(\kappa)| = |\Phi(\exp\kappa)| + 1$.

Aplicamos dos veces la propiedad d) de la sección anterior para concluir que $\Phi(\kappa) = \{\kappa\} \cup \Phi(\exp\kappa)$. Tomando $A = \{\kappa\} \cup \Phi(\exp\kappa)$ concluimos que $\Phi(\kappa) \subset \{\kappa\} \cup \Phi(\exp\kappa)$ y con $A = \Phi(\kappa)$ obtenemos que $\Phi(\exp\kappa) \subset \Phi(\kappa)$. Además $\kappa \notin \Phi(\exp\kappa)$ (pues en caso contrario sería $\exp\kappa \leq \kappa$).

d) Si $\Phi(T(\kappa))$ es finito, entonces $\Phi(\kappa)$ es finito.

Basta considerar $f : \mathcal{P}_1\Phi(\kappa) \longrightarrow \Phi(T(\kappa))$ dada por $f(\{\mu\}) = T(\mu)$. La definición es correcta porque está estratificada y por la propiedad i) de la sección anterior. Obviamente es inyectiva, luego $|\mathcal{P}_1\Phi(\kappa)| = T(|\Phi(\kappa)|)$ es finito, luego $|\Phi(\kappa)|$ también es finito.

Teorema 6.84 (Specker) $|\mathcal{P}V| < |V|$.

Demostración: Supongamos que $|\mathcal{P}V| = |V|$, es decir, que $\exp\kappa_1 = \kappa_0$.

- *Si* $\kappa_1 < \kappa$, *entonces* $|\Phi(T(\kappa))| = 2$ *o* 3.

  En efecto, tenemos que $T(\kappa_1) < T(\kappa) \leq \kappa_1$, luego

$$\exp T(\kappa) \geq \exp T(\kappa_1) = T(\exp\kappa_1) = T(\kappa_0) = \kappa_1.$$

Si $\exp T(\kappa) = \kappa_1$, entonces es fácil ver que

$$\Phi(T(\kappa)) = \{T(\kappa), \kappa_1, \kappa_0\}.$$

Si $\exp T(\kappa) > \kappa_1$ entonces $\Phi(T(\kappa)) = \{T(\kappa), \exp T(\kappa)\}$.

- *Si $\Phi(\kappa)$ es finito, $|\Phi(T(\kappa))| = T(|\Phi(\kappa)|) + 1$ o $|\Phi(T(\kappa))| = T(|\Phi(\kappa)|) + 2$.*

  En efecto, la afirmación está estratificada, luego, en caso de que sea falsa, podemos considerar un cardinal κ que la incumpla con $|\Phi(\kappa)|$ mínimo.

  Si $|\Phi(\kappa)| = 1$, hemos visto que necesariamente $\exp\kappa = \varnothing$, luego[11] $\kappa_1 < \kappa$, luego $|\Phi(T(\kappa))| = 2$ o 3 por el apartado anterior. Como $T(|\Phi(\kappa)|) = T(1) = 1$, se cumple el enunciado.

  Si $|\Phi(\kappa)| > 1$, entonces $\kappa \leq \kappa_1$, y hemos visto que $|\Phi(\kappa)| = |\Phi(\exp\kappa)| + 1$, luego $|\Phi(\exp\kappa)| < |\Phi(\kappa)|$, pues son números naturales. Por la minimalidad de $|\Phi(\kappa)|$ sabemos que

  $$|\Phi(T(\exp\kappa))| = T(|\Phi(\exp\kappa)|) + 1 \quad \text{o} \quad |\Phi(T(\exp\kappa))| = T(|\Phi(\exp\kappa)|) + 2$$

  y por consiguiente

  $$\begin{aligned}|\Phi(T(\kappa))| = |\Phi(\exp T(\kappa))| + 1 = |\Phi(T(\exp\kappa))| + 1 = T(|\Phi(\exp\kappa)|) + 2/3 \\ = T(\Phi(\kappa)) + 1/2,\end{aligned}$$

  en contradicción con el supuesto de que κ no cumplía el enunciado.

Sea $A = \{\kappa \mid \kappa \in K \wedge \Phi(\kappa) \text{ es finito}\}$.

Tenemos que $A \neq \varnothing$ pues $\Phi(\kappa_0) = \{\kappa_0\}$. Sea κ el mínimo elemento[12] de A. Como $\Phi(\kappa)$ es finito, el cardinal $T(|\Phi(\kappa)|)$ también es finito, y acabamos de probar que entonces $\Phi(T(\kappa))$ también es finito. Por la minimalidad de κ tiene que ser $\kappa \leq T(\kappa) \leq T(\kappa_0) = \kappa_1$, luego $\mu = T^{-1}(\kappa) \leq \kappa$.

Como $\Phi(T(\mu)) = \Phi(\kappa)$ es finito, la propiedad d) precedente nos da que $\Phi(\mu)$ es finito, luego $\kappa \leq \mu$ por la minimalidad de κ. En definitiva, $\kappa = \mu$, luego el enunciado precedente se reduce a que $|\Phi(\kappa)| = T(|\Phi(\kappa)|) + 1/2$.

En definitiva, hemos encontrado un número natural $n = |\Phi(\kappa)|$ tal que $n = T(n) + 1$ o bien $n = T(n) + 2$, pero eso es imposible, ya que, como T conserva sumas y productos y $T(1) = 1$, se cumple que n es par si y sólo si $T(n)$ es par, luego no puede darse la igualdad $n = T(n) + 1$. Similarmente, $n = T(n) + 2$ es imposible porque n y $T(n)$ han de ser congruentes[13] módulo 3. ■

Observemos que $\mathcal{P}V = [\text{cto}]$ es el conjunto de todos los conjuntos, de modo que $V = \mathcal{P}V + \text{At}$, donde At es el conjunto de todos los átomos. Como $\mathcal{P}V$

[11] Aquí usamos AE.

[12] Aquí volvemos a usar AE.

[13] No hemos demostrado estas propiedades aritméticas elementales de los números naturales, pero todas ellas son teoremas de cualquier sistema aritmético, como lo es NFA_p.

es infinito, el teorema anterior implica que $|V| = |\mathcal{P}V| + |\mathrm{At}| = |\mathrm{At}|$, luego concluimos que

$$[\mathrm{cto}] < |\mathrm{At}|.$$

Así pues, el axioma de elección implica que hay más átomos que conjuntos. En particular, en NF se puede probar $\neg$AE.

Capítulo VII

Extensiones de NFA

La teoría de conjuntos NFA (junto con los axiomas de infinitud y elección[1]) pretende ser una alternativa "viable" a la teoría de conjuntos usual ZFC, en el sentido de que permita formalizar en su seno todas las matemáticas "usuales" (álgebra, análisis matemático, etc.) con la ventaja de disponer de un conjunto universal. Obviamente, siempre estará el inconveniente técnico de que hay que vigilar constantemente que las fórmulas empleadas al definir conjuntos estén estratificadas, pero cabe plantearse si este inconveniente es sólo una "incomodidad" o si es más bien un obstáculo esencial que impide formalizar en la teoría determinados razonamientos más o menos básicos.

La respuesta es que hay razonamientos elementales que no pueden formalizarse en NFA. Consideremos, por ejemplo, la afirmación siguiente:

> *Si A es un conjunto de cardinal $m \in \mathbb{N}$ cuyos elementos son conjuntos disjuntos dos a dos de cardinal $n \in \mathbb{N}$, entonces $|\bigcup A| = mn$.*

Claramente equivale a $\bigwedge m \in \mathbb{N}\ \phi(m)$, donde

$$\phi(m) \equiv m \in \mathbb{N} \land \bigwedge A(|A| = m \land \bigwedge x \in A\ (\operatorname{cto} x \land |x| = n) \land$$

$$\bigwedge xy \in A(x \neq y \to x \cap y = \varnothing) \to |\bigcup A| = mn),$$

y es fácil demostrar $\phi(0)$ y $\bigwedge m \in \mathbb{N}(\phi(m) \to \phi(m{+}1))$, pero en NFA no podemos concluir de ahí que, por inducción, $\bigwedge m \in \mathbb{N}\ \phi(m)$. Para ello tendríamos que definir el conjunto

$$X = \{m \mid \phi(m)\},$$

de modo que $0 \in X \land \bigwedge m \in X\ m+1 \in X$, lo cual sí que implicaría que $X = \mathbb{N}$ y, por consiguiente $\bigwedge m \in \mathbb{N}\ \phi(m)$. Sin embargo, la fórmula $\phi(m)$ no está estratificada, pues si intentamos asignar tipos a sus variables la única posibilidad (salvo traslaciones) resulta ser

[1]En este capítulo trabajaremos en NFA+AI+AE, y por brevedad nos referiremos a esta teoría simplemente como NFA. En particular consideraremos siempre pares ordenados nivelados.

$$\bigwedge A(|\underset{1}{A}| = \underset{2}{m} \land \bigwedge \underset{0}{x} \in \underset{1}{A}\ (\text{cto}\, \underset{0}{x} \land |\underset{0}{x}| = \underset{1}{n}) \land$$
$$\forall \underset{0}{x}\, \underset{0}{y} \in \underset{1}{A}(\underset{0}{x} \neq \underset{0}{y} \to \underset{0}{x} \cap \underset{0}{y} = \varnothing) \to |\bigcup \underset{1}{A}| = \underset{?}{m}\, \underset{1}{n}),$$

y vemos que la variable m debería tener tipo 1 en su última aparición (pues, como A tiene tipo 1, resulta que $\bigcup A$ tiene tipo 0 y $|\bigcup A|$ tiene tipo 1, al igual que n), pero la primera aparición de m nos fuerza a asignarle tipo 2.

Así pues, hay inducciones "elementales" que no pueden formalizarse en NFA. Podemos poner un ejemplo mucho más simple: la afirmación siguiente no es un teorema de NFA:

$$\bigwedge n \in \mathbb{N}\ |\{1, \ldots, n\}| = n.$$

Si definimos

$$I_n = \{m \mid m \in \mathbb{N} \land 1 \leq m \leq n\},$$

es fácil probar que $I_0 = \varnothing$ y que $\bigwedge n \in \mathbb{N}\ I_{n+1} = I_n \cup \{n+1\}$, de modo que

$$|I_0| = 0 \land \bigwedge n \in \mathbb{N}\ |I_{n+1}| = |I_n| + 1.$$

Sin embargo, en NFA no podemos probar que $\bigwedge n \in \mathbb{N}\ |I_n| = n$. La situación es la misma de antes: es claro que el término I_n está estratificado y tiene tipo una unidad mayor que n, por lo que la fórmula $\phi(n) \equiv |I_n| = n$ no está estratificada (el primer miembro tiene tipo dos unidades mayor que el segundo). Las observaciones que hemos hecho permiten probar en NFA

$$\phi(0) \land \bigwedge n \in \mathbb{N}\, (\phi(n) \to \phi(n+1)),$$

pero de ahí no podemos deducir por inducción que $\bigwedge n \in \mathbb{N}\ \phi(n)$.

Las restricciones de estratificación no limitan únicamente los razonamientos por inducción. Por ejemplo, si tenemos una relación de equivalencia R en un conjunto X, podemos definir el conjunto cociente X/R, pero no la proyección $p : X \longrightarrow X/R$ dada por $p(x) = [x]_R$, pues el tipo de $[x]_R$ es una unidad mayor que el de x. Por otro lado, no sólo no podemos demostrar que todo conjunto cumple $|X| < |\mathcal{P}X|$, sino que ni siquiera es cierto en general que $|X| \leq |\mathcal{P}X|$ (pues hemos demostrado que $|\mathcal{P}V| < |V|$). Esto es tanto como decir que no existe la aplicación $x \mapsto \{x\}$, lo cual es consistente porque el término $(x, \{x\})$ no está estratificado, por lo que no podemos definir tal aplicación.

Obviamente, no podemos eliminar en NFA las restricciones sobre estratificación, puesto que son necesarias para evitar las paradojas de la teoría de conjuntos, pero en este capítulo veremos que es posible formular axiomas adicionales que limiten estos inconvenientes a conjuntos "grandes", a conjuntos "cercanos" a V, a Ord y a otros conjuntos que en ZFC no existen, mientras que para conjuntos "pequeños" garanticen que sus propiedades son esencialmente las mismas que en ZFC.

A la posibilidad de eludir en determinados contextos las exigencias de estratificación a la hora de definir conjuntos es a lo que llamamos en general (e informalmente) "subversión" (de la estratificación). En la primera sección introducimos los conjuntos fuertemente cantorianos, que, como veremos, permiten una forma sistemática de subversión, si bien necesitaremos un axioma adicional para justificar la existencia de conjuntos fuertemente cantorianos no triviales.

7.1 Conjuntos cantorianos

Recordemos que la versión del teorema de Cantor demostrable en NFA es la que afirma que, para todo conjunto X, se cumple $|\mathcal{P}_1 X| < |\mathcal{P}X|$ o equivalentemente,

$$T(|X|) < |\mathcal{P}X|.$$

En términos de la exponenciación de cardinales, tenemos que

$$|\mathcal{P}X| = T(2^{|X|}) = 2^{T(|X|)},$$

por lo que el teorema de Cantor equivale a que $\kappa < 2^\kappa$, para todo cardinal $\kappa \leq \kappa_1$, donde $\kappa_1 = T(\kappa_0)$ y $\kappa_0 = |V|$.

Definición 7.1 Un conjunto X es *cantoriano* si $|\mathcal{P}_1 X| = |X|$ y es *fuertemente cantoriano* si existe una aplicación $f : X \longrightarrow \mathcal{P}_1 X$ tal que $\bigwedge x \in X\ f(x) = \{x\}$.

Dicha aplicación es necesariamente biyectiva, por lo que todo conjunto fuertemente cantoriano es cantoriano.

Observemos que estas dos propiedades dependen únicamente del cardinal del conjunto, pues toda $g : X \longrightarrow Y$ biyectiva induce claramente una biyección $\bar{g} : \mathcal{P}_1 X \longrightarrow \mathcal{P}_1 Y$, por lo que X es cantoriano si y sólo si lo es Y. Similarmente, si existe $f : X \longrightarrow \mathcal{P}_1 X$ dada por $f(x) = \{x\}$, entonces $(g^{-1} \circ f \circ \bar{g})(y) = \{y\}$, luego X es fuertemente cantoriano si y sólo si lo es Y. En resumen, podemos dar la definición siguiente:

Un cardinal κ es *cantoriano* (resp. *fuertemente cantoriano*) si contiene un conjunto cantoriano (resp. fuertemente cantoriano).

En estos términos, podemos afirmar que un conjunto es cantoriano (resp. fuertemente cantoriano) si y sólo si lo es su cardinal. Además, teniendo en cuenta que si $|X| = \kappa$, entonces $|\mathcal{P}_1 X| = T(\kappa)$, resulta que un cardinal es cantoriano[2] si y sólo si $T(\kappa) = \kappa$.

Alternativamente, un conjunto X es cantoriano si y sólo si cumple el teorema de Cantor de ZFC, es decir, si y sólo si

$$|X| < |\mathcal{P}X| = 2^{|X|}.$$

Definimos un *ordinal cantoriano* como un ordinal α tal que $T(\alpha) = \alpha$, donde ahora T es el operador definido sobre ordinales en 6.45.

[2] Y ahora es inmediato que un cardinal cantoriano no es necesariamente un conjunto cantoriano. Por ejemplo, $T(1) = 1$, luego 1 es un cardinal cantoriano, pero $|1| = |\mathcal{P}_1 V| = \kappa_1$ y $T(\kappa_1) = \kappa_2 < \kappa_1$, luego 1 no es un conjunto cantoriano.

La relación $\operatorname{card}(T(\alpha)) = T(\operatorname{card}(\alpha))$ implica que si α es un ordinal cantoriano entonces $\operatorname{card}(\alpha)$ es un cardinal cantoriano, aunque el recíproco no es necesariamente cierto.

Diremos que un ordinal α es *fuertemente cantoriano* si $\operatorname{card}(\alpha)$ es un cardinal fuertemente cantoriano.

Así se cumple que todo ordinal fuertemente cantoriano es cantoriano, pues si $\alpha = \operatorname{ord}(A, \leq)$, entonces $\operatorname{card}(\alpha) = |A|$ es fuertemente cantoriano, luego existe $f : A \longrightarrow \mathcal{P}_1 A$ dada por $f(x) = \{x\}$, y claramente $f : (A, \leq) \longrightarrow (A, \leq)_1$ semejanza, luego $T(\alpha) = \alpha$.

Veamos algunas propiedades de estos conceptos:

Teorema 7.2 *Se cumple:*

a) Todo subconjunto de un conjunto fuertemente cantoriano es fuertemente cantoriano.

b) Si κ es un cardinal fuertemente cantoriano, todo cardinal $\mu \leq \kappa$ es fuertemente cantoriano.

c) Si α es un ordinal fuertemente cantoriano, todo ordinal $\beta \leq \alpha$ es fuertemente cantoriano.

d) Si X es un conjunto (fuertemente) cantoriano, $\mathcal{P}X$ también lo es.

e) Si κ es un cardinal (fuertemente) cantoriano, 2^κ también lo es.

f) Si κ es un cardinal (fuertemente) cantoriano, κ^+ también lo es.

DEMOSTRACIÓN: a) Si X es fuertemente cantoriano, existe $f : X \longrightarrow \mathcal{P}_1 X$ tal que $f(x) = \{x\}$, luego, para todo $Y \subset X$, la aplicación $f|_Y : Y \longrightarrow \mathcal{P}_1 Y$ prueba que Y es fuertemente cantoriano.

b) es consecuencia inmediata de a) y a su vez c) es consecuencia de b).

d) Si X es cantoriano, entonces $T(|X|) = |X|$, luego

$$T(|\mathcal{P}X)|) = T(2^{T(|X|)}) = T(2^{|X|}) = |\mathcal{P}X|,$$

luego $\mathcal{P}X$ es un conjunto cantoriano.

Si X es fuertemente cantoriano, sea $f : X \longrightarrow \mathcal{P}_1 X$ dada por $f(x) = \{x\}$, sea $\bar{f} : \mathcal{P}X \longrightarrow \mathcal{P}\mathcal{P}_1 X$ la aplicación dada por $\bar{f}(A) = f[A]$, claramente bien definida, y sea $g : \mathcal{P}\mathcal{P}_1 X \longrightarrow \mathcal{P}_1\mathcal{P}X$ la biyección dada por

$$g(A) = \{\bigcup A\},$$

que también está bien definida, pues la unión baja una unidad el tipo y $\{\}$ lo sube una unidad. Es fácil ver que $\bar{f} \circ g : \mathcal{P}X \longrightarrow \mathcal{P}_1\mathcal{P}X$ viene dada por $A \mapsto \{A\}$, luego $\mathcal{P}X$ es fuertemente cantoriano.

e) se sigue inmediatamente de d). Notemos, no obstante, que si κ es cantoriano entonces $\kappa \leq \kappa_0$, luego $\kappa = T(\kappa) \leq T(\kappa_0) = \kappa_1$, luego la exponencial 2^κ está definida.

f) Observemos que si κ es cantoriano entonces $\kappa < \kappa_0$, pues ciertamente κ_0 no es cantoriano, luego está definido κ^+. Entonces $T(\kappa^+) = T(\kappa)^+ = \kappa^+$, luego κ^+ es cantoriano.

Si κ es fuertemente cantoriano, entonces $\kappa^+ \leq 2^\kappa$ y, como 2^k es fuertemente cantoriano por e), concluimos que κ^+ también lo es por b). ■

Los recíprocos de todas las afirmaciones del teorema anterior son ciertas para conjuntos, cardinales y ordinales fuertemente cantorianos, pero en realidad se cumple algo más fuerte:

Teorema 7.3 *Si α es un ordinal tal que todo ordinal $\delta < \alpha$ es cantoriano, entonces α es fuertemente cantoriano, luego todo ordinal $\delta < \alpha$ es fuertemente cantoriano.*

DEMOSTRACIÓN: Podemos considerar la aplicación $f : \mathrm{Ord}^<_\alpha \longrightarrow \mathcal{P}_1(\mathrm{Ord}^<_\alpha)$ dada por $f(\delta) = \{T^{-1}(\delta)\}$ (pues la definición está estratificada), pero por hipótesis no es sino $\delta \mapsto \{\delta\}$, luego el conjunto $\mathrm{Ord}^<_\alpha$ es fuertemente cantoriano, luego $|\mathrm{Ord}^<_\alpha| = \mathrm{card}(T^2(\alpha))$ es un cardinal fuertemente cantoriano, luego $T^2(\alpha)$ es un ordinal fuertemente cantoriano, luego cantoriano, luego $T^3(\alpha) = T^2(\alpha)$, luego $T(\alpha) = \alpha$, luego $\alpha = T^2(\alpha)$ es fuertemente cantoriano. ■

Por lo tanto, si todo cardinal menor que un cardinal κ es fuertemente cantoriano, todo ordinal menor que $\mathrm{In}(\kappa)$ es fuertemente cantoriano, luego $\mathrm{In}(\kappa)$ es fuertemente cantoriano, luego κ es fuertemente cantoriano.

Ejemplo Consideremos un conjunto con tres elementos, como $X = \{0, 1, 2\}$. Entonces podemos definir

$$f = \{(0, \{0\}), (1, \{1\}), (2, \{2\})\}$$

y claramente $f : X \longrightarrow \mathcal{P}_1 X$ cumple $\bigwedge x \in X\ f(x) = \{x\}$, luego X es un conjunto fuertemente cantoriano y 3 es un cardinal fuertemente cantoriano.

Del mismo modo se puede probar que los cardinales $0, 1, 2, 3, \ldots$ son fuertemente cantorianos, lo cual no significa que podamos probar que todos los números naturales son cardinales fuertemente cantorianos, ni siquiera cantorianos. ■

El teorema 6.73 implica que si α es un ordinal cantoriano entonces $\aleph_\alpha$ es un cardinal cantoriano, luego los cardinales $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots$ son cantorianos. Similarmente, el teorema 6.83 implica que los cardinales $\beth_0, \beth_1, \beth_2, \ldots$ son cantorianos.

Recordemos que $\omega_\alpha = \mathrm{In}(\aleph_\alpha)$, y es fácil probar que $T(\omega_\alpha) = \omega_{T(\alpha)}$, luego también se cumple que $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots$ son ordinales cantorianos.[3]

[3]Cabe destacar un argumento que prueba explícitamente que el ordinal ω es cantoriano: basta considerar $s : (\mathbb{N}, \leq) \longrightarrow (\mathbb{N}, \leq)_1$ dada por $s(n) = \{T^{-1}(n)\}$, que claramente es una semejanza, luego $\omega = T(\omega)$.

Así pues, aunque existen muchos ordinales y cardinales cantorianos, no hemos encontrado más ejemplos de conjuntos, ordinales y cardinales fuertemente cantorianos que los conjuntos finitos (y sus cardinales y ordinales) cuyos elementos podemos escribir explícitamente. Vamos a dar un ejemplo más, aunque tampoco es muy representativo.

Puesto que NFA extiende a la teoría básica T, en NFA tenemos definida la clase Ω de los ordinales de von Neumann (que no es un conjunto, pues si lo fuera sería un ordinal de von Neumann, luego tendría que ser $\Omega \in \Omega$ y esto contradice la definición de ordinal de von Neumann).

Teorema 7.4 *Todo ordinal de von Neumann es un conjunto fuertemente cantoriano. Los ordinales (de* Ord*) asociados a ordinales de von Neumann son fuertemente cantorianos.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\alpha \in \Omega$ y sea $\bar{\alpha} = \operatorname{ord}(\alpha, \leq) \in \operatorname{Ord}$. Vimos en el capítulo anterior que $T^2(\bar{\alpha})$ es el ordinal del conjunto de las secciones iniciales de α con el orden dado por la inclusión, pero dicho conjunto es el propio α y la inclusión es el buen orden de α, luego concluimos que $T^2(\bar{\alpha}) = \bar{\alpha}$, y esto implica que $T(\bar{\alpha}) = \bar{\alpha}$, pues si $T(\bar{\alpha}) \leq \bar{\alpha}$ entonces $\bar{\alpha} = T^2(\bar{\alpha}) \leq T(\alpha)$ y si $\bar{\alpha} \leq T(\bar{\alpha})$ entonces $T(\bar{\alpha}) \leq T^2(\bar{\alpha}) = \bar{\alpha}$, luego $T(\bar{\alpha}) = \bar{\alpha}$ en cualquier caso. Esto prueba que $\bar{\alpha}$ es un ordinal cantoriano.

Más aún, cada ordinal menor que $\bar{\alpha}$ es el ordinal de una sección inicial de α, luego es el ordinal de otro ordinal de von Neumann, luego es cantoriano. El teorema 7.3 prueba entonces que $\bar{\alpha}$ es de hecho fuertemente cantoriano, luego $|\alpha| = \operatorname{card}(\bar{\alpha})$ es un cardinal fuertemente cantoriano, luego α es un conjunto fuertemente cantoriano. ■

En particular, todos los números naturales de von Neumann son fuertemente cantorianos, pero esto no permite probar que todos los números naturales sean fuertemente cantorianos. Para ello necesitaríamos demostrar que

$$\bigwedge n \in \mathbb{N} \bigvee m \in \omega \ |m| = n,$$

donde ω representa aquí a la clase de los números naturales de von Neumann, que no es necesariamente un conjunto. Si lo es, podemos definir el conjunto

$$X = \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge \bigvee m \in \omega \ |m| = n\}$$

definido por la fórmula estratificada $\phi(n, w) \equiv n \in \mathbb{N} \wedge \bigvee m \in w \ |m| = n$ con ω como parámetro, y una simple inducción demuestra entonces que, en efecto, todos los números naturales son cardinales fuertemente cantorianos, pero si la clase ω no es un conjunto, entonces la fórmula $m \in \omega$ no está estratificada y no podemos definir el conjunto X.

Teorema 7.5 *La clase de los conjuntos (resp. ordinales, cardinales) cantorianos no es un conjunto.*

Demostración: Si existiera el conjunto de los cardinales cantorianos, también existiría el conjunto N de los cardinales no cantorianos y habría un mínimo cardinal no cantoriano κ. Si $T(\kappa) < \kappa$, entonces $T(\kappa)$ es cantoriano, luego $T^2(\kappa) = T(\kappa)$, luego $T(\kappa) = \kappa$ y κ es cantoriano, contradicción. Si $\kappa < T(\kappa)$ entonces $T^{-1}(\kappa) < \kappa$, luego $T^{-1}(\kappa)$ es cantoriano, luego $\kappa = T(\kappa)$ y κ es cantoriano, contradicción.

Para ordinales se razona análogamente. Si existiera el conjunto C de los conjuntos cantorianos, la aplicación $\mathcal{P}_1 C \longrightarrow K$ dada por $\{X\} \mapsto |X|$ tendría por imagen al conjunto de los cardinales cantorianos. ■

Sucede que los conjuntos que realmente aprovechan para resolver los problemas planteados en la introducción de este capítulo son los fuertemente cantorianos, pero antes de entrar en cuál es su utilidad, dado que en NFA se puede probar la existencia de muy pocos conjuntos fuertemente cantorianos, expondremos en la sección siguiente un axioma que implica que existen en abundancia.

7.2 El axioma de cómputo

Recordemos ahora el ejemplo que hemos planteado en la introducción de este capítulo sobre los conjuntos

$$I_n \equiv \{m \in \mathbb{N} \mid 1 \leq m \leq n\}.$$

Claramente, la aplicación $f : I_n \longrightarrow \mathrm{Ord}^<_{\mathrm{In}(n)}$ dada por $f(m) = \mathrm{In}(m-1)$ es biyectiva, luego

$$|I_n| = |\mathrm{Ord}^<_{\mathrm{In}(n)}| = T^2(\mathrm{In}(n)) = T^2(n).$$

Alternativamente, como la fórmula $|I_n| = T^2(n)$ está estratificada, podemos demostrarla por inducción, y la prueba no ofrece ninguna dificultad. Más concretamente, por las mismas consideraciones expuestas en la introducción,

$$|I_0| = 0 = T^2(0) \wedge |I_{n+1}| = |I_n| + 1 = T^2(n) + T^2(1) = T^2(n+1).$$

En particular podemos demostrar que $|I_0| = 0$, $|I_1| = 1$, $|I_2| = 2$, etc. Sin embargo, puede probarse que en NFA (incluyendo AI+AE) no puede demostrarse el axioma de cómputo:

Axioma de cómputo (AC) $\bigwedge n \in \mathbb{N}\ |\{1, \ldots, n\}| = n.$

Teorema 7.6 *Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

a) El axioma de cómputo.

b) Todos los cardinales finitos son cantorianos.

c) Todos los ordinales finitos son cantorianos.

d) ω es un ordinal fuertemente cantoriano.

e) $\aleph_0$ *es un cardinal fuertemente cantoriano.*

f) Todos los cardinales finitos son fuertemente cantorianos.

g) Todos los ordinales finitos son fuertemente cantorianos.

DEMOSTRACIÓN: a) $\Leftrightarrow$ b) Hemos visto que AC equivale a que

$$\bigwedge n \in \mathbb{N}\ T^2(n) = n,$$

mientras que b) equivale a $\bigwedge n \in \mathbb{N}\ T(n) = n$, luego es obvio que b) $\Rightarrow$ a). Si suponemos AC y se cumple $T(n) \leq n$, entonces $n = T^2(n) \leq T(n)$, luego $T(n) = n$, e igualmente, si $n \leq T(n)$, resulta que $T(n) \leq T^2(n) = n$, luego $T(n) = n$ en cualquier caso.

b) $\Rightarrow$ c) Si n es un ordinal finito, entonces $\operatorname{card}(n)$ es un cardinal finito, luego $\operatorname{card}(T(n)) = T(\operatorname{card}(n)) = \operatorname{card}(n)$ y por el teorema 6.62 concluimos que $T(n) = n$.

c) $\Rightarrow$ d) Por el teorema 7.3.

Las implicaciones d) $\Rightarrow$ e) $\Rightarrow$ f) $\Rightarrow$ b) son inmediatas, al igual que f) $\Leftrightarrow$ g). ■

Las observaciones tras el teorema 7.4 prueban ahora que en NFA

$$\omega \in V \Rightarrow \text{AC}.$$

Observemos ahora que AC implica la existencia de muchos más conjuntos fuertemente cantorianos. Aplicando sucesivamente el teorema 7.2 f) podemos probar que $\aleph_0$, $\aleph_1$, $\aleph_2$, ... son fuertemente cantorianos, lo cual no significa que podamos probar que $\aleph_n$ es fuertemente cantoriano para todo ordinal $n < \omega$.

Por otro lado, el ordinal α_0 tal que $\kappa_0 = \aleph_{\alpha_0}$ no puede ser numerable (pues no es cantoriano), luego $\omega_1 \leq \alpha_0$, y $|\alpha_0|$ tampoco puede ser $\aleph_1$, luego $\omega_2 \leq \alpha_0$, y así sucesivamente, luego $|V|$ tiene que ser mayor que $\aleph_{\omega_0}$, $\aleph_{\omega_1}, \aleph_{\omega_2}, \cdots$, pero no podemos probar que $\bigwedge n < \omega\ |V| \geq \aleph_{\omega_n}$. En particular no podemos probar la existencia[4] de $\aleph_{\omega_\omega}$. En otras palabras, podría ocurrir que existiera un ordinal finito $n < \omega$ tal que $|V| = \aleph_{\omega_n}$.

Estos hechos se pueden refinar considerando $\beth$ en lugar de $\aleph$. En efecto, aplicando sucesivamente el teorema 7.2 e) podemos probar que los cardinales $\beth_0, \beth_1, \beth_2 \ldots$ son fuertemente cantorianos, lo cual no significa que podamos probar que $\beth_n$ es fuertemente cantoriano para todo ordinal $n < \omega$.

Además, si llamamos β_0 al máximo ordinal tal que $\beth_{\beta_0}$ está definido, no puede ser que $T(\beta_0) = \beta_0$, pues entonces, como $\beth_{\beta_0} \leq \kappa$, al aplicar T (teniendo en cuenta el teorema 6.83) obtendríamos que $\beth_{\beta_0} \leq \kappa_1$, con lo que estaría definido $\beth_{\beta_0+1}$. De hecho, el teorema 6.83 nos da que $T(\beta_0) < \beta_0$. En particular

[4]Notemos que ω_ω es el ordinal cuyo cardinal asociado es $\aleph_\omega$, que existe porque, según hemos visto, $\omega < \alpha_0$.

β_0 no es un ordinal cantoriano, luego β_0 es mayor que cualquier ordinal fuertemente cantoriano, por ello, si llamamos $\eta_\alpha = \mathrm{In}(\beth_\alpha)$, podemos probar que los ordinales η_0, η_1, $\eta_2, \ldots$ son todos menores que β_0, pero cabe la posibilidad de que exista un $n < \omega$ tal que $\beta_0 = \eta_n$, de modo que no podemos probar la existencia del cardinal $\beth_{\eta_\omega}$.

7.3 Subversión de la estratificación

Veamos ahora cómo los conjuntos fuertemente cantorianos nos permiten evitar parcialmente los requisitos de estratificación que en principio impone la teoría.

El caso más simple de subversión se deduce de que AC implica que

$$\bigwedge n \in \mathbb{N}\ T(n) = n \wedge \bigwedge n \in \mathbb{N}\ T^{-1}(n) = n,$$

y esto nos permite considerar como fórmulas estratificadas aquellas en las que la estratificación falle en una o varias variables restringidas a números naturales, pues la fórmula puede reemplazarse por una equivalente en la que una variable n sea sustituida por $T^k(n)$ o $T^{-k}(n)$ con el k adecuado (que puede ser distinto en cada aparición de n) para conseguir la estratificación.

Por ejemplo, para probar (en NFA+AC) el teorema que hemos puesto como ejemplo al principio del capítulo, basta tener en cuenta que la fórmula

$$\bigwedge A(|\underset{1}{A}| = \underset{2}{m} \wedge \bigwedge \underset{0}{x} \in \underset{1}{A}\ |\underset{0}{x}| = \underset{1}{n} \rightarrow |\bigcup \underset{1}{A}| = T^{-1}(\underset{2}{m}) \cdot \underset{1}{n}),$$

está estratificada, luego existe el conjunto

$$X = \{m \mid m \in \mathbb{N} \wedge \bigwedge A(|A| = m \wedge \bigwedge x \in A\ |x| = n \rightarrow |\bigcup A| = mn)\},$$

donde hemos cambiado $T^{-1}(m)$ por m, porque, de hecho, $T^{-1}(m) = m$, por lo que es equivalente ponerlo o no, y ahora una simple inducción demuestra que $X = \mathbb{N}$.

En la práctica, en lugar de introducir operadores T, basta con no preocuparse de cuadrar las estratificaciones en las variables que recorran números naturales. No obstante, esto no significa que podamos realizar cualquier inducción sin preocuparnos de la estratificación. Por ejemplo, no podemos probar que

$$\bigwedge n \in \mathbb{N} \bigvee m \in \omega\ |m| = n,$$

donde ω es la clase de los ordinales de von Neumann. La razón es que la fórmula

$$m \in \omega \equiv \bigwedge u \in m\ u \subset m \wedge \cdots$$

no está estratificada a causa de unas variables (u y m) que no varían en $\mathbb{N}$ (ni en un conjunto fuertemente cantoriano que, como veremos enseguida, bastaría también para subvertir la estratificación). Ahora bien, esta situación es bastante atípica, y el problema real es que no podemos probar que ω sea un conjunto.

Consideremos ahora un conjunto fuertemente cantoriano arbitrario X y sea $f : X \longrightarrow \mathcal{P}_1 X$ la aplicación dada por $f(x) = \{x\}$. Definimos

$$T_X(x) \equiv f^{-1}(\{x\}), \qquad T_X^{-1}(x) = \bigcup f(x).$$

De este modo los términos $T_X(x)$ y $T_X^{-1}(x)$ están estratificados y su tipo es una unidad mayor o una unidad menor, respectivamente, que el tipo de x, y para cada $x \in X$ se cumple que $T_X(x) = T_X^{-1}(x) = x$. Por lo tanto, si en una fórmula una variable x varía en el conjunto X, podemos reemplazarla por $T_X^k(x)$ o por $T_X^{-k}(x)$ con el k adecuado para ajustar la estratificación, con lo que en la práctica no es necesario cuadrar las estratificaciones en variables que recorran conjuntos fuertemente cantorianos.

Por ejemplo, si R es una relación de equivalencia en un conjunto fuertemente cantoriano X, no hay inconveniente en definir la proyección $p : X \longrightarrow X/R$, pues puede definirse como $p(x) = [T_X^{-1}(x)]$, aunque en la práctica basta con no preocuparse de la violación de la estratificación en la definición $p(x) = [x]$.

Veamos ahora un ejemplo de subversión sistemática en otro contexto. Definimos

$$\mathrm{FC} \equiv \bigwedge x \bigvee f\ (f : x \longrightarrow \mathcal{P}_1 x \land \bigwedge u \in x\ f(u) = \{u\}).$$

Así, FC afirma que todo conjunto es fuertemente cantoriano. Obviamente FC es refutable en NFA, pero:

Teorema 7.7 *La teoría* KF+FC *es equivalente a* M_0.

DEMOSTRACIÓN: Es obvio que FC es un teorema de M_0, así que basta probar que en KF+FC puede probarse el esquema de Δ_0-especificación. Para ello tomamos una fórmula $\Phi(x, b_1, \ldots, b_n)$ de clase Δ_0 y hemos de probar que

$$\bigwedge a b_1 \cdots b_n \bigvee z \bigwedge x (x \in z \leftrightarrow x \in a \land \Phi(x, b_1, \ldots, b_n)).$$

Es fácil ver que los cuantificadores de Φ se pueden extraer con las variables que los acotan, de modo que podemos suponer que Φ está en forma prenexa Δ_0, es decir,

$$\Phi \equiv C_1 y_1 \in z_1 \cdots C_m y_m \in z_m\ \Psi,$$

donde cada C_i es un cuantificador y las variables y_i son distintas dos a dos, mientras que la fórmula Ψ no tiene cuantificadores. Por otra parte, cada variable z_i puede ser x, a, b_k o cualquiera de las variables anteriores y_j o z_j. Ahora observamos que

$$z_i \in \bigcup^r d \rightarrow (\bigwedge y_i \in z_i\ \alpha \leftrightarrow \bigwedge y_i \in \bigcup^{r+1} d\ (y_i \in z_i \rightarrow \alpha)),$$

$$z_i \in \bigcup^r d \rightarrow (\bigvee y_i \in z_i\ \alpha \leftrightarrow \bigvee y_i \in \bigcup^{r+1} d\ (y_i \in z_i \land \alpha)).$$

Así, si, por ejemplo, el primer cuantificador es $C_1 y_1 \in x$, podemos sustituirlo por $C_1 y_1 \in \bigcup a$, y si es $C_1 y_1 \in a$ o $C_1 y_1 \in b_k$ lo dejamos como está, luego pasamos a $C_2 y_2 \in z_2$, que puede estar en uno de los casos anteriores o bien ser de la forma $C_2 y_2 \in y_1$, en cuyo caso lo sustituimos por $C_2 y_2 \in \bigcup^2 a$ o bien $C_2 y_2 \in \bigcup a$ o bien $C_2 y_2 \in \bigcup b_k$, según el primer caso. Razonando de este modo llegamos a una fórmula Φ' de la forma

$$\Phi' \equiv C_1 y_1 \in t_1 \cdots C_m y_m \in t_m \ \Psi',$$

donde cada t_i es de la forma $\bigcup^r a$ o $\bigcup^r b_k$ (donde r depende de i y de k), y de modo que

$$x \in a \rightarrow (\Phi \leftrightarrow \Phi').$$

Consideramos ahora nuevas variables $c_0, \ldots, c_m$, y es claro que

$$(c_0 = a \land c_1 = t_1 \land \cdots \land c_m = t_m \land x \in c_0) \rightarrow$$

$$(\Phi(x, b_1, \ldots, b_n) \leftrightarrow C_1 y_1 \in c_1 \cdots C_m y_m \in c_m \ \Psi'(x, \bar{y}, \bar{b})).$$

Llamamos $X \equiv a \cup t_1 \cup \cdots \cup t_m \cup \{a, t_1, \ldots, t_m, b_1, \ldots, b_n\}$ y tomamos la función $F : X \longrightarrow \mathcal{P}_1 X$ dada por $u \mapsto \{u\}$, que existe por FC.

Conviene llamar variables a las variables x, y_i y parámetros a las variables a, b_k, c_k. La fórmula Ψ' es una combinación de signos lógicos (sin cuantificadores) y fórmulas atómicas de la forma $v_i = v_j$ o $v_i \in v_j$. Si distinguimos según que las variables sean variables o parámetros, tenemos ocho posibilidades. Representamos por w y z dos variables cualesquiera (no necesariamente distintas) y por d y e dos parámetros cualesquiera (no necesariamente distintos), y construimos una fórmula Ψ'' sustituyendo cada fórmula atómica como indica la tabla siguiente, en la que introducimos dos nuevas variables f y g:

$w = z$	$\underset{1}{w} = \underset{1}{z}$	$w \in e$	$\underset{1}{w} \in \underset{2}{e}$
$w \in z$	$\underset{4}{f}(\underset{1}{w}) \subset \underset{1}{z}$	$e \in w$	$\underset{4}{f}(\bigcup \underset{5}{g}(\underset{2}{e})) \subset \underset{1}{w}$
$w = e$	$\underset{1}{w} = \bigcup \underset{5}{g}(\underset{2}{e})$	$d = e$	$\underset{2}{d} = \underset{2}{e}$
$e = w$	$\bigcup \underset{5}{g}(\underset{2}{e}) = \underset{1}{w}$	$d \in e$	$\underset{5}{g}(\underset{2}{d}) \subset \underset{2}{e}$

De este modo, si llamamos

$$\Phi''(x, \bar{b}, \bar{c}, f, g) \equiv C_1 y_1 \in c_1 \cdots C_m y_m \in c_m \Psi''(x, \bar{y}, \bar{b}, \bar{c}, f, g)$$

tenemos que Φ'' es Δ_0 y se estratifica asignando rango 1 a todas las variables, rango 2 a todos los parámetros y rangos 4, 5 a las variables f y g respectivamente, y además

$$(c_0 = a \land c_1 = t_1 \land \cdots \land c_m = t_m \land x \in c_0 \land f = g = F) \rightarrow$$

$$\bigwedge x \in a(\Phi(x, \bar{b}) \leftrightarrow \Phi''(x, \bar{b}, \bar{c}, f, g)).$$

Ahora bien, por el axioma de Δ_0^e-separación,

$$\bigwedge a \bigwedge \bar{b} \bigwedge \bar{c} \bigwedge fg \bigvee z \bigwedge x(x \in z \leftrightarrow x \in a \land \Phi''(x, \bar{b}, \bar{c}, f, g)),$$

luego particularizando adecuadamente existe un conjunto z tal que

$$\bigwedge x(x \in z \leftrightarrow x \in a \land \Phi''(x, \bar{b}, \bar{t}, F, F))$$

y esto equivale a

$$\bigwedge x(x \in z \leftrightarrow x \in a \land \Phi(x, \bar{b})).$$

■

Así pues, la teoría KF se convierte en NF al añadirle $V \in V$ y se convierte en M_0 al añadirle FC. Igualmente se probaría que KFA se convierte en NFA o M_0A al añadirle uno u otro axioma, sólo que nunca hemos llegado a definir M_0A, pero la definición es la obvia.

7.4 El axioma de los conjuntos cantorianos

Discutimos aquí un axioma más fuerte que AC:

Teorema 7.8 *Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

a) Todo conjunto cantoriano es fuertemente cantoriano.

b) Todo cardinal cantoriano es fuertemente cantoriano.

c) Todo ordinal cantoriano es fuertemente cantoriano.

Demostración: La equivalencia entre a) y b) es trivial. También es fácil probar b) $\Rightarrow$ c): si α es un cardinal cantoriano, entonces $\mathrm{card}(\alpha)$ es un cardinal cantoriano, luego por b) es fuertemente cantoriano, luego α es fuertemente cantoriano. Veamos, por último, que c) $\Rightarrow$ b). Para ello tomamos un cardinal cantoriano κ. Sea $|A| = \kappa$ y sea $\leq$ un buen orden en A tal que $\mathrm{ord}(A, \leq) = \mathrm{In}(\kappa)$. Entonces $T(\mathrm{In}(\kappa)) = \mathrm{ord}(\mathcal{P}_1 A, \leq_1)$ es un ordinal inicial, pues si existe una biyección $f : \mathcal{P}_1 A \longrightarrow (\mathcal{P}_1 A)^{<_1}_{\{a\}}$, a partir de ella podemos definir una biyección $\bar{f} : A \longrightarrow A^{<}_{a}$, mediante

$$\bar{f} = \{(u, v) \mid (\{u\}, \{v\}) \in f\}.$$

Por lo tanto, $T(\mathrm{In}(\kappa)) = \mathrm{In}(T(\kappa))$. Esto significa que $\mathrm{In}(\kappa)$ es un ordinal cantoriano, luego es fuertemente cantoriano, luego κ es fuertemente cantoriano.

■

Definición 7.9 Llamaremos *Axioma de los conjuntos cantorianos* (ACC) a cualquiera de las afirmaciones equivalentes del teorema anterior.

Puesto que ω es un ordinal cantoriano, (ACC) implica que es fuertemente cantoriano, es decir, ACC $\Rightarrow$ AC. Sin embargo, ACC es un axioma mucho más fuerte en cuanto a consistencia. Solovay ha demostrado que la consistencia de NFA + ACC es equivalente a la de ZFC más el esquema axiomático que postula la existencia de un cardinal n-Mahlo para $n = 1, 2, 3 \ldots$ Por el contrario, la consistencia de NFA + AC es más débil que la de ZFC.

El concepto de *cardinal fuertemente inaccesible* se define en NFA análogamente a como se define en ZFC, es decir, como un cardinal no numerable, límite fuerte y regular. Aquí demostraremos únicamente una mínima parte del teorema de Solovay. Lo suficiente como para probar que ACC lleva NFA más allá de ZFC en cuanto a consistencia:

Teorema 7.10 (NFA + ACC) *Existe un cardinal fuertemente inaccesible.*

DEMOSTRACIÓN: Fijamos un buen orden $\trianglelefteq$ en $\mathcal{P}K$. Sea $D \subset K \times K$ el conjunto de los pares de cardinales (κ, μ) tales que $\kappa \neq \mu$ y ninguno de los dos es un límite fuerte o bien ambos son límites fuertes singulares. Vamos a definir una función $F : D \longrightarrow K \times K$.

Si las componentes de $(\kappa, \mu) \in D$ no son límites fuertes, existen unos mínimos cardinales $\kappa^- < \kappa$ y $\mu^- < \mu$ tales que $2^{\kappa^-} \geq \kappa$, $2^{\mu^-} \geq \mu$. Definimos entonces $F(\kappa, \mu) = (\kappa^-, \mu^-)$.

Si las componentes de $(\kappa, \mu) \in D$ son ambas límites fuertes de cofinalidades distintas, definimos $F(\kappa, \mu) = (\operatorname{cf} \kappa, \operatorname{cf} \mu)$.

Por último, si las componentes de $(\kappa, \mu) \in D$ son límites fuertes de la misma cofinalidad λ, consideramos el conjunto de los cardinales menores que κ, que no tiene máximo y, de entre los subconjuntos no acotados de ordinal mínimo, llamamos A al mínimo respecto al orden $\trianglelefteq$ que hemos fijado.

Supongamos que $\mu = T(\mu')$, para cierto cardinal μ' (o sea, que $\mu \leq \kappa_1$). Consideramos todos los subconjuntos no acotados de ordinal mínimo en el conjunto de todos los cardinales menores que μ' y tomamos el mínimo B' respecto de $\trianglelefteq$, y llamamos $B = \{T(\xi) \mid \xi \in B'\}$, que es un conjunto no acotado de cardinales menores que μ de cardinal mínimo.

Notemos ahora que, por el teorema 6.77, tenemos que $\operatorname{ord}(A, \leq) = T^2(\operatorname{In}(\lambda))$, e igualmente $\operatorname{ord}(B', \leq) = T^2(\operatorname{In}(\operatorname{cf} \mu'))$, luego

$$\operatorname{ord}(B, \leq) = T(\operatorname{ord}(B', \leq)) = T^2(\operatorname{In}(T(\operatorname{cf} \mu'))) = T^2(\operatorname{In}(\lambda)),$$

donde hemos usado que (como es fácil comprobar) $T(\operatorname{cf} \mu') = \operatorname{cf} T(\mu')$. Así pues, existe una semejanza $f : A \longrightarrow B$, que no puede ser la identidad, pues κ es el supremo de A, μ es el supremo de B y $\kappa \neq \mu$. Podemos tomar, pues, el menor $\kappa^* \in A$ tal que $\mu^* = f(\kappa^*) \neq \kappa^*$ y definimos entonces $F(\kappa, \mu) = (\kappa^*, \mu^*)$.

En el caso en que $\mu > \kappa_1$ la definición de $F(\kappa, \mu)$ será irrelevante. Podemos tomar, por ejemplo, $F(\kappa, \mu) = (\aleph_0, \aleph_0)$.

Es fácil comprobar que la definición de F está estratificada, por lo que realmente F es un conjunto. Notemos que en todos los casos, si $F(\kappa, \mu) = (\kappa^*, \mu^*)$ entonces $\kappa^* < \kappa$ y $\mu^* < \mu$.

Fijemos ahora un cardinal no cantoriano $\alpha_0 \leq \kappa_1$ (por ejemplo, podemos tomar $\alpha_0 = \kappa_1$) y llamamos $\beta_0 = T(\alpha_0) \neq \alpha_0$.

Diremos que una aplicación $f : I_n \longrightarrow K \times K$, donde $n \in \mathbb{N}$, es *inductiva* si $f(0) = (\alpha_0, \beta_0)$ y para todo $i < n$ se cumple que $f(i) \in D \wedge f(i+1) = F(f(i))$.

Una comprobación rutinaria muestra que si dos sucesiones $f : I_m \longrightarrow K \times K$ y $g : I_n \longrightarrow K \times K$ son inductivas y $m \leq n$ entonces $f = g|_{I_m}$. Tiene que haber un máximo natural n tal que existe una sucesión inductiva de dominio I_n, pues si existiera una sucesión inductiva para cada n podríamos construir una aplicación $G : \mathbb{N} \longrightarrow K \times K$ tal que $\bigwedge n \in \mathbb{N}\ G(n+1) = F(G(m))$ y si $G(n) = (G_1(n), G_2(n))$, tendríamos una sucesión decreciente de cardinales $\{G_1(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Así pues, sea n el máximo número natural para el que existe una (única) sucesión inductiva $\{(\alpha_i, \beta_i)\}_{i\leq n}$. En particular, esto significa que $(\alpha_n, \beta_n) \notin D$. Notemos también que $\alpha_i, \beta_i \leq \kappa_1$ para todo i.

Vamos a probar que $\bigwedge i \leq n(\beta_i = T(\alpha_i) \neq \alpha_i)$. En caso contrario podemos considerar el mínimo i del conjunto

$$\{i \mid i \in \mathbb{N} \wedge i \leq n \wedge \beta_i \neq T(\alpha_i) \vee T(\alpha_i) = \alpha_i\}.$$

Aquí hay que destacar que este conjunto está bien definido gracias a que estamos suponiendo que los números naturales son fuertemente cantorianos, lo que nos permite reformularlo como

$$\{i \mid i \in \mathbb{N} \wedge i \leq n \wedge \beta_{T(i)} \neq T(\alpha_i) \vee T(\alpha_i) = \alpha_{T(i)}\},$$

y así la definición está estratificada. Ciertamente, no puede ser $i = 0$, luego $i = j + 1$ y sabemos que $\beta_j = T(\alpha_j) \neq \alpha_j$ y queremos probar que lo mismo vale para $j + 1$. En particular tenemos que $(\alpha_j, \beta_j) \in D$ (porque está definido $(\alpha_{j+1}, \beta_{j+1}) = F(\alpha_j, \beta_j)$). Esto nos da tres posibilidades:

1) Si α_j, β_j no son límites fuertes, entonces α_{j+1} (resp. β_{j+1}) es el mínimo cardinal tal que $2^{\alpha_{j+1}} \geq \alpha_j$ (resp. $2^{\beta_{j+1}} \geq \beta_j$). Ahora bien, la desigualdad para los α's implica que $2^{T(\alpha_{j+1})} \geq T(\alpha_j) = \beta_j$, luego $\beta_{j+1} \leq T(\alpha_{j+1})$. Igualmente, $2^{T^{-1}(\beta_{j+1})} \geq T^{-1}(\beta_j) = \alpha_j$, luego $\alpha_{j+1} \leq T^{-1}(\beta_{j+1})$ y $T(\alpha_{j+1}) \leq \beta_{j+1}$. Esto prueba que $\beta_{j+1} = T(\alpha_{j+1})$.

Veamos ahora que $T(\alpha_{j+1}) \neq \alpha_{j+1}$. Supongamos que, por el contrario, $T(\alpha_{j+1}) = \alpha_{j+1}$, es decir, que α_{j+1} es un cardinal cantoriano. Entonces, por ACC, tendríamos que α_{j+1} es fuertemente cantoriano, al igual que $2^{\alpha_{j+1}} \geq \alpha_j$, luego α_j también sería fuertemente cantoriano, es decir, $\alpha_j = T(\alpha_j)$, contradicción.

Con esto hemos probado que el primer caso no puede darse.

2) Supongamos ahora que α_j, β_j son límites fuertes singulares de cofinalidades distintas. Entonces $\alpha_{j+1} = \operatorname{cf} \alpha_j$, $\beta_{j+1} = \operatorname{cf} \beta_j$, luego $\alpha_{j+1} \neq \beta_{j+1}$. Además:

$$T(\alpha_{j+1}) = T(\operatorname{cf} \alpha_j) = \operatorname{cf} T(\alpha_j) = \operatorname{cf} \beta_j = \beta_{j+1}.$$

Por consiguiente, este segundo caso tampoco puede darse.

3) Consideramos, por último, el caso en que α_j, β_j son límites fuertes singulares de la misma cofinalidad. Como $\beta_j = T(\alpha_j)$, el cardinal μ' que aparece en la definición de la función F es simplemente $\mu' = \alpha_j$, y el conjunto B' correspondiente es el propio A, de modo que $B = \{T(\xi) \mid \xi \in A\}$. Más aún,

como $\operatorname{cf} \alpha_j = \operatorname{cf} \beta_j = \operatorname{cf} T(\alpha_j) = T(\operatorname{cf} \alpha_j)$, resulta que $\operatorname{cf} \alpha_j$ es un cardinal cantoriano y por ACC es, de hecho, fuertemente cantoriano, luego el conjunto A es fuertemente cantoriano.

Sea $f : A \longrightarrow B$ la semejanza entre ambos conjuntos, según la definición de F. Se cumple que $\bigwedge \xi \in A\ f(\xi) = T(\xi)$. Esto se demuestra fácilmente por inducción, para lo cual necesitamos considerar el conjunto

$$\{\xi \mid \xi \in A \wedge f(\xi) = T(\xi)\},$$

que está bien definido porque la variable ξ recorre el conjunto fuertemente cantoriano A, por lo que podemos subvertir la estratificación sobre ella.

Por definición de F tenemos que α_{j+1} es el mínimo elemento de A tal que $\beta_{j+1} = f(\alpha_{j+1}) = T(\alpha_{j+1}) \neq \alpha_{j+1}$.

Esto prueba que el tercer caso tampoco puede darse, con lo que tenemos una contradicción que prueba, en particular, que $\beta_n = T(\alpha_n) \neq \alpha_n$. Si α_n no fuera un límite fuerte o bien fuera un límite fuerte singular, entonces lo mismo valdría para β_n (por ser $T(\alpha_n)$), luego tendríamos que $(\alpha_n, \beta_n) \in D$. Así pues, α_n tiene que ser un límite fuerte regular. Además, α_n no es cantoriano, luego no es $\aleph_0$. Esto prueba que α_n es un cardinal inaccesible. ■

Notemos que en la prueba del teorema anterior hemos partido de un cardinal no cantoriano $\alpha_0 \leq \kappa_1$ arbitrario y hemos encontrado un cardinal no cantoriano fuertemente inaccesible $\alpha_n \leq \alpha_0$. Como tiene que haber un cardinal no cantoriano $\alpha_0' < \alpha_n$, a su vez podemos encontrar otro cardinal fuertemente inaccesible no cantoriano menor que α_n y, en general, el argumento del teorema anterior prueba, de hecho, la existencia de cualquier cantidad finita de cardinales fuertemente inaccesibles. En realidad el razonamiento se puede refinar para demostrar la existencia de cardinales de Mahlo, pero no entraremos en ello.

7.5 El modelo Z

Aquí construiremos un modelo de ZFC$-$AP en el seno de NFA+AE. La idea básica es definir un conjunto Z de clases de equivalencia de relaciones extensionales y bien fundadas, similarmente a como hemos definido el conjunto Ord de clases de equivalencia de relaciones bien ordenadas. Como ya hemos indicado, trabajamos en NFA+AE.

Definición 7.11 Diremos que una relación R en un conjunto A tiene un *origen* $a \in A$ si para todo $x \in A$ existe un $n \in \mathbb{N}$ y una función $f : I_{n+1} \longrightarrow A$ tal que

$$f(0) = x \wedge \bigwedge i \in \mathbb{N}(i < n \rightarrow f(i)\, R\, f(i+1)) \wedge f(n) = a,$$

donde $I_n = \{i \in \mathbb{N} \mid i < n\}$.

Teorema 7.12 *Si R es una relación bien fundada y con origen en un conjunto A, entonces su origen es único.*

Demostración: Supongamos que a y b son dos orígenes para R. Entonces existen sucesiones $a = x_0\, R\, x_1\, R\, \cdots\, R\, x_m = b$ y $b = y_0\, R\, y_1\, R\, \cdots\, R\, y_n = a$, pero entonces el conjunto $\{x_0, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_{n-1}\} \subset A$ (que existe, pues es la unión de los rangos de las dos sucesiones) no tiene elemento minimal, contradicción. ■

Definición 7.13 Llamaremos BFO al conjunto de todos los pares (A, R) tales que R es una relación extensional, bien fundada y con origen en el conjunto A. (Notemos que estas propiedades están estratificadas con las variables A y R del mismo tipo, por lo que ciertamente definen un conjunto).

Si (A, R), $(B, S) \in$ BFO, diremos que $f : (A, R) \longrightarrow (B, S)$ es un *isomorfismo* si $f : A \longrightarrow B$ biyectiva y $\bigwedge xy \in A(x\, R\, y \leftrightarrow f(x)\, R\, f(y))$. Claramente, la relación

$$\sim \equiv \{x \mid \bigvee ABRSf(x = ((A, R), (B, S)) \land (A, R), (B, S) \in \mathrm{BFO}$$

$$\land\ f : (A, R) \longrightarrow (B, S) \text{ isomorfismo})\}$$

es una relación de equivalencia en BFO, por lo que podemos considerar el conjunto cociente $Z = \mathrm{BFO}/\sim$. Para cada $(A, R) \in$ BFO, llamaremos $[A, R]$ a su clase de equivalencia en Z.

Si $(A, R) \in$ BFO y $b \in A$, llamaremos *componente* de b en (A, R) al conjunto $C^R_A(b)$ formado por todos los objetos $x \in A$ tales que existe un $n \in \mathbb{N}$ y una función $f : I_{n+1} \longrightarrow A$ tal que

$$f(0) = x \land \bigwedge i \in \mathbb{N}(i < n \to f(i)\, R\, f(i + 1)) \land f(n) = b.$$

De este modo, si a es el origen de A, se cumple claramente que $C^R_A(a) = A$.

En general, definimos $R^b_A = R \cap (C^R_A(b) \times C^R_A(b))$, y es fácil comprobar que $(C^R_A(b), R^b_A) \in$ BFO. Para comprobar la extensionalidad observamos que

$$\bigwedge xy(x \in C^R_A(b) \land y\, R\, x \to y \in C^R_A(b)).$$

Conviene observar que, más en general, si llamamos $B = C^R_A(b)$ y $S = R^b_A$, entonces, para todo $c \in B$ se cumple que $C^S_B(c) = C^R_A(c)$.

Notemos que la definición de $C^R_A(b)$ está estratificada, y que el tipo de este término es el mismo que el de A y R, y una unidad mayor que el de b. Lo mismo vale para la restricción R^b_A.

Definimos la relación $E \subset Z \times Z$ dada por

$$E \equiv \{x \mid \bigvee ARab((A, R) \in \mathrm{BFO} \land a \in A \land b \in A \land b\, R\, a$$

$$\land\ a \text{ es el origen de } R \land x = ([C^R_A(b), R^b_A], [A, R])))\}.$$

Así, $[B, S]\, R\, [A, R]$ equivale a que (B, S) es isomorfo a una componente de (A, R) cuyo origen esté relacionado con el origen de (A, R).

Teorema 7.14 *La relación E está bien fundada en Z.*

Demostración: Sea $S \subset Z$ un conjunto no vacío y sea $(A, R) \in \mathrm{BFO}$ tal que $[A, R] \in S$. Sea

$$X = \{b \mid b \in A \land [C_A^R(b), R_A^b] \in S\}.$$

Se trata de un conjunto no vacío, pues contiene al origen de A, luego tiene un elemento R-minimal b. Es claro entonces que $[C_A^R(b), R_A^b]$ es un elemento E-minimal de S. ■

Teorema 7.15 *Si $(A, R) \in \mathrm{BFO}$, para cada par de objetos $x, y \in A$, si se cumple $[C_A^R(x), R_A^x] = [C_A^R(y), R_A^y]$, entonces $x = y$.*

Demostración: Consideremos el conjunto

$$X = \{x \mid x \in A \land \bigvee y(y \in A \land x \neq y \land [C_A^R(x), R_A^x] = [C_A^R(y), R_A^y])\}.$$

Hemos de probar que $X = \varnothing$. En caso contrario, podemos tomar un elemento minimal x. Sea y según la definición de X y consideremos un isomorfismo $f : (C_A^R(x), R_A^x) \longrightarrow (C_A^R(y), R_A^y)$.

Para cada objeto $u \in C_A^R(x)$, es claro que f se restringe a un isomorfismo $(C_A^R(u), R_A^u) \longrightarrow (C_A^R(f(u)), R_A^{f(u)})$, luego $[C_A^R(u), R_A^u] = [C_A^R(f(u)), R_A^{f(u)}]$. Por la minimalidad de x resulta que $f(u) = u$, luego $C_A^R(x) = C_A^R(y)$, luego $x = y$ por la unicidad del origen, contradicción. ■

Teorema 7.16 *La relación E es extensional en Z.*

Demostración: Sean $[A, R], [B, S] \in Z$ tales que

$$\bigwedge x \in Z(x\,E\,[A, R] \leftrightarrow x\,E\,[B, S]).$$

Sea a el origen de (A, R) y sea b el origen de (B, S). Para cada $x \in A$ tal que $x\,R\,a$, podemos considerar $[C_A^R(x), R_A^x] \in Z$, que cumple $[C_A^R(x), R_A^x]\,E\,[A, R]$, luego también $[C_A^R(x), R_A^x]\,E\,[B, S]$, luego existe un objeto $y \in B$ tal que $y\,S\,b$ y $[C_A^R(x), R_A^x] = [C_B^S(y), S_B^y]$. El teorema anterior implica que y está unívocamente determinado por x, y viceversa. Esto significa que podemos definir

$$f \equiv \{u \mid \bigvee xy(u = (x, y) \land x \in A \land y \in B \land x\,R\,a \land y\,S\,b$$
$$\land\ [C_A^R(x), R_A^x] = [C_B^S(y), S_B^y])\}$$

y así f es una biyección entre la extensión de a respecto de R y la extensión de b respecto de S. Además, si $x\,R\,a$, por definición existe un isomorfismo $f : (C_A^R(x), R_A^x) \longrightarrow (C_B^S(f(x)), S_B^{f(x)})$. Es fácil ver que si dos conjuntos con una relación extensional y bien fundada son isomorfos, entonces el isomorfismo es único, por lo que, de hecho, podemos definir

$$f_x \equiv f \mid f : (C_A^R(x), R_A^x) \longrightarrow (C_B^S(f(x)), S_B^{f(x)}) \text{ isomorfismo.}$$

Por otra parte, es fácil ver que

$$A = \{a\} \cup \bigcup_{x R a} C_A^R(x), \qquad B = \{b\} \cup \bigcup_{y R b} C_B^S(y),$$

por lo que

$$F = \{(a,b)\} \cup \bigcup_{x\,R\,a} f_x : (A,R) \longrightarrow (B,S) \text{ isomorfismo.}$$

Esto implica que $[A,R] = [B,S]$, como había que probar. ■

Ahora necesitamos un resultado técnico:

Teorema 7.17 *Si R es una relación bien fundada en un conjunto A, existe una relación extensional y bien fundada S en un conjunto B y una aplicación $g : A \longrightarrow B$ suprayectiva tal que para todo $x \in A$ y todo $z \in B$ se cumple*

$$z\,S\,g(x) \leftrightarrow \bigvee y \in A\ (y\,R\,x \land z = g(y)).$$

Además, g y (B,S) son únicos salvo isomorfismo.

Demostración: Para cada relación de equivalencia $\sim$ en A definimos la relación $\sim^+$ en A mediante

$$x \sim^+ y \leftrightarrow \bigwedge z \in A(z\,R\,x \to \bigvee w \in A(w\,R\,y \land w \sim z)) \land$$

$$\bigwedge z \in A(z\,R\,y \to \bigvee w \in A(w\,R\,x \land w \sim z)).$$

Es claro que $\sim^+$ es también una relación de equivalencia, así como que si $\sim_2$ extiende a $\sim_1$, entonces $\sim_2^+$ extiende a $\sim_1^+$. Diremos que $\sim$ es una *buena relación de equivalencia* en A si $\sim^+$ extiende a $\sim$. La observación precedente implica que si $\sim$ es una buena relación de equivalencia en A entonces $\sim^+$ también lo es.

Diremos que S es una *cadena* de relaciones de equivalencia en A si

a) Cada elemento de S es una relación de equivalencia en A,

b) $S \neq \varnothing$,

c) $\bigwedge rs \in S(r \subset s \lor s \subset r)$,

d) $\bigwedge r \in S\ r^+ \in S$.

Es evidente que la unión de una cadena de relaciones de equivalencia en A es una relación de equivalencia en A, y será buena si todas las relaciones de la cadena lo son (pues si llamamos $\sim^*$ a la unión, dados $x \sim^* y$, existe una relación $\sim$ en la cadena tal que $x \sim y$, luego $x \sim^+ y$, luego $x \sim^{*+} y$).

Claramente, la identidad $I|_A$ es una buena relación de equivalencia en A. Diremos que un conjunto X de relaciones de equivalencia en A es *inductivo* si

$$I|_A \in X \land \bigwedge r \in X\ r^+ \in X \land \bigwedge S(S \subset X \land S \text{ es una cadena} \to \bigcup S \in X).$$

Llamaremos F al conjunto de todos los conjuntos inductivos de relaciones de equivalencia en A. Notemos que la definición es correcta porque la condición está estratificada, y $F \neq \varnothing$, pues contiene al conjunto de todas las relaciones de equivalencia en A. Definimos $\mathcal{F} = \bigcap F$.

De este modo, $I|_A \in \mathcal{F}$, si $r \in \mathcal{F}$, entonces $r+ \ \in \mathcal{F}$ y si $S \subset \mathcal{F}$ es una cadena, entonces $\bigcup S \in \mathcal{F}$. Más aún, el conjunto X de las relaciones de $\mathcal{F}$ que son buenas relaciones de equivalencia en A es inductivo, luego $\mathcal{F} = X$, es decir, todos los elementos de $\mathcal{F}$ son buenas relaciones de equivalencia en A.

Similarmente, considerando el conjunto inductivo

$$X = \{r \mid r \in \mathcal{F} \land (r = I|_A \lor \bigvee s \in \mathcal{F}\ r = s^+ \lor$$

$$\bigvee S(S \subset \mathcal{F} \land S \text{ es una cadena} \land r = \bigcup S))\}$$

concluimos que todo elemento de $\mathcal{F}$ es, o bien $I|_A$, o bien de la forma s^+, con $s \in \mathcal{F}$, o bien de la forma $\bigcup S$, para cierta cadena $S \subset \mathcal{F}$.

Ahora podemos probar que $\bigwedge rs \in \mathcal{F}\ (r \subset s \lor s \subset r)$. Basta ver que el conjunto

$$X = \{s \mid s \in \mathcal{F} \land \bigwedge r \in \mathcal{F}\ (s \subset r \lor r \subset s)\}$$

es inductivo. Obviamente $I|_A \in X$, pues la identidad está contenida en toda relación de equivalencia. Supongamos que $s \in X$ y sea $r \in \mathcal{F}$. Distinguimos casos en r:

Si $r = I|_A$ obviamente $r \subset s^+$.

Si $r = t^+$, para cierta $t \in \mathcal{F}$, como $s \in X$ tenemos que $s \subset t \lor t \subset s$, luego $s^+ \subset t^+ = r$ en el primer caso y $r = t^+ \subset s^+$ en el segundo.

Si $r = \bigcup S$, para cierta cadena $S \subset \mathcal{F}$, o bien $s \subset t$, para cierta $t \in S$, en cuyo caso $s^+ \subset t^+ \subset r$, o bien s contiene todos los elementos de S, en cuyo caso $r \subset s \subset s^+$.

Esto prueba que $s^+ \in X$.

Por último, si $S \subset X$ es una cadena y $s = \bigcup S$, dado $r \in \mathcal{F}$, o bien existe un $t \in S$ tal que $r \subset t$, en cuyo caso $r \subset s$ o bien (como $S \subset X$) todo $t \in S$ cumple $t \subset r$, en cuyo caso $s \subset r$.

Así pues, $\mathcal{F}$ es una cadena de buenas relaciones de equivalencia en A, por lo que $\sim_0 = \bigcup \mathcal{F} \in \mathcal{F}$ es una buena relación de equivalencia en A, luego tenemos que $\sim_0 \subset \sim_0^+ \in \mathcal{F}$, luego $\sim_0 = \sim_0^+$.

El axioma de elección nos da un conjunto $B \subset A$ formado por un elemento de cada clase de equivalencia del conjunto cociente $A/\sim_0$. Sea $g : A \longrightarrow B$ la aplicación dada por

$$g = \{(a, b) \mid a \in A \land b \in B \land a \sim_0 b\}$$

y sea $S \subset B \times B$ la relación dada por

$$S = \{(u, v) \mid \bigvee xy \in A\ (x\, R\, y \land g(x) = u \land g(y) = v)\}.$$

Vamos a probar que (B, S) y g cumplen el enunciado. En primer lugar vemos que S está bien fundada en B. Para ello tomamos $C \subset B$ no vacío, con lo que $g^{-1}[C] \subset A$ tampoco es vacío, y tiene un R-minimal y. Veamos que $g(y)$ es un S-minimal de C. En caso contrario existe $u \in C$ tal que $u\,S\,g(y)$. Esto significa que existen x', $y' \in A$ tales que $x'\,R\,y' \wedge u = g(x') \wedge g(y) = g(y')$.

Tenemos entonces que $y' \sim_0 y$, luego $y' \sim_0^+ y$, y como $x'\,R\,y'$, existe un $y''\,R\,y$ tal que $x' \sim_0 y''$, pero entonces $g(y'') = g(x') = u \in C$, luego $y'' \in g^{-1}[C]$, en contradicción con la minimalidad de y.

Veamos ahora la equivalencia indicada en el enunciado:

Si $z\,S\,g(x)$, entonces $z = g(a)$, $g(x) = g(b)$, $a\,R\,b$, con lo que $b \sim_0 x$, luego $b \sim_0^+ x$, luego existe un $y \in A$ tal que $y\,R\,x$ y $a \sim_0 y$, luego $z = g(a) = g(y)$. La implicación contraria se sigue de la definición de S.

Veamos ahora que S es extensional, para lo cual tomamos b, $b' \in B$ y suponemos que $\bigwedge b'' \in B\ (b''\,S\,b \leftrightarrow b''\,S\,b')$. Basta probar que $b \sim_0^+ b'$, pues entonces $b \sim_0 b'$, luego $b = b'$.

Tomamos, pues $a\,R\,b$, de modo que $g(a)\,S\,b$, luego $g(a)\,S\,b'$, luego, por la implicación que acabamos de probar, existe un $a'\,R\,b'$ tal que $g(a) = g(a')$, luego $a \sim_0 a'$. Igualmente se prueba que si $a'\,R\,b'$ existe un $a\,R\,b$ tal que $a' \sim_0 a$, y esto significa que $b \sim_0^+ b'$.

Sólo falta probar la unicidad. Veamos para ello que si g y (B, S) cumplen el enunciado (sin ser necesariamente los que hemos construido), entonces cumplen que $\bigwedge aa' \in A(g(a) = g(a') \leftrightarrow a \sim_0 a')$.

Consideramos el conjunto $X = \{a \in A \mid \bigvee a' \in A(a' \sim_0 a \wedge g(a) \neq g(a'))\}$. Queremos probar que es vacío. En caso contrario tiene un R-minimal a. Sea a' según la definición de X.

Si $z\,S\,g(a)$, entonces $z = g(y)$ con $y\,R\,a$, y como $a \sim_0^+ a'$, tenemos que $y \sim_0 y'$ con $y'\,R\,a'$. Por la minimalidad de a tenemos que $g(y) = g(y')$, luego $z = g(y')\,S\,g(a')$. Similarmente se prueba que si $z\,S\,g(a')$ entonces $z\,S\,g(a)$ y, como S es extensional, esto prueba que $g(a) = g(a')$, contradicción.

Así queda probado que si $a \sim_0 a'$ entonces $g(a) = g(a')$. Igualmente consideramos $X = \{a \in A \mid \bigvee a' \in A(g(a) = g(a') \wedge \neg a \sim_0 a')\}$. Si a es R-minimal y a' cumple la definición de X, vamos a probar que $a \sim_0^+ a'$, con lo que tendremos también $a \sim_0 a'$ y esto es una contradicción.

Si $x\,R\,a$, entonces $g(x)\,S\,g(a)$, luego $g(x)\,S\,g(a')$, luego $g(x) = g(y')$ con $y'\,R\,a'$. Por la minimalidad de a resulta que $x \sim_0 y'$. Igualmente se prueba que si $x'\,R\,a'$ existe un $y\,R\,a$ tal que $x \sim_0 y$. Así pues, $a \sim_0^+ a'$.

Por consiguiente, si $g' : A \longrightarrow B'$ y (B', S') cumplen también el enunciado, podemos definir

$$f : B \longrightarrow B'$$

mediante $f = \{(b, b') \in B \times B' \mid \bigvee aa' \in A(b = g(a) \wedge b' = g'(a'))\}$, y claramente f es una biyección tal que $g \circ f = g'$. Es fácil ver que es un isomorfismo. ■

Definición 7.18 Si $z \in Z$, definimos la *extensión* de z como el conjunto

$$e(z) = \{x \mid x \in Z \land x\, E\, z\}.$$

El resultado fundamental sobre la relación E en Z es el siguiente:

Teorema 7.19 *Si $z \in Z$, entonces $|e(z)| \leq \kappa_2$ y si $S \subset Z$ cumple $|S| \leq \kappa_2$ entonces existe un (único) $z \in Z$ tal que $S = e(z)$.*

DEMOSTRACIÓN: Dado $z \in Z$, será de la forma $z = [A, R]$, y cada $x \in e(z)$ es de la forma $x = [C_A^R(b), R_A^b]$, para cierto $b \in A$ tal que $b\, R\, a$, donde a es el origen de (A, R). Notemos que el tipo de x es dos unidades mayor que el de b, por lo que podemos definir $f : e(z) \longrightarrow \mathcal{P}_1^2 A$ mediante

$$f = \{(x, \{\{b\}\}) \mid x \in e(z) \land b \in A \land b\, R\, a \land x = [C_A^R(b), R_A^b]\}.$$

Entonces f es una aplicación por el teorema 7.15 y claramente es inyectiva. Por lo tanto $|e(z)| \leq |\mathcal{P}_1^2(A)| = T^2(|A|) \leq T^2(|V|) = \kappa_2$.

Sea ahora $S \subset Z$ tal que $|S| \leq \kappa_2$. Tomemos $f : S \longrightarrow \mathcal{P}_1^2 V$ inyectiva, así como una función de elección $g : S \longrightarrow V$, es decir, tal que $g(x) = \{(A, R)\}$ con $x = [A, R]$. En general, definimos

$$R_u \equiv \{p \mid \bigvee ab((a, b) \in R \land p = ((a, u), (b, u)))\}$$

Observemos que este término está estratificado con R de tipo una unidad más que u. Además, si $R \subset A \times A$, entonces $R_u \subset (A \times \{u\}) \times (A \times \{u\})$ y podemos definir un isomorfismo $h : (A, R) \longrightarrow (A \times \{u\}, R_u)$ mediante $h(a) = (a, u)$. El punto crucial es que las dos definiciones siguientes están estratificadas:

$$X = \{a \mid \bigvee xARu(x \in S \land a = A \times \{u\} \land f(x) = \{\{u\}\} \land g(x) = \{(A, R)\})\},$$

$$Y = \{b \mid \bigvee xARu(x \in S \land b = R_u \land f(x) = \{\{u\}\} \land g(x) = \{(A, R)\})\}.$$

Tenemos que X es un conjunto de conjuntos disjuntos dos a dos (de la forma $A \times \{u\}$), mientras que Y es un conjunto de relaciones definidas una sobre cada conjunto $A \times \{u\} \in X$. Además cada $x \in S$ es de la forma $x = [A, R]$, para cierto $A \in X$ y cierta $R \in Y$ y, recíprocamente, si $A \in X$, $R \in Y$, $R \subset A \times A$, entonces $[A, R] \in S$.

Llamamos $B = \bigcup X$, $S_0 = \bigcup Y$, con lo que S_0 es una relación bien fundada en el conjunto B. No será extensional, porque los minimales de cada relación $R \in Y$ tienen todos la misma extensión vacía, y además S_0 ya no tiene un origen. Para corregir esto último tomamos un $a \in V \setminus B$ (por ejemplo, un átomo), definimos $B' = B \cup \{a\}$ y extendemos la relación S_0 a una relación S' estableciendo que $a'\, S'\, a$ si y sólo si a' es el origen de un par (A, R) con $A \in X$, $R \in Y$. Ahora S' es una relación bien fundada y con origen en B'. Por último, sea (B'', S'') la relación extensional y bien fundada que resulta de aplicar a (B', S') el teorema 7.17. Tenemos además una aplicación $g : B' \longrightarrow B''$ en las condiciones del teorema. Es inmediato que $a'' = g(a)$ es un origen para S'', luego $z = [B'', S''] \in Z$. Veamos que z cumple lo pedido.

Si $x\,E\,z$, entonces $x = [C^{S''}_{B''}(b''), S''^{b''}_{B''}]$, para cierto $b''\,S''\,a''$. Puesto que $a'' = g(a)$, existe un $b' \in B'$ tal que $b'\,S'\,a$ y $g(b') = b''$. Por definición de S' esto significa que b' es el origen de un par (A, R), donde $[A, R] \in S$. Es claro que g se restringe a una aplicación $g_A : A \longrightarrow C^{S''}_{B''}(b'')$, pues todo elemento de A está conectado por una sucesión con el origen b', luego su imagen por g está conectada con b'' por la imagen de dicha sucesión. Más aún, g_A es suprayectiva, pues para todo $u \in C^{S''}_{B''}(b'')$ existe $f : I_{n+1} \longrightarrow B''$ tal que $f(0) = u \land f(n) = b'' \land \bigwedge i \in \mathbb{N}(i < n \to f(i)\,S''\,f(i+1))$. Consideramos el conjunto

$$Q = \{i \in \mathbb{N} \mid i > n \lor (i \leq n \land \bigvee v \in A\ g(v) = f(n-i))\}.$$

Veamos por inducción que $Q = \mathbb{N}$. En efecto, $0 \in Q$, pues $g(b') = f(n)$ y, si existe un v tal que $g(v) = f(n-i)$ con $i < n$, por la propiedad que determina a g, puesto que $f(n-i-1)\,S''\,f(n-1)$, existe un $v' \in B'$ tal que $v'\,S'\,v$ y $g(v') = f(n-i-1)$, pero $v'\,S'\,v$ implica que $v' \in A$ y $v'\,R\,v$, pues las relaciones que forman S_0 son disjuntas dos a dos. Así pues, $f(0) = u$ tiene antiimagen por la aplicación g_A.

Ahora observamos que g_A cumple la propiedad del teorema 7.17, es decir,

$$\bigwedge w \in A \bigwedge u \in C^{S''}_{B''}(b'')\ (u\,S''\,g_A(w) \leftrightarrow \bigvee y \in A\ (y\,R\,w \land u = g_A(y))).$$

Una implicación es trivial porque g cumple esta propiedad. Si $u\,S'' g_A(w)$, existe un $y \in B'$ tal que $u = g(y)$ y $y\,S'\,w$, pero esto implica que $y \in A$ y que $y\,R\,w$, de nuevo porque las relaciones que forman S_0 son disjuntas dos a dos.

Por la unicidad de 7.17, concluimos que g_A es un isomorfismo, luego resulta que $x = [A, R] \in S$.

Así pues, hemos probado que $e(z) \subset S$. Recíprocamente, todo $x \in S$ es de la forma $x = [A, R]$ y, si llamamos b' al origen de R, tenemos que $b'' = g(b') \in B''$. Según hemos probado, $x = [C^{S''}_{B''}(b''), S''^{b''}_{B''}]\,E\,z$, luego $x \in e(z)$. ■

Si ϕ es una fórmula del lenguaje de ZFC, representaremos por ϕ^{ZE} la fórmula que resulta de acotar todas sus variables por Z y sustituir cada subfórmula $x \in y$ por $x\,E\,y \equiv (x, y) \in E$.

Teorema 7.20 (Z, E) *es un modelo*[5] *de* ZFC−AP.

DEMOSTRACIÓN: Como E es extensional en Z, tenemos que (Z, E) cumple el axioma de extensionalidad. El hecho de que E está bien fundada en Z implica inmediatamente el axioma de regularidad. El teorema 7.19 nos da que existe un

[5]Dejamos al lector comprobar que en NFA se define sin dificultad el conjunto de fórmulas del lenguaje de ZFC (como subconjunto de $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$) así como la relación $(M, E) \vDash \phi[v]$, para cualquier conjunto M y cualquier $E \subset M \times M$. En la demostración del teorema no usamos esto, sino que probamos que (Z, E) es un modelo interno (demostramos los axiomas metamatemáticos relativizados), pero es fácil modificar la prueba para demostrar que $(Z, E) \vDash \mathrm{ZFC} - \mathrm{AP}$.

$z \in Z$ con extensión vacía, así como que, dados x, $y \in Z$, existe un $z \in Z$ con extensión $\{x, y\}$. Esto prueba el axioma del conjunto vacío y el axioma del par.

El axioma de la unión se prueba de forma similar, pero requiere alguna comprobación adicional: dado $x \in Z$, consideramos el conjunto

$$U_x = \{u \mid \bigvee v\, (v \in e(x) \land u \in e(v))\} \subset Z.$$

Basta probar que $|U_x| \leq \kappa_2$, pues entonces el teorema 7.19 nos da que existe un $z \in Z$ tal que $e(z) = U_x$ y esto prueba la relativización del axioma de la unión.

Sea $f : \mathcal{P}_1^2 V \longrightarrow e(x)$ suprayectiva. Sea

$$X = \{A \mid \bigvee u \in \mathcal{P}_1^2 V (A = \{\{u\}\} \times \{g \mid g : \mathcal{P}_1^2 V \longrightarrow e(f(u)) \text{ suprayectiva}\})\}.$$

Por el axioma de elección, existe un conjunto g con un elemento de cada elemento de X. Claramente $g : \mathcal{P}_1^3 V \longrightarrow V$ y, para todo $u \in \mathcal{P}_1^2 V$, se cumple que $g(\{u\}) : \mathcal{P}_1^2 V \longrightarrow e(f(u))$ suprayectiva. Esto nos permite definir una aplicación $h : \mathcal{P}_1^2 V \times \mathcal{P}_1^2 V \longrightarrow U_x$ suprayectiva mediante

$$h = \{a \mid \bigvee uv \in \mathcal{P}_1^2 V (a = ((u, v), g(\{u\})(v)))\}.$$

De aquí se sigue que $|U_x| \leq |\mathcal{P}_1^2 V \times \mathcal{P}_1^2 V| = \kappa_2 \kappa_2 = \kappa_2$.

Para probar el esquema de reemplazo tomamos $\phi(u, v, x_1, \ldots, x_n)$, fijamos $x_1, \ldots, x_n, x \in Z$ y suponemos que

$$\bigwedge u \in Z \overset{1}{\bigvee} v \in Z\ \phi^{ZE}(u, v).$$

Sea

$$Y = \{v \mid v \in Z \land \bigvee u \in e(x)\, \phi^{ZE}(u, v)\} \subset Z.$$

La clave en este punto es observar que la fórmula ϕ^{ZE} admite una estratificación en la que las variables Z y E tienen tipo 1 y todas las demás tienen tipo 0, por lo que la clase Y resulta ser un conjunto. Ahora observamos que

$$f = \{a \mid \bigvee u \in e(x) \bigvee v \in Z\ (a = (u, v) \land \phi^{ZE}(u, v))\}$$

también es un conjunto y, más aún, $f : e(x) \longrightarrow Y$ biyectiva, y así tenemos que $|Y| = |e(x)| \leq \kappa_2$, luego el teorema 7.19 nos da que existe un $y \in Z$ tal que $e(y) = Y$. Claramente:

$$\bigwedge u \in Z (u\, E\, x \rightarrow \bigvee v \in Z (v\, E\, y \land \phi^{ZE}(u, v))),$$

lo que prueba el axioma de reemplazo.

Veamos ahora el axioma de elección. Sea $z \in Z$ y sea R un buen orden en $e(z)$. Observemos que el término

$$\{u, v\}^{ZE} \equiv w \mid (w \in Z \land \bigwedge x \in Z (x\, E\, w \leftrightarrow x = u \lor x = v))$$

está estratificado y tiene el mismo tipo que las variables u, v, y lo mismo vale para $(u,v)^{ZE} \equiv \{\{u\}^{ZE}, \{u,v\}^{ZE}\}^{ZE}$. Por lo tanto, podemos definir

$$R^* = \{a \mid \bigvee uv(a = (u,v)^{ZE} \land (u,v) \in R)\}.$$

Claramente, $|R^*| = |R| \leq |e(z) \times e(z)| \leq \kappa_2\kappa_2 = \kappa_2$, luego existe un $r \in Z$ tal que $e(r) = R^*$, y es fácil ver que $(r \text{ es un buen orden en } z)^{ZE}$.

Falta probar el axioma de infinitud, pero lo probaremos un poco más abajo (tras el teorema 7.24), pues la demostración se basa en resultados que conviene destacar por su propio interés. ■

Teorema 7.21 *Existe una única aplicación $i : \mathrm{Ord} \longrightarrow Z$ inyectiva tal que*

$$\bigwedge\alpha \in \mathrm{Ord}\, e(i(\alpha)) = \{i(\beta) \mid \beta < \alpha\}.$$

DEMOSTRACIÓN: Si (A, R) es un conjunto bien ordenado y definimos

$$R^* = \{(a,b) \mid (a,b) \in R \land a \neq b\},$$

tenemos que R^* es una relación extensional y bien fundada en A y tiene un origen si (A, R) tiene un máximo elemento. Además es claro que

$$\mathrm{ord}(A,R) = \mathrm{ord}(B,S) \leftrightarrow [A, R^*] = [B, S^*].$$

Esto hace que

$$i = \{(\alpha, z) \mid \alpha \in \mathrm{Ord} \land \bigvee AR(\mathrm{ord}(A,R) = \alpha + 1 \land z = [A, R^*])\}$$

sea una aplicación inyectiva $i : \mathrm{Ord} \longrightarrow Z$.

Si $\mathrm{ord}(A, \leq) = \alpha + 1$, para cada $\beta < \alpha$ tenemos que existe un $a \in A$ tal que $\mathrm{ord}(A_a^<, \leq) = \beta + 1$ y, si b es el máximo de $A_a^<$, entonces $A_a^< = C_A^<(b)$, con lo que

$$i(\beta) = [A_a^1, <]\, E\, [A, <] = i(\alpha),$$

luego $i(\beta) \in e(i(\alpha))$. Recíprocamente, si $z\, E\, i(\alpha)$ entonces existe un $b \in A$ distinto de su máximo tal que $z = [C_A^<(b), <]$, pero, si $a \in A$ es el siguiente de b, entonces $C_A^<(b) = A_a^<$ y, llamando $\beta = \mathrm{ord}(A_b^<, \leq)$, de donde se sigue que $\beta + 1 = \mathrm{ord}(A_a^<, \leq) < \alpha + 1$, tenemos que $z = i(\beta)$ y $\beta < \alpha$.

La unicidad de i es inmediata: si existe otra i' que cumple el enunciado, pero $i \neq i'$, sea α el mínimo del conjunto $\{\alpha \mid \alpha \in \mathrm{Ord} \land i(\alpha) \neq i'(\alpha)\}$. Entonces $e(i(\alpha)) = e(i'(\alpha))$ y, como E es extensional, esto implica que $i(\alpha) = i'(\alpha)$, contradicción. ■

Definición 7.22 Llamaremos $\Omega^Z = i[\mathrm{Ord}] \subset Z$, de modo que $i : \mathrm{Ord} \longrightarrow \Omega^Z$ biyectiva. Si definimos la relación en Ω^Z dada por[6] $\alpha \leq \beta \leftrightarrow i(\alpha) \subset i(\beta)$, el teorema anterior prueba que $i : (\mathrm{Ord}, \leq) \longrightarrow (\Omega^Z, \leq)$ es una semejanza, luego en particular $\leq$ es un buen orden en Ω^Z. Además, la relación de orden estricto asociada es la restricción de E a Ω^Z.

[6]Notemos que se trata simplemente de la inclusión en (Z, E).

El teorema siguiente prueba que Ω^Z es clase de los ordinales (de von Neumann) en (Z, E):

Teorema 7.23 $\bigwedge z \in Z\,(z \in \Omega^Z \leftrightarrow z$ *es un ordinal*$^{ZE})$

DEMOSTRACIÓN: Observemos que como (Z, E) cumple el axioma de regularidad, la definición de ordinal se reduce a ser un conjunto transitivo y conexo para la relación de pertenencia, en este caso para E. Es inmediato que todos los elementos de Ω^Z cumplen la definición de ordinal.

Supongamos ahora que z es un ordinal^{ZE}, pero que $z \notin \Omega^Z$. Entonces E es un buen orden estricto en $e(z)$. Nótese que hay un punto no trivial en esta afirmación, y es que si $A \subset e(z)$ es un conjunto no vacío, entonces $|A| \leq \kappa_2$, luego A es la extensión de un elemento de Z, y gracias a ello podemos afirmar que A tiene un mínimo elemento respecto de E.

Si $e(z) \not\subset \Omega^Z$ podemos considerar el mínimo de $e(z) \setminus \Omega^Z \neq \varnothing$ respecto de la relación E, y así tenemos otro $z \in Z \setminus \Omega^Z$ tal que z es un ordinal^{ZE} y $e(z) \subset \Omega^Z$. Por lo tanto, podemos suponer esta inclusión. Ahora bien, no puede darse la igualdad, ya que, según el teorema 6.71, tenemos que $|\Omega^Z| = |\mathrm{Ord}| = \kappa_2^+$, mientras que $|e(z)| \leq \kappa_2$. Por lo tanto, $\Omega^Z \setminus e(z) \neq \varnothing$ y este conjunto tiene un mínimo elemento, que será de la forma $i(\alpha)$, para cierto $\alpha \in \mathrm{Ord}$.

Por la minimalidad de α tenemos que $e(i(\alpha)) \subset e(z)$, pero también se cumple que $e(z) \subset e(i(\alpha))$, pues si $x \in e(z)$ entonces $x = i(\beta)$ para cierto ordinal, pero si fuera $\alpha \leq \beta$, entonces necesariamente $\alpha < \beta$ (pues $i(\alpha) \notin e(z)$) y así $i(\alpha)\,E\,i(\beta)\,E\,z$, lo que implica $i(\alpha)\,E\,z$ por la transitividad^{ZE} de z. Así llegamos a que $i(\alpha) \in e(z)$, contradicción. En definitiva, $e(z) = e(i(\alpha))$, luego por extensionalidad $z = i(\alpha) \in \Omega^Z$, contradicción. ■

Teorema 7.24 $\bigwedge wz \in Z((|w| = |z|)^{ZE} \leftrightarrow |e(w)| = |e(z)|)$

DEMOSTRACIÓN: Si $f : e(w) \longrightarrow e(z)$ biyectiva, es fácil ver que el conjunto

$$F = \{a \mid \bigvee uv(a = (u, v)^{ZE} \land (u, v) \in f)\}$$

cumple $|F| = |e(w)| \leq \kappa_2$, por lo que existe $\bar{f} \in Z$ tal que $e(\bar{f}) = F$ y entonces $(\bar{f} : w \longrightarrow z$ biyectiva$)^{ZE}$, luego $(|w| = |z|)^{ZE}$.

Recíprocamente, si $(\bar{f} : w \longrightarrow z$ biyectiva$)^{ZE}$, definimos

$$f = \{a \mid \bigvee u \in e(w) \bigvee v \in e(z)(a = (u, v) \land (u, v)^{ZE} \in e(\bar{f}))\},$$

y es claro que $f : e(w) \longrightarrow e(z)$ biyectiva. ■

Teniendo en cuenta que un conjunto es infinito si es equipotente a un subconjunto propio, el teorema anterior implica claramente que

$$\bigwedge z \in Z(z \text{ es infinito}^{ZE} \leftrightarrow e(z) \text{ es infinito}).$$

En particular, $i(\omega)$ es un ordinal infinito en (Z, E). De hecho, $i(\omega) = \omega^{ZE}$. Esto prueba que (Z, E) cumple el axioma de infinitud.

Definición 7.25 Sea $K^Z = i[\mathrm{In}[K]] \subset \Omega^Z$. Llamaremos también $i : K \longrightarrow K^Z$ a la composición $\mathrm{In} \circ i$. Obviamente i es una semejanza.

Teorema 7.26 $\bigwedge z \in Z(z \in K^Z \leftrightarrow z$ *es un cardinal*$^{ZE})$

Demostración: Si $\alpha \in \mathrm{Ord}$, basta ver que $i(\alpha)$ es un cardinal^{ZE} si y sólo si $\alpha = \mathrm{In}(\kappa)$, para cierto cardinal κ. Ahora bien, $i(\alpha)$ es un cardinal^{ZE} si y sólo si $i(\alpha)$ no es equipotente^{ZE} con ningún $i(\beta)$, con $\beta < \alpha$, lo que equivale a que $e(i(\alpha))$ no sea equipotente a ningún $e(i(\beta))$.

Por otra parte, i induce una semejanza $(\mathrm{Ord}^<_\alpha, \leq) \longrightarrow (e(i(\alpha)), \leq)$, luego

$$\mathrm{ord}(e(i(\alpha)), \leq) = \mathrm{ord}(\mathrm{Ord}^<_\alpha, \leq) = T^2(\alpha).$$

Es claro entonces que $i(\alpha)$ es un cardinal^{ZE} si y sólo si $T^2(\alpha)$ es un ordinal inicial, lo cual equivale a que α sea un ordinal inicial, pues si $T^2(\alpha) = \mathrm{In}(\kappa)$, entonces $\mu = \mathrm{Card}(\alpha)$ cumple $T^2(\mu) = \kappa$ y $T^2(\alpha) = T^2(\mathrm{In}(\mu))$, luego $\alpha = \mathrm{In}(\mu)$. ■

De aquí se sigue que, no es que no podamos demostrar que (Z, E) cumple AP, sino que podemos demostrar que no lo cumple, ya que en (Z, E) hay un máximo cardinal, a saber, $i(\kappa_0)$, mientras que AP implica que no hay un máximo cardinal.

En la prueba del teorema anterior hemos visto también que

$$\mathrm{ord}(e(i(\alpha)), \leq) = T^2(\alpha),$$

luego $|e(i(\alpha))| = T^2(\mathrm{card}(\alpha))$. En particular, si $\kappa \in K$, tenemos que

$$|e(i(\kappa))| = |e(i(\mathrm{In}(\kappa))| = T^2(\mathrm{card}(\mathrm{In}(\kappa))) = T^2(\kappa).$$

Equivalentemente:

$$\bigwedge \kappa \in K \bigwedge z \in Z(|z|^{ZE} = i(\kappa) \leftrightarrow |e(z)| = T^2(\kappa)).$$

Con esto podemos probar que (Z, E) cumple "una buena porción" del axioma de partes:

Teorema 7.27 $\bigwedge z \in Z(|z|^{ZE} \leq i(\kappa_1) \rightarrow (\bigvee w \bigwedge u(u \in w \leftrightarrow u \subset z))^{ZE})$.

Demostración: Sea $S = \{x \in Z \mid e(x) \subset e(z)\}$. Podemos definir una biyección $\mathcal{P}_1 S \longrightarrow \mathcal{P}e(z)$ mediante $\{x\} \mapsto e(x)$, de modo que

$$T(|S|) = |\mathcal{P}e(z)| = T(2^{|e(z)|}).$$

Por la observación previa al teorema $|e(z)| \leq \kappa_3$, luego $|S| \leq 2^{\kappa_3} \leq \kappa_2$. (La última desigualdad se obtiene aplicando T^2 a la desigualdad obvia $2^{\kappa_1} \leq \kappa_0$).

El teorema 7.19 nos da ahora un $w \in Z$ tal que $e(w) = S$, y claramente cumple lo pedido. ■

Así pues, para todo conjunto z tal que $|z|^{ZE} \leq i(\kappa_1)$ (o, equivalentemente, tal que $|e(z)| \leq \kappa_3$) está definido $\mathcal{P}^{ZE}z \in Z$. Más aún, si $|z|^{ZE} = i(\kappa)$ y llamamos μ al cardinal que cumple $i(\mu) = (2^{i(\kappa)})^{ZE}$, tenemos que

$$T^2(\mu) = |e(\mathcal{P}^{ZE}z)| = |S| = 2^{|e(z)|} = 2^{T^2(\kappa)} = T^2(2^\kappa),$$

luego $(2^{i(\kappa)})^{ZE} = i(2^\kappa)$, para todo cardinal $\kappa \leq \kappa_1$.

En particular tenemos el teorema siguiente:

Teorema 7.28 *Si $\kappa \leq \kappa_1$ es un cardinal regular (resp. límite, límite fuerte, inaccesible, fuertemente inaccesible) entonces $i(\kappa)$ cumple lo mismo en (Z, E).*

Demostración: Supongamos que κ es regular y sea $(A \subset i(\kappa) \text{ cofinal})^{ZE}$. Sea $\mu \leq \kappa$ el cardinal que cumple $|A|^{ZE} = i(\mu)$. Entonces es claro que $i^{-1}[e(A)]$ es cofinal en $\mathrm{Ord}^{<}_{\mathrm{In}(\kappa)}$, y sabemos que

$$\mathrm{cf}(\mathrm{Ord}^{<}_{\mathrm{In}(\kappa)}, \leq) = \mathrm{cf}(T^2(\mathrm{In}(\kappa))) = T^2(\mathrm{cf}\,\kappa) = T^2(\kappa),$$

luego $T^2(\mu) = |e(A)| = |i^{-1}[e(A)]| \geq T^2(\kappa)$, luego $\kappa \leq \mu$ y, de hecho $\kappa = \mu$. Por lo tanto,[7] $i(\kappa)$ es regular^{ZE}.

El caso en que κ es un cardinal límite es trivial y el caso en que es límite fuerte es consecuencia inmediata de que todo cardinal $\mu < \kappa$ cumple $(2^{i(\mu)})^{ZE} = i(2^\mu)$. Esto implica a su vez los casos en que κ es inaccesible o fuertemente inaccesible.

■

La fórmula $\phi(x, y) \equiv y = \mathrm{rang}\, x$ puede definirse en ZF−AP, luego tiene sentido relativizarla a (Z, E). Por consiguiente podemos definir el conjunto

$$\mathrm{Rang} \equiv \{(z, \alpha) \mid z \in Z \wedge \alpha \in \mathrm{Ord} \wedge \phi^{ZE}(z, i(\alpha))\},$$

que es una aplicación $\mathrm{Rang} : Z \longrightarrow \mathrm{Ord}$ tal que

$$\bigwedge z \in Z \bigwedge \alpha \in \mathrm{Ord}\ (\mathrm{rang}^{ZE}\, z = i(\alpha) \leftrightarrow \mathrm{Rang}(z) = \alpha).$$

Definición 7.29 Para cada ordinal α, definimos el conjunto

$$Z_\alpha \equiv \{z \mid z \in Z \wedge \mathrm{Rang}\, z < \alpha\} = \{z \mid z \in Z \wedge (\mathrm{rang}\, z < i(\alpha))^E\} = V^{ZE}_{i(\alpha)}.$$

Notemos que el tipo de Z_α es una unidad superior al tipo de α. Si llamamos $P : \mathcal{P}Z \longrightarrow \mathcal{P}Z$ la función dada por

$$PS = \{z \in Z \mid e(z) \subset S\},$$

es claro que

$$Z_0 = \varnothing \wedge \bigwedge \alpha\ Z_{\alpha+1} = PZ_\alpha \wedge \bigwedge \lambda\ Z_\lambda = \bigcup_{\delta<\lambda} Z_\delta \wedge Z = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{Ord}} Z_\alpha,$$

[7] Refinando ligeramente el argumento se comprueba fácilmente que, para todo cardinal infinito, se cumple $\mathrm{cf}^{ZE}(i(\kappa)) = i(\mathrm{cf}\,\kappa)$.

donde λ recorre los ordinales límite. Además $PZ = Z$. Notemos que Z_α no es necesariamente la extensión de un elemento de Z, por lo que el conjunto Z_α puede ser una clase propia respecto del modelo Z. Para que sea la extensión de un elemento de Z debe cumplir que $|Z_\alpha| \leq \kappa_2$.

A este respecto observamos que si $|Z_\alpha| \leq \kappa_2$ entonces existe una biyección $\mathcal{P}_1 Z_{\alpha+1} \longrightarrow \mathcal{P} Z_\alpha$ dada por $\{z\} \mapsto e(z)$, de la que deducimos que

$$T(|Z_{\alpha+1}|) = T(2^{|Z_\alpha|}),$$

luego $|Z_{\alpha+1}| = 2^{|Z_\alpha|}$.

Recordemos que hemos llamado β_0 al mayor ordinal para el que está definida la función $\beth$.

Teorema 7.30 $\bigwedge \alpha \leq \beta_0\ |Z_{\omega+\alpha}| = T^4(\beth_\alpha)$.

Demostración: Teniendo en cuenta la observación previa al teorema, una simple inducción prueba que

$$\bigwedge n \in \mathbb{N}\ (T^2(n) \leq |Z_n| < \aleph_0),$$

de donde a su vez concluimos que $|Z_\omega| = \aleph_0 = \beth_0 = T^4(\beth_0)$. Razonamos por inducción: si vale para α y $\alpha + 1 \leq \beta_0$, entonces $|Z_{\omega+\alpha}| = T^4(\beth_\alpha) \leq \kappa_4$, luego $|Z_{\omega+\alpha+1}| = 2^{|Z_{\omega+\alpha}|} = 2^{T^4(\beth_\alpha)} = T^4(2^{\beth_\alpha}) = T^4(\beth_{\alpha+1})$.

Finalmente, si el teorema es cierto para todo $\delta < \lambda$ y $\lambda \leq \beta_0$, es fácil ver que

$$|Z_{\omega+\lambda}| = \Big|\bigcup_{\delta<\lambda} Z_{\omega+\delta}\Big| = T^4(\beth_\lambda).$$

En efecto, una desigualdad es clara y, para la otra, podemos tomar un conjunto tal que $|X| = T^4(\beth_\lambda)$ y elegir aplicaciones inyectivas $f_\delta : Z_{\omega+\delta} \longrightarrow X$ (de forma que el término f_δ sea estratificado de tipo una unidad mayor que el de δ. Entonces tenemos una aplicación inyectiva $\bigcup\limits_{\delta<\lambda} Z_{\omega+\delta} \longrightarrow \mathrm{Ord}_\lambda^< \times X$ dada por $x \mapsto (\delta_x, f_{\delta_x}(x))$, donde $\delta_x \equiv \min\{\delta \mid x \in Z_{\omega+\delta}\}$. Por consiguiente

$$\Big|\bigcup_{\delta<\lambda} Z_{\omega+\delta}\Big| \leq T^2(\mathrm{card}(\lambda)) \cdot T^4(\beth_\lambda).$$

Ahora observamos que la aplicación $\mathrm{Ord} \longrightarrow \mathrm{Ord}$ dada por $\alpha \mapsto T^2(\mathrm{In}(\beth_\alpha))$ es inyectiva y creciente, luego $\lambda \leq T^2(\mathrm{In}(\beth_\lambda))$, luego $\mathrm{card}(\lambda) \leq T^2(\beth_\lambda)$, luego $T^2(\mathrm{card}(\lambda)) \leq T^4(\beth_\lambda)$. ■

En particular, para todo $\alpha \leq \beta_0$ se cumple que $|Z_\alpha| \leq |Z_{\omega+\alpha}| \leq \kappa_2$.

Supongamos ahora que existe un cardinal fuertemente inaccesible $\kappa \leq \kappa_1$. Entonces (Z, E) es un modelo de ZFC − AP en el que existe un cardinal fuertemente inaccesible κ (a saber, $i(\kappa)$) tal que para todo conjunto A que cumpla $|A| < \kappa$ existe $\mathcal{P}A$ y $|\mathcal{P}A| = 2^{|A|} < \kappa$.

Trabajando en esta teoría[8] podemos definir $V_0 = \varnothing$ y, supuesto definido V_α con $|V_\alpha| < \kappa$, podemos definir $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}V_\alpha$ de modo que $|V_{\alpha+1}| < \kappa$. Además,

[8]Hay que tener en cuenta que los teoremas de inducción y recursión transfinita de ZFC pueden probarse, de hecho, en ZF − AP.

si $\lambda < \kappa$ es un ordinal límite y está definida la sucesión $\{V_\alpha\}_{\alpha<\lambda}$ de modo que $|V_\alpha| < \kappa$, la regularidad de κ hace que $V_\lambda = \bigcup\limits_{\alpha<\lambda} V_\alpha$ cumpla $|V_\lambda| < \kappa$.

Así pues, podemos definir la sucesión (de conjuntos) $\{V_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ y todos sus miembros tienen cardinal $< \kappa$, lo que a su vez nos permite definir el conjunto $V_\kappa = \bigcup\limits_{\alpha<\kappa} V_\alpha$, de modo que $|V_\kappa| = \kappa$.

Es fácil ver que $V_\kappa \vDash \mathrm{ZFC}$. Equivalentemente, en términos del modelo (Z, E), hemos demostrado lo siguiente:

Teorema 7.31 *Si $\kappa \leq \kappa_1$ es un cardinal fuertemente inaccesible, entonces (Z_κ, E) es un modelo de* ZFC.

De hecho, hemos visto que el axioma de los conjuntos cantorianos implica la existencia de cualquier número finito de cardinales fuertemente inaccesibles, luego el modelo Z_κ, donde κ es el mayor de ellos, es un modelo de ZFC en el que existe cualquier número prefijado de cardinales fuertemente inaccesibles. Esto prueba que la consistencia de NFA + ACC no puede demostrarse a partir de la mera consistencia de ZFC.

7.6 La parte (fuertemente) cantoriana de Z

Veamos cómo podemos modificar la construcción de la sección anterior para obtener un modelo de MOST.

Observemos que, como Z es un modelo de ZFC$-$AP, en Z podemos construir la clausura transitiva de cualquiera de sus elementos (relativizada a Z, E). El teorema siguiente muestra la idea subyacente a la definición del modelo Z: si un elemento $z \in Z$ es de la forma $z = [A, R]$, entonces (A, R) es una codificación de $(\operatorname{ct} z \cup \{z\})^{ZE}$:

Teorema 7.32 *Sea $z = [A, R] \in Z$ y, para cada $b \in A$, sea $z_b = [C_A^R(b), R_A^b]$. Entonces $e((\operatorname{ct} z \cup \{z\})^{ZE}) = \{z_b \mid b \in A\}$.*

Demostración: Llamemos $T = \{z_b \mid b \in A\}$. Podemos definir una aplicación $h : \mathcal{P}_1^2 A \longrightarrow T$ mediante $h(\{\{b\}\}) = z_b$, que es inyectiva por 7.15 y obviamente suprayectiva. En particular $|T| \leq \kappa_2$, por lo que existe un $t \in Z$ tal que $e(t) = T$.

Notemos que de la definición de E se sigue que si $b\, R\, c$ entonces $z_b\, E\, z_c$.

Es claro que $(t \text{ es transitivo})^{ZE}$. Además $(z \in t)^{ZE}$ (pues $z = z_a$, donde a es el origen de (A, R)) y $(z \subset t)^{ZE}$, pues, por definición de E, se cumple que $e(z) = \{z_b \mid b \in A \land b\, R\, a\} \subset e(t)$. Esto implica que $(\operatorname{ct} z \cup \{z\} \subset t)^{Z,E}$.

Por otro lado, si $b \in A$, existe una función $f : I_{n+1} \longrightarrow A$ tal que, llamando $b_i = f(i)$, se cumple que $b_0 = b$, $b_n = a$ y $\bigwedge m \in \mathbb{N}(m < n \to b_m\, R\, b_{m+1})$. Por consiguiente, si llamamos $z_m = z_{b_m}$, se cumple que $z_0 = z_b$, $z_n = z$ y además $\bigwedge m \in \mathbb{N}(m < n \to z_m\, E\, z_{m+1})$.

Sea $B = \{(i(m), z_{T^{-2}(m)})^{ZE} \mid m \in I_{T^2(n+1)}\}$. Como G es un conjunto finito existe $g \in Z$ tal que $e(g) = G$, y entonces

$$(g : i(T^2(n)) + 1 \longrightarrow t \land g(0) = z_b \land g(i(T^2(n))) = z$$
$$\land \bigwedge i \in T^2(n)\ g(i) \in g(i+1))^{ZE}.$$

Esto implica $(z_b \in \operatorname{ct} z \cup \{z\})^{ZE}$. ■

Notemos que en la demostración del teorema anterior hemos probado que

$$|e(\operatorname{ct}^{ZE} z)| + 1 = T^2(|A|).$$

Definición 7.33 Diremos que un elemento $z \in Z$ es *(fuertemente) cantoriano* si $z = [A, R]$ y existe un cardinal (fuertemente) cantoriano κ tal que $|A| \leq \kappa$. Llamaremos *parte (fuertemente) cantoriana* de Z a la clase Z_c (resp. Z_{fc}) de los $z \in Z$ (fuertemente) cantorianos.

Puesto que todo cardinal menor que un cardinal fuertemente cantoriano es cantoriano, en la definición de elemento fuertemente cantoriano de Z podemos sustituir $|A| \leq \kappa$ por $|A| = \kappa$. Equivalentemente, $z = [A, R]$ es fuertemente cantoriano si y sólo si el conjunto A es fuertemente cantoriano.

Notemos que las fórmula "z es cantoriano" y "z es fuertemente cantoriano" no están estratificadas, luego las clases Z_c y Z_{fc} no son necesariamente conjuntos. Es obvio que si $[A, R] = [B, S]$ entonces $|A| = |B|$, luego la definición anterior no depende del representante de z elegido.

Por la observación previa a la definición anterior es inmediato que $z \in Z$ es cantoriano si y sólo si existe un cardinal cantoriano κ tal que $|e(\operatorname{ct}^{ZE} z)| \leq \kappa$, y es fuertemente cantoriano si y sólo si el conjunto $e(\operatorname{ct}^{ZE} z)$ es fuertemente cantoriano.

Aunque las clases Z_c y Z_{fc} no sean conjuntos, las fórmulas $z \in Z_c$ y $z \in Z_{\mathrm{fc}}$ son fórmulas del lenguaje de NFA con una única variable libre, y tiene sentido considerar las relativizaciones $\phi^{Z_c E}$ y $\phi^{Z_{\mathrm{fc}} E}$ de cualquier fórmula del lenguaje de ZFC (pero no serán necesariamente fórmulas estratificadas).

Teorema 7.34 *Z_c (con la relación E) es un modelo de* MOST.

DEMOSTRACIÓN: Observemos en primer lugar que $\bigwedge z \in Z_c\ e(z) \subset Z_c$.

En efecto, $(y \in z \to \operatorname{ct}(y) \subset \operatorname{ct}(z))^{ZE}$, luego si $y \in e(z)$ entonces tenemos que $e(\operatorname{ct}^{ZE}(y)) \subset e(\operatorname{ct}^{ZE}(z))$, luego $|e(\operatorname{ct}^{ZE}(y))| \leq |e(\operatorname{ct}^{ZE}(z))|$, y de aquí se sigue claramente el resultado.

Esto hace que la extensión de un $z \in Z_c$ en Z sea la misma que su extensión en Z_c, y en particular podemos concluir que Z_c, E cumple el axioma de extensionalidad.

También cumple el axioma de regularidad, pues si $z \in Z_c$ cumple $e(z) \neq \varnothing$, podemos tomar un E-minimal de $e(z)$, que estará en Z_c y atestigua el axioma de regularidad para z.

Para el axioma del par observamos que si $x, y \in Z_c$, en principio existe un $z \in Z$ tal que $(z = \{x, y\})^{ZE}$, y esto implica que

$$(\operatorname{ct} z \subset \{x, y\} \cup \operatorname{ct} x \cup \operatorname{ct} y)^{ZE},$$

y, por consiguiente, $|e(\operatorname{ct}^{ZE} z)| \leq 2 + |e(\operatorname{ct}^{ZE} x)| + |e(\operatorname{ct}^{ZE} y)|$. Por hipótesis existe un cardinal cantoriano κ tal que $|e(\operatorname{ct}^{ZE} x)| \leq \kappa$ y $|e(\operatorname{ct}^{ZE} y)| \leq \kappa$ (notemos que podemos tomar el mismo para los dos conjuntos). Además podemos suponer que κ es infinito (pues $\aleph_0$ es un cardinal cantoriano). Entonces, concluimos que $|e(\operatorname{ct}^{ZE} z)| \leq \kappa$, luego $z \in Z_c$ y verifica el axioma del par para x e y.

Para el axioma de la unión observamos que si $x \in Z_c$ existe un $z \in Z$ tal que $(z = \bigcup x)^{ZE}$, lo que implica que $(\operatorname{ct} x \subset \operatorname{ct} z)^{ZE}$, y a partir de aquí se razona como en el caso anterior.

Para probar el esquema de Δ_0-especificación vemos primero algo más general: si $z \in Z_c$, $x \in Z$ y $e(x) \subset e(z)$, entonces $x \in Z_c$.

En efecto, tenemos que $(x \subset z)^{ZE}$, luego $(\operatorname{ct} x \subset \operatorname{ct} z)^{ZE}$, y ahora aplicamos el mismo argumento de los apartados anteriores.

En particular, si $\phi(u, x_1, \ldots, x_n)$ es una fórmula Δ_0 y $x, x_1, \ldots, x_n \in Z_c$, al ser Z un modelo de ZFC$-$AP tenemos que existe un $z \in Z$ tal que

$$\bigwedge u \in Z (u\, E\, z \leftrightarrow u\, E\, x \land \phi^{ZE}(u, x_1, \ldots, x_n)).$$

Como $e(z) \subset e(x)$, tenemos que $z \in Z_c$ y, como ϕ es Δ_0, sucede que ϕ^{ZE} es equivalente a $\phi^{Z_c E}$. Esto nos da que Z_c cumple el axioma de Δ_0-especificación.

Veamos el axioma de partes. Para ello tomamos $z \in Z_c$ y sea κ un cardinal cantoriano tal que $|e(\operatorname{ct}^{ZE} z)| \leq \kappa$. En particular $|e(z)| \leq \kappa$. Notemos que, como $\kappa \leq \kappa_0$ y $T(\kappa) = \kappa$, tenemos también que $T(\kappa) \leq \kappa_3$, y hemos visto que esto implica que existe $w = \mathcal{P}^{ZE} z \in Z$. Ahora observamos que

$$(\operatorname{ct} \mathcal{P}z \subset \mathcal{P}z \cup \operatorname{ct} z)^{ZE},$$

luego

$$|e(\operatorname{ct}^{ZE} w)| \leq |e(w)| + |e(\operatorname{ct}^{ZE} z)|,$$

y en la prueba del teorema 7.27 hemos visto que $|e(w)| \leq 2^{|e(z)|} \leq 2^\kappa$, de modo que $|e(\operatorname{ct}^{ZE} w)| \leq 2^\kappa$, y éste es un cardinal cantoriano, luego $w \in Z_c$ y claramente $w = \mathcal{P}^{Z_c E} z$.

Como $|e(\operatorname{ct}^{ZE} i(\omega))| = |e(i(\omega))| = \aleph_0$, concluimos que $i(\omega) \in Z_c$, lo que demuestra el axioma de infinitud.

Para probar el axioma de elección tomamos un conjunto $z \in Z_c$, y es claro que $(z \times z)^{Z_c E} = (z \times z)^{ZE}$. Sea $r \in Z$ tal que (r es un buen orden en $z)^{ZE}$. Como $(r \subset z \times z)^{ZE}$, hemos visto que $r \in Z_c$, y (r es un buen orden en $z)^{Z_c E}$, pues si $w \in Z_c$ cumple que $(w \subset z \land w \neq \varnothing)^{Z_c E}$, esto también vale en Z, y el mínimo de w en Z también lo es en Z_c.

Ahora observamos que, trivialmente, si $z \in Z_c$ entonces $\mathrm{ct}^{ZE}\, z \in Z_c$ y atestigua el axioma de la clausura transitiva para z.

Para probar el axioma H basta ver que todo conjunto bien ordenado es semejante a un ordinal. Ahora bien, si $((A, \leq)$ es un conjunto bien ordenado$)^{Z_cE}$, entonces $((A, \leq)$ es un conjunto bien ordenado$)^{ZE}$, luego existen $f, \alpha \in Z$ tales que $(\alpha \in \Omega \wedge f : (A, \leq) \longrightarrow \alpha$ semejanza$)^{ZE}$, porque Z es un modelo de ZFC$-$AP y en esta teoría se puede probar que todo conjunto bien ordenado es semejante a un ordinal.

Como $(|\alpha| = |f| = |A|)^{ZE}$, tenemos que $|e(\alpha)| = |e(f)| = |e(A)|$ y, como $A \in Z_c$, esto implica que $\alpha, f \in Z_c$.

Como Z_c cumple el axioma de regularidad, la definición de ordinal es Δ_0, por lo que $(\alpha \in \Omega)^{Z_cE}$, y también $(f : (A, \leq) \longrightarrow \alpha$ semejanza$)^{Z_cE}$, también porque la fórmula es Δ_0. ■

Así pues, la consistencia de NFA + AE implica la de MOST.

En la prueba anterior hemos usado varias veces que $\aleph_0$ es un cardinal cantoriano, pero no es necesariamente fuertemente cantoriano, sino que esto equivale al axioma de cómputo AC. Por ello, añadiendo este axioma, la prueba del teorema anterior vale literalmente para demostrar:

Teorema 7.35 (AC) Z_{fc} *(con la relación E) es un modelo de* MOST.

Vamos a probar que (siempre suponiendo AC) la clase Z_{fc} satisface también el axioma RNG. Notemos, no obstante, que los resultados siguientes no dependen de AC.

Tenemos la inclusión $Z_{\mathrm{fc}} \subset Z$ y claramente:

$$\bigwedge xy \in Z(x\,E\,y \wedge y \in Z_{\mathrm{fc}} \rightarrow x \in Z_{\mathrm{fc}}).$$

Esto viene a significar que la clase Z_{fc} es transitiva, de donde se sigue fácilmente que las fórmulas Δ_0 y Δ_1 son absolutas para $Z_{\mathrm{fc}} - Z$. Más aún, teniendo en cuenta que también se cumple

$$\bigwedge xy \in Z(e(x) \subset e(y) \wedge y \in Z_{\mathrm{fc}} \rightarrow x \in Z_{\mathrm{fc}}),$$

concluimos que también son absolutos conceptos como $\mathcal{P}A$, "κ es un cardinal", κ^+, 2^κ, etc. Es claro que los ordinales (resp. cardinales) de Z_{fc} son los de la forma $i(\alpha)$, donde α es un ordinal (resp. cardinal) fuertemente cantoriano.

De este modo, si α es un ordinal fuertemente cantoriano, tenemos que $\alpha \leq \beta_0$ y hemos visto que entonces

$$|Z_\alpha| \leq |Z_{\omega+\alpha}| = T^4(\beth_\alpha) = \beth_{T^4(\alpha)} = \beth_\alpha \leq \kappa_2.$$

Por lo tanto existe un $z_\alpha \in Z$ tal que $e(z_\alpha) = Z_\alpha$ y, más aún, tenemos que $|e(\mathrm{ct}^{ZE} z_\alpha)| = |e(z_\alpha)| \leq \beth_\alpha$, y éste es un cardinal fuertemente cantoriano, luego $z_\alpha \in Z_{\mathrm{fc}}$.

Además, como el rango es absoluto para $Z_{\mathrm{fc}} - Z$, resulta que $z_\alpha = V_{i(\alpha)}^{Z_{\mathrm{fc}}}$. El teorema siguiente es ahora inmediato:

Teorema 7.36 (AC) *Z_{fc} (con la relación E) es un modelo de* MOST + RNG.

En MOST + RNG se demuestra que si $\lambda > \omega$ es un ordinal límite entonces V_λ es un modelo transitivo de ZC$^+$, luego (en NFA) si $\lambda > \omega$ es un ordinal límite fuertemente cantoriano,

$$(V_{i(\lambda)} \vDash \mathrm{ZC}^+)^{Z_{\mathrm{fc}}},$$

pero esto equivale a que $(Z_\lambda, E) \vDash \mathrm{ZC}^+$. En particular:

Teorema 7.37 (AC) *$Z_{\omega\cdot 2}$ (con la relación E) es un modelo de* ZC$^+$.

Aquí hay que destacar que, a diferencia de Z_{fc}, tenemos que $Z_{\omega\cdot 2}$ es un conjunto, por lo que del teorema anterior se deduce que

$$\mathrm{NFA{+}AC} \vdash \mathrm{consis}\ \mathrm{ZC}^+.$$

Para terminar observamos que en Z_{fc} está definida la función beth, y su relación con la función beth de NFA es la más natural:

Teorema 7.38 (AC) *Para todo ordinal α fuertemente cantoriano, se cumple que $\beth_{i(\alpha)}^{Z_{\mathrm{fc}}} = i(\beth_\alpha)$.*

DEMOSTRACIÓN: Tenemos que

$$|e(\beth_{i(\alpha)}^{Z_{\mathrm{fc}}})| = |e(V_{\omega+i(\alpha)}^{Z_{\mathrm{fc}}})| = |Z_{\omega+\alpha}| = \beth_\alpha = T^2(\beth_\alpha),$$

luego la observación previa al teorema 7.27 nos da que $|\beth_{i(\alpha)}^{Z_{\mathrm{fc}}}|^{ZE} = i(\beth_\alpha)$, pero es fácil ver que el cardinal de un objeto de Z_{fc} es el mismo en Z_{fc} que en Z. ■

7.7 Subversión en la especificación

Una extensión de NFA + AC con un mayor grado de subversión es la teoría NFA* que resulta de añadir a NFA + AC el esquema axiomático siguiente:

Especificación en conjuntos fuertemente cantorianos (EFC):

$$\bigwedge A(A \text{ es fuertemente cantoriano} \rightarrow \bigvee B \bigwedge x(x \in B \leftrightarrow x \in A \land \phi(x)))$$

para toda fórmula $\phi(x)$ (no necesariamente estratificada) con posibles parámetros.

Esta teoría sigue siendo más débil en cuanto a consistencia que ZFC, aunque es estrictamente más fuerte que NFA+AC. Como primera consecuencia de este axioma probamos lo siguiente:

Teorema 7.39 (NFA*) *Z_{fc} es un modelo de* ZC$^+$+H.

Demostración: Si $\phi(u, x_1, \ldots, x_n)$ es cualquier fórmula del lenguaje de ZFC y fijamos elementos $x, x_1, \ldots, x_n \in Z_{\mathrm{fc}}$, tenemos que $e(\mathrm{ct}^{ZE}\, x)$ es un conjunto fuertemente cantoriano y, como $e(x) \subset e(\mathrm{ct}^{ZE} x)$, el conjunto $e(x)$ también lo es. Por lo tanto podemos usar EFC para concluir la existencia del conjunto

$$Y = \{u \in e(x) \mid \phi^{Z_{\mathrm{fc}}E}(u, x_1, \ldots, x_n)\},$$

Puesto que $Y \subset e(x)$, se cumple que $|Y| \leq \kappa_2$, luego existe un $y \in Z$ tal que $e(y) = Y \subset e(x)$, luego $e(\mathrm{ct}^{ZE} y) \subset e(\mathrm{ct}^{ZE} x)$ es fuertemente cantoriano, luego $y \in Z_{\mathrm{fc}}$. Así

$$(\bigwedge u(u \in y \leftrightarrow u \in x \wedge \phi(u, x_1, \ldots, x_n)))^{Z_{\mathrm{fc}}E}.$$

Esto prueba el axioma de especificación. ■

Teorema 7.40 (NFA*) *Para todo ordinal α fuertemente cantoriano existe un ordinal $\beta \geq \alpha$ fuertemente cantoriano tal que $\beth_{i(\beta)}^{Z_{\mathrm{fc}}} = i(\beta)$.*

Demostración: Sea $f : \mathrm{Ord} \longrightarrow \mathrm{Ord}$ dada por $f(\delta) = \mathrm{In}(\beth_{T^2(\delta)})$ si $T^2(\delta) \leq \beta_0$ y $f(\delta) = 0$ en caso contrario. Notemos que si δ es fuertemente cantoriano se reduce a $f(\delta) = \mathrm{In}(\beth_\delta)$, y entonces $i(f(\delta)) = \beth_{i(\delta)}^{Z_{\mathrm{fc}}}$. Además $f(\delta)$ es también fuertemente cantoriano.

Diremos que un conjunto $A \subset \mathbb{N} \times \mathrm{Ord}$ es inductivo si

$$(0, \alpha) \in A \wedge \bigwedge n \in \mathbb{N} \bigwedge \delta \in \mathrm{Ord}\ ((n, \delta) \in A \rightarrow (n+1, f(\delta)) \in A).$$

Sea F la intersección del conjunto de todos los conjuntos inductivos, que claramente es un conjunto inductivo. Más aún, todo elemento de F distinto de $(0, \alpha)$ es de la forma $(n+1, f(\delta))$, donde $(n, \delta) \in F$. Sea

$$A = \{(n, \delta) \mid (n, \delta) \in F \wedge \bigwedge \gamma \in \mathrm{Ord}((n, \gamma) \in F \rightarrow \gamma = \delta)\}.$$

Claramente es inductivo, luego concluimos que para cada $n \in \mathcal{D}F$ existe un único ordinal δ tal que $(n, \delta) \in F$, es decir, que F es una función. Por otro lado, es claro que $\mathcal{D}F$ es un subconjunto inductivo de $\mathbb{N}$ en el sentido usual, luego $F : \mathbb{N} \longrightarrow \mathrm{Ord}$ y cumple que $F(0) = \alpha$ y $\bigwedge n \in \mathbb{N}\ F(n+1) = f(F(n))$.

Como $\mathbb{N}$ es un conjunto fuertemente cantoriano (por AC) el axioma EFC nos permite definir el conjunto

$$X = \{n \in \mathbb{N} \mid F(n) \text{ es un ordinal fuertemente cantoriano}\},$$

y hemos visto que es un conjunto inductivo, luego $\mathcal{R}F$ es un conjunto de ordinales fuertemente cantorianos. En particular $i(F(n+1)) = \beth_{i(F(n))}^{Z_{\mathrm{fc}}} \geq i(F(n))$.

Si existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $F(n+1) = F(n)$, entonces $\beta = F(n)$ cumple lo pedido. En caso contrario $\bigwedge n \in \mathbb{N}\ F(n) < F(n+1)$ y $\beta = \sup \mathcal{R}F$ es un ordinal límite, y es fuertemente cantoriano, por 7.3. Veamos que cumple lo pedido.

Si $i(\delta) < \beth_{i(\beta)}^{Z_{\mathrm{fc}}}$, entonces existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$i(\delta) < \beth_{i(F(n))}^{Z_{\mathrm{fc}}} = i(F(n+1)) < i(\beta),$$

luego $\beth_{i(\beta)}^{Z_{\mathrm{fc}}} \leq i(\beta)$ y la desigualdad opuesta se cumple en general. ■

Finalmente obtenemos el siguiente resultado de Solovay:

Teorema 7.41 (NFA*) *Z_{fc} es un modelo de* $\mathrm{ZF_2C}$*, es decir, de la teoría que resulta de restringir el axioma de reemplazo de* ZFC *a fórmulas* Σ_2 *y añadir el esquema de especificación para fórmulas arbitrarias.*

Demostración: Ya sabemos que Z_{fc} satisface $\mathrm{ZC}^+ + \mathrm{H}$ y sólo hemos de probar Σ_2-reemplazo. El teorema anterior prueba además que en Z_{fc} se cumple que por encima de cada ordinal hay un punto fijo de la función beth.

Observemos que, según 5.11, si β es un ordinal fuertemente cantoriano tal que $\beth^{Z_{\mathrm{fc}}}_{i(\beta)} = i(\beta)$, entonces $Z_\beta = V^{Z_{\mathrm{fc}}}_{i(\beta)} = H^{Z_{\mathrm{fc}}}(i(\beta))$, y por 5.10 las fórmulas Σ_1 (luego también las Π_1) son absolutas para Z_β y Z_{fc}.

Sea $\phi(x, y)$ una fórmula Σ_2 (con posibles parámetros $x_1, \ldots, x_n \in Z_{\mathrm{fc}}$). Hemos de probar

$$(\bigwedge x \overset{1}{\bigvee} y\, \phi(x, y) \to \bigwedge a \bigvee b \bigwedge y (y \in b \leftrightarrow \bigvee x \in a\ \phi(x, y)))^{Z_{\mathrm{fc}}}.$$

Suponemos, pues, que $\bigwedge x \in Z_{\mathrm{fc}} \overset{1}{\bigvee} y \in Z_{\mathrm{fc}}\ \phi^{Z_{\mathrm{fc}}}(x, y)$ y tomamos un $a \in Z$. Sabemos que a es equipotente en Z_{fc} a un ordinal, que será de la forma $i(\alpha)$, para cierto $\alpha \in \mathrm{Ord}$. Sea $(f : i(\alpha) \longrightarrow a \text{ biyectiva})^{Z_{\mathrm{fc}}}$. La fórmula

$$\psi(\delta, y) \equiv (\delta \in i(\alpha) \wedge \bigvee x \in a\ (f(\delta) = x \wedge \phi(x, y))) \vee (\delta \notin i(\alpha) \wedge y = \varnothing)$$

es también Σ_2, cumple $(\bigwedge \delta \overset{1}{\bigvee} y\, \psi(\delta, y))^{Z_{\mathrm{fc}}}$ y si encontramos un $b \in Z_{\mathrm{fc}}$ tal que $\bigwedge y(y \in b \leftrightarrow \bigvee \delta \in i(\alpha)\ \psi(\delta, y))^{Z_{\mathrm{fc}}}$, éste cumplirá también el axioma de reemplazo para a y ϕ. Equivalentemente, podemos volver a la fórmula ϕ original y suponer que a es un cierto ordinal$^{Z_{\mathrm{fc}}}$ $i(\alpha)$. Pongamos que $\phi(\delta, y) \equiv \bigvee u\, \psi(u, \delta, y)$, para cierta fórmula ψ de clase Π_1.

Fijemos un $\delta < \alpha$. Entonces existe un único $y \in Z_{\mathrm{fc}}$ que verifica la fórmula $\bigvee u \in Z_{\mathrm{fc}}\ \psi^{Z_{\mathrm{fc}}}(u, i(\delta), y)$. Sea $\beta > \delta$ un ordinal fuertemente cantoriano tal que Z_β contiene a y y a todos los posibles parámetros $x_1, \ldots, x_n$ que aparezcan en ϕ, y existe un $u \in Z_\beta$ tal que $\psi^{Z_{\mathrm{fc}}}(u, i(\delta), y)$. Por el teorema anterior podemos suponer que β cumple además que $\beth^{Z_{\mathrm{fc}}}_{i(\beta)} = i(\beta)$. Esto hace que $\psi^{Z_{\mathrm{fc}}}(u, i(\delta), y)$ equivalga a $\psi^{Z_\beta}(u, i(\delta), y)$ y, más aún, y es el único elemento de Z_β tal que $(\bigvee u\ \psi(u, i(\delta), y))^{Z_\beta}$.

En resumen, para cada $\delta < \alpha$ existe un $\beta > \delta$ tal que $\mathrm{In}(\beth_\beta) = \beta$, Z_β contiene a todos los parámetros de ϕ y el único $y \in Z_{\mathrm{fc}}$ tal que $\phi^{Z_{\mathrm{fc}}}(i(\delta), y)$ es también el único $y \in Z_\beta$ tal que $\phi^{Z_\beta}(i(\delta), y)$. Más aún, sabemos que existe un β en estas condiciones que es fuertemente cantoriano, pero si tomamos el mínimo β posible tendremos que es fuertemente cantoriano sin necesidad de exigirlo explícitamente (pues será menor o igual que un ordinal fuertemente cantoriano).

Esto nos permite definir

$$H \equiv \{(\delta, \beta) \mid \delta \in \mathrm{Ord}^<_\alpha \wedge \beta \in \mathrm{Ord} \wedge \mathrm{In}(\beth_{T^2(\beta)}) = \beta \wedge \delta, x_1, \ldots, x_n \in Z_\beta$$
$$\wedge \overset{1}{\bigvee} y \in Z_\beta\ \phi^{Z_\beta}(i(\delta), y) \wedge \cdots \},$$

donde los puntos suspensivos omiten la condición de que β sea el mínimo ordinal que cumple las condiciones indicadas. Al haber eliminado toda mención explícita a Z_{fc}, la definición de H resulta estar estratificada, por lo que H es un conjunto y, más concretamente, es una función $H : \mathrm{Ord}^{<}_{\alpha} \longrightarrow \mathrm{Ord}$. Además sabemos que $\mathcal{R}H$ está formado únicamente por ordinales fuertemente cantorianos. Por lo tanto, existe $\gamma = \sup \mathcal{R}H \in \mathrm{Ord}$ y por 7.3 resulta que γ es fuertemente cantoriano. Esto nos permite definir en Z_{fc} el conjunto

$$b = \{y \in V_{i(\gamma)} \mid \bigvee \delta < i(\alpha)\ \phi(\delta, y))\}^{Z_{\mathrm{fc}}},$$

y claramente cumple lo pedido. ■

Puede probarse que la consistencia de NFA* es exactamente la de $\mathrm{ZF_2C}$.

Capítulo VIII

Modelos de NFA

En este capítulo demostraremos la consistencia de NFA y varias teorías relacionadas a partir de la consistencia de teorías más débiles o más fuertes que ZFC. La técnica básica para construir modelos de NFA será una combinación del uso de ultrapotencias para obtener modelos no estándar de teorías de la familia de ZFC y una técnica debida esencialmente a Jensen, pero formulada explícitamente por Boffa para obtener de ellos modelos de NFA. Dedicamos la primera sección a exponer los resultados que necesitamos sobre ultrapotencias. Los resultados de este capítulo pueden demostrarse en MOST, aunque también es interesante observar que pueden probarse en NFA + AC, si bien no incidiremos en este caso.

8.1 Ultrapotencias

Definición 8.1 Recordemos que un *filtro* U en un conjunto X es un subconjunto de $\mathcal{P}X$ con las propiedades siguientes:

a) $X \in U \land \varnothing \notin U$,

b) $\bigwedge AB \in U \ A \cap B \in U$,

c) $\bigwedge A \in U \bigwedge B \in \mathcal{P}X(A \subset B \rightarrow B \in U)$.

Si además se cumple que $\bigwedge A \in \mathcal{P}X \ (A \in U \lor X \setminus A \in U)$, entonces se dice que U es un *ultrafiltro.*

Cada $x \in X$ define un ultrafiltro en X, a saber, el dado por

$$U_x = \{A \in \mathcal{P}X \mid x \in A\}.$$

Los ultrafiltros de esta forma se llaman *ultrafiltros principales.* Es inmediato que un ultrafiltro es principal si y sólo si contiene un conjunto finito, pues si contiene un conjunto finito, tiene que contener a uno de sus puntos, ya que en caso contrario contendría a la intersección de sus complementarios, es decir, al complementario del conjunto, y también al conjunto vacío, en contra de lo que exige la definición.

Si X es un conjunto infinito, entonces $\mathcal{F}_X = \{A \in \mathcal{P}X \mid |X \setminus A| < \aleph_0\}$ es un filtro en X, de modo que un ultrafiltro es no principal si y sólo si contiene a $\mathcal{F}$.

El lema de Zorn implica inmediatamente que todo filtro se extiende a un ultrafiltro, luego aplicando esto al filtro $\mathcal{F}_X$ anterior, concluimos que todo conjunto infinito tiene ultrafiltros no principales.

Si $\mathcal{G}$ es una familia de subconjuntos de X con la propiedad de la intersección finita (es decir, tal que la intersección de cualquier subfamilia finita es no vacía), entonces $\mathcal{G}$ genera un filtro, a saber, el filtro F formado por todos los conjuntos que contienen una intersección finita de elementos de $\mathcal{G}$, que es el menor filtro que contiene a $\mathcal{G}$. En particular, toda familia con la propiedad de la intersección finita se extiende a un ultrafiltro.

Si M es un modelo de un lenguaje formal $\mathcal{L}$ (de primer orden) y U es un ultrafiltro en un conjunto X, definimos en M^X la relación de equivalencia dada por

$$f \sim_U g \leftrightarrow \{x \in X \mid f(x) = g(x)\} \in U.$$

Es fácil ver que se trata realmente de una relación de equivalencia. Definimos la ultrapotencia de M respecto de U como el cociente $\mathrm{Ult}_U(M) = M^X/\sim_U$.

El conjunto $\mathrm{Ult}_U(M)$ se convierte en un modelo de $\mathcal{L}$ interpretando cada relator n-ádico R de $\mathcal{L}$ mediante la relación

$$\bar{R}([f_1], \ldots, [f_n]) \leftrightarrow \{x \in X \mid M \vDash R[f_1(x), \ldots, f_n(x)]\} \in U.$$

No entraremos en cómo se interpretan constantes y funtores porque sólo vamos a considerar lenguajes con relatores. El resultado básico sobre ultrapotencias es el siguiente:[1]

Teorema 8.2 (Teorema fundamental) *Sea M un modelo de un lenguaje formal $\mathcal{L}$, sea X un conjunto, U un ultrafiltro en X y $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ una fórmula de $\mathcal{L}$. Entonces, para todos los $[f_1], \ldots, [f_n] \in \mathrm{Ult}_U(M)$, se cumple:*

$$\mathrm{Ult}_U(M) \vDash \phi[[f_1], \ldots, [f_n]] \leftrightarrow \{x \in X \mid M \vDash \phi[f_1(x), \ldots, f_n(x)]\} \in U.$$

Nota Puesto que no hay ninguna necesidad de que el lenguaje considerado sea numerable, en realidad el teorema fundamental puede enunciarse para un conjunto arbitrario M en lugar de un modelo de un lenguaje $\mathcal{L}$, pues siempre podemos tomar el *lenguaje completo* de M, que es el lenguaje $\mathcal{L}_M$ cuyos signos añadidos a los signos lógicos son un relator n-ádico $\bar{R}$ para cada $R \subset M^n$, excepto para el conjunto $I = \{(x, y) \in M^2 \mid x = y\}$, cuyo relator asociado es $\bar{I} = \ulcorner = \urcorner$. Así M se convierte en un modelo de $\mathcal{L}_M$ sin más que interpretar cada relator $\bar{R}$ como la relación R. Tenemos entonces que $\mathrm{Ult}_U(M)$ verifica el teorema fundamental como modelo de $\mathcal{L}_M$.

[1] La prueba está en la sección 11.2 de mi libro de Pruebas de consistencia, enunciada en el caso más general de un ultraproducto de una familia de modelos. Remitimos allí al lector.

Definición 8.3 Si M es un modelo, X es un conjunto y U es un ultrafiltro en X, definimos $i_M : M \longrightarrow \mathrm{Ult}_U(M)$ mediante $i_M(u) = [c_u]$, donde $c_u : X \longrightarrow M$ es la función constante dada por $c_u(x) = u$.

Del teorema de las ultrapotencias se sigue inmediatamente que i_M es una inmersión elemental, y es un isomorfismo si el ultrafiltro es principal, por lo que las ultrapotencias sólo tienen interés para ultrafiltros no principales.

Hasta aquí la teoría usual sobre ultrapotencias. Ahora desarrollaremos una variante. El punto de partida es el teorema siguiente:

Teorema 8.4 *Sea Λ un conjunto no vacío totalmente ordenado sin máximo elemento. Para cada $n \in \omega$ no nulo, sea $[\Lambda]^n$ el conjunto de los subconjuntos de Λ con n elementos. (Consideraremos a los elementos de $[\Lambda]^n$ como conjuntos ordenados con el orden heredado de Λ.) Existe una sucesión $U = \{U_n\}_{n\in\omega\setminus\{0\}}$ tal que cada U_n es un ultrafiltro no principal en $[\Lambda]^n$ y, para cada $A \in U_{n+1}$, el conjunto de los elementos de $[\Lambda]^n$ que resultan de eliminar el máximo (resp. el mínimo) de cada elemento de A está en U_n.*

DEMOSTRACIÓN: Consideramos el conjunto de las secciones finales:

$$F_1 = \{A \subset [\Lambda]^1 \mid \bigvee \alpha \in \Lambda \bigwedge \delta \in \Lambda (\{\delta\} \in A \leftrightarrow \alpha \leq \delta)\}.$$

Claramente F_1 tiene la propiedad de la intersección finita, luego genera un filtro (obviamente no principal) que a su vez está contenido en un ultrafiltro no principal U_1.

Para cada $A \in U_1$, llamamos A^+ (resp. A^-) al conjunto de todos los elementos de $[\Lambda]^2$ cuyo elemento mayor (resp. menor) pertenece a un elemento de A. Vamos a probar que

$$F_2 = \{A^+ \mid A \in U_1\} \cup \{A^- \mid A \in U_1\}$$

genera un filtro en $[\Lambda]^2$.

Es claro que $A_1^+ \cap A_2^+ = (A_1 \cap A_2)^+$, e igualmente con $-$ en vez de $+$. Por lo tanto, para probar que F_2 tiene la propiedad de la intersección finita basta ver que si $A_1,\ A_2 \in U_1$, entonces $A_1^+ \cap A_2^- \neq \varnothing$, y de hecho basta ver que si $A \in U_1$ entonces $A^+ \cap A^- \neq \varnothing$, pues siempre podemos tomar $A \in U_1$ tal que $A \subset A_1 \cap A_2$, y entonces $A^+ \cap A^- \subset A_1^+ \cap A_2^-$. Esto se cumple porque, como U_1 no es principal, el conjunto A es infinito, y en particular contiene dos elementos $\{\alpha\}$ y $\{\beta\}$, con $\alpha < \beta$, luego $\{\alpha, \beta\} \in A^+ \cap A^-$.

El filtro generado por F_2 no es principal, pues si $A \subset [\Lambda]^2$ es finito, entonces existe un conjunto $A_0 \subset [\Lambda]^1$ finito tal que $A \subset A_0^-$, luego $[\Lambda]^1 \setminus A_0 \in U_1$ y $([\Lambda]^1 \setminus A_0)^- \subset [\Lambda]^2 \setminus A$, luego $[\Lambda]^2 \setminus A$ está en el filtro.

Concluimos que F_2 está contenido en un ultrafiltro no principal U_2. Para probar que cumple el enunciado tomamos $A \in U_2$ y sea A_+ el conjunto de los elementos de $[\Lambda]^1$ que resultan de quitar el máximo elemento a un elemento de A. Queremos probar que $A_+ \in U_1$, pero en caso contrario sería $[\Lambda]^1 \setminus A_+ \in U_1$, con lo que $([\Lambda]^1 \setminus A_+)^+ \in U_2$, y $[\Lambda]^2 \setminus A \in U_2$, contradicción.

Supongamos construidos $U_1, \ldots, U_n$ en las condiciones del teorema. Para cada $A \in U_n$, llamamos A^+ (resp. A^-) al conjunto de todos los elementos de $[\Lambda]^{n+1}$ que al quitarles su mínimo (resp. máximo) dan lugar a elementos de A. Vamos a probar que

$$F_{n+1} = \{A^+ \mid A \in U_n\} \cup \{A^- \mid A \in U_n\}$$

genera un filtro en $[\Lambda]^{n+1}$. Como antes, basta probar que si $A \in U_n$ entonces $A^+ \cap A^- \neq \varnothing$. Consideramos los conjuntos A_- y A_+ formados por los elementos de $[\Lambda]^{n-1}$ que resultan de eliminar el mínimo (resp. máximo) elemento de un elemento de A. Por hipótesis de inducción A_+, $A_- \in U_{n-1}$, luego resulta que $A_+ \cap A_- \neq \varnothing$, y cualquier elemento en dicha intersección se extiende a un elemento de $A^+ \cap A^-$.

Tenemos, pues que F_{n+1} genera un filtro. La prueba de que está contenido en un ultrafiltro no principal U_{n+1} que cumple el teorema es completamente análoga a la del caso $n = 1$. ■

Definición 8.5 Diremos que una sucesión U de ultrafiltros en las condiciones del teorema anterior es una *sucesión compatible de ultrafiltros* en Λ. Diremos que una función $f : \Lambda^{\mathbb{Z}} \longrightarrow M$ tiene *soporte finito* si existen enteros $m \leq n$ y una función $F : \Lambda^{[m,n]} \longrightarrow M$ tal que para todo $g \in \Lambda^{\mathbb{Z}}$ se cumple que $f(g) = F(g|_{[m,n]})$.

Aquí llamamos $[m, n] = \{k \in \mathbb{Z} \mid m \leq k \leq n\}$ y, en las condiciones de la definición anterior, diremos que $[m, n]$ es un soporte de f. Llamaremos $\mathcal{F}$ al conjunto de todas las funciones $f : \Lambda^{\mathbb{Z}} \longrightarrow M$ con soporte finito. Es obvio que cualquier intervalo que contenga a un soporte de una función es también un soporte, por lo que toda familia finita de funciones de $\mathcal{F}$ admite un soporte común.

Fijada una familia compatible de ultrafiltros $U = \{U_n\}_{n\in\omega\setminus\{0\}}$, definimos en $\mathcal{F}$ la relación de equivalencia siguiente: $f \sim g$ si y sólo si cuando $[m, n]$ es un soporte de ambas funciones el conjunto

$$\{\Re h \mid h : [m, n] \longrightarrow \Lambda \text{ es creciente} \wedge \bigwedge h' \in \Lambda^{\mathbb{Z}}(h'|_{[m,n]} = h \rightarrow f(h') = g(h'))\}$$

está en U_{n-m+1}.

Observemos que la definición de soporte garantiza que $f(h')$ depende sólo de h, y la compatibilidad garantiza que la definición de $f \sim g$ no depende de la elección del soporte. Es claro que la relación es de equivalencia. Llamaremos $\mathrm{Ult}_U(M)$ al conjunto cociente que la relación asociada a la sucesión de ultrafiltros U determina en $\mathcal{F}$.

Así, todo elemento de $\mathrm{Ult}_U(M)$ es una clase $[f]$, donde $f \in \mathcal{F}$ es una función con soporte finito $[m, n]$. Esto significa que f (y por lo tanto $[f]$) está determinada por una función $F : \Lambda^{[m,n]} \longrightarrow M$, de modo que $f(g) = F(g|_{[m,n]})$. Más aún, si llamamos $\Lambda_+^{[m,n]}$ al conjunto de las aplicaciones estrictamente crecientes $[m, n] \longrightarrow M$, la definición de $\sim$ hace que $[f]$ sólo dependa de la restricción $F' = F|_{\Lambda_+^{[m,n]}}$, la cual a su vez puede identificarse con una aplicación

$f' : [\Lambda]^{n-m+1} \longrightarrow M$ (a través de la biyección natural $\Lambda_+^{n-m+1} \longrightarrow [\Lambda]^{n-m+1}$ dada por $h \mapsto \mathcal{R}h$). En definitiva, a cada clase $[f]$ con soporte $[m,n]$ podemos asignarle unívocamente una función $f' : [\Lambda]^{n-m+1} \longrightarrow M$, de forma que si f y g tienen ambas soporte $[m,n]$, entonces

$$[f] = [g] \leftrightarrow \{x \in [\Lambda]^{n-m+1} \mid f'(x) = g'(x)\} \in U_{n-m+1}.$$

Ahora es fácil mostrar la relación entre la ultrapotencia que acabamos de definir y las ultrapotencias usuales. Para cada número natural n, llamamos $\mathcal{F}_n$ al subconjunto de $\mathcal{F}$ formado por las funciones de soporte $[-n,n]$ y $\mathrm{Ult}_U^n(M)$ al conjunto cociente determinado en $\mathcal{F}_n$ por la restricción de la relación de equivalencia $\sim$. Para las clases en $\mathrm{Ult}_U^n(M)$ sigue siendo cierta la relación

$$[f] = [g] \leftrightarrow \{x \in [\Lambda]^{2n+1} \mid f'(x) = g'(x)\} \in U_{2n+1}.$$

La diferencia es que ahora n es fijo, por lo que la aplicación $f \mapsto f'$ induce una biyección

$$f_n : \mathrm{Ult}_U^n(M) \longrightarrow \mathrm{Ult}_{U_{2n+1}}(M),$$

donde el término de la derecha representa la ultrapotencia de M en el sentido usual, construida a partir del ultrafiltro U_{2n+1} sobre el conjunto $[\Lambda]^{2n+1}$. Por otra parte, para $m < n$, podemos definir inyecciones naturales

$$i_{mn} : \mathrm{Ult}_U^m(M) \longrightarrow \mathrm{Ult}_U^n(M)$$

mediante $[f] \mapsto [f]$. Así se cumple $i_{mn} \circ i_{np} = 1$. Igualmente, podemos definir claramente inyecciones $i_n : \mathrm{Ult}_U^n(M) \longrightarrow \mathrm{Ult}_U(M)$ tales que los diagramas siguientes son conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ult}_U^n(M) \arrow[r, "i_n"] & \mathrm{Ult}_U(M) \\
\mathrm{Ult}_U^m(M) \arrow[u, "i_{mn}"] \arrow[ur, "i_m"'] &
\end{tikzcd}$$

Más aún, todo elemento de $\mathrm{Ult}_U(M)$ está en la imagen[2] de alguna aplicación i_n.

Ahora observamos que la ultrapotencia $\mathrm{Ult}_U(M)$ admite también una estructura natural de modelo del lenguaje completo $\mathcal{L}_M$, interpretando el relator $\bar{R}$ mediante la relación

$$\bar{R}^*([f_1], \ldots, [f_k]) \leftrightarrow \{x \in [\Lambda]^{n-m+1} \mid R(f_1'(x), \ldots, f_k'(x))\} \in U_{n-m+1},$$

donde $[m,n]$ es un soporte común a todas las funciones $f_1, \ldots, f_k$. Es fácil ver que esta definición no depende de la elección de los representantes de las clases ni del soporte común considerado.

[2]Esto significa que $\mathrm{Ult}_U(M)$ es el límite de un sistema inductivo de ultrapotencias usuales de M.

La misma definición (pero ahora con un soporte fijo $[-n, n]$) es válida sobre las ultrapotencias $\mathrm{Ult}_U^n(M)$, que así se convierten también en modelos de $\mathcal{L}_M$, y es claro que las inyecciones i_{mn} e i_n son inmersiones de modelos, y que las biyecciones $f_n : \mathrm{Ult}_U^n(M) \longrightarrow \mathrm{Ult}_{U_{2n+1}}(M)$ son isomorfismos de modelos.

Este isomorfismo implica que $\mathrm{Ult}_U^n(M)$ cumple el teorema fundamental de las ultrapotencias (porque $\mathrm{Ult}_{U_{2n+1}}(M)$ lo cumple), es decir, que si $\phi(x_1, \ldots, x_k)$ es una fórmula de $\mathcal{L}_M$, entonces

$$\mathrm{Ult}_U^n(M) \vDash \phi[[f_1], \ldots, [f_k]] \leftrightarrow \{x \in [\Lambda]^{2n+1} \mid M \vDash \phi[f_1'(x), \ldots, f_k'(x)]\} \in U_{2n+1}.$$

Teorema 8.6 *Si U es una sucesión compatible de ultrafiltros en un conjunto Λ, las inmersiones $i_{mn} : \mathrm{Ult}_U^m(M) \longrightarrow \mathrm{Ult}_U^n(M)$ y $i_n : \mathrm{Ult}_U^n(M) \longrightarrow \mathrm{Ult}_U(M)$ son elementales.*

DEMOSTRACIÓN: Para cada $[f] \in \mathrm{Ult}_U^m(M)$, su imagen $i_{mn}([f]) = [g]$ es la dada por $g = f$, pero la función g' correspondiente no es f', sino la función que actúa sobre un elemento $x \in [\Lambda]^{2n+1}$ haciendo actuar f sobre el $x' \in [\Lambda]^{2m+1}$ que resulta de eliminarle a x sus primeros y sus últimos $n - m$ elementos, y basta tener en cuenta la relación de compatibilidad de los ultrafiltros.

A su vez, esto implica que las inmersiones $i_n : \mathrm{Ult}_U^n(M) \longrightarrow \mathrm{Ult}_U(M)$ son elementales. Esto es un hecho general sobre límites inductivos de modelos, pero exponemos aquí el argumento:

Hay que probar que, para toda fórmula ϕ de $\mathcal{L}_M$ y $x_1, \ldots, x_k \in \mathrm{Ult}_U^n(M)$, se cumple que

$$\mathrm{Ult}_U(M) \vDash \phi[i_n(x_1), \ldots, i_n(x_k)] \leftrightarrow \mathrm{Ult}_U^n(M) \vDash \phi[x_1, \ldots, x_k].$$

Razonamos por inducción sobre la longitud de ϕ. El caso en que ϕ es una fórmula atómica se cumple porque i_n es una inmersión, y el único caso no trivial se da cuando $\phi = \bigvee x\psi$. (El caso del cuantificador universal se restringe a éste.) Por hipótesis de inducción sabemos que, para todo n y todos los objetos $x, x_1, \ldots, x_k \in \mathrm{Ult}_U^n(M)$, se cumple que

$$\mathrm{Ult}_U(M) \vDash \phi[i_n(x), i_n(x_1), \ldots, i_n(x_k)] \leftrightarrow \mathrm{Ult}_U^n(M) \vDash \phi[x, x_1, \ldots, x_k].$$

Si $\mathrm{Ult}_U(M) \vDash \bigvee x\psi(x, [i_n(x_1)], \ldots, [i_n(x_k)])$, entonces existe $x \in \mathrm{Ult}_U(M)$ tal que $\mathrm{Ult}_U(M) \vDash \psi(x, [i_n(x_1)], \ldots, [i_n(x_k)])$, y dicho objeto x será de la forma $x = i_m(x')$, para cierto m (que podemos tomar $m > n$) y cierto $x' \in \mathrm{Ult}_U^m(M)$. Por lo tanto:

$$\mathrm{Ult}_U(M) \vDash \psi[i_m(x), i_m(i_{nm}(x_1), \ldots, i_m(i_{mn}(x_k))].$$

Por hipótesis de inducción $\mathrm{Ult}_U^m(M) \vDash \psi[x, i_{nm}(x_1), \ldots, i_{nm}(x_k)]$, luego

$$\mathrm{Ult}_U^m(M) \vDash \bigvee x\, \psi(x, [i_{nm}(x_1)], \ldots, [i_{nm}(x_k)])$$

y como i_{nm} es una inmersión elemental, también

$$\mathrm{Ult}_U^m \vDash \bigvee x\, \psi(x, [x_1], \ldots, [x_k]),$$

es decir, $\mathrm{Ult}_U^m \vDash \phi([x_1, \ldots, x_k])$. La implicación opuesta es trivial. ■

Seguidamente definimos $j : M \longrightarrow \mathrm{Ult}_U(M)$ mediante $j(x) = [c_x]$, donde $c_x : \Lambda^{\mathbb{Z}} \longrightarrow M$ es la función constante x, así como $j_n : M \longrightarrow \mathrm{Ult}_U^n(M)$ definidas análogamente. Es obvio que los diagramas siguientes son conmutativos:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "j_n"] \arrow[dr, "j_m"'] & \mathrm{Ult}_U^n(M) \\ & \mathrm{Ult}_U^m(M) \arrow[u, "i_{mn}"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "j_n"'] & \mathrm{Ult}_U(M) \\ & \mathrm{Ult}_U^n(X) \arrow[u, "i_n"'] \end{tikzcd}$$

Puesto que los modelos $\mathrm{Ult}_U^n(M)$ son ultrapotencias usuales, tenemos que las aplicaciones j_n son inmersiones elementales, y el segundo diagrama conmutativo anterior implica que j también lo es, por ser composición de dos inmersiones elementales.

Por último, sea $\sigma : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ la biyección dada por $\sigma(n) = n+1$, sea $\sigma' : \Lambda^{\mathbb{Z}} \longrightarrow \Lambda^{\mathbb{Z}}$ la biyección dada por $h \mapsto \sigma \circ h$ y sea $J : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$ la biyección dada por $h \mapsto \sigma' \circ h$. La última definición es correcta, pues si f tiene soporte $[m,n]$, entonces $J(f)$ tiene soporte $[m+1, n+1]$, pues

$$J(f)(h) = f(\sigma \circ h) = F((\sigma \circ h)|_{[m,n]}) = F^*(h|_{[m+1,n+1]}),$$

donde $F^*(u) = F(\sigma|_{[m,n]} \circ u)$. Si $h|_{[m+1,n+1]}$ es creciente, tenemos que

$$J(f)(h) = f'(\mathcal{R}((\sigma \circ h)|_{[m,n]})) = f'(\mathcal{R}(h|_{[m+1,n+1]})).$$

Esto se interpreta como que las funciones f' (respecto del soporte $[m,n]$) y $J(f)'$ (respecto del soporte $[m+1, n+1]$) son la misma función sobre $[\Lambda]^{n-m+1}$, lo cual no implica que f y $J(f)$ determinen la misma clase en $\mathrm{Ult}_U(M)$. Para poder compararlas hemos de considerar un soporte común, por ejemplo, $[m, n+1]$. Si llamamos $p = f' = g'$ a la función que determina a $[f]$ respecto del soporte $[m,n]$ y a $[J(f)]$ respecto del soporte $[m+1, n+1]$, entonces la función que determina a $[f]$ sobre $[m, n+1]$ es la dada por $f'(A) = p(A_+)$, donde A_+ es el conjunto que resulta de eliminar el máximo de A, mientras que la función que determina a $[J(f)]$ sobre $[m, n+1]$ es la dada por $g'(A) = p(A_-)$, donde A_- es el conjunto que resulta de eliminar el mínimo elemento de A. Así pues, las funciones asociadas a $[f]$ y $[J(f)]$ en su soporte común no son exactamente la misma.

Lo que sí que es ahora inmediato a partir de la relación

$$[f] = [g] \leftrightarrow \{x \in [\Lambda]^{n-m+1} \mid f'(x) = g'(x)\} \in U_{n-m+1}$$

(que sólo depende de la longitud de los soportes) es que

$$[f] = [g] \leftrightarrow [J(f)] = [J(g)].$$

Por lo tanto, podemos definir una aplicación $J : \mathrm{Ult}_U(M) \longrightarrow \mathrm{Ult}_U(M)$ mediante $J([f]) = [J(f)]$. Es fácil ver que es biyectiva, pues su inversa es la aplicación definida como J, pero partiendo de σ^{-1} en lugar de σ. De hecho, se trata de un automorfismo de modelos, ya que, para todo relator $\bar{R}$ de $\mathfrak{L}_M$, se cumple que

$$\mathrm{Ult}_U(M) \vDash \bar{R}[[f_1], \ldots, [f_k]] \leftrightarrow$$
$$\{x \in [\Lambda]^{n-m+1} \mid (f'_1(x), \ldots, f'_k(x)) \in R\} \in U_{n-m+1},$$

donde $[m,n]$ es un soporte común para las aplicaciones f_i, y la segunda condición no se altera si cambiamos cada f_i por $J(f_i)$. Por lo tanto,

$$\mathrm{Ult}_U(M) \vDash \bar{R}[x_1, \ldots, x_k] \leftrightarrow \mathrm{Ult}_U(M) \vDash \bar{R}[J(x_1), \ldots, J(x_k)].$$

Como ya hemos indicado, no nada de lo dicho implica que J sea la identidad:

Teorema 8.7 *Sea U una sucesión compatible de ultrafiltros en un conjunto Λ y sea $T : \Lambda \longrightarrow M$ una aplicación inyectiva. Sea $r = [f] \in \mathrm{Ult}_U(M)$ definido por $f(h) = T(h(0))$. Entonces $J(r) \neq r$.*

DEMOSTRACIÓN: Claramente f tiene soporte $\{0\}$, luego define un elemento de la ultrapotencia, y $J(r) = [J(f)]$ cumple que

$$J(f)(h) = f(\sigma \circ h) = T(h(\sigma(0))) = T(h(1)).$$

Un soporte común a f y $J(f)$ es, por ejemplo $[0,1]$, respecto al cual f' y $J(f)'$ son las aplicaciones dadas por

$$f'(\{\alpha, \beta\}) = T(\text{mín}\{\alpha, \beta\}), \qquad J(f)'(\{\alpha, \beta\}) = T(\text{máx}\{\alpha, \beta\}).$$

Para que fuera $J(r) = r$, el conjunto $\{x \in [\Lambda]^2 \mid f'(x) = J(f)'(x)\}$ tendría que estar en U_2, pero si T es inyectiva se trata del conjunto vacío. ■

Ejemplo Si M es un modelo (no necesariamente natural) de cualquier teoría T que extienda a $\mathrm{M}_0 + V = R$, podemos tomar

$$\Lambda = \{x \in M \mid M \vDash [x] \text{ es un rango finito}\}$$

o, si en M existen rangos infinitos, podemos tomar también el conjunto de los rangos infinitos. En ambos casos, Λ se convierte en un conjunto totalmente ordenado sin máximo considerando el orden dado por la inclusión en M. (No podemos asegurar que se trate de un buen orden, pero tampoco es un requisito.) Tomando una sucesión compatible de ultrafiltros en Λ obtenemos otro modelo de T, la ultrapotencia $\mathrm{Ult}_U(M)$, que es elementalmente equivalente a M pero además tiene un automorfismo no trivial $J : \mathrm{Ult}_U(M) \longrightarrow \mathrm{Ult}_U(M)$ que mueve a un rango finito (o infinito, según la elección de Λ). En efecto, el elemento r construido en el teorema anterior a partir de la inclusión $T : \Lambda \longrightarrow M$ cumple $J(r) \neq r$ y tiene soporte $\{0\}$, luego es de la forma $r = i_0([f])$, de modo que

$$\{\{x\} \in [\Lambda]^1 \mid M \vDash f'(\{x\}) = x \text{ es un rango finito (resp. infinito)}\} = [\Lambda]^1 \in U_1,$$

luego $\mathrm{Ult}^0_U(M) \vDash [f]$ es un rango finito (resp. infinito), luego lo mismo vale para r en $\mathrm{Ult}_U(M)$. ■

Los modelos del ejemplo anterior serán el punto de partida para construir modelos de NFA sin y con el axioma de infinitud. Sin embargo, para construir modelos en los que se cumpla el axioma de cómputo necesitamos construir un modelo con un automorfismo que no fije a un rango infinito pero que deje invariantes a todos los rangos finitos.

Para ello necesitamos definir sucesiones compatibles de ultrafiltros más precisas que las que hemos construido, y para ello necesitamos trabajar en una teoría más rica que MOST. Una teoría válida es MOST + RNG, y en ella trabajamos en el resto de esta sección.

En esta teoría tenemos definidos los rangos V_α. Vamos a considerar concretamente $V_{\omega\cdot 3}$, que es un modelo transitivo de ZC en el que pueden definirse los conjuntos V_α para todo ordinal $\alpha \in V_{\omega\cdot 3}$, es decir, para todo $\alpha < \omega \cdot 3$. Consideramos el conjunto $X = \bigcup\limits_{n\in\omega} \omega^{[V_{\omega\cdot 2}]^n} \in V_{\omega\cdot 3}$ y el conjunto de sus partes finitas $\mathcal{P}_f X \subset V_{\omega\cdot 3}$.

Sea U un ultrafiltro en $\mathcal{P}_f X$ que extienda al filtro generado por los conjuntos

$$\{y \in \mathcal{P}_f X \mid x \subset y\},$$

para cada $x \in \mathcal{P}_f X$. Obviamente no es principal. Consideramos la ultrapotencia $M = \mathrm{Ult}_U(V_{\omega\cdot 3})$, que es un modelo de ZC en el que pueden definirse los rangos V_α para todo ordinal. Sea $i : V_{\omega\cdot 3} \longrightarrow M$ la inmersión elemental canónica.

Sea $d : \mathcal{P}_f X \longrightarrow V_{\omega\cdot 3}$ la inclusión y sea $F = [d] \in M$. Así

$$M \vDash [F] \text{ es un conjunto finito de aplicaciones de un cierto } [V_{\omega\cdot 2}]^n \text{ en } \omega,$$

pues, para cada $A \in \mathcal{P}_f X$, tenemos que $d(A) = A$ cumple esto en $V_{\omega\cdot 3}$. Además, si $u : [V_{\omega\cdot 2}]^n \longrightarrow \omega$, tenemos que

$$\{A \in \mathcal{P}_f X \mid c_u(A) \in d(A)\} = \{A \in \mathcal{P}_f X \mid u \in A\} \in U,$$

luego $M \vDash [i(u)] \in [F]$. Como F es finito en M, existe un $N \in M$ tal que $M \vDash$ "$[N] \in \omega$ y todos los elementos de $[F]$ son aplicaciones de dominio $[V_{\omega\cdot 2}]^n$ para un cierto $n < [N]$".

En MOST + RNG podemos demostrar el teorema de Erdös-Rado,[3] según el cual, para todo $N \in \omega$ se cumple la relación $\beth_{N-1}^+ \rightarrow (\aleph_1)_{\aleph_0}^N$, es decir, que toda partición $F : [\beth_{N+1}^+]^N \longrightarrow \omega$ tiene un subconjunto homogéneo no numerable (en particular infinito). Un caso particular es que toda partición $F : [\beth_\omega]^N \longrightarrow \omega$ tiene un subconjunto homogéneo infinito H, pues basta restringirla a $[\beth_{N+1}^+]^N$, con lo que el conjunto homogéneo puede tomarse, de hecho, contenido en $\beth_{N+1}^+ \subset \beth_{N+2}$.

Puesto que $|V_{\omega\cdot 2}| = \beth_\omega$, en particular tenemos que, fijado un número natural, toda partición $F : [V_{\omega\cdot 2}]^N \longrightarrow \omega$ tiene un subconjunto homogéneo infinito. Esto sigue siendo cierto (para todo natural N) relativizado a $V_{\omega\cdot 3}$, luego también es cierto en M, y podemos aplicarlo al número natural (no estándar) N.

[3]Véase mi libro de pruebas de consistencia, teorema 12.6.

Fijemos un buen orden R de $V_{\omega\cdot 2}$ de ordinal $\beth_\omega$. Claramente $R \in V_{\omega\cdot 3}$ y es un buen orden de $V_{\omega\cdot 2}$ sin máximo elemento (aunque en $V_{\omega\cdot 3}$ no es semejante a ningún ordinal). En $V_{\omega\cdot 3}$ (y por lo tanto en M) podemos definir, para cada $N \in \omega$ y cada aplicación $f : [V_{\omega\cdot 2}]^m \longrightarrow \omega$ con $m < N$, la aplicación que representaremos por $G_N(f) : [V_{\omega\cdot 2}]^N \longrightarrow \omega$ tal que $G_N(f)(A) = f(A_m)$, donde A_m es el conjunto de los m primeros elementos de A respecto de R.

Por consiguiente, en M también podemos definir aplicaciones $G_N(f)$ para todo número natural N y toda f en las condiciones indicadas, respecto al buen orden $i(R)$. En particular consideramos las aplicaciones $G_N(f)$ para el natural $N \in M$ que hemos fijado y para aplicaciones $f \in M$ que cumplan $M \vDash [f] \in [F]$.

Con todas ellas podemos formar un $G_0 \in M$ tal que

$$M \vDash [G_0] : [V_{\omega\cdot 2}]^{[N]} \longrightarrow \omega^{|[F]|},$$

pero, como $M \vDash |F|$ es finito, podemos componer G_0 con una biyección con imagen en ω y así tenemos un $G \in M$ tal que

$$M \vDash [G] : [V_{\omega\cdot 2}]^{[N]} \longrightarrow \omega.$$

Según hemos visto, en M se cumple que existe un H tal que

$$M \vDash [H] \subset V_{\omega\cdot 2} \wedge [G] \text{ es constante en } [[H]]^{[N]}$$

o, lo que es lo mismo,

$$M \vDash \bigwedge f \in [F]\ G_{[N]}(f) \text{ es constante en } [[H]]^{[N]}.$$

En particular, si $u : [V_{\omega\cdot 2}]^n \longrightarrow \omega$, hemos visto antes que

$$M \vDash [i(u)] \in [F] \wedge [i(n)] < [N],$$

(lo segundo por la elección de N). Por lo tanto, $M \vDash G_{[N]}([i(u)])$ es constante en $[[H]]^{[N]}$, luego, por definición de G_N, en particular

$$M \vDash [i(u)] \text{ es constante en } [H]^{[i(n)]}.$$

En particular, para todo conjunto $A \subset [V_{\omega\cdot 2}]^n$, podemos considerar la partición $u : [V_{\omega\cdot 2}]^n \longrightarrow 2$ que vale 1 en A y 0 en su complementario, con lo que $i(u)$ verifica en M la misma definición respecto de $i(A)$ y, por consiguiente,

$$M \vDash [H]^{[i(n)]} \subset [i(A)] \vee [H]^{[i(n)]} \subset i([V_{\omega\cdot 2}]^n \setminus A]).$$

Finalmente definimos:

$$U_n = \{A \subset [V_{\omega\cdot 2}]^n \mid M \vDash [H]^{i(n)} \subset [i(A)]\},$$

y ahora es inmediato que U_n es un ultrafiltro en $[V_{\omega\cdot 2}]^n$. Además no es principal, pues si $\{x\} \in U_n$ entonces $M \vDash [H]^{i(n)} \subset [i(\{x\})] = [\{i(x)\}]$, y esto es absurdo, pues H es infinito en M.

Veamos seguidamente que los ultrafiltros U_n son compatibles. Para ello observamos que si $A \subset [V_{\omega\cdot 2}]^{n+1}$ está en U_{n+1} entonces $M \vDash [H]^{i(n)+1} \subset [i(A)]$. En particular, en M se cumple que $i(A)$ contiene un subconjunto de H con $i(n)+1$ elementos. Si a éste le quitamos su primer o su último elemento, tenemos un conjunto de H con $i(n)$ elementos que está en $i(A)_\pm = i(A_\pm)$ y, como $[H]^{i(n)}$ tiene que estar contenido en $i(A_\pm)$ o bien en su complementario, se ha de dar el primer caso, es decir, $M \vDash [H]^{i(n)} \subset [i(A_\pm)]$, lo que prueba que $A_\pm \in U_n$.

Así pues, llamando $\tilde{U} = \{U_n\}_{n\in\omega\setminus\{0\}}$ a la sucesión de ultrafiltros que acabamos de construir sobre $\Lambda = V_{\omega\cdot 2}$, vamos a estudiar la ultrapotencia $\mathcal{M} = \mathrm{Ult}_{\tilde{U}}(V_\lambda)$. Se trata de un modelo de ZC + $V = R$ en el que el automorfismo J fija a todos los números naturales. En efecto, si $\mathcal{M} \vDash [k] \in \omega$, tomemos un natural n tal que $k = j_n([f])$, donde f está determinada por una función $f' : [V_{\omega\cdot 2}]^{2n+1} \longrightarrow V_\lambda$ tal que

$$A = \{x \in [V_{\omega\cdot 2}]^{2n+1} \mid V_\lambda \vDash [f'(x)] \in \omega\} \in U_{2n+1}.$$

Notemos que $V_\lambda \vDash [f'(x)] \in \omega$ equivale a $f'(x) \in \omega$. Si modificamos f' haciendo que tome el valor 0 fuera de A obtenemos una nueva función que define una nueva función f que define la misma clase $[f]$, luego no perdemos generalidad si suponemos que $A = [V_{\omega\cdot 2}]^{2n+1}$ o, lo que es lo mismo, que $f' : [V_{\omega\cdot 2}]^{2n+1} \longrightarrow \omega$.

Recordemos ahora la relación entre k y $J(k)$. Estamos suponiendo que el primero es de la forma $k = [g]$ donde g tiene soporte $[-n, n]$, luego el segundo es de la forma $J(k) = [J(g)]$, donde $J(g)$ tiene soporte $[-n+1, n+1]$. Un soporte común es, pues, $[-n, n+1]$ y, sobre este soporte, la función $g' : [V_{\omega\cdot 2}]^{2n+2} \longrightarrow \omega$ que determina a r es la dada por $g'(x) = f'(x_+)$, mientras que la función $J(g)' : [V_{\omega\cdot 2}]^{2n+1} \longrightarrow \omega$ que determina a $J(r)$ es la dada por $J(g)'(x) = f'(x_-)$. Sea ahora

$$A = \{x \in [V_{\omega\cdot 2}]^{2n+2} \mid g'(x) = J(g)'(x)\}.$$

Si probamos que $A \in U_{2n+2}$ tendremos que $r = J(r)$.

Ahora bien, sabemos que $M \vDash [i(f')]$ es constante en $[[H]]^{[i(2n+1)]}$, así como que $M \vDash [i(g')], [i(J(g)')]$ son constantes en $[[H]]^{[i(2n+2)]}$. Pero las tres funciones toman el mismo valor constante sobre los conjuntos indicados, pues la forma en que $i(g')$ e $i(J(g)')$ actúan sobre un subconjunto de H es haciendo actuar $i(f')$ sobre el subconjunto de H que resulta de eliminar el máximo o el mínimo, luego las tres toman el mismo valor fijo. Por consiguiente,

$$M \vDash [[H]]^{[i(2n+2)]} \subset [i(A)],$$

que es lo que tiene que cumplir A para pertenecer a U_{2n+2}. ■

Notemos que el automorfismo $J : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ puede ser la identidad (y lo será necesariamente si λ es pequeño). Para que el teorema 8.7 pueda aplicarse para justificar que hay un rango no fijado, debemos tomar λ suficientemente grande. El mínimo valor posible es $\lambda = \beth_\omega$. Así, si $\mathcal{M} = \mathrm{Ult}_{\tilde{U}}(V_{\beth_\omega})$, podemos considerar una aplicación inyectiva $T : \Lambda = V_{\omega\cdot 2} \longrightarrow \beth_\omega \longrightarrow V_{\beth_\omega}$, donde la segunda aplicación es la dada por $\alpha \mapsto V_{\omega+\alpha}$. Así, como la imagen de T está formada por rangos infinitos de $V_{\beth_\omega}$, el objeto $r \in \mathcal{M}$ dado por 8.7 cumple, además de $J(r) \neq r$, que $\mathcal{M} \vDash [r]$ es un rango infinito. En resumen:

Teorema 8.8 (MOST + RNG) *Existe un modelo $\mathcal{M}$ de* ZC + $V = R$ *con un automorfismo $J : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ tal que para todo $k \in \mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M} \vDash [k] \in \omega$ se cumple $J(k) = k$ y existe $r \in \mathcal{M}$ tal que $J(r) \neq r$ y $\mathcal{M} \vDash [r]$ es un rango infinito.*

De hecho, $\mathcal{M}$ se puede tomar elementalmente equivalente a un modelo V_λ, para λ suficientemente grande.

8.2 Modelos de Boffa

En esta sección veremos expondremos una técnica general para obtener modelos de NFA a partir de modelos de teorías relacionadas con ZFC (que contengan o extiendan a ZFC). Dicha técnica está implícita en el trabajo original de Jensen sobre NFA, pero fue aislada por Boffa. Podemos evitar el estar trabajando constantemente con modelos no naturales y con relativizaciones a dichos modelos axiomatizando la característica relevante de los modelos que hemos construido en la sección anterior, es decir, la existencia de un automorfismo que mueve un rango:

Definición 8.9 Si T es cualquier teoría que extiende a $\mathrm{M}_0 + V = R$, llamaremos T^a a la teoría que resulta de añadir al lenguaje $\mathcal{L}$ de la teoría de conjuntos un funtor monádico j y añadir los axiomas siguientes a los axiomas de T:

- $\bigwedge x \bigvee y\ x = j(y)$
- $\bigwedge xy(x = y \leftrightarrow j(x) = j(y))$
- $\bigwedge xy(x \in y \leftrightarrow j(x) \in j(y))$
- $\bigvee r \in R_0\ j(r) \subsetneq r$

Así, T^a incorpora un automorfismo de la clase universal que mueve un rango hacia abajo en el buen orden de los rangos.

El ejemplo tras el teorema 8.7 implica (en MOST) que si T tiene un modelo M, entonces T^a también tiene un modelo $\mathrm{Ult}_U(M)$, pues basta interpretar el funtor j como el automorfismo J que hemos construido en la ultrapotencia en caso de que el rango $r \in \mathrm{Ult}_U(M)$ que cumple $\mathrm{Ult}_U(M) \vDash [J(r)] \neq [r]$ cumpla de hecho que $\mathrm{Ult}_U(M) \vDash [J(r)] \subsetneq [r]$, e interpretar j como J^{-1} en caso contrario.

Más aún, hemos visto que si el modelo M contiene un rango infinito podemos añadir a los axiomas de T^a que r es un rango infinito, y en cualquier caso podemos añadir como axioma que r es un rango finito.

Por último, acabamos de ver que en MOST + RNG podemos probar que T^a tiene un modelo en el que se cumple además el axioma

$$\bigwedge n \in \omega\ j(n) = n.$$

Los dos primeros axiomas de T^a nos permiten definir $j^{-1}(x) \equiv y \mid j(y) = x$. Una simple inducción muestra que, para toda fórmula $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathcal{L}$,

$$\bigwedge x_1 \cdots x_n(\phi(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \phi(j(x_1), \ldots, j(x_n)),$$

y lo mismo vale con j^{-1} en lugar de j, pero es importante recordar que no hemos añadido a T^a las instancias del esquema de Δ_0-especificación asociadas a fórmulas que contengan el funtor j.

Llamaremos M_0^a a la teoría que obtenemos cuando partimos simplemente de $\mathrm{M}_0 + V = R$, sin más axiomas.

Podríamos presentarla de dos formas equivalentes: una es partir de un modelo M de M_0^a y construir a partir de él un modelo de NFA, o bien trabajar en M_0^a y definir un modelo interno de NFA. Nos decantamos por la segunda opción porque simplifica considerablemente la notación al no tener que relativizar fórmulas a ningún modelo de partida.

Así pues, trabajamos en la teoría M_0^a descrita en la sección precedente. Fijamos un $r \in R_0$ tal que $j(r) \subsetneq r$ y tomamos $M = r$ (escribiremos M cuando pensemos en r como universo del modelo y r cuando pensemos en él como rango, pero son lo mismo). Notemos que M es un conjunto transitivo, pero la relación de pertenencia del modelo que vamos a considerar no será la natural, sino la relación E dada por

$$x \mathrel{E} y \leftrightarrow y \in j(r)^+ \land j(x) \in y.$$

Por último, interpretamos el relator cto como la pertenencia al conjunto

$$C = j(r)^+ = \{y \in M \mid y \subset j(r)\}.$$

Con esto tenemos definido un modelo (M, E, C) del lenguaje formal de NFA. Notemos que los átomos de M no tienen el elementos en M (respecto a la relación E), por lo que M cumple el axioma de los átomos. Veamos ahora que cumple los axiomas de NFA.

Extensionalidad Se trata de probar que si $x, y \in C$, entonces

$$\bigwedge u \in M(u \mathrel{E} x \leftrightarrow u \mathrel{E} y) \rightarrow x = y,$$

pero la hipótesis equivale a que $\bigwedge u \in r(j(u) \in x \leftrightarrow j(u) \in y)$, que a su vez equivale a que $\bigwedge u \in j(r)\ (u \in x \leftrightarrow u \in y)$. Ahora bien, como $x, y \subset j(r)$, esto equivale a que $\bigwedge u\,(u \in x \leftrightarrow u \in y)$, luego $x = y$.

Formación de conjuntos Para cada fórmula $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ del lenguaje de NFA, podemos definir una fórmula $\phi^1(x_1, \ldots, x_n, R)$ del lenguaje $\mathcal{L}^a$ (el lenguaje $\mathcal{L}$ con el funtor j y donde R es una variable que no esté en ϕ) de modo que, para todos los $x_1, \ldots, x_n \in M$, se cumple:

$$\phi^M(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \phi^1(x_1, \ldots, x_n, r).$$

En efecto, ϕ^1 se define por recurrencia sobre la longitud de ϕ, de modo que para las fórmulas atómicas la definición es:

ϕ	ϕ^1
$\mathrm{cto}\, x$	$x \in j(R)^+$
$x = y$	$x = y$
$x \in y$	$y \in j(R)^+ \land j(x) \in y$

Para fórmulas no atómicas definimos

$$(\neg\phi)^1 \equiv \neg\phi^1, \quad (\phi \to \psi)^1 \equiv \phi^1 \to \psi^1, \quad (\bigwedge x\, \psi)^1 \equiv \bigwedge x \in R\, \psi^1.$$

La relación entre ϕ y ϕ^1 se prueba fácilmente por inducción sobre la longitud de ϕ. Ahora bien, si ϕ admite una estratificación en la que cada variable u tiene tipo t_u y N es un número natural mayor que los tipos de todas las variables de ϕ, podemos obtener otra fórmula equivalente ϕ^2 sustituyendo las fórmulas atómicas de ϕ como indica la tabla siguiente:

ϕ	ϕ^1	ϕ^2
$\mathrm{cto}\, x$	$x \in j(R)^+$	$j^{N-t_x}(x) \in j^{N-t_x+1}(R)^+$
$x = y$	$x = y$	$j^{N-t_x}(x) = j^{N-t_y}(y)$
$x \in y$	$y \in j(R)^+ \land j(x) \in y$	$j^{N-t_y}(y) \in j^{N-t_y+1}(R)^+ \land j^{N-t_x}(x) \in j^{N-t_y}(y)$

Las condiciones que impone la estratificación implican que el paso de cada fórmula atómica de ϕ^1 a cada fórmula de ϕ^2 se realiza aplicando el mismo número de veces el operador j a cada miembro, por lo que sigue siendo cierto que

$$\phi^M(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \phi^2(x_1, \ldots, x_n, r).$$

Pero cada variable ligada u en ϕ^2 aparece en una subfórmula de la forma

$$\bigwedge x \in R\ \psi(j^{N-t_x}(x), \ldots\ ),$$

que a su vez equivale a $\bigwedge x \in j^{N-t_x}(R)\ \psi(x, \ldots\ )$, es decir, que se cumple

$$\phi^M(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \phi^3(j^{N-t_{x_1}}(x_1), \ldots, j^{N-t_{x_n}}(x_n)),$$

donde ϕ_3 es una fórmula Δ_0 con parámetros de la forma $j^k(r)$.

Consideremos ahora una instancia del esquema de formación de conjuntos:

$$\bigvee A \in j(r)^+ \bigwedge x \in r(j(x) \in A \leftrightarrow \phi^M(x, x_1, \ldots, x_n)),$$

donde la fórmula ϕ está estratificada. Según lo visto, esto equivale a

$$\bigvee A \in j(r)^+ \bigwedge x \in r(j(x) \in A \leftrightarrow \phi^3(j^{N-t_x}(x))),$$

donde ϕ^3 es una fórmula Δ_0 con parámetros de la forma $j^{N-t_{x_i}}(x_i)$ o $j^k(r)$. A su vez, esto equivale a que

$$\bigvee A \in j(r)^+ \bigwedge x \in j(r)(x \in A \leftrightarrow \phi^3(j^{N-t_x-1}(x))).$$

Teniendo en cuenta que $A \in j(r)^+ \leftrightarrow A \subset j(r)$, esto equivale a que

$$\bigvee A(\bigwedge x(x \in A \leftrightarrow x \in j(r) \land \phi^3(j^{N-t_x-1}(x)))),$$

o también a que

$$\bigvee A \bigwedge x(x \in A \leftrightarrow x \in j^{N-t_x}(r) \land \phi^3(x)),$$

que es un caso particular de Δ_0-especificación. ■

Veamos algunas propiedades del modelo que acabamos de construir:

a) *Si $x, y \in C$, entonces $(x \subset y)^M \leftrightarrow x \subset y$.*

En efecto, tenemos que $x, y \subset j(r)$, luego

$$\begin{aligned}(x \subset y)^M &\leftrightarrow \bigwedge u \in r(u\,E\,x \to u\,E\,y) \leftrightarrow \bigwedge u \in r(j(u) \in x \to j(u) \in y)\\ &\leftrightarrow \bigwedge u \in j(r)\ (u \in x \to u \in y) \leftrightarrow x \subset y.\end{aligned}$$

b) *Si $x, y \in r$, entonces $\{x, y\}^M = j(\{x, y\})$.*

En efecto:

$$\begin{aligned}u \in \{x,y\}^M &\leftrightarrow j(j^{-1}(u)) \in \{x,y\}^M \leftrightarrow j^{-1}(u)\,E\,\{x,y\}^M\\ &\leftrightarrow j^{-1}(u) = x \lor j^{-1}(u) = y \leftrightarrow u = j(x) \lor u = j(y)\\ &\leftrightarrow u \in \{j(x), j(y)\} = j(\{x,y\}).\end{aligned}$$

c) *Si $x, y \in r$, entonces $(x, y)^M = j^2((x, y))$.*

En efecto:

$$(x,y)^M = \{\{x,x\}^M, \{x,y\}^M\}^M = j(\{j(\{x,x\}), j(\{x,y\})\}) = j^2((x,y)).$$

d) *Si $x, y \in C$, entonces $(x \times y)^M = j^2(x \times y)$.*

En efecto:

$$\begin{gathered}u \in (x \times y)^M \leftrightarrow j^{-1}(u)\,E\,(x \times y)^M \leftrightarrow\\ \bigvee vw \in r(v\,E\,x \land w\,E\,y \land j^{-1}(u) = (v,w)^M) \leftrightarrow\\ \bigvee vw \in r(v \in j^{-1}(x) \land w \in j^{-1}(y) \land u = j^3((v,w))) \leftrightarrow\\ u \in j^3(j^{-1}(x) \times j^{-1}(y)) = j^2(x \times y).\end{gathered}$$

e) *Si $f, x, y \in C$, entonces $(f : x \longrightarrow y)^M \leftrightarrow j^{-2}(f) : x \longrightarrow y$.*

En efecto:

$$\begin{aligned}(f : x \longrightarrow y)^M &\leftrightarrow f \subset (x \times y)^M \land \bigwedge u \in r(u\,E\,x \to \overset{1}{\bigvee} v \in r(v\,E\,y \land (u,v)^M\,E\,f))\\ &\leftrightarrow j^{-2}(f) \subset x \times y \land \bigwedge u \in r(u \in j^{-1}(x) \to \overset{1}{\bigvee} v \in j^{-1}(y)\, j^3((u,v)) \in f)\\ &\leftrightarrow j^{-2}(f) \subset x \times y \land \bigwedge u \in x \overset{1}{\bigvee} v \in y\ j^2((u,v)) \in f\\ &\leftrightarrow j^{-2}(f) \subset x \times y \land \bigwedge u \in x \overset{1}{\bigvee} v \in y\ (u,v) \in j^{-2}(f) \leftrightarrow j^{-2}(f) : x \longrightarrow y.\end{aligned}$$

Teniendo esto en cuenta se comprueba sin dificultad que:

f) *Si* $f, x, y \in C$, *entonces* ($f : x \longrightarrow y$ *inyectiva, suprayectiva, biyectiva*)^M *si y sólo si* $j^{-2}(f) : x \longrightarrow y$ *inyectiva, suprayectiva, biyectiva.*

g) *Si* $R \in C$ *y* u, $v \in r$, *entonces* $(u\,R\,v)^M \leftrightarrow (u, v) \in j^{-3}(R)$.

En efecto:

$$(u\,R\,v)^M \leftrightarrow (u, v)^M\,E\,R \leftrightarrow j^3((u, v)) \in R \leftrightarrow (u, v) \in j^{-3}(R).$$

h) $V^M = j(r)$.

En efecto, $j(r) \in j(r)^+$ y para todo $x \in M$, se cumple que

$$x\,E\,j(r) \leftrightarrow j(x)\,E\,j(r) \leftrightarrow x\,E\,r \leftrightarrow x \in M,$$

luego $j(r)$ contiene a todos los elementos de M.

i) $\varnothing^M = \varnothing$.

En efecto, es claro que $\varnothing \in C$ y no tiene elementos en M.

Teorema 8.10 ($\mathbf{M}_0^a$+AE) (M, E) *es un modelo de* NFA+AE. *Además, para todo* $x \in C$, *se cumple que* x *es finito*^{M} *si y sólo si* x *es finito.*

Demostración: Ya hemos probado que M es un modelo de NFA. Para probar que cumple AE consideramos un buen orden R en r y llamamos

$$\overline{R} = j^3(R) \subset j^2(j(r) \times j(r)) = j^2(V^M \times V^M) = (V \times V)^M \subset j(r),$$

luego $\overline{R} \in C$ es un conjunto en M. Más aún, $(\overline{R} \subset V \times V)^M$. Además, si u, $v \in r$, por g) tenemos que $(u\,\overline{R}\,v)^M \leftrightarrow u\,R\,v$, de donde se sigue que ($\overline{R}$ es una relación de orden en $V)^M$. De hecho, se trata de un buen orden, pues si $A \in C$ es un conjunto no vacío, entonces $A \subset j(r)$ y $j^{-1}(A) \subset r$ es un conjunto no vacío, luego tiene un mínimo elemento $m \in j^{-1}(A)$ respecto de R, luego $m\,E\,A$ y es claro que se trata del mínimo de A en M respecto de $\overline{R}$.

Esto prueba que (V admite un buen orden)^M, luego M cumple el axioma de elección.

Como M cumple AE, se cumple que

$$x \text{ es infinito}^M \leftrightarrow (\bigvee f\ f : x \longrightarrow x \text{ inyectiva no suprayectiva})^M$$

$$\leftrightarrow \bigvee f \in C\ j^{-2}(f) : x \longrightarrow x \text{ inyectiva no suprayectiva}$$

$$\leftrightarrow \bigvee f\ f : x \longrightarrow x \text{ inyectiva no suprayectiva} \leftrightarrow x \text{ es infinito.}$$

Aquí hemos usado que si $g : x \longrightarrow x$ entonces $f = j^2(g) \in C$, pues $g \subset x \times x$, luego $f \subset j^2(x \times x) = (x \times x)^M \subset j(r)$. ■

Teorema 8.11 NFA + ¬AI + AE *es consistente*

DEMOSTRACIÓN: Observemos que el conjunto V_ω es un modelo transitivo de $\mathrm{M}_0 + \neg\mathrm{AI}+\mathrm{AE}+V = R$. Las observaciones tras 8.9 nos dan un modelo[4] transitivo de $\mathrm{M}_0^a + \neg\mathrm{AI}+\mathrm{AE}$. A partir de aquí trabajamos en esta teoría y consideramos el modelo (M, E), que, por el teorema anterior, es un modelo de NFA+¬AI+AE. ■

Teorema 8.12 *Si* MAC *es consistente, también lo es* NFA+AI+AE.

DEMOSTRACIÓN: Según la observación tras el teorema 5.21, si MAC es consistente, también lo es MAC + $V = R$ + existe un rango infinito, y entonces el teorema 8.8, a partir de un modelo de esta teoría, nos da[5] su vez da otro de $\mathrm{MAC}^a + \bigvee r \in R_0\ (j(r) \subsetneq r \land r$ es infinito) y, en esta teoría M es un modelo de NFA+AI+AE. ■

Veamos cómo se interpretan en M los pares ordenados nivelados definidos en 6.34. Dejamos al lector la comprobación de que

$$(\mathcal{P}_1 x)^M = j(\mathcal{P}_1 x), \qquad (\bigcup x)^M = j^{-1}(\bigcup x).$$

En las condiciones del teorema anterior, tenemos que r es un rango infinito, luego en MAC se demuestra que existe $p : r \times r \longrightarrow r$ biyectiva. Consideremos la aplicación $p^* : r \times r \longrightarrow \mathcal{P}_1^2 r$ dada por $p^*(x, y) = \{\{p(x, y)\}\}$. Así

$$j^3(p^*) : j^2(j(r) \times j(r)) \longrightarrow j(\mathcal{P}_1(j(\mathcal{P}_1(j(r))))) \text{ biyectiva},$$

es decir, $j^3(p^*) : (V \times V)^M \longrightarrow (\mathcal{P}_1^2 V)^M$ biyectiva, lo que a su vez equivale a que $(j^5(p^*) : V \times V \longrightarrow \mathcal{P}_1^2 V \text{ biyectiva})^M$. Además, si llamamos[6] $f = j^5(p^*)$, es fácil ver que

$$(f(x, y))^M = j^2(p^*(x, y)).$$

Por lo tanto, según 6.34 tenemos que

$$((x, y)_f^0)^M = (\bigcup\nolimits^2 f(x, y))^M = j^{-2}(\bigcup\nolimits^2 j^2(p^*(x, y))) = \bigcup\nolimits^2 p^*(x, y) = p(x, y).$$

Así pues, cualquier biyección $p : r \times r \longrightarrow r$ sirve como interpretación en M de los pares ordenados nivelados. Si definimos los productos cartesianos, aplicaciones, etc. en términos de pares ordenados nivelados, tenemos, por ejemplo, que

$$(x \times y)^M = j(p)[x \times y].$$

[4]Toda la construcción se lleva a cabo en MAC, luego en principio tenemos que si MAC es consistente también lo es M_0^a+¬AI+AE, pero el lector debería convencerse de que la existencia de V_ω es metamatemáticamente aceptable, así como la construcción del modelo no estándar a partir de él, por lo que podemos afirmar que M_0^a + ¬AI+AE es consistente en términos absolutos, y esto es todo lo que necesitamos para continuar la prueba.

[5]Nuevamente, la construcción se lleva a cabo en MAC, pero ahora partiendo de la existencia de un modelo de MAC (lo cual no es demostrable en MAC). Si el lector acepta que la construcción (partiendo de un modelo numerable) tiene sentido metamatemáticamente, tiene una prueba no constructiva de lo que afirma el enunciado. En caso contrario (o para tener una prueba constructiva) hemos de suponer la consistencia de una extensión de MAC que implique la consistencia de MAC. Por ejemplo, MOST+RNG.

[6]Recíprocamente, es fácil ver que toda $f \in M$ que cumpla $(f : V \times V \longrightarrow \mathcal{P}_1^2 V \text{ biyectiva})^M$ se obtiene de una $p : r \times r \longrightarrow r$ biyectiva según la construcción que hemos dado.

En efecto:

$$\begin{gathered}
u \in (x \times y)^M \leftrightarrow j(j^{-1}(u)) \in (x \times y)^M \leftrightarrow (j^{-1}(u) \in x \times y)^M \\
\leftrightarrow \bigvee vw \in M(v\, E\, x \wedge w\, E\, y \wedge j^{-1}(u) = (v, w)^M) \\
\leftrightarrow \bigvee vw \in M(j(v) \in x \wedge j(w) \in y \wedge j^{-1}(u) = p(v, w)) \\
\leftrightarrow \bigvee vw \in M(v \in j^{-1}(x) \wedge w \in j^{-1}(y) \wedge j^{-1}(u) = p(v, w)) \\
\leftrightarrow \bigvee vw \in M(v \in x \wedge w \in y \wedge u = j(p)(v, w)) \leftrightarrow u \in j(p)[x \times y].
\end{gathered}$$

Similarmente se prueba que si x, $y \in C$ y $R \subset x \times y$, entonces se cumple que $R^* = j(p)[R] \subset j(p)[x \times y] = (x \times y)^M$, luego R^* es una relación^M tal que

$$(u\, R^*\, v)^M \leftrightarrow j(u)\, R\, j(v).$$

En particular, si $f : x \longrightarrow y$, entonces $(f^* : x \longrightarrow y)^M$ y es fácil ver que $f^*(u)^M = j^{-1}(f)(u)$. Más aún, es fácil ver que toda relación (y en particular, toda función) en M se puede expresar de esta forma.

Ahora podemos adaptar el argumento de la prueba del teorema 8.10: si $R \subset x \times x$, entonces R es un buen orden en x si y sólo si R^* es un buen orden^M en x.

En efecto, si R^* es un buen orden y $u \subset x$ es un subconjunto no vacío, entonces $(u \subset x \wedge u \neq \varnothing)^M$, luego existe un $m\, E\, u$ tal que $(\bigwedge v \in u\ m\, R^*\, v)^M$. Así, si $v \in u$ tenemos que $(j^{-1}(v) \in u)^M$, luego $(m\, R^*\, j^{-1}(v))^M$, luego $j(m)\, R\, v$. Esto prueba que $j(m)$ es el mínimo de u. La implicación contraria es similar.

Uniendo los hechos anteriores concluimos que si $\leq_A \subset A \times A$, $\leq_B \subset B \times B$ y $f : A \longrightarrow B$, entonces tenemos que $f : (A, \leq_A) \longrightarrow (B, \leq_B)$ semejanza si y sólo si $(f^* : (A, \leq_A^*) \longrightarrow (B, \leq_B^*)$ semejanza$)^M$.

Por lo tanto, si $(\alpha \in \mathrm{Ord})^M$, tenemos que $\alpha = \mathrm{ord}(A, \leq_A^*)$, donde $A \in C$ y $\leq_A$ es un buen orden en A, y si $\alpha = \mathrm{ord}(A, \leq_A^*) = \mathrm{ord}(B, \leq_B^*)$ entonces $(A, \leq_A)$ y $(B, \leq_B)$ son semejantes. Consecuentemente, podemos definir una aplicación

$$N : j^{-1}[\mathrm{Ord}^M] \longrightarrow \Omega$$

de modo que, para todo conjunto bien ordenado $(A, \leq)$ con $A \in C$ se cumple que $N(\mathrm{ord}(A, \leq^*)^M) = \mathrm{ord}(A, \leq)$.

Veamos ahora que la imagen de N es un ordinal. Para ello basta probar que es transitiva. Supongamos que $N(\alpha^*) = \alpha$ y sea $\beta < \alpha$. Vamos a probar que β también está en la imagen de N. Sea $\alpha^* = \mathrm{ord}(A, \leq^*)^M$, de modo que $\mathrm{ord}(A, \leq) = \alpha$. Sea $b \in A$ tal que $\mathrm{ord}(A_b^<, \leq) = \beta$. Basta observar que

$$(A_{j^{-1}(b)}^{<^*})^M = A_b^<.$$

En efecto,

$$\begin{gathered}
u \in (A_{j^{-1}(b)}^{<^*})^M \leftrightarrow j^{-1}(u)\, E\, (A_{j^{-1}(b)}^{<^*})^M \leftrightarrow j^{-1}(u)\, E\, A \wedge j^{-1}(u) <^* j^{-1}(b) \\
\leftrightarrow u \in A \wedge u <^* b \leftrightarrow u \in A_b^<.
\end{gathered}$$

Por consiguiente, si llamamos $\beta^* = \mathrm{ord}(A_{j^{-1}(b)}^{<^*}, \leq^*)^M < \alpha^*$, tenemos que $N(\beta^*) = \beta$.

Si llamamos $\Omega_0 \in \Omega$ a la imagen de N, hemos probado de hecho que

$$N : j^{-1}[\mathrm{Ord}^M] \longrightarrow \Omega_0 \text{ semejanza.}$$

Más aún, teniendo en cuenta que la finitud es absoluta para M, es fácil ver que N se restringe a una semejanza

$$N : j^{-1}[\mathrm{Ord}^M_\omega] \longrightarrow \omega \text{ semejanza.}$$

Si α^* es un ordinal^M, tenemos que $\alpha^* = \mathrm{ord}(A, \leq^*)^M$ y entonces $T^M(\alpha^*) = \mathrm{ord}(\mathcal{P}_1 A, \leq_1^*)^M$. Recordemos que $\mathcal{P}_1 A = j(P_1(A))$ y $(\leq_1^*)^M = R^*$, para cierta relación R en $j(\mathcal{P}_1 A)$ que vamos a calcular. Para ello tomamos a, $b \in A$ y operamos:

$$\begin{gathered}\{j(a)\}\, R\, \{j(b)\} \leftrightarrow \{a\}\, R^{*M}\, \{b\} \leftrightarrow (\{j^{-1}(a)\}\, R^* \{j^{-1}(b)\})^M \\ \leftrightarrow (\{j^{-1}(a)\} \ \leq_1^* \{j^{-1}(b)\})^M \leftrightarrow (j^{-1}(a) \leq^* j^{-1}(b))^M \leftrightarrow a \leq b \\ \leftrightarrow j(a) j(\leq) j(b) \leftrightarrow \{j(a)\} j(\leq)_1 \{j(b)\},\end{gathered}$$

con lo que $R = j(\leq)_1$. Así pues, $T^M(\alpha^*) = \mathrm{ord}(\mathcal{P}_1 A, j(\leq)_1^*)^M$, luego

$$N(T^M(\alpha^*)) = \mathrm{ord}(\mathcal{P}_1 j(A), j(\leq)_1) = \mathrm{ord}(j(A), j(\leq)) = j(N(\alpha^*)).$$

Esto significa que tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} j^{-1}[\mathrm{Ord}^M] \arrow[r, "N"] \arrow[d, "T^M"'] & \Omega_0 \arrow[d, "j"] \\ j^{-1}[\mathrm{Ord}^M] \arrow[r, "N"'] & \Omega_0 \end{tikzcd}$$

Ahora es inmediato que el modelo M verifica el axioma de cómputo si y sólo si $\bigwedge n \in \omega\ j(n) = n$. Según hemos observado tras la definición 8.9, como consecuencia del teorema 8.8, la consistencia de este axioma se sigue de la de MOST + RNG, luego:

Teorema 8.13 *Si* MOST + RNG *es consistente, también lo es* NFA+AC.

Aquí entendemos que NFA incluye los axiomas de infinitud y elección. Teniendo en cuenta el teorema 7.36, resulta que la consistencia de NFA + AC es de hecho equivalente a la de MOST + RNG.

Observemos ahora que un conjunto $A \in C$ es fuertemente cantoriano^M si y sólo si existe $(f^* : A \longrightarrow \mathcal{P}_1 A)^M$ (que vendrá determinada por una función $f : A \longrightarrow \mathcal{P}_1 j(A)$) tal que $(\bigwedge a \in A\ f^*(a) = \{a\})^M$. En términos de f, esto significa que, para todo $a \in A$ (teniendo en cuenta que $j^{-1}(a)\, E\, A$)

$$j^{-1}(f)(j^{-1}(a)) = f^*(j^{-1}(a)) = \{j^{-1}(a)\}^M = \{a\},$$

luego $f(a) = \{j(a)\}$. Así pues, $A \in C$ es fuertemente cantoriano^M si y sólo si existe $f : A \longrightarrow \mathcal{P}_1 j(A)$ tal que $\bigwedge a \in A\ f(a) = \{j(a)\}$. Obviamente esto equivale a que exista $f : A \longrightarrow j(A)$ tal que $\bigwedge a \in A\ f(a) = j(a)$.

Terminamos con unas observaciones que necesitaremos en la sección siguiente: supongamos que la teoría T^a en la que estamos trabajando incluye los axiomas necesarios para construir la sucesión $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ así como la existencia de un cardinal límite fuerte α tal que $j(\alpha) < \alpha$, de forma que tomamos $M = V_\alpha$. Entonces se cumple que $\Omega_0 \leq \alpha$, es decir, que $N : j^{-1}[\mathrm{Ord}^M] \longrightarrow \alpha$.

En efecto, un $\delta \in j^{-1}[\mathrm{Ord}^M]$ (es decir $(\delta \in \mathrm{Ord})^M$) es de la forma $\delta = \mathrm{ord}(A, \leq^*)^M$, donde $A \in C = V_{j(\alpha)+1}$ y $\leq$ es un buen orden en A. Así, tenemos que $|A| \leq |V_{j(\alpha)}| = j(\alpha)$, porque $j(\alpha)$ es un límite fuerte, luego

$$N(\delta) = \mathrm{ord}(A, \leq) < j(\alpha)^+ < \alpha,$$

porque α es un límite fuerte. Esto prueba que $\Omega_0 \leq \alpha$.

8.3 Más pruebas de consistencia

En esta sección probaremos la consistencia del axioma de los conjuntos cantorianos ACC y el axioma de especificación en conjuntos cantorianos ECC respecto a la consistencia de ZFC más la existencia de un cardinal medible. En realidad la hipótesis se puede rebajar bastante (hasta la existencia de un cardinal débilmente compacto), pero la demostración se vuelve mucho más compleja.

Partimos, pues, de un cardinal medible κ, de modo que existe un ultrafiltro κ-completo no principal U sobre κ. Con éste podemos considerar[7] (el colapso transitivo de) la ultrapotencia $\mathrm{Ult}_U(V)$ de la clase universal y la inmersión elemental $j : V \longrightarrow \mathrm{Ult}_U(V)$ tal que κ es el menor ordinal no fijado. Llamamos $\lambda = \bigcup\limits_{n\in\omega} j^n(\kappa)$, que es un ordinal límite tal que $j(\lambda) = \lambda$.

Nuestro modelo de partida será V_λ, que claramente es un modelo de ZC^+. Más aún, en V_λ se cumple la sentencia:

$$\bigwedge x \overset{1}{\bigvee} \alpha f(f : \alpha + 1 \longrightarrow V \land f(0) = \varnothing \land \bigwedge \delta < \alpha(f(\delta + 1) = \mathcal{P}f(\delta) \land x \not\subset f(\delta))$$
$$\land \bigwedge \delta \leq \alpha(\delta \text{ límite} \rightarrow f(\delta) = \bigcup_{\epsilon<\delta} f(\epsilon)) \land x \subset f(\alpha)),$$

lo que a su vez hace que esté bien definido el rango $\mathrm{rang}\, x$ de un conjunto, los conjuntos V_α, para todo ordinal α, así como los conjuntos $H_\alpha = \{V_\delta \mid \delta \leq \alpha\}$, que a su vez atestiguan que V_λ es un modelo de $\mathrm{ZC}^+ + \mathrm{V} = \mathrm{R}$. En la sección 8.1 hemos visto cómo construir a partir de V_λ un modelo elementalmente equivalente que tenga un automorfismo no trivial, a partir del cual se puede construir a su vez un modelo de NFA. Aquí vamos a necesitar una construcción alternativa del modelo no estándar.

Sea M el conjunto de todos los s tales que:

a) Existe $n_0 \in \omega$ tal que $s : \omega \setminus n_0 \longrightarrow V_\lambda$.

[7] Véase el capítulo XI de [PC].

b) Para todo $n \geq n_0$, se cumple que $s(n+1) = j(s(n))$.

c) Si un número natural cumple $n \geq n_0$, $n > 0$ y existe $j^{-1}(s(n))$, entonces $n-1 \geq n_0$ y $s(n-1) = j^{-1}(s(n))$.

Conviene observar que dos elementos de M cumplen $s = t$ si y sólo si para todo n suficientemente grande $s(n) = t(n)$.

Definimos en M la relación E dada por $s\,E\,t$ si y sólo si para todo n suficientemente grande $s(n) \in t(n)$, con lo que (M, E) resulta ser un modelo del lenguaje de ZFC.

Si llamamos M_n al subconjunto de M formado por todos los $s \in M$ tales que $s(n)$ está definido, la aplicación $i_n : M_n \longrightarrow V_\lambda$ dada por $i_n(s) = s(n)$ es un isomorfismo de modelos. En particular, podemos identificar $M_0 = V_\lambda$ a través de i_0. El diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} M_n \arrow[r, "i_n"] \arrow[d, "i"'] & V_\lambda \arrow[d, "j"] \\ M_{n+1} \arrow[r, "i_{n+1}"'] & V_\lambda \end{tikzcd}$$

donde i es la inclusión, prueba que M_n es un submodelo elemental de M_{n+1}, de donde se sigue a su vez que todos los M_n son submodelos elementales de M. Esto se debe a que M es, de hecho, el límite inductivo de los M_n, pero es fácil probarlo directamente adaptando el argumento empleado en la prueba de 8.6. En particular, como M_0 es un modelo de $\mathrm{ZC}^+ + \mathrm{V} = \mathrm{R}$, resulta que M también lo es. Más aún, sabemos que los rangos en M son los conjuntos de la forma V_δ^{ME}, donde δ es un ordinal^{ME}.

Definimos $J : M \longrightarrow M$ mediante $J(s)(n) = s(n-1)$. Claramente J es un automorfismo de M.

Consideramos el elemento $\alpha \in M$ determinado por $\alpha(0) = \kappa$. Como κ es un cardinal fuertemente inaccesible$^{V_\lambda}$, se cumple que α es un cardinal fuertemente inaccesible^{ME}. Por otra parte, como

$$J(\alpha)(1) = \alpha(0) = \kappa < j(\kappa) = j(\alpha(0)) = \alpha(1),$$

vemos que $(J(\alpha) < \alpha)^{ME}$, luego el automorfismo J no es trivial. Vamos a probar lo siguiente:

> *Los ordinales $(\beta < \alpha)^{ME}$ se dividen en dos tipos: los que están definidos en 0 (tipo A) y los que no lo están (tipo B). Los ordinales de tipo A son exactamente los fijados por J y son menores que los de tipo B.*

En efecto, si β está definido en 0, entonces $\beta(0) < \alpha(0) = \kappa$, luego

$$J(\beta)(1) = \beta(0) = j(\beta(0)) = \beta(1),$$

luego $J(\beta) = \beta$.

Tomemos, por otra parte, un ordinal $(\gamma < \alpha)^{ME}$ definido únicamente a partir de $n > 0$. Entonces $\gamma(n) < \alpha(n) = j^n(\kappa)$, luego $\kappa \leq \gamma(n)$, pues si fuera $\gamma(n) < \kappa$ tendríamos que $\gamma(n) = j(\gamma(n))$ y estaría definido $\gamma(n-1) = \gamma(n)$.

Esto implica que $\beta(n) < \kappa \leq \gamma(n)$, luego $\beta < \gamma$, es decir, todo ordinal de tipo A es menor que cualquier ordinal de tipo B.

Por otra parte, no puede ser $J(\gamma) = \gamma$, pues entonces $\gamma(n) = \gamma(n+1) = j(\gamma(n))$ y, como $\kappa \leq \gamma(n)$, tendríamos también que $j^n(\kappa) \leq \gamma(n)$, contradicción. ■

Tenemos que $(J(V_\alpha) \subsetneq V_\alpha)^{ME}$, es decir, que V_α^{ME} es un rango^{ME} no fijado por J, luego los resultados de la sección 8.2 (relativizados a (M, E, J)) implican que el conjunto

$$\overline{M} = \{s \in M \mid s\, E\, V_\alpha^{ME}\}$$

se convierte en un modelo de NFA interpretando los conjuntos como los elementos de

$$C = \{s \in M \mid s\, E\, V_{J(\alpha)+1}^{ME}\}$$

y la pertenencia como la relación

$$s\, \overline{E}\, t \leftrightarrow t \in C \wedge J(s)\, E\, t.$$

Como el rango V_α^{ME} es claramente infinito^{ME}, el modelo $\overline{M}$ cumple el axioma de infinitud, y ciertamente también el de elección (y en particular podemos considerar en él pares ordenados nivelados).

Más aún, como α es un límite fuerte^{ME}, hemos visto al final de la sección anterior que los ordinales de $\overline{M}$ se corresponden con ordinales menores que α, de forma que el operador $T^{\overline{M}}$ se corresponde con el automorfismo J.

Esto implica que si un ordinal$^{\overline{M}}$ δ se corresponde con un ordinal^{ME} $N(\delta)$ de tipo A, entonces δ es fuertemente cantoriano$^{\overline{M}}$. En efecto, todos los ordinales menores que δ se corresponden con ordinales menores que $N(\delta)$, luego todos son de tipo A, luego todos quedan fijos por J, luego todos los ordinales$^{\overline{M}}$ menores que δ son fijados por T, luego todos son cantorianos, luego δ es fuertemente cantoriano.

Puesto que $\overline{M}$ debe tener ordinales no cantorianos, existe al menos un ordinal de $\overline{M}$ que se corresponde con un ordinal de tipo B y, como todos los ordinales de tipo A son menores, resulta que todos los ordinales de tipo A se corresponden con ordinales de $\overline{M}$. Más aún, los ordinales de tipo A se corresponden exactamente con los ordinales fuertemente cantorianos de $\overline{M}$.

Por otra parte, hemos visto que ningún ordinal de tipo B es fijado por J, luego ningún ordinal de $\overline{M}$ que no sea fuertemente cantoriano puede ser cantoriano. En definitiva, hemos probado la consistencia del axioma de los conjuntos cantorianos:

Teorema 8.14 *Si* ZFC *más la existencia de un cardinal medible es consistente, también lo es* NFA + ACC.

Según indicábamos en el capítulo anterior, en realidad la consistencia de la teoría NFA + ACC es equivalente a la de ZFC más la existencia de un cardinal n-Mahlo para $n = 1, 2, 3, \ldots$, que es mucho más débil que la consistencia de que exista un cardinal medible.

Veamos ahora que el modelo que hemos construido satisface también el axioma de Especificación en conjuntos Fuertemente Cantorianos. Para ello observamos en primer lugar (razonando en NFA) que si A es un conjunto fuertemente cantoriano, entonces $\kappa = |A|$ es un cardinal fuertemente cantoriano, y

$$|\mathrm{Ord}^{<}_{\mathrm{In}(\kappa)}| = \mathrm{card}(T^2(\mathrm{In}(\kappa))) = T^2(\mathrm{card}(\mathrm{In}(\kappa))) = T^2(\kappa) = \kappa$$

y el ordinal $\mathrm{In}(\kappa)$ es fuertemente cantoriano, por definición. Así pues, todo conjunto fuertemente cantoriano es equipotente a una sección inicial de Ord determinada por un ordinal fuertemente cantoriano. Esto implica que el axioma EFC es equivalente a su restricción a conjuntos de la forma $A = \mathrm{Ord}^{<}_{\alpha}$, con α fuertemente cantoriano.

Demostraremos que el modelo que hemos construido cumple una propiedad más fuerte:

Axioma de los ordinales fuertemente cantorianos *Para toda fórmula $\phi(x, x_1, \ldots, x_n)$ y todos los objetos $x_1, \ldots, x_n$, existe un conjunto B tal que, para todo ordinal fuertemente cantoriano δ, se cumple*

$$\delta \in B \leftrightarrow \phi(\delta, x_1, \ldots, x_n).$$

El axioma EFC se deduce de éste considerando la fórmula

$$\delta \in \mathrm{Ord}^{<}_{\alpha} \wedge \phi(\delta, x_1, \ldots, x_n)$$

y después tomando la intersección $B \cap \mathrm{Ord}^{<}_{\alpha}$.

Ahora conviene analizar por qué el axioma de los ordinales fuertemente cantorianos no se cumple necesariamente en todo modelo de Boffa. Más concretamente, si (con la notación de la sección 8.2, pero tomando un rango de la forma $r = V_\alpha$) tenemos un modelo de la forma $\overline{M} = V_\alpha$, cuyos conjuntos son los elementos de $C = V_{j(\alpha)+1}$, una fórmula $\phi(x, x_1, \ldots, x_n)$ y unos parámetros $a_1, \ldots, a_n \in V_\alpha$ determinan un conjunto B según dicho axioma si y sólo si existe un $B \in C$ tal que, para todo δ ordinal fuertemente cantoriano$^{\overline{M}}$

$$j(\delta) \in B \leftrightarrow \phi^{\overline{M}E}(\delta, a_1, \ldots, a_n)$$

o, equivalentemente,

$$\delta \in j^{-1}(B) \leftrightarrow \psi(\delta, a_1, \ldots, a_n)$$

donde ψ es una fórmula que involucra el automorfismo j, y el problema principal es que en la metateoría no contamos con ninguna forma de especificación para fórmulas que involucren el automorfismo j.

Ahora consideramos la aplicación $N : j^{-1}[\mathrm{Ord}^{\overline{M}}] \longrightarrow \Omega_0$. Si existe un conjunto B' tal que, para todo ordinal $\delta < \Omega_0$ tal que $N^{-1}(\delta)$ es fuertemente cantoriano$^{\overline{M}}$, se cumple

$$\delta \in B' \leftrightarrow \bigvee x \in j^{-1}[\mathrm{Ord}^{\overline{M}}](\psi(x, a_1, \ldots, a_n) \wedge N(x) = \delta),$$

entonces, si $B^* = N^{-1}[B'] \subset V_\alpha$, tenemos que $B = j(B^*) \in C$ cumple lo pedido. En realidad la última condición es superflua, pues $\mathrm{Ord}^{\overline{M}} \in C$, luego $\mathrm{Ord}^{\overline{M}} \subset V_{j(\alpha)}$, luego $N^{-1}[B'] \subset j^{-1}(\mathrm{Ord}^{\overline{M}}) \subset V_\alpha$.

En resumen, si llamamos $\chi(\delta, a_1, \ldots, a_n)$ a todo el miembro derecho de la equivalencia anterior, lo que hemos de probar es que, para toda fórmula χ (con posibles parámetros y en la que aparezca el automorfismo j), existe un conjunto B de modo que, para todo $\delta < \Omega_0$ tal que $N^{-1}(\delta)$ es fuertemente cantoriano$^{\overline{M}}$, se cumple

$$\delta \in B \leftrightarrow \chi(\delta, x_1, \ldots, x_n).$$

Más precisamente, hemos de probar que esto es cierto en el modelo M que hemos construido en esta sección, pues acabamos de ver que eso implica a su vez que el modelo $\overline{M}$ cumple el axioma de los ordinales fuertemente cantorianos.

Sea

$$B_0 = \{\delta < \kappa \mid \chi^{MEJ}(i_0^{-1}(\delta), x_1, \ldots, x_n))\} \subset V_\kappa,$$

que es un conjunto bien definido, pues ahora estamos trabajando en ZFC. Como $B_0 \in V_\lambda$, podemos definir $B \in M$ mediante $B(0) = B_0$. Veamos que B cumple lo pedido. Para ello tomamos $\delta < \Omega_0^{ME}$ tal que $N^{-1}(\delta)^{ME}$ es fuertemente cantoriano$^{\overline{M}}$. Sabemos que esto equivale a que δ es un ordinal de tipo A, luego

$$(\delta \in B)^{ME} \leftrightarrow \delta(0) \in B_0 \leftrightarrow \chi^{MEJ}(\delta, x_1, \ldots, x_n),$$

como había que probar. Así pues:

Teorema 8.15 *Si* ZFC *más la existencia de un cardinal medible es consistente, también lo es* NFA + ACC + *el axioma de los ordinales fuertemente cantorianos. En particular, también lo es* NFA + ACC + EFC.

Bibliografía

[1] Barwise, J. *Admissible sets and structures,* Springer 1975.

[2] Gödel, K. *Obras completas,* Alianza Universidad, Madrid, 1981.

[3] Gödel, K. *La Consistencia del Axioma de Elección y de la Hipótesis Generalizada del Continuo con los Axiomas de la Teoría de Conjuntos,* (1940).

[4] Holmes, M.R., *Elementary Set Theory with a Universal Set,* Cahiers du Centre de logique, Academia, Louvain-la-Neuve (1998).

[5] Holmes, M.R., *Strong Axioms of Infinity in NFU,* The Journal of Symbolic Logic, 66 (1) (2001) 87–116

[6] Mansfield, R., Weitkamp, G. *Recursive aspects of descriptive set theory,* Oxford 1985.

[7] Mathias, A.R.D., *The Strength of Mac Lane Set Theory,* Annals of Pure and Applied Logic, 110 (1) pp. 107–234.

[8] Wagemakers, G., *New Foundations, a survey of Quine's set theory,* Universidad de Amsterdam (1989)

Índice de Materias