MATEMÁTICAS II Grupo GF 3-6-2024 Final (*)

APELLIDOS: ______________________________ NOMBRE____________________

Responde razonadamente a las preguntas siguientes. Todas las respuestas tienen que basarse en los métodos generales estudiados en la asignatura, y no en cálculos particulares que aprovechen la sencillez de los problemas.

1. Una empresa necesita agotar 11 toneladas de una materia prima perecedera, que puede emplear en la producción de cinco productos. El problema siguiente determina la cantidad que conviene producir de cada uno de ellos sin exceder las 13 u.m. de presupuesto disponibles:

$$\begin{array}{rll} \text{Max.} & 6x+2y+5z+3u+3v & \text{beneficio} \\ \text{s.a} & 2x+y+3z+\ \ u+5v \leq 13 & \text{presupuesto} \\ & 6x+y+2z+2u+4v \geq 11 & \text{materia prima} \\ & x,\, y,\, z,\, u,\, v \geq 0 & \end{array}$$

   (a) **(*)** El gerente de la empresa estima que lo mejor es producir únicamente 7 unidades del segundo producto y 2 del tercero. Calcula la tabla del símplex correspondiente a esta solución y razona si, en efecto es la solución óptima. Si no lo es, itera la tabla hasta llegar a la solución óptima.

   (b) **(*)** Expresa con palabras la solución óptima del problema y razona si es de vértice, de arista finita o de arista infinita. Evita referencias genéricas como “una variable”, “otra variable”, etc.

   (c) **(0.2 ptos.)** Calcula los precios duales e interpreta el del presupuesto.

   (d) **(0.3 ptos.)** Calcula el intervalo de sensibilidad del presupuesto.

   (e) **(0.3 ptos.)** ¿Podría la empresa fabricar 5 unidades del primer producto y 3 del cuarto? ¿Cúanto empeoraría el beneficio si eligiera esta opción? ¿Esta solución es factible básica? ¿Es factible? ¿Es óptima?

2. **(*)** Considera el problema:

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 3x-2y+5z \\ \text{s.a} & 100x+50y+xy-x^2-y^2-z^2 \leq 200 \\ & x^2+y+z \leq 100 \\ & y,\, z \geq 0 \end{array}$$

   (a) ¿Satisface las hipótesis del teorema de Weierstrass?

   (b) ¿Satisface las hipótesis del teorema local-global?

   (c) ¿Qué podemos concluir sobre el problema a partir de los apartados precedentes?

3. Considera el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Opt.} & 20x+30y+24z-y^2-z^2 \\ \text{s.a} & x+y+z \leq 8 \end{array}$$

   (a) **(0.2 ptos.)** Razona si, en caso de tener soluciones óptimas, éstas serán puntos de Kuhn y Tucker.

   (b) **(*)** Estudia si $(2,5,1)$ y $(1,5,2)$ son puntos de Kuhn y Tucker. Deja claro si lo son para maximizar y/o para minimizar.

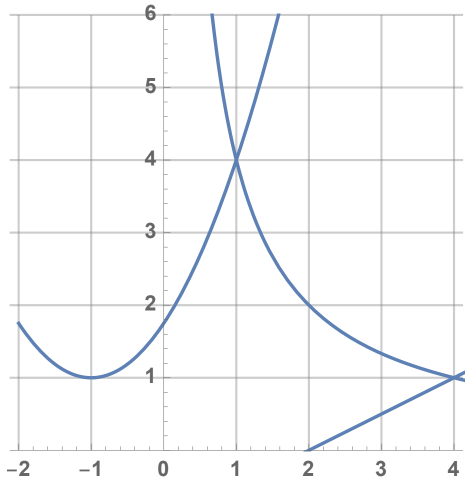
   (c) **(*)** Resuelve el problema con objetivo de maximizar.

   (d) **(0.3 ptos.)** Encuentra todos los puntos de Kuhn y Tucker del problema.

   (e) **(0.2 ptos.)** Resuelve el problema con objetivo de minimizar.

4. **(0.3 ptos.)** Resuelve gráficamente (representando en la figura todo lo necesario para justificar que los puntos que señales son las soluciones óptimas y deja claro cuál es el máximo y cuál el mínimo):

$$
\begin{array}{rl}
\text{Opt.} & y - x \\
\text{s.a} & 4y \leq 3x^2 + 6x + 7 \\
 & xy \leq 4 \\
 & x - 2y \leq 2 \\
 & x \geq -1 \\
 & y \geq 0
\end{array}
$$



5. Responde razonadamente a las preguntas siguientes:

   (a) **(0.1 ptos.)** Dos problemas con objetivo de minimizar, P_1 y P_2, tienen la misma función objetivo, y todas las soluciones factibles de P_1 son también factibles para P_2. Si el valor óptimo de la función objetivo no es el mismo, ¿el de P_1 será mayor o menor que el de P_2?

   (b) **(0.1 ptos.)** ¿Los puntos de Kuhn y Tucker de un problema de programación lineal son necesariamente soluciones óptimas?

MATEMÁTICAS II   Grupo GF   3-6-2024 Final (5 ptos.)

APELLIDOS: ______________________________ NOMBRE____________________

Responde razonadamente a las preguntas siguientes. Todas las respuestas tienen que basarse en los métodos generales estudiados en la asignatura, y no en cálculos particulares que aprovechen la sencillez de los problemas.

1. Una empresa necesita agotar 11 toneladas de una materia prima perecedera, que puede emplear en la producción de cinco productos. El problema siguiente determina la cantidad que conviene producir de cada uno de ellos sin exceder las 13 u.m. de presupuesto disponibles:

$$\begin{array}{rll} \text{Max.} & 6x+2y+5z+3u+3v & \text{beneficio} \\ \text{s.a} & 2x+y+3z+\ \ u+5v \leq 13 & \text{presupuesto} \\ & 6x+y+2z+2u+4v \geq 11 & \text{materia prima} \\ & x,\, y,\, z,\, u,\, v \geq 0 & \end{array}$$

   (a) **(0.8 ptos.)** El gerente de la empresa estima que lo mejor es producir únicamente 7 unidades del segundo producto y 2 del tercero. Calcula la tabla del símplex correspondiente a esta solución y razona si, en efecto es la solución óptima. Si no lo es, itera la tabla hasta llegar a la solución óptima.

   (b) **(0.3 ptos.)** Expresa con palabras la solución óptima del problema y razona si es de vértice, de arista finita o de arista infinita. Evita referencias genéricas como "una variable", "otra variable", etc.

   (c) **(0.2 ptos.)** Calcula los precios duales e interpreta el del presupuesto.

   (d) **(0.3 ptos.)** Calcula el intervalo de sensibilidad del presupuesto.

   (e) **(0.3 ptos.)** ¿Podría la empresa fabricar 5 unidades del primer producto y 3 del cuarto? ¿Cúanto empeoraría el beneficio si eligiera esta opción? ¿Esta solución es factible básica? ¿Es factible? ¿Es óptima?

2. Considera el problema:

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 3x-2y+5z \\ \text{s.a} & 100x+50y+xy-x^2-y^2-z^2 \leq 200 \\ & x^2+y+z \leq 100 \\ & y,\, z \geq 0 \end{array}$$

   (a) **(0.2 ptos.)** ¿Satisface las hipótesis del teorema de Weierstrass?

   (b) **(0.3 ptos.)** ¿Satisface las hipótesis del teorema local-global?

   (c) **(0.1 ptos.)** ¿Qué podemos concluir sobre el problema a partir de los apartados precedentes?

3. Considera el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Opt.} & 20x+30y+24z-y^2-z^2 \\ \text{s.a} & x+y+z \leq 8 \end{array}$$

   (a) **(0.2 ptos.)** Razona si, en caso de tener soluciones óptimas, éstas serán puntos de Kuhn y Tucker.

   (b) **(0.5 ptos.)** Estudia si $(2,5,1)$ y $(1,5,2)$ son puntos de Kuhn y Tucker. Deja claro si lo son para maximizar y/o para minimizar.

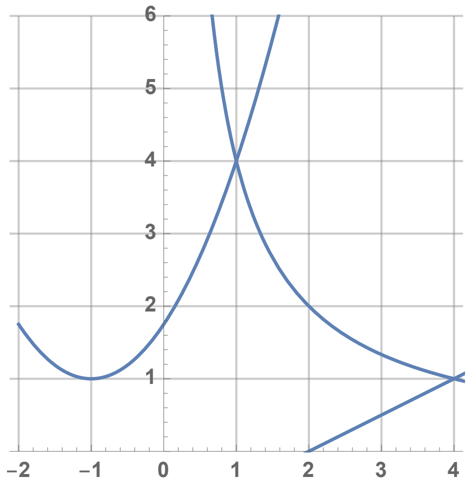
   (c) **(0.3 ptos.)** Resuelve el problema con objetivo de maximizar.

   (d) **(0.5 ptos.)** Encuentra todos los puntos de Kuhn y Tucker del problema.

   (e) **(0.3 ptos.)** Resuelve el problema con objetivo de minimizar.

4. **(0.3 ptos.)** Resuelve gráficamente (representando en la figura todo lo necesario para justificar que los puntos que señales son las soluciones óptimas y deja claro cuál es el máximo y cuál el mínimo):

$$\begin{array}{rl} \text{Opt.} & y - x \\ \text{s.a} & 4y \leq 3x^2 + 6x + 7 \\ & xy \leq 4 \\ & x - 2y \leq 2 \\ & x \geq -1 \\ & y \geq 0 \end{array}$$



5. Responde razonadamente a las preguntas siguientes:

   (a) **(0.2 ptos.)** Dos problemas con objetivo de minimizar, P_1 y P_2, tienen la misma función objetivo, y todas las soluciones factibles de P_1 son también factibles para P_2. Si el valor óptimo de la función objetivo no es el mismo, ¿el de P_1 será mayor o menor que el de P_2?

   (b) **(0.2 ptos.)** ¿Los puntos de Kuhn y Tucker de un problema de programación lineal son necesariamente soluciones óptimas?

APELLIDOS: ______________________________ NOMBRE______________________

1. Modeliza el problema siguiente. Expresa la función objetivo y las restricciones con la notación matemática usual (no con la notación de LINGO):

   Una empresa tiene que enviar urgentemente ocho paquetes, y tiene tres camiones a punto de salir en los que queda algo de espacio disponible. En el primero caben 900 kg más, en el segundo 800 y en el tercero $1\,000$.

   La tabla siguiente indica el peso de cada paquete y una estimación de la urgencia con la que debe ser atendido:

Paquete	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8
Peso	700	300	600	800	700	400	150	500
Urgencia	5	5	8	9	2	6	6	4

   Los dos primeros paquetes tienen el mismo destinatario, por lo que hay que enviar los dos o no enviar ninguno (aunque, si se envían, no tienen por qué ir en el mismo camión).

   Por otra parte, la empresa podría liberar espacio en sus camiones para 300 kg extra en cada uno, pero sólo está dispuesta a ello si con eso puede enviar los ocho paquetes.

   Determina qué paquetes conviene cargar en cada camión para maximizar la urgencia de los paquetes enviados, así como si conviene liberar el espacio extra en los camiones.

Escribe el modelo en la plantilla de la hoja adjunta. Tu respuesta se valorará hasta un máximo de 0.5. Si posteriormente lo resuelves con LINGO sin conjuntos la nota se multiplicará por un factor máximo de 2 (con lo que puedes obtener hasta 1 punto), y si lo resuelves usando conjuntos se multiplicará por un factor máximo de 4 (con lo que puedes conseguir hasta 2 puntos). Si tu solución en LINGO no se corresponde con la plantilla, el modelo que se evaluará será el de la plantilla.

APELLIDOS: ____ NOMBRE______________________

Definición de las variables:

Función objetivo (con su interpretación):

Restricción 1 (con la interpretación de cada miembro):

Restricción 2 (con la interpretación de cada miembro):

Restricción 3 (con la interpretación de cada miembro):

Restricción 4 (con la interpretación de cada miembro):

Restricción 5 (con la interpretación de cada miembro):

Restricción 6 (con la interpretación de cada miembro):

Restricción 7 (con la interpretación de cada miembro):

Restricción 8 (con la interpretación de cada miembro):

Restricción 9 (con la interpretación de cada miembro):

Restricción 10 (con la interpretación de cada miembro):

Restricción 11 (con la interpretación de cada miembro):

Restricción 12 (con la interpretación de cada miembro):

Restricción 13 (con la interpretación de cada miembro):

Restricción 14 (con la interpretación de cada miembro):

Condiciones de no negatividad, integridad, etc.

MATEMÁTICAS II Grupo GF 3-6-2024 Recuperación EC

APELLIDOS: ________________________ NOMBRE________________

La empresa SCAM S.A. tiene que servir en España y Francia 2 000 y 1 000 kg de su producto, respectivamente, desde dos fábricas F_1 y F_2, y quiere hacerlo con el menor coste de transporte posible sin exceder los presupuestos asignados a la producción y a la mano de obra. Además, la ley exige que la producción no genere más de 10 000 unidades de residuos contaminantes. El problema siguiente determina qué cantidad de producto conviene servir desde cada fábrica a cada destino:

$$\begin{array}{lll}
\text{Min.} & 5x_{1e} + 7x_{1f} + 6x_{2e} + 4x_{2f} & \text{Coste de transporte} \\
\text{s.a} & 10x_{1e} + 10x_{1f} + 20x_{2e} + 20x_{2f} \leq 33\,000 & \text{Coste de producción} \\
 & 8x_{1e} + 8x_{1f} + 3x_{2e} + 3x_{2f} \leq 30\,000 & \text{Coste de mano de obra} \\
 & x_{1e} + x_{2e} \geq 2\,000 & \text{Demanda de España} \\
 & x_{1f} + x_{2f} \geq 1\,000 & \text{Demanda de Francia} \\
 & 3x_{1e} + 3x_{1f} + 7x_{2e} + 7x_{2f} \leq 10\,000 & \text{Residuos} \\
 & x_{1e},\, x_{1f},\, x_{2e},\, x_{2f} \geq 0 &
\end{array}$$

Variable	Value	Reduced Cost
X1E	2000.000	0.000000
X1F	750.0000	0.000000
X2E	0.000000	4.000000
X2F	250.0000	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
TRANSPORTE	16250.00	-1.000000
PRODUCCION	500.0000	0.000000
TRABAJO	7250.000	0.000000
DEMANDA_E	0.000000	-7.250000
DEMANDA_F	0.000000	-9.250000
RESIDUOS	0.000000	0.7500000

Objective Coefficient Ranges:

Variable	Current Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
X1E	5.000000	4.000000	7.250000
X1F	7.000000	INFINITY	3.000000
X2E	6.000000	INFINITY	4.000000
X2F	4.000000	3.000000	INFINITY

Righthand Side Ranges:

Row	Current RHS	Allowable Increase	Allowable Decrease
PRODUCCION	33000.00	INFINITY	500.0000
TRABAJO	30000.00	INFINITY	7250.000
DEMANDA_E	2000.000	200.0000	1000.000
DEMANDA_F	1000.000	200.0000	428.5714
RESIDUOS	10000.00	200.0000	1000.000

Responde a las preguntas siguientes. Excepto en la 1 y la 2, indica claramente:

A) Dato o datos que usas en la respuesta y su interpretación general (sin tener en cuenta la pregunta o el contexto del problema).

B) Interpretación del dato o los datos en el contexto del problema (sin usar palabras técnicas como "función objetivo", "término independiente", "holgura", etc. y sin tener en cuenta la pregunta).

C) (Si procede) respuesta razonada a la pregunta.

La parte A) no puntúa; la parte B) sólo puntuará si A) está razonablemente bien; la parte C) sólo puntuará si la parte B) está razonablemente bien.

1. **(0.1 ptos.)** Indica brevemente qué es el miembro izquierdo y el miembro derecho de cada restricción:

Producción:	____________________	$\leq$	____________________
Trabajo:	____________________	$\leq$	____________________
Demanda E:	____________________	$\geq$	____________________
Demanda F:	____________________	$\geq$	____________________
Residuos:	____________________	$\leq$	____________________

2. **(0.1 ptos.)** Escribe con palabras la solución óptima, y nada más que la solución óptima, de modo que pueda entenderla alguien que no haya visto la modelización del problema.

3. **(0.3 ptos.)** Interpreta el intervalo de sensibilidad del término independiente de la última restricción.

4. **(0.2 ptos.)** SCAM S.A. ha recibido un pedido adicional de 100 kg de producto para una empresa de Madrid. ¿Desde qué fábrica convendrá atenderlo? ¿Afectará esto a los residuos generados?

5. **(0.4 ptos.)** SCAM S.A. está buscando una empresa de transporte alternativo que le cobre menos por cada kg transportado desde la fábrica F_2 a España. ¿A partir de qué precio por kg podría interesarle el cambio de empresa de transporte?

6. **(0.3 ptos.)** La empresa de transporte que actualmente subcontrata SCAM S.A. está al tanto de que ésta estudia cambiar de empresa, y por ello le ofrece un descuento de 300 u.m. si le encarga transportar 100 kg de producto desde la fábrica F_2 a España. ¿Le conviene a SCAM S.A. aceptar esta oferta?

7. **(0.4 ptos.)** SCAM S.A. estima que con una inversión en publicidad podría incrementar en un 10% la demanda de uno de los dos destinos. ¿Cuál sería preferible, por lo que respecta al coste de transporte?

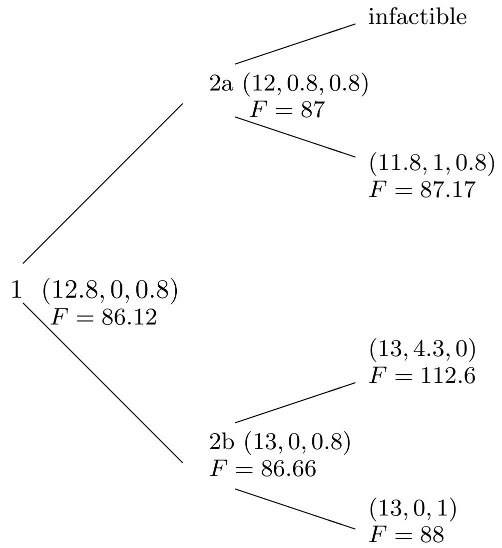
8. **(0.2 ptos.)** Razona si la afirmación siguiente es verdadera o falsa: Si la variable de holgura de la restricción `DEMANDA_F` hubiera valido 1 500, esto significaría que, aunque la demanda comprometida en Francia es de 1 000 kg, convendría servir 500 kg adicionales.

APELLIDOS: ______________________________ NOMBRE____________________

1. Considera el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Opt.} & 6x + 8y + 10z \\ \text{s.a} & 2x + 3y + 15z \geq 39 \\ & x + y - z \geq 12 \\ & x + y + z \leq 100 \\ & x,\ y,\ z \geq 0, \text{enteras} \end{array}$$

Al aplicarle el método de ramificación y acotación se obtiene el árbol siguiente:



(a) **(0.1 ptos.)** Numera los nodos $1, 2a, 2b, 3a, 3b, 4a, 4b$ en el orden preciso que exige el método de ramificación y acotación. Indica sobre cada rama la restricción añadida.

(b) **(0.2 ptos.)** Escribe el problema que hay que resolver para obtener el nodo 3a. Escríbelo explícitamente, con su función objetivo (dejando claro si el objetivo es maximizar o minimizar), y todas sus restricciones.

(c) **(0.2 ptos.)** Razona si conocemos ya la solución óptima o si habría que seguir ramificando. De los nodos no ramificados, di cuáles están ya cerrados (explicando por qué) y cuales están pendientes de ramificación, si es que hay alguno pendiente.

2. **(0.2 ptos.)** Estudia si el problema

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 4x + y + 2z \\ \text{s.a} & 2x + y \geq 3 \\ & x + 3y + z \geq 6 \\ & 3x + 4y + z \leq 9 \\ & x,\ y,\ z \geq 0 \end{array}$$

tiene una solución factible básica con variables básicas x, y, z.

3. **(0.3 ptos.)** La tabla siguiente corresponde a un problema de minimizar. Complétala para que corresponda a un problema no acotado:

	-5		3		4	
	x	y	z	u	v	
x		-2		1		2
z		-1		1		1
v		0		2		3