MATEMÀTIQUES I

COL·LECCIÓ DE PROBLEMES

CURS ACADÈMIC 2014-15

Pràctica 1 Introducció a les funcions de diverses variables

1. La demanda mensual de cervesa d'un consumidor ve donada per la funció

$$D(r,p) = \frac{15r}{p} - r^2 \text{ l/mes},$$

on r és la renda mensual del consumidor (en milers d'euros) i p és el preu (en euros) d'un litre de cervesa. Actualment, el preu és $p = 2$€ i el consumidor disposa d'una renda de $r = 2\,000$€ mensuals.

   (a) Explica què significa la notació $D(r,p)$.
   (b) Escriu l'expressió que representa la demanda actual de cervesa i calcula el seu valor.
   (c) Calcula quina seria la demanda si el consumidor passara a disposar d'una renda mensual de $r = 2.5$ u.m. Expressa el resultat correctament i interpreta'l.
   (d) I si, amb la renda actual, el preu pujara 50 cèntims?
   (e) Expressa els resultats dels dos últims apartats en termes d'increments parcials de la funció D.
   (f) Calcula l'increment (total) de la demanda si $\Delta r = 0.5$ u.m. i $\Delta p = 1$€. Expressa'l correctament i interpreta'l.
   (g) Quin signe caldria esperar que tinguera $\Delta_r D(3,3)(0.5)$? Comprova si la teua conjectura és correcta.
   (h) Amb el preu actual, quina renda mensual faria que el consumidor limitara el seu consum de cervesa a 8 litres mensuals?
   (i) Calcula a partir de quin preu el consumidor no estarà disposat a comprar cervesa amb la seua renda actual.
   (j) Calcula quant hauria de reduir-se el preu de la cervesa perquè el consumidor mantinguera la seua demanda després d'haver patit una retallada salarial d'un 5%.

2. Siga $f(x,y,z) = xy^2 - 3z$.

   (a) Què significa la notació $f(x,y,z)$?
   (b) Explica què significa $f(2,1,7)$ i calcula el seu valor.
   (c) Calcula $\Delta_z f(2,1,7)(2)$.
   (d) Calcula $\Delta f(2,1,7)(-1,0,2)$.
   (e) Resol l'equació $f(2,y,1) = 5$.
   (f) Resol l'equació $f(1,p,2) = f(4,4,p)$.

3. Descompon en funcions bàsiques la funció $g(u,v) = 5\ln^4 \sqrt{u^2v+3}$.

---

4. La producció diària d'una empresa de fabricació de sabates ve donada per

$$S(p,K,L) = p\sqrt[3]{KL^2} \text{ parells de sabates},$$

on p és el preu de venda en euros, K és el capital invertit en la producció (en euros) i L el nombre de treballadors. Actualment el capital de l'empresa és $K = 120\,000$€ i la seua plantilla és de $L = 15$ treballadors. D'altra banda, s'estima que la demanda diària del seu producte és

$$D(p, M) = \frac{1\,470\sqrt{M}}{p} \ ,$$

on M és la inversió mensual en màrqueting, que actualment és de $M = 1\,600$ €.

(a) Calcula l'oferta (producció) i la demanda que aconseguiria l'empresa si venguera cada parell de sabates a un preu de 20 €.

(b) Interpreta els resultats obtinguts en l'apartat anterior. Li convé a l'empresa vendre a aqueix preu?

(c) Quin signe cal esperar en ΔD si l'empresa decideix augmentar un 5% el preu de les seues sabates? Escriu l'expressió completa per a aquest increment parcial i calcula'l.

(d) Calcula (per a la situació actual) el preu d'equilibri de l'empresa, és a dir, el preu p per al qual l'oferta és igual a la demanda.

(e) Calcula l'oferta i la demanda corresponents al preu d'equilibri i comprova que, en efecte, són iguals.

(f) Calcula $\Delta S(14, 120\,000, 15)(0, 67\,500, -3)$ i interpreta el resultat. (Redacta la interpretació evitant paraules tècniques com "increment" i fent ús de paraules quotidianes com "contractar", "acomiadar" o "aportar capital" de manera que resulte natural a qualsevol que no estiga familiaritzat amb les matemàtiques.

(g) Calcula l'increment de demanda a què dóna lloc un increment $\Delta M = 300$ € (mantenint el preu d'equilibri). Expressa'l correctament i interpreta'l.

(h) Quin increment de capital ΔK ha d'aportar l'empresa perquè l'oferta iguale la nova demanda calculada en l'apartat anterior?

5. Si un banc ens ofereix un tant per u d'interés i pels nostres estalvis, açò significa que si depositem un capital C_0 en l'instant $t = 0$, al cap de t anys el nostre capital serà el donat per l'expressió

$$C = C_0(1 + i)^t.$$

(a) Què hauríem d'escriure en compte d'una simple C a l'esquerra del signe $=$ si volguérem ser més precisos?

(b) Calcula el capital que tindrem al cap de 5 anys si en l'actualitat ($t = 0$) depositem 10 000 € en un banc que ens ofereix un 3% d'interés anual ($i = 0.03$). Expressa el resultat amb la notació adequada.

(c) Calcula l'increment de capital que hem aconseguit amb la nostra inversió. Escriu-lo correctament.

(d) Calcula $\Delta_t C(10\,000, 0.03, 2)(2)$ i interpreta el resultat. (Dedueix del context quina és cada variable.)

(e) Quin capital hauríem d'invertir si volguérem disposar de 15 000 € d'ací a 5 anys?

(f) Un altre banc ens ofereix 13 000 € d'ací a 5 anys si depositem ara els nostres 10 000 €. Quin interés ens està oferint?

6. La demanda D d'un producte X ve donada per la funció

$$D(r,p,p') = \frac{\sqrt{rp'}}{2p},$$

on r és la renda mitjana dels consumidors, p és el preu del producte X i p' el preu d'un bé substitutiu (és a dir, d'un altre producte que els consumidors podrien comprar en compte del que fabrica l'empresa). Actualment, ambdós béns es venen al preu d' 1€ i el consumidor destina al producte X una renda de 36€.

   (a) Calcula la quantitat de X que actualment demanden els consumidors
   (b) Calcula l'increment de demanda que es produirà si el preu de l'article X augmenta en 20 cèntims. Interpreta el resultat.
   (c) Calcula l'increment de demanda que es produirà si el preu del bé substitutiu augmenta a 2€ (i el de X es manté en 1€). Interpreta el resultat.
   (d) Calcula l'increment de demanda que es produirà si succeeixen simultàniament les variacions dels dos apartats anteriors.
   (e) Calcula l'increment de demanda que es produirà si els consumidors dupliquen la seua renda, però els preus d'ambdós articles també es dupliquen. Interpreta el resultat.

Càlcul de funcions i increments

7. Donades les funcions

$$f(x,y,z) = \frac{x+y^2}{z^3}, \qquad Q(p,q) = \sqrt[5]{p+q^2}, \qquad H(r,s,t) = (r+2s)t^3+3,$$

$$K(u,v) = \frac{1}{u}+\frac{3}{v}, \qquad L(m,n,t) = \frac{\frac{3}{t}-\sqrt{t}}{m^2+n^2+5}, \qquad P(Q) = \frac{Q}{Q+5}\left(7-\frac{\sqrt{Q^2+2}}{Q+1}\right),$$

   (a) Comprova els resultats següents:

$f(3,5,2) = 3.5$	$f\left(\frac{3}{7},0.2,0.01\right) = 468\,571.43$	$Q(5,\sqrt{5}) = 1.58$
$Q(\sqrt{5},5) = 1.936$	$H(4,-4,-5) = 503$	$H\left(3,\frac{1}{5},\frac{1}{2}\right) = 3.425$
$K(5,7) = 0.628$	$K\left(-2,\frac{2}{5}\right) = 7$	$L(1,-5,9) = -0.086$
$L(\sqrt{2},1+\sqrt{3},7) = -0.153$	$P(4) = 2.73$	$P(-10) = 16.24$

   (b) Comprova que

$\Delta_x f(5,2,1)(-2) = -2$	$\Delta f(1,1,1)(0.2,0.1,-0.3) = 5.026$
$\Delta Q(1,-4)(-10,2) = -3.14$	$\Delta_s H(6,-3,5)(0.7) = 175$
$\Delta K\left(\frac{1}{5},\frac{3}{7}\right)\left(\frac{1}{5},\frac{3}{7}\right) = -6$	$\Delta_t L(-3,4,9)(1/12) = -5.6\cdot 10^{-4}$
$\Delta P(3)(3.2) = 1.072$	

(c) Calcula (i expressa correctament) l'increment de Q que es produeix en passar de $(p, q) = (3, -2)$ a $(p, q) = (5, -1.5)$.

(d) Calcula (i expressa correctament) l'increment de K que es produeix si partim de $(u, v) = (5, 3)$ i $\Delta u = 2$.

(e) Calcula (i expressa correctament) l'increment de L que s'ha produït si ara $(m, n, t) = (4, 8, 16)$ i abans les variables valien la quarta part que ara.

(f) Calcula (i expressa correctament) l'increment de P que es produeix si $Q = 3$ i augmenta un 10%.

8. Comprova amb la calculadora els resultats següents:

(a) $2^{\sqrt{5}} - 3^{\ln 2} = 2.57$,

(b) $\cos\pi + \sin\sqrt{\pi} = -0.02$,

(c) $\dfrac{e^{\sqrt[7]{1000}}}{1+\ln 5} = 5.6$,

(d) $e^5 = 148.41$,

(e) $\dfrac{\sin(\pi/4)}{\cos(\pi/4)} = 1$,

(f) $\sin^3\pi = 0$,

(g) $\sin\pi^3 = -0.398$,

(h) $\ln^4(\cos(\pi/3)) = 0.23$,

(i) $\ln(\cos^4(\pi/3)) = -2.77$,

(j) $\ln(\cos(\pi/3)^4) = -1.02$,

(k) $\ln(\cos(\pi^4/3)) = -0.7$.

Anàlisi de funcions elementals

9. Descompon les funcions següents en les funcions bàsiques que les componen:

a) $\sin(x+2y) - 2\cos(x^2y)$ *b*) $\dfrac{x(y^2+z^2)\ln z}{xy^2+z^2\ln z}$ *c*) $\ln^5(xy)$

d) $\ln(\cos^4 x)$ *e*) $5(x+y-z)e^{z/10}$ *f*) $\dfrac{40}{\frac{\sin xy}{z}}$

g) $\dfrac{\frac{40}{\sin xy}}{z}$ *h*) $\dfrac{\sqrt{x^2y+z^3}}{7xy-5}$ *i*) $\dfrac{x\sin y+5}{x^5\cos z-1}$

j) $(x\ln y)^{5+\sin x}$ *k*) $\dfrac{(y+3y^2)\sin x}{z^4\sin x}$ *l*) $\dfrac{\ln^3 x}{\cos^4(xy)}$

Equacions

10. Resol les equacions següents:

1) $p^2 + 2p = 5p - 1$	2) $(5t-3)t = 2t - 8$	3) $\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x} = 5x$
4) $L^5 + 9 = 0$	5) $\sqrt[3]{c+3} - 2 = 5$	6) $\sqrt{4-x} - x = 2$
7) $x + 2 = \sqrt{4x+13}$	8) $p = 2 + \sqrt{p^2 - 2}$	9) $T^3 - 10T = 0$
10) $\dfrac{15}{p^2} - \dfrac{8}{p} + 1 = 0$	11) $10p\left(15 - \dfrac{3}{p}\right) = 0$	12) $10p\left(15 - \dfrac{3}{p}\right) = 1$

11. Calcula el preu d'equilibri d'un producte les funcions d'oferta i demanda del qual són

$$S(p) = 25p, \qquad D(p) = \frac{2\,000}{p} - 50.$$

12. El cost de produir q unitats d'un article ve donat per la funció

$$C(q) = 5000 + q + \frac{q^2}{500}\,€.$$

(a) Calcula el cost fix de l'empresa, és a dir, el cost en què incorre l'empresa encara que no produïsca cap unitat de producte.

(b) Calcula la producció que pot aconseguir-se amb un pressupost de $15\,000$ €.

Qüestions

13. La funció $B(q,p)$ representa el benefici anual d'una empresa en funció de la quantitat q que produeix d'un article i el preu p a què el ven. Explica què significa que $B(10\,000, 500) = 6\,000\,000$ u.m.

14. Donada una funció $h(p,q)$, digues amb paraules què significa $\Delta h(3,2)(1,-1)$.

15. Donada una funció $g(x,y,z)$, explica la diferència entre $\Delta_y g(3,1,-1)(2)$ i $\Delta_z g(3,1,-1)(2)$. En l'expressió $\Delta g(1,2,3)(0.1,0.2,0.3)$, quin és el valor inicial de x?, quant val Δx?, quin és el valor final de x?

16. Si ens diuen que

$$P = 3s^2x + xks,$$

Per què no podem calcular $P(1,3,-2)$? Quina informació ens falta?

17. Una empresa fabrica dos productes en quantitats q_1 i q_2, fent ús de tres matèries primeres els preus de les quals són p_1, p_2 i p_3. Imagina que tenim una expressió per a calcular el cost C de la producció a partir d'aquestes dades. Com s'expressa açò? Com expressaries, més concretament, el cost de produir 100 unitats del primer producte i 500 del segon si les tres matèries primeres tenen un preu de 3 u.m.? I l'increment de cost si p_3 passa a ser de 3.5 u.m?

18. Una empresa fabrica un article en quantitat Q i C és el cost de la seua producció. Si tenim un criteri per a calcular C a partir de Q, açò significa que Q és funció de C o que C és funció de Q? Aquesta funció es representarà per $Q(C)$ o $C(Q)$?

Pràctica 2 Funcions de diverses variables

1. Calcula el domini de les funcions següents:

$$f(x,y)=\frac{x^{\ln y}\sin\frac{y}{x-2}}{\sqrt{5^x+\sqrt[3]{1-y}}},\qquad g(u,v,w)=\ln\left(\frac{\sqrt{u+1}-\sqrt[4]{v-1}}{(\cos w)^{u+3}}\right),$$

$$h(p,q,r,s)=\sin^5\sqrt[3]{pq-qr^4}-e^{s^4},\qquad k(a,b)=(a^{\sqrt{b}}+1,\frac{a}{b+3},\ln(a^4+7)).$$

2. Considera les funcions següents:

$$f(x,y,z)=30+xy^2-zy^{-2},\quad g(u,v)=\frac{uv^2+v^6}{v+3u},\quad p(w)=3w^4-2w+5,$$

$$h(r,s,t)=(r+s^4,st+3,rst-3rt^2,t),\quad P(m,n)=4m^3n-2m+7m^2n^5,$$

$$F(u,v,w)=u+5v-w,\quad G(x,y)=(5x+2y)^2+\frac{3}{x},\quad H(p,q,r)=8,$$

$$R(x,y,z,w)=\sqrt[4]{5x-3y+z+2w},\qquad S(x,y,z,w)=\sqrt[4]{5}x-3y+z+2w.$$

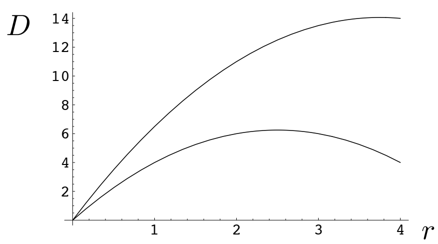
   (a) Indica quines són polinomis i quines no ho són. En el cas que no ho siguen explica per què.
   (b) D'entre totes les funcions només n'hi ha una que és lineal. Indica quina és.
   (c) Calcula els seus dominis.
   (d) Particularitza per a cadascuna d'elles l'expressió $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$.

3. Considerem de nou la funció del problema 1 de la pàgina 1:

$$D(r,p)=\frac{15r}{p}-r^2 \text{ l/mes},$$

que representa el consum de cervesa en funció de la renda r d'un consumidor i del preu p del litre de cervesa. Els valors actuals són $p = 2$€ i $r = 2$ milers de €.

La figura mostra les gràfiques de les funcions $D(r,2)$ i $D(r,3)$ (o, com diuen els economistes, dues gràfiques de D com a funció de r "*ceteris paribus*"):



   (a) Raona quina corba correspon a $D(r,2)$ i quina a $D(r,3)$.
   (b) Determina si el nombre de litres consumits augmentarà o disminuirà si el consumidor passa a tindre una renda de 4 000€.

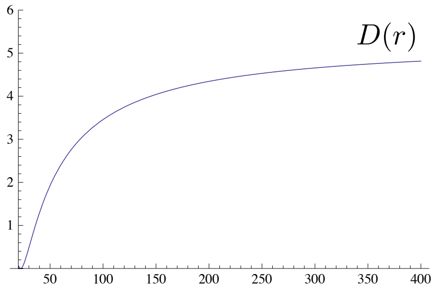
(c) Si el preu és de 2 u.m., quina renda donaria lloc al major consum mensual de cervesa aproximadament? Quants litres en consumiria aproximadament amb aquesta renda?

(d) Determina si, en el cas que, partint dels valors inicials $(r, p) = (2, 2)$ la renda passe a ser de $r = 2.5$ u.m. i el preu passe a $p = 3$ u.m., el consum de cervesa augmentarà o disminuirà.

(e) Un bé es diu *normal* si quan els consumidors tenen més renda augmenten el consum, i es diu *inferior* en cas contrari. Raona a partir de les gràfiques si la cervesa és un bé normal o inferior per al nostre consumidor.

(f) Calcula la funció $D(2, p)$.

(g) Calcula $\lim_{p \to 0^+} D(2, p)$ i interpreta el resultat. Depén el resultat del fet que la renda actual siga precisament $r = 2$?



4. A partir d'un estudi economètric, un economista ha construït una funció que s'ajusta a la quantitat mensual d'un bé que consumeix cada individu d'una població en funció del seu nivell de renda. La funció resulta ser

$$D(r) = \left(1 - \frac{20}{r}\right) \ln^2 \left(10 - \frac{200}{r}\right).$$

(a) Comprova que el domini de D és el conjunt $D_0 = \{r \in \mathbb{R} \mid r > 20\}$. Té açò una interpretació econòmica?

(b) Està definida la funció D per a $r = 20$?

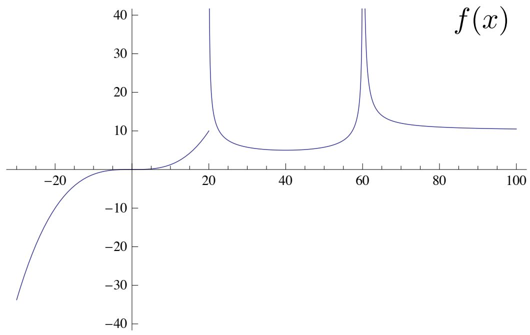
(c) A la vista de la gràfica, té sentit parlar de la demanda del producte quan la renda és de 20 u.m.?

(d) Com expressaries l'apartat anterior matemàticament?

(e) Què cap suposar que succeeix amb els consumidors amb una renda menor de 20 u.m.?

(f) Dedueix de la gràfica el valor aproximat de $\lim_{r \to +\infty} D(r)$. Interpreta'l.

(g) Calcula el límit de l'apartat anterior.



5. A partir de la gràfica, determina els límits següents:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x), \quad \lim_{x \to 0} f(x), \quad \lim_{x \to 20^-} f(x)$$

$$\lim_{x \to 20^+} f(x), \quad \lim_{x \to 60} f(x), \quad \lim_{x \to +\infty} f(x)$$

6. Calcula els límits següents:

$$\lim_{t \to -\infty} \frac{t^4}{3} - 5, \qquad \lim_{x \to -\infty} 2 + \sqrt[3]{4 - 2x}, \qquad \lim_{h \to +\infty} \frac{1}{\ln^3(h^2 + 2)}, \qquad \lim_{x \to +\infty} \ln \frac{1}{x},$$

$$\lim_{t \to 0^+} e^{2/t^3}, \qquad \lim_{t \to 0^-} e^{2/t^3}, \qquad \lim_{y \to 1} (y^2 - 1)^{2/3}, \qquad \lim_{y \to 1} (y^2 - 1)^{-2/3}.$$

Dominis

7. Calcula el domini de les funcions següents i particularitza per a cadascuna d'elles l'expressió $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$:

$$f(x,y,z) = \frac{\sqrt{x+3y} + \frac{\ln(x-i)}{z}}{e^{x-5y}}, \qquad h(u,v) = \left(\sqrt{\ln(u^2+v^2+3)},\ (u+v)^{\sqrt[3]{u}},\ 3^{u-v}\right),$$

$$f(x,y) = (\cos 2^y,\ y^5 \sin \sqrt[5]{x}), \qquad P(a,b,c,d) = \frac{\sqrt[4]{a}}{a^2+b^2+1} - \frac{\sqrt[3]{c}}{c^3+d^3+1},$$

$$h_1(x,y,z) = \ln(x^2+y^2+z^2)+3, \qquad h_2(x,y,z) = \ln(x^2+y^2+z^2+3),$$

$$h_3(x,y,z) = \ln(x+y+z+3), \qquad h(t) = (\sqrt{t^2-t^3},\ (t+1)^t).$$

8. Calcula el domini de les funcions següents:

$$\frac{(x+y)^{3/4}}{x-y}, \qquad \sqrt{x^2+y^2}, \qquad 2^{x/\sqrt{y}}, \qquad y^{x^2}, \qquad (y^2)^x, \qquad \frac{x\ln(x+y+1)}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\sqrt[4]{x-y^2}}{\sqrt[3]{x^3-2y}}, \qquad \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{\sin x}{x^3+y^3}, \qquad e^{\sin xy}, \qquad \sin\frac{1}{x^2+y^2}, \qquad f(x,y) = (x^2+2y^3)^{-3},$$

$$L(x,y) = x^{-2}\cos xy, \qquad r(t) = \frac{t}{t+1}, \qquad h(x,y,z) = (x\ln(y+z), e^{1/y}, x+y^2-3z),$$

$$f(m,n) = 3m^2-2mn+7, \qquad p(u,v) = (\sqrt{u+v},\ \ln u), \qquad T(u,v) = \sqrt{e^{u/v}},$$

$$s(p,q,r) = (p+q)^{\ln r}, \qquad f(x,y) = \sin(x^2-e^y).$$

Límits

9. Calcula els límits següents:

1) $\lim\limits_{t\to 0^-} -\dfrac{1}{5t^3}$ 2) $\lim\limits_{x\to -\infty} 2+\dfrac{x^5}{4}$ 3) $\lim\limits_{m\to +\infty} e^{-2m}+3$

4) $\lim\limits_{z\to -\infty} 3^{-5z}-100$ 5) $\lim\limits_{t\to 0^+} 5^{-2/t}$ 6) $\lim\limits_{y\to 1^-} \ln(1-y)$

7) $\lim\limits_{y\to 1^-} \ln^4(1-y)$ 8) $\lim\limits_{k\to 0^+} \sqrt{1-e^{-5k}}$ 9) $\lim\limits_{s\to 7^+} \sqrt[5]{\ln(s-7)}$

10) $\lim\limits_{a\to -\infty} \sqrt{1-2^{a^3}}$ 11) $\lim\limits_{x\to 2^+} 5-\ln(x^2-4)$ 12) $\lim\limits_{b\to 2^+} \dfrac{1}{2-b}$

13) $\lim\limits_{t\to 0^-} \left(3-\dfrac{1}{t^2}\right)^{1/3}$ 14) $\lim\limits_{t\to 0^-} \left(3-\dfrac{1}{t^2}\right)^{-1/3}$ 15) $\lim\limits_{z\to +\infty} \cos\dfrac{1}{z}$

16) $\lim\limits_{r\to -\infty} \ln(2^{-r}-6)$ 17) $\lim\limits_{s\to +\infty} 4s^{-3}+s^{-1}$ 18) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^{-3}}{x+1}$

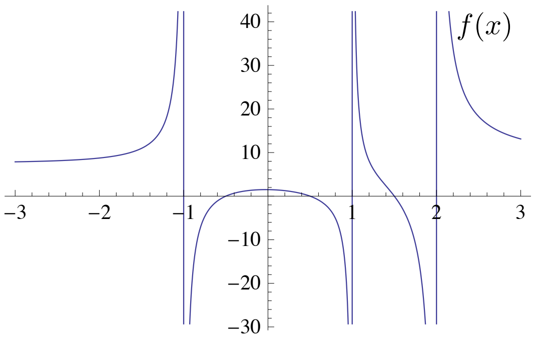
10. Raona el valor dels límits següents:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{2000 + 2e^{-1/x}}, \qquad \lim_{x \to +\infty} 3 - \ln \frac{2}{x+5}.$$

11. Raona el valor dels límits següents:

$$\lim_{t \to -\infty} 5 + \sqrt{1 + \frac{3}{e^{t^2}}}, \qquad \lim_{t \to 2^+} e^{10 + \frac{1}{\ln(t-2)}}.$$

12. A partir de la gràfica, determina els límits de la funció f en els punts -1, 1, 2 i $1/2$.

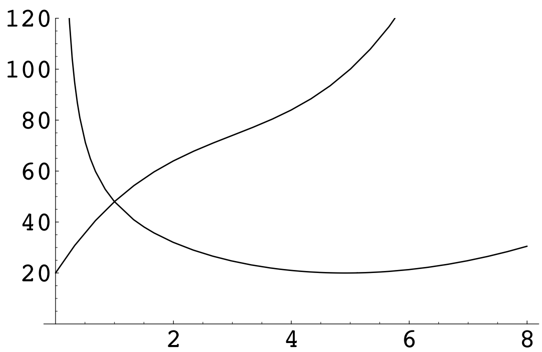


Gràfiques

13. Una fàbrica produeix diàriament q tones de detergent en pols. El cost de la producció depén de q segons la funció

$$C(q) = q^3 - 9q^2 + 36q + 20 \text{ u.m.},$$

on q és el nivell de producció diària. El nivell de producció actual és de $q = 2$ tones.



(a) Calcula el cost de la producció actual.

(b) Si l'empresa augmenta el seu nivell de producció, és d'esperar que el cost augmente o disminuïsca?

(c) Comprova la teua conjectura calculant $\Delta C(1)(1)$ i $\Delta C(2)(1)$. Interpreta ambdós resultats.

(d) De les dues gràfiques representades en la figura, una correspon a la funció $C(q)$. Raona quina és.

(e) Quan creix més lentament el cost, per a produccions menudes, mitjanes o grans?

(f) Calcula $\lim\limits_{q \to +\infty} C(q)$ i interpreta'l.

(g) En l'apartat (c) has pogut comprovar que el cost de produir una tona més de detergent no és sempre el mateix o, dit d'una altra manera, que no totes les tones produïdes tenen el mateix cost. Per això és raonable calcular el *cost mitjà* de la producció (el que costa de mitjana cada tona produïda), que és

$$\mathrm{CMe}(q) = \frac{C(q)}{q} = q^2 - 9q + 36 + \frac{20}{q} \text{ u.m./t.}$$

Calcula el cost mitjà actual i interpreta'l.

(h) L'altra gràfica que apareix en la figura és la de la funció $\mathrm{CMe}(q)$. A partir d'ella explica com es comporta el cost mitjà en augmentar la producció: augmenta, disminueix, o depén?

(i) Expressa matemàticament el comportament del cost mitjà que observes en la figura per a produccions q pròximes a 0.

(j) Quina és aproximadament, segons la gràfica, la producció per a la qual el cost mitjà és el menor possible?

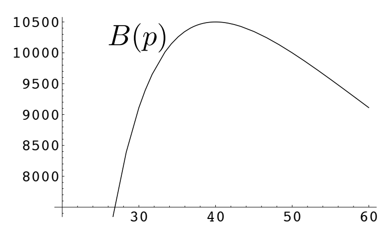
14. Una empresa llançarà al mercat un nou producte tecnològic per al qual no té competència i per tant pot fixar el preu p que considere més convenient. Un estudi de mercat indica que la demanda diària del producte vindrà donada aproximadament per la funció

$$D(p) = \frac{1\,000\,000}{p^2}.$$

El cost unitari de fabricació és de 20 €, i a més hi ha un cost fix de 2 000 €.

(a) Calcula la funció de beneficis diaris de l'empresa $B(p)$ en termes del preu de venda p (entenent que la quantitat diària q que fabricarà l'empresa és la demanda esperada).

(b) Calcula el preu mínim p_0 i el preu màxim p_1 als quals pot vendre l'empresa el seu producte per obtindre beneficis (els que compleixen $B(p) = 0$).

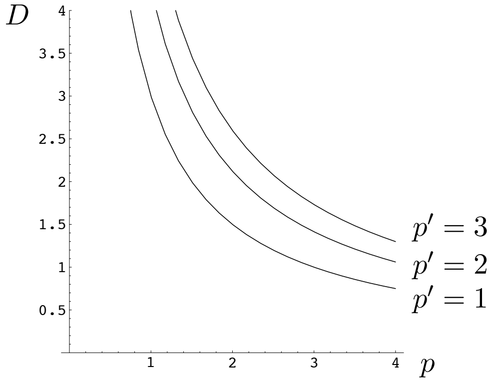


(c) Segons la figura, a quin preu li convé a l'empresa vendre el seu producte?

15. Considerem de nou la funció de demanda del producte X del problema 6 (p. 3):

$$D(r, p, p') = \frac{\sqrt{rp'}}{2p},$$

on p és el preu de X, p' el preu d'un bé substitutiu i r és la renda dels consumidors. Suposem que la renda dels consumidors es manté fixa en $r = 36$ u.m. La figura següent mostra les gràfiques de les funcions $D(36, p, p')$ per a $p' = 1$, $p' = 2$ i $p' = 3$.



(a) Calcula les tres funcions $D(36, p, 1)$, $D(36, p, 2)$ i $D(36, p, 3)$.

(b) A la vista de les gràfiques, si el preu p' es manté constant i p augmenta, què li succeeix a la demanda, augmenta o disminueix? Interpreta la resposta.

(c) A la vista de les gràfiques, si el preu p es manté constant i p' augmenta de 1 a 2 o de 2 a 3, què li succeeix a la demanda, augmenta o disminueix? Interpreta la resposta.

(d) Calcula $\lim\limits_{p\to 0} D(36, p, 2)$ i $\lim\limits_{p\to +\infty} D(36, p, 2)$. Interpreta els resultats.

(e) Assenyala en la figura el punt inicial i el punt final de l'increment $\Delta D(36, 2, 1)(0, 1, 2)$. Com serà aquest increment segons la figura, positiu o negatiu?

(f) Calcula analíticament l'increment de l'apartat anterior i comprova que el seu signe és el que mostra la gràfica.

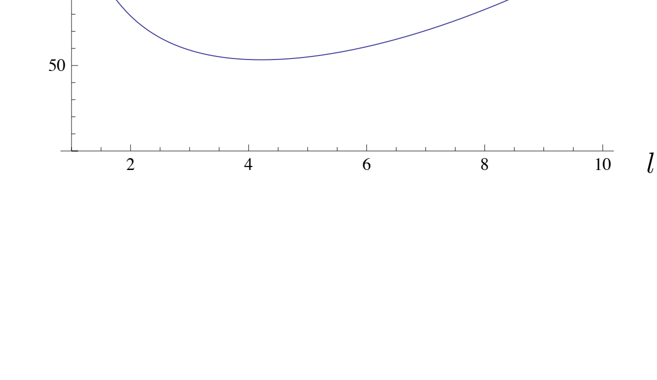
16. L'estalvi mensual d'un cert treballador ve donat per la funció

$$A(r, p, l) = \frac{r}{p^2 l} + l^2 \,€,$$

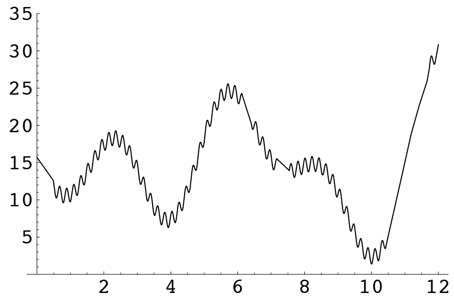
on r és el seu salari, p un indicador del preu dels articles de primera necessitat i l un indicador del preu dels articles de luxe que interessen al treballador. Actualment, el treballador cobra 2 400 € mensuals i els indicadors són $p = 4$ i $l = 3$.

(a) La gràfica mostra l'estalvi en funció de l per als valors actuals de r i p. Escriu aquesta funció i representa el punt que correspon a la situació actual.

(b) A la vista de la gràfica, indica sense fer càlculs el signe de $\Delta_l A(2400, 4, 3)(1)$ i $\Delta_l A(2400, 4, 3)(5)$. Raona la teua resposta.



17. La cotització en borsa de les accions d'una empresa durant l'últim any ha sigut la donada per la funció
$$C(t) = 15 + 5\sin(2t + 3) + t\cos t + \sin(30t),$$
on t és el temps en mesos, de manera que l'any comença en $t = 0$. (Així, 1 dia $= 1/30$ mes. Un any financer té 360 dies.) La figura mostra la gràfica de la funció $C(t)$:



(a) Calcula el domini de C i el subdomini amb sentit econòmic.
(b) Calcula la cotització inicial i la cotització final de les accions l'any considerat.
(c) Quin haguera sigut el millor moment per a invertir-hi? I el pitjor?
(d) Si haguérem comprat accions l' 1 d'abril ($t = 4$), haguera sigut rendible vendre-les tres dies més tard? Calcula l'increment ΔC corresponent.

Qüestions

18. Què és el domini d'una funció?

19. Què significa $f : D \subset \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Posa un exemple concret en el qual
$$D = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x \neq 0\}.$$
Com es llig açò?

20. Si $f(u, v) = 5 + u/v$, explica què li succeeix a f en el punt $(5, 0)$. Relaciona la teua resposta amb el domini de f.

21. Per què el domini de $f(x, y) = e^{x+y}$ és $\mathbb{R}^2$ i no $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid e > 0\}$?

22. Raona sense usar la calculadora si les afirmacions següents són verdaderes o falses:

(a) $e^{-5} > 0$,
(b) $\ln 10 > 0$,
(c) $\sin 5\,000 > 5$,
(d) $\ln(0.001) > 0$,
(e) $\ln(-2) < 0$,
(f) $3^{-8} < 0$,
(g) $\sqrt[3]{-15} < 0$,
(h) $\sqrt[4]{-15} < 0$,
(i) $(-17)^4 > 0$.

Pràctica 3 Composició de funcions

1. La funció de beneficis d'una empresa és $B(I, C) = I - C$, on I són els seus ingressos i C els seus costos. Al seu torn, els ingressos vénen donats per $I(p, q) = pq$, on p és el preu de venda del seu producte i q la quantitat produïda, i la funció de costos és

$$C(q) = q^2 + 2q + 16.$$

   (a) Com s'anomena la funció composta de les funcions donades? Calcula-la i determina el seu valor per a $(p, q) = (20, 10)$. Interpreta el resultat.

   (b) Veurem més avant (problema 5 p. 31) que, si l'empresa no pot influir en el preu de mercat p, el màxim benefici l'aconsegueix determinant la seua producció segons la funció d'oferta $q = S(p) = (p-2)/2$. Calcula la funció composta $B(p)$ i interpreta-la.

   (c) Explica la diferència d'interpretació entre les funcions calculades en els dos apartats anteriors.

   (d) Calcula $B(20)$ i interpreta el resultat. Explica la diferència amb el benefici calculat en l'apartat (a).

   (e) Determina el preu de *tancament de l'empresa,* és a dir, el preu de mercat per al qual els seus beneficis són nuls (i per davall del qual són negatius).

2. Calcula la composició de les funcions

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 y + z}, \qquad x(p) = p^3, \qquad y(p, q) = p - q, \qquad z(p, q) = p\, 2^q.$$

   Calcula $f(1, 2, 7)$ i $f(1, 3)$.

---

3. Una empresa planeja traure al mercat un nou producte cosmètic. Un estudi dels costos indica que el preu de venda més adequat ve donat per $p = 30 + 12c$, on $0 \leq c \leq 1$ és un índex que mesura la qualitat del producte. D'altra banda, un estudi de mercat preveu que la demanda diària del nou producte vindrà donada per la funció

$$D(p, c) = \frac{60\,000\, c}{\sqrt{p}}.$$

   (a) Obtín la funció $c(p)$ que determina la qualitat que ha de tindre el producte perquè el seu preu de venda puga ser p.

   (b) Calcula la funció $D(p)$ i interpreta-la. Explica la diferència d'interpretació entre $D(p, c)$ i $D(p)$.

   (c) El pla inicial de l'empresa és llançar el cosmètic amb un preu $p = 36$ €. Estudia si augmentar aquest preu inicial en 2 € produiria un augment o una disminució en la demanda esperada. Calcula per a això l'increment adequat ΔD. Escriu-lo correctament.

   (d) Interpreta el resultat obtingut en l'apartat anterior.

   (e) Calcula el preu a què cal llançar el cosmètic per tal d'aconseguir una demanda de 6 000 unitats diàries. Quin hauria de ser el seu índex de qualitat?

4. La funció de beneficis d'una empresa és $B(p, D) = 1000p \ln D$, on p és el preu a què ven el seu producte i D és la seua demanda. D'altra banda, la demanda depén del preu segons la relació $D(p) = 10\,000/p^4$.
   (a) Calcula la funció composta $B(p)$ i explica la diferència d'interpretació entre $B(p, D)$ i $B(p)$.
   (b) Calcula $B(5)$ i interpreta el resultat.
   (c) Calcula $B(5, 20)$. Té sentit econòmic el resultat? Si és així, quin?

5. Una indústria química fabrica un producte a partir de tres matèries primeres. Quan empra x tones de la primera, y tones de la segona i z litres de la tercera, la producció que obté és la donada per la funció
$$Q(x, y, z) = x^2\sqrt{y} + z^2.$$
No obstant això, perquè el producte tinga les propietats desitjades cal que les quantitats emprades respecten la proporció $y = 4x$.
   (a) Calcula la funció composta (indicant-hi el seu nom) i explica la diferència d'interpretació respecte de la funció de producció donada.
   (b) Calcula $Q(1, 2)$ i interpreta el resultat.

6. Un consumidor pot adquirir tres béns en quantitats x, y, z, i la utilitat que aconsegueix amb cada possible compra ve donada per la funció
$$U(x, y, z) = \sqrt[3]{xyz}.$$
Els béns són complementaris, de manera que per cada unitat que adquireix del segon article en necessita 3 del primer i 9 del tercer (és a dir, $x = 3y$, $z = 9y$).
   (a) Calcula la funció composta (indicant-hi el seu nom) i explica la diferència d'interpretació respecte de la funció d'utilitat donada.
   (b) Calcula $U(2)$ i interpreta el resultat.

7. Calcula la composició de les funcions indicades. Escriu el nom de la funció composta en cada cas i simplifica la seua expressió en la mesura que siga possible.
   (a) $f(u, v) = u/v, \quad u = x^2y^5z, \quad v = xyz^6.$
   (b) $f(u, v) = u/v, \quad u = x^2y^5 + x^5y^2z^3, \quad v = x^2y^5z.$
   (c) $f(x, y, z) = x^2yz, \quad x = p^3q, \quad y = p^2 + q^2.$
   (d) $P(s, t) = \sqrt{s} + \sqrt{t}, \quad s = u^4v^2, \quad t = u^2 + v^2.$
   (e) $Q(a, b, c) = a^2bcd, \quad a = x^2, \quad b = xy, \quad c = \ln xy^3, \quad d = y^2.$
   (f) $h(p, q, r) = \sqrt{pq - r}, \quad p = x + y,\ q = x - 2y,\ r = xy + 2y^2.$
   (g) $f(t) = e^t, \quad t = \ln xy.$
   (h) $h(x, y) = 5\ln x - \sqrt[3]{y}, \quad x = e^{p-2q},\ y = (p + q)^6.$

Pràctica 4 Funcions homogènies

1. Estudia l'homogeneïtat de les funcions següents:

$$f(x,y,z) = x^3y^2 + z^5 \qquad g(x,y) = \frac{x^2y + 3y^3}{x^7} \qquad h(u,v,w) = \sqrt[5]{u^2vw - 5v^2w^2}$$

$$p(s,t) = \frac{\sqrt{s} + 3\sqrt{t}}{\sqrt{2s+3t}} \qquad g(a,b) = 5a^3b - 6ab \qquad F(p,q,r) = p^5 \sin^2(p^2 + qr)$$

$$H(x,y) = y^3 e^{x/y} \cos(5 + \tfrac{x^2}{y^2}) \qquad Q(K,L) = K^{0.2}L^{0.5} \qquad P(u,v) = (u^2v + v^3)^5$$

2. La funció de demanda d'un bé és

$$D(r,p,p_1,p_2) = \sqrt[5]{r} \ln\left(\frac{p_1p_2}{p^2}\right),$$

on r és la renda dels consumidors, p el preu del bé i p_1, p_2 els preus de dos béns substitutius. Estudia si hi ha il·lusió monetària.

3. La funció de producció d'una empresa ve donada per

$$Q(K,L,M) = \sqrt[6]{K^2LM^3}.$$

Estudia els rendiments a escala de l'empresa.

---

4. Estudia l'homogeneïtat de les funcions següents:

(a) $f(x,y) = \sqrt[4]{xy^2 - x^3}$

(b) $P(r,s) = r + 2s$

(c) $Q(K,L) = K^3L^5$

(d) $g(a,b,c) = \dfrac{ac^2 + 2b^3}{a - b - c}$

(e) $f(x,y) = \dfrac{e^{x/y}x^2\sqrt{x+y}}{3x+2y}$

(f) $P(r,s,t) = \dfrac{r^2(2s+t)}{\sqrt{rs}} \ln(\dfrac{rs}{t^2})$

(g) $t(x,y,z) = x\sin(yz)$

(h) $h(u,v) = u^2 + v^4$

(i) $f(x,y,z) = \sqrt{xyz - x^2y}$

(j) $f(x,y) = \dfrac{4\sqrt{x}}{y}$

(k) $f(x,y) = x^2e^{x/y}\sqrt{xy}$

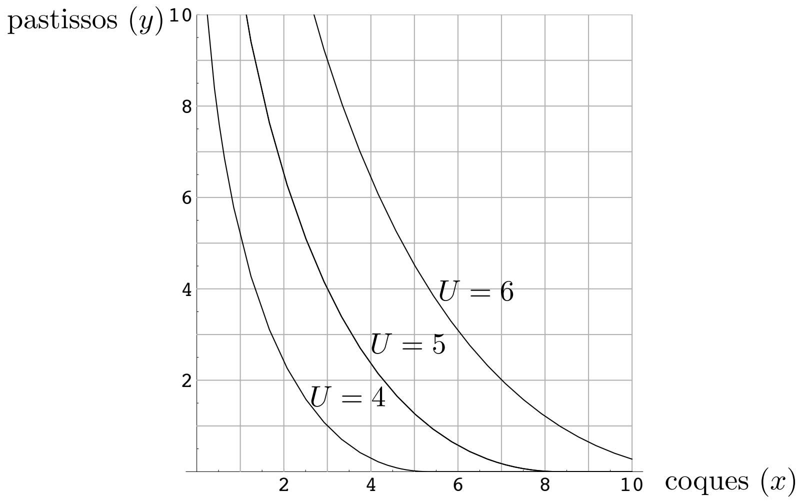
(l) $T(u,v) = \sqrt[3]{u^4v^2 - u^6} - \sqrt[4]{\frac{u^{11}}{v^3}}$

Pràctica 5 Funcions implícites

1. Un consumidor llépol adquireix mensualment x coques i y pastissos. La seua funció d'utilitat és

$$U(x, y) = \sqrt{3x} + \sqrt{y}.$$

Açò significa que U és la funció amb què "puntua" o "valora" els seus possibles consums, de manera que el fet que $U(2, 1) = 3.45$ i $U(1, 2) = 3.15$ s'interpreta com que el consumidor està més satisfet si es pren 2 coques i 1 pastís que si es pren 1 coca i 2 pastissos. Les corbes de nivell d'utilitat s'anomenen *corbes d'indiferència.* La figura mostra les corbes d'indiferència corresponents a nivells d'utilitat 4, 5 i 6.



La resposta als apartats (a)-(d) següents has de raonar-la a partir de la gràfica:

(a) Si actualment adquireix 3 coques al mes i 4 pastissos, sobre quina corba d'indiferència ens trobem?

(b) Si, partint del consum actual, el consumidor haguera de renunciar a una coca, quants pastissos hauria de comprar de més per mantindre's en el mateix nivell d'utilitat?

(c) Si un mes el consumidor es pren 4 pastissos, quantes coques hauria de menjar-se per augmentar en una unitat la seua utilitat actual?

(d) Si volguera conservar el seu nivell d'utilitat actual menjant només coques, quantes li'n caldrien?

(e) Escriu l'equació de la corba d'indiferència actual i interpreta-la.

(f) Calcula la funció implícita $y(x)$ determinada per la corba d'indiferència.

(g) Quina és la gràfica de la funció $y(x)$?

(h) Calcula $y(2)$ i relaciona el resultat amb l'apartat (b).

(i) Localitza en la figura el valor de $y(2)$ i $y(3)$. És raonable deduir de la figura que $\lim_{x \to 0^+} y(x) = +\infty$? Calcula el límit analíticament. Interpreta el resultat.

2. Considera la funció $f(x, y, z) = \dfrac{xe^z}{y}$.

   (a) Dibuixa la gràfica de la funció $f(x, 1, 0)$.

   (b) Escriu l'equació de la corba de nivell 5 de la funció f. Interpreta-la.

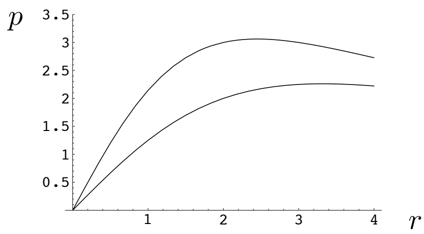
   (c) Comprova si els punts $(5, 1, 0)$, $(2, 3, 1)$ i $(1, 2, \ln 10)$ estan o no sobre eixa corba de nivell.

   (d) Calcula les funcions implícites $x(y, z)$ i $z(x, y)$ determinades per la corba de nivell. Interpreta-les.

   (e) Calcula $z(3, 8)$ i interpreta el resultat.

---

3. Continuant amb el problema 1 (p. 1), la gràfica següent mostra les corbes de nivell de demanda corresponents a $D = 6$ i $D = 11$.



   (a) Escriu les equacions d'aquestes corbes de nivell.

   (b) Raona quina correspon a cada corba.

   (c) Explica la interpretació econòmica de les equacions que has escrit.

   (d) Identifica en la gràfica el punt que correspon a la situació actual.

   (e) Suposem que la renda del consumidor passara a ser de 4 u.m. Perquè el seu consum de cervesa no variara, el preu hauria de variar molt o poc?

   (f) I si la seua renda passara a ser de 1 u.m.?

   (g) Si el litre de cervesa passara a valdre 2.5 €, el consum mensual podria ser de 11 litres per a algun nivell de renda? I de 6 litres? Amb quin nivell de renda, aproximadament? Calcula'l analíticament a partir de l'equació.

   (h) Calcula la funció implícita $p(r)$ determinada per la corba de nivell corresponent a $D = 6$. Quina és la interpretació econòmica d'aquesta funció? Quina és la seua gràfica?

   (i) Calcula $p(3)$ i interpreta-ho.

4. Un consumidor disposa d'un pressupost de 100 € per a gastar-se'l en dos béns A i B. El primer costa 5 € /unitat, i el segon 12 € /unitat.

   (a) Escriu la funció $G(x, y)$ que calcula la despesa del consumidor si compra x unitats del producte A i y unitats del producte B.

   (b) Les corbes de nivell de les funcions despesa d'aquest tipus són rectes, per la qual cosa s'anomenen *rectes pressupostàries.* Escriu l'equació de la recta pressupostària corresponent als 100 € de què disposa el consumidor. Interpreta-la.

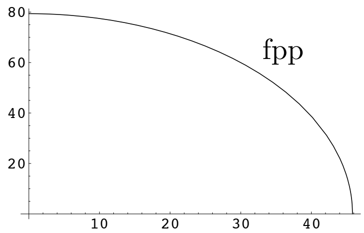
   (c) Representa gràficament la recta pressupostària de l'apartat anterior.

   (d) Calcula la funció implícita $y(x)$ determinada per la recta pressupostària. Interpreta-la.

   (e) Calcula $y(8)$ i interpreta-ho.

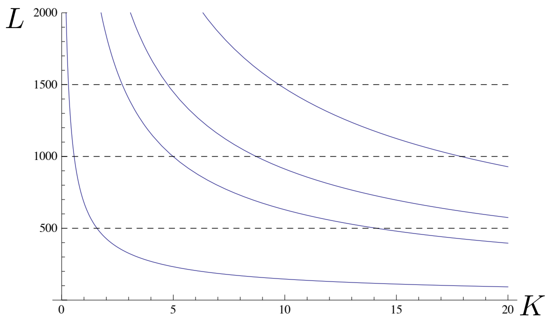
5. Calcula les funcions implícites indicades definides per les equacions indicades:
   (a) $\sqrt[5]{K^2L^4} = 2$, calcula $K(L)$.
   (b) $x^2 + 2y^2 + 5z^2 = 100$, calcula $y(x,z)$.
   (c) $z\ln(xy) = 20$, calcula $x(y,z)$.
   (d) $(x+2y)^z = 1\,000$, calcula $z(x,y)$.

6. Una empresa fabrica dos productes en quantitats x i y. L'empresa pot decidir la quantitat que produeix de cadascun d'ells, però els seus recursos són limitats i exigeixen que la producció (x,y) complisca la relació $3x^2 + y^2 \leq 6\,300$. D'aquesta manera, les produccions que aprofiten al màxim els recursos de l'empresa compleixen l'equació $3x^2 + y^2 = 6\,300$. La corba determinada per aquesta equació s'anomena *frontera de possibilitats de producció de l'empresa,* i està representada en la figura.



   (a) Quina és la màxima producció del primer producte que pot aconseguir l'empresa (a costa de no produir gens del segon)?
   (b) Quina és la màxima producció del segon producte que pot aconseguir l'empresa?
   (c) Calcula la funció implícita $y(x)$ definida per la frontera de possibilitats de producció i interpreta-la.
   (d) Calcula $y(30)$ i interpreta-ho.
   (e) Quina és la gràfica de la funció $y(x)$?
   (f) Si actualment l'empresa fabrica 30 unitats del primer producte, quantes unitats del segon hauria de deixar de produir si volguera augmentar en una unitat la producció del primer?
   (g) Marca en la figura el punt corresponent a la producció actual de l'empresa.

7. La funció de producció d'una empresa és $Q(K,L) = \sqrt[5]{K^2L^3}$, on K és el nombre de màquines emprades en la producció i L el nombre de treballadors. La gràfica mostra diverses corbes de nivell de la funció.

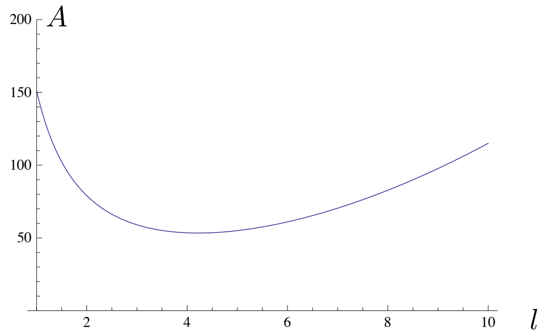


   (a) Escriu l'equació de la isoquanta (corba de nivell de producció) corresponent a una producció de 120 unitats de producte. Interpreta-la.
   (b) Calcula la funció implícita $L(K)$ definida per aquesta equació.
   (c) Calcula $L(15)$ i interpreta el resultat.
   (d) Calcula $\Delta L(15)(1)$ i interpreta el resultat.
   (e) Sabent que la corba de nivell actual és una de les representades en la figura, assenyala els punts corresponents a la situació inicial i final de l'increment de l'apartat anterior.

8. L'estalvi mensual d'un cert treballador ve donat per la funció

$$A(r,p,l) = \frac{r}{p^2 l} + l^2 \text{ €},$$

on r és el seu salari, p un indicador del preu dels articles de primera necessitat i l un indicador del preu dels articles de luxe que interessen al treballador.



   (a) Escriu l'equació de la corba de nivell corresponent a un estalvi de 59 € mensuals. Interpreta-la.

   (b) Calcula la funció implícita $p(r,l)$ determinada per la corba de nivell.

   (c) Calcula $p(2400,3)$ i interpreta el resultat.

Qüestions

9. Considera una funció $f(x,y,z)$.

   (a) Quin és el significat d'una corba de nivell $f(x,y,z)=\alpha$?

   (b) Si aquesta equació defineix una funció implícita $z(x,y)$, quin és el significat d'aquesta funció?

   (c) Com serà la funció composta $f(x,y) = f(x,y,z(x,y))$?

Pràctica 6 Càlcul de derivades

1. Calcula les derivades parcials de les funcions següents:

$$3x^5y^7 \qquad 2x^5y^2+3x^2y-2x+y-6 \qquad x^6e^{y^4} \qquad \sqrt{x^2\cos(y^3z+z^6)} \qquad x^y$$

$$2^{\sin y}\cos^5(x^2y^4+x^3) \qquad \ln^4\sin^3\sqrt{3x^2y-2y^2} \qquad \frac{\sqrt{y}\,\sin x}{(x^2+z^2)^3} \qquad \frac{x}{y^5}-5\,\frac{y+3}{z-2} \qquad 7xe^{x/y}$$

2. Calcula el vector gradient de les funcions següents:
   (a) $f_1(x,y,z)=3x^5y+xy^4z+y^5+2z^2+5$,
   (b) $f_2(r,s)=r^5\cos 3s^4$,
   (c) $f_3(u,v,w)=(u^2+2uv+vw^5)e^{u+2v-w+1}$,
   (d) $f_4(p,q)=\sin^8(p^2+q^3)$,
   (e) $f_5(p,q)=\sin(p+2q^2)^8$.

3. Calcula la matriu jacobiana de les funcions següents:
   (a) $f(x,y)=(x^5y,x+y,x^2-3xy)$
   (b) $g(u,v,w)=(u^3e^{vw},7)$
   (c) $P(q)=(\ln q,3^q,\sqrt{q^3-3q},q+1)$

---

4. Calcula el vector gradient de les funcions següents:
   (a) $f(x,y,z)=x^5y-3x^2z+xyz-3y+2$,
   (b) $g(x,y)=x/y^3$,
   (c) $h(x,y,z)=\sqrt{x}\sin(x^2+y^2+z^2)$,
   (d) $p(u,v)=\dfrac{u+v}{u^2+v^2}$,
   (e) $t(p,q)=\dfrac{p}{1+q^2}$,
   (g) $k(x,y)=\sqrt[5]{e^{xy^2}}$,
   (h) $L(r,s)=\sqrt[3]{2^{r+s}}$,
   (i) $P(a,b)=\dfrac{b-b^3}{a^2+2b-1}$,
   (j) $Q(x,y,z)=\dfrac{x\cos y}{\sqrt{y+2z}}$,
   (k) $T(v,w)=\ln^3(v/w)$.

5. Calcula la matriu jacobiana de les funcions següents:
   (a) $f(x,y,z)=(x+y^2,xyz)$
   (b) $T(s)=(s^2+1,1/s,\sqrt[3]{s})$
   (c) $g(x,y)=(x,y,\ln(x+y),x\sin y)$
   (d) $r(x,y,z)=(xy^2-z^5,8,2^{xy^3})$
   (e) $f(p,q,r)=(p^3+q^2,p+qr^3)$
   (f) $f(x,y)=(e^y,x\,2^{x+2y},7)$
   (g) $h(p,q)=(q\sin p,p^3\,2^{pq},\sqrt[3]{p})$
   (h) $p(x,y)=(x^2,xy,x^y)$
   (i) $h(s,t)=(s^2t,s,e^{st})$
   (j) $G(p,q)=(\ln p,\frac{\sqrt[3]{q}}{p},\sqrt{pq})$
   (k) $g(x,y)=(x^2y,3x+y^4)$
   (l) $P(u,v)=(u+v,uv,u^v)$

6. Calcula les derivades parcials de les funcions següents:

1. $f(x,y,z) = 3x^2y + 5z^3 - 8$
2. $p(q,r) = q\cos r + r^5 \ln q$
3. $h(u,v,w) = u^4 e^{2u-v^3} + w2^w$
4. $G(s,t) = \dfrac{2st^2 + t}{5t^3 + s^2}$
5. $T(k,l) = \dfrac{e^k - l}{l^5 + 2}$
6. $P(r,s,t) = \dfrac{\sqrt{t}\sin r}{3r^5 - 2^{4s+2}}$
7. $f(x,y) = \ln^4(\sin e^{2x^2-xy})$
8. $g(v,w) = \ln^5 \sin^4 \sqrt{v^3 - 5v^2w^5}$
9. $p(m,n) = 2^{3m} \sin\sqrt{m^2 + 8n}$
10. $S(x,y,z) = \sqrt{\dfrac{5^{\sin x} + z}{\ln^3 y + z^2}}$
11. $R(a,b,c) = \sqrt[5]{\ln(a^5\sqrt{bc^3})}$
12. $q(u,v,w) = (\ln^5 u)e^{\sqrt[7]{v}}(w^3 - 3/w)$
13. $F(M,N) = \dfrac{\frac{1}{M} - \frac{1}{N}}{M^2 + N^2}$
14. $j(y,z) = \dfrac{9}{5y^3 + 7^{z/6}}$
15. $x(u,v) = (2u+v)e^{\sqrt{u}\ -v^5/3}$
16. $y(u,v) = \dfrac{\sqrt{\sin u}}{u^v}$
17. $K(x,y) = (\ln\sqrt{x})^{y^5}$
18. $Q(a,b,c) = (2a - 5b)^{3c+2}$
19. $f(x,y) = \dfrac{e^y + 8}{(x^2y^3 + x)^{17}}$
20. $L(r,s,t) = \dfrac{2^r s^{\sin t}}{\sin^4 r}$
21. $M(f,g) = \left(\dfrac{f^3 + 6}{\sqrt[7]{g^2 + 3}}\right)^5$
22. $T(t,u) = 5e^{t/u} + \ln(t - u)$
23. $f(x,y) = \sqrt{\ln(x^4 \sin^5 \sqrt{y})}$
24. $q(u,v,w) = \dfrac{3u}{(2\sin v \cos^5 w + 4)^5}$
25. $g(p,q,r) = p^2 \sin^3 q^2 e^{q-r}$
26. $Q(i,j,k) = 2^i \sin(jk)\sqrt{k}$
27. $f(x,y) = 5e^{1/x + 1/y^2}$
28. $F(x,y,z) = 2^x(3 + \sqrt{y})^{-z}$
29. $k(p,q) = \dfrac{e^{p-q} + 3^{q-p}}{p}$
30. $r(s,t) = 5\left(s + \frac{1}{t}\right)^6 + st$
31. $k(a,b,c) = \ln^5\left(\dfrac{1/a + 2/b^4}{a + 1/c^5}\right)$
32. $f(u,v) = 2^{u+v}\sqrt{\cos^5 v^3}$
33. $p(u,v,w,x) = u^5 e^{v/w} + w\ln^5 x$
34. $f(x,z) = (1 + \sin x)^{2\ln z}$
35. $g(x,t) = (x^3 + 3x + 2)5^{x^2 + 3t^4}$
36. $h(x,t) = (x^3 + 3x + 2)^{3t^4}$
37. $p(x,y) = \dfrac{(x + e^x)^5}{(y + \sqrt[3]{y})^3}$
38. $A(f,g) = \dfrac{1}{f^2 + g^2\cos f}$
39. $B(h,k,l) = \dfrac{h^3\ln^4(h^2 + hk)}{l^6}$
40. $C(x_1,x_2) = \dfrac{1}{x_1} + x_1\sqrt[4]{x_1 7^{x_2}}$

7. Calcula les derivades parcials de les funcions següents:

1. $f(x,y) = x\sin^5 e^{xy}$
2. $f(x,y) = \sin^3(\ln x^5)\, x^{y^2+3y}$
3. $g(x,y) = \dfrac{1/x^4}{(e^{2x}+xy^3)^3}$
4. $f(x,y,z) = x^2(\sin^4\sqrt{y})2^{x^2z+z}$
5. $f(x,y) = \dfrac{1}{x^{2y}}$
6. $f(x,y) = 3^{1/x^3}\ln^5\sqrt[3]{ye^{3-y}}$
7. $g(x,y) = (\sin x^2)^{\cos y}\cdot x$
8. $f(x,y) = \dfrac{\sin^3\sqrt{x}}{\cos y}$
9. $f(x,y) = \sqrt[5]{5x^2+3y^3}\ln x$
10. $f(x,y) = x^4\cos^5\sqrt{xy}$
11. $g(x,y) = \ln(x/y)$
12. $f(x,y) = (x^3+4xy)e^{\sqrt{x^2+5}}$
13. $g(x,y) = \dfrac{\ln x}{(x^2+y)^5}$
14. $f(x,y) = \sqrt{e^x\sin xy}$
15. $g(x,y) = \dfrac{\sqrt[5]{x}}{\cos^3(y^2+1)}$
16. $f(x,y) = (2xy+1)\sin^5\sqrt{x}$
17. $g(x,y) = \dfrac{2^{xy}}{x^5-3x+1}$
18. $f(x,y) = \sin\sqrt{\frac{x}{y}}$
19. $g(x,y) = \dfrac{x^2e^{y^3}}{\ln x}$
20. $f(x,y) = \ln^5(x/y)$
21. $g(x,y) = e^{x^2+2y^3}\sin x^4$
22. $P(x,y) = \sqrt[4]{x}\,\ln^4(y^2-4)$
23. $Q(x,y) = \dfrac{e^x\cos y}{\sqrt{y^5+1}}$
24. $f(x,y) = x^5\sin^4\sqrt{y}$
25. $g(x,y) = e^{2x}\ln(2x-3y)$
26. $f(x,y) = x\cos e^{x/y}$
27. $f(x,y) = x^2y\ln x^2$
28. $g(x,y) = (x^7+\sqrt{x})\ln^5 y$
29. $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2+2xy}$
30. $g(x,y) = \dfrac{ye^{2x}}{y^2+1}$
31. $f(x,y) = y\ln(x^2+xy)$
32. $g(x,y) = \dfrac{xe^{y^2}}{y}$
33. $f(x,y) = e^{x^2y}\cos\sqrt{x^3+y}$
34. $f(x,y,z) = e^{x/y}\sin^2 z^5$
35. $f(x,y) = x^2\cos\sqrt{x^3y+y^2}$
36. $g(x,y) = 4e^{x/y}+x^2+3$
37. $f(x,y) = e^x\sqrt{xy^2-3y}$
38. $g(x,y,z) = \dfrac{\sin(xy)}{\ln(xz)}$
39. $f(x,y,z) = \sqrt{\sin x}\,\dfrac{\ln^4 y}{y^2+z^4}$
40. $f(x,y) = (xy^2+2y)\ln^5\sqrt{x}$
41. $g(x,y) = \dfrac{\sin x}{e^{2y}}$
42. $f(x,y) = \sin^5\sqrt{x/y^3}$
43. $g(x,y) = (3x^6y+\ln x)e^{\sqrt{x}}$
44. $f(x,y) = x^3\ln^2(xy)$
45. $g(x,y) = \dfrac{\sqrt{x+1}+\ln y}{y^3+y}$

Pràctica 7 Interpretació de la derivada

1. Una empresa fabrica un article X a partir de dos factors de producció A i B. La funció de producció és $P(x, y) = x + y + 0.005xy^2$ unitats de X, on x i y són les quantitats dels factors de producció.

   (a) Calcula la producció actual si s'estan emprant 100 unitats de A i 80 unitats de B.

   (b) Calcula la producció marginal respecte de y per a la producció actual. Indica la seua interpretació.

   (c) Calcula l'increment de producció que pot obtindre's si la quantitat emprada del factor B passa a ser de 82 unitats. Fes el càlcul exacte i el càlcul aproximat a partir de la producció marginal. Calcula el percentatge d'error.

   (d) Ídem si, partint igualment de 80 unitats de B, passem a utilitzar-ne 200 unitats. Compara els resultats en ambdós casos.

2. Una editorial A és una de les principals subministradores de llibres a una xicoteta ciutat, encara que té una única competidora B. L'empresa estima que la demanda dels seus llibres en la ciutat depén del preu mitjà a què els ven p_1, del preu mitjà a què ven els llibres l'editorial B i del preu mitjà dels articles de primera necessitat. Si la funció de demanda (dels llibres de A) és $D(p_1, p_2, p_3)$ i l'empresa estima que, per als preus actuals $\bar{p}_0$, es té que

$$\left.\frac{\partial D}{\partial p_1}\right|_{\bar{p}_0} = -2, \qquad \left.\frac{\partial D}{\partial p_2}\right|_{\bar{p}_0} = -1, \qquad \left.\frac{\partial D}{\partial p_3}\right|_{\bar{p}_0} = 2,$$

   (a) Quina de les variables p_2, p_3 representa —presumiblement— els preus de l'editorial B i quina els preus dels articles de primera necessitat?

   (b) Interpreta les derivades.

   (c) Quin efecte tindria per a l'editorial una rebaixa mitjana dels seus preus de 0.8 unitats monetàries?

3. El capital d'una empresa durant un període de deu anys $[0, 10]$ ve donat per la funció

$$C(t) = 500e^{3e^{0.01t}-3}.$$

   (a) Determina el capital amb què comptava l'empresa al principi del període i el capital final.

   (b) Calcula $\left.\frac{dC}{dt}\right|_0$ i interpreta el resultat.

   (c) Calcula la derivada de C en tant per 1 en un instant arbitrari t. Anomena $R(t)$ la funció resultant. (És la rendibilitat de l'empresa en cada instant.)

   (d) Calcula $R(0)$ i $R(10)$ i interpreta els resultats.

   (e) Calcula la derivada en percentatge de $R(t)$. Interpreta-la.

4. La funció de demanda d'un article és $D(p,r) = \ln\left(1 + \frac{2r}{p}\right)$, on p és el preu i r la renda mitjana dels consumidors. El preu actual és $p = 2$ u.m. i $r = 100$ u.m.
   (a) Calcula la demanda actual.
   (b) Calcula les derivades parcials de D per als valors actuals de les variables i interpreta-les.
   (c) Usa les derivades per a determinar què produiria un major increment de la demanda:
      i. Un increment de la renda de $\Delta r = 10$ u.m.
      ii. Un increment del preu de $\Delta p = -0,5$ u.m.
   (d) Calcula els increments exactes de la demanda corresponents a cada cas i compara'ls amb les estimacions anteriors calculant el percentatge d'error.
   (e) Calcula l'elasticitat de la demanda respecte del preu per als valors actuals i interpreta-la.

Interpretació de derivades i aproximació d'increments

5. La taxa de desocupació (percentual) de dos països A i B ve donada per les funcions

$$P_A(t) = 8(1.1)^t \ \% \qquad \text{i} \qquad P_B(t) = 8(0.9)^t \ \%.$$

   (a) Determina la taxa de desocupació en l'actualitat ($t = 0$) en ambdós països.
   (b) Calcula les derivades d'ambdues taxes en $t = 0$ i interpreta-les.
   (c) Quin dels dos països està en millor situació?

6. S'estima que la funció de costos d'una empresa és $C(x,y) = 150\ln(2 + x + 3y)$, on x i y són les quantitats produïdes dels dos articles que fabrica l'empresa. La producció actual és $(x,y) = (100,100)$. Determina el domini matemàtic de la funció C així com el subdomini amb sentit econòmic.
   (a) Calcula el cost marginal respecte a cada un dels articles per als valors actuals de les variables. Interpreta'ls.
   (b) Escriu la fórmula que relaciona l'increment de cost que es produeix si $\Delta x = 4$ amb la seua aproximació amb derivades.
   (c) Calcula aquest increment de forma exacta i de forma aproximada mitjançant la fórmula de l'apartat anterior. Calcula el percentatge d'error de l'aproximació.
   (d) Repeteix els càlculs si, en compte d'incrementar-se la producció del primer article, ho fa la del segon, en la mateixa quantitat.

7. La funció $B(D,p)$ ens dóna el benefici d'una empresa en funció de la seua demanda diària i del preu a què ven el seu producte. Actualment l'empresa té una demanda de 2 000 u.p. diàries i el preu de venda és de 3 €, amb la qual cosa aconsegueix un benefici de 90 000 €. A més:

$$\left.\frac{\partial B}{\partial D}\right|_{(2\,000,3)} = 2, \qquad \left.\frac{\partial B}{\partial p}\right|_{(2\,000,3)} = \pm 100\,000.$$

(a) Interpreta aquestes derivades.

(b) Raona el signe correcte de la segona derivada. (Fes l'apartat següent considerant aquest signe.)

(c) Calcula $\Delta_p B(2\,000, 3)(0.1)$ i interpreta el resultat.

(d) Calcula la derivada en percentatge del benefici respecte del preu per als valors actuals i interpreta-la.

(e) Calcula l'elasticitat del benefici respecte del preu per als valors actuals i interpreta-la.

8. Una empresa distribuïdora de vi estima que la demanda de la seua marca en milers de litres mensuals ve donada per la funció

$$D(r, p, q) = (200 - r)e^{0.1q/p} \text{ kl/mes},$$

on r és la renda mensual (en euros) que els consumidors dediquen al consum de vi, p és el preu a què l'empresa ven el litre de vi i q és el preu a què una altra marca competidora ven el litre de vi. Actualment, la renda dels consumidors és de 100 €, l'empresa ven el seu producte a $p = 2$ € i el preu de l'altra marca és de $q = 4$ €.

(a) Comprova que

$$\left.\frac{\partial D}{\partial r}\right|_{(100,2,4)} = -1.22, \quad \left.\frac{\partial D}{\partial p}\right|_{(100,2,4)} = -12.21, \quad \left.\frac{\partial D}{\partial q}\right|_{(100,2,4)} = 6.10.$$

(b) Interpreta les derivades. Pots concloure alguna cosa sobre la qualitat del vi que distribueix l'empresa?

9. La funció de producció d'una empresa és $Q(K, L) = K^2 \ln L^3$, on K i L són els factors de producció, que actualment són emprats en quantitats $K = 2$, $L = 1$.

(a) Calcula el nivell de producció actual.

(b) Calcula $\left.\dfrac{\partial Q}{\partial L}\right|_{(2,1)}$ i interpreta el resultat.

(c) Utilitza la derivada anterior per a calcular aproximadament l'increment de producció que pot aconseguir-se si la quantitat de L emprada passa a ser $L = 1.05$.

(d) Calcula el percentatge d'error de l'aproximació de l'apartat anterior.

Derivades en percentatge

10. La funció $B(p, q, t) = 1000e^{0.1t}(10p - 2q)$ representa els beneficis d'una empresa en funció del preu p de venda del seu producte, el preu q de la seua principal matèria primera i el temps t en anys. En l'actualitat ($t = 0$) es té que $p = 1$ i $q = 2$.

(a) Calcula la derivada parcial de B respecte a t en el moment actual i interpreta-la.

(b) Calcula la derivada en percentatge del benefici respecte al temps per als valors actuals i interpreta-la.

11. La funció de producció d'una empresa és $Q(x,y) = 2\sqrt{x}\,\ln y$, on x i y són les quantitats emprades de dos factors de producció. Actualment l'empresa utilitza 400 unitats del primer i 100 del segon.

    (a) Calcula la producció marginal $\left.\dfrac{\partial Q}{\partial x}\right|_{(400,100)}$ i interpreta el resultat.

    (b) Calcula la derivada de Q (respecte de x) en percentatge per als valors actuals i interpreta el resultat.

12. Siga $B(x,y)$ la funció de beneficis d'una empresa, on x i y són les quantitats produïdes de dos articles. Actualment, la producció de l'empresa és $(x,y) = (3\,000, 1\,000)$ articles. A més s'estima que
$$\left.\frac{\partial B}{\partial x}\right|_{(3\,000,1\,000)} = -2, \qquad \left.\frac{\partial B}{\partial y}\right|_{(3\,000,1\,000)} = 4.$$

    (a) Interpreta aquestes derivades.

    (b) Si actualment el benefici és de 500 u.m., calcula la derivada en percentatge del benefici respecte de la variable y i interpreta el resultat.

13. La producció anual d'una empresa ve donada per la funció
$$Q(p,t) = 1\,000(p^2+1)e^{(2t^2+tp)/100} \text{ milers d'articles,}$$
on t és el temps en anys i p és el preu a què l'empresa ven el seu producte. Actualment ($t = 0$) el preu és de 2 €.

    (a) Calcula la producció actual.

    (b) Calcula
$$\left.\frac{\partial Q}{\partial p}\right|_{(2,0)}, \qquad \left.\frac{\partial Q}{\partial t}\right|_{(2,0)}$$

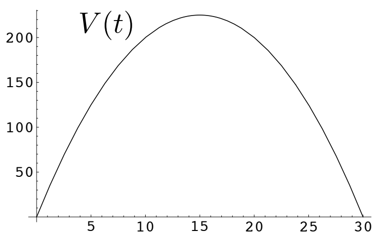
    (c) Interpreta les derivades anteriors.

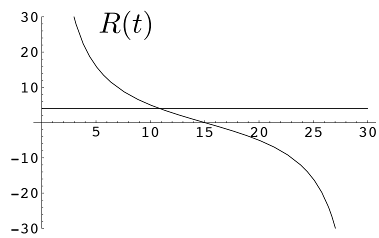
    (d) Calcula la derivada en percentatge $I(p,t)$ de Q respecte del temps. Simplifica l'expressió.

    (e) Calcula $I(2,0)$ i interpreta el resultat.

    (f) Estudia de quina manera un augment del preu afecta el creixement (percentual) de la producció de l'empresa.

14. Un agricultor ha plantat un arbre fruiter que, segons les previsions, hauria de viure uns 30 anys. El valor de l'arbre va variant a mesura que passa el temps, en funció de la seua productivitat. S'estima que aquest valor ve donat per la funció $V(t) = 30t - t^2$ u.m.





(a) L'agricultor planeja vendre l'arbre en el moment en què el seu valor siga màxim. Dedueix de la figura quin és aquest valor.

(b) L'agricultor té un fill que està estudiant Matemàtiques I, i aquest li fa veure que els seus plans respecte a l'arbre no són els més intel·ligents. Per a això, en primer lloc el fill calcula la rendibilitat $R(t)$ (la derivada en percentatge) que li proporciona l'arbre en cada instant t. (Calcula-la tu també.)

(c) El fill li mostra a l'agricultor que, tal com es veu en la gràfica, la rendibilitat és sempre decreixent. D'altra banda, fa notar son pare que en qualsevol moment pot obtindre una rendibilitat del 4% de qualsevol capital de què dispose (per exemple, perquè un cert banc li ofereix aqueix interés per un depòsit). Per consegüent, el millor moment per a vendre l'arbre és quan la seua rendibilitat arriba al 4%, perquè a partir d'aqueix moment aquest serà una inversió menys rendible que altres alternatives disponibles. Calcula el moment en què l'agricultor ha de vendre l'arbre tenint en compte els consells del seu fill economista.

15. El mateix agricultor del problema anterior té també un arbre que en un moment donat pensa talar per vendre la seua fusta. Es tracta d'un arbre que pot viure centenars d'anys i el valor de la seua fusta mai deixa d'augmentar. Diguem que ve donat per la funció $V(t) = e^{0.4\sqrt{t}}$ u.m. Determina el moment més convenient per a talar l'arbre (que, com en el problema anterior, serà aquell en què la seua rendibilitat descendisca fins al 4%).

16. El benefici d'una empresa en funció del temps (en anys) ve donat per la funció

$$B(t,i) = \frac{10\,000 i \ln(t^2+1)}{t},$$

que depén també del tipus d'interés que li aplica el banc amb què treballa, i que actualment és $i = 0.02$.

(a) Calcula el benefici marginal respecte del temps en l'instant $t = 3$. Interpreta el resultat.

(b) Calcula $\Delta_t B(3, 0.02)(0.5)$ i interpreta el resultat.

(c) Calcula aproximadament l'increment de l'apartat anterior mitjançant derivades.

(d) Calcula la derivada en percentatge de B en el punt $(3, 0.02)$ i interpreta el resultat.

Elasticitat

17. Considera de nou la funció de demanda del problema 8 anterior.

(a) Calcula les elasticitats E_p, E_q i E_r respecte de les tres variables per a valors qualssevol de r, p i q i simplifica les expressions tot el possible.

(b) Calcula $E_p(100, 2, 4)$ i interpreta el resultat.

(c) Calcula $\Delta_p E_p(100, 2, 4)(0.1)$ de forma exacta i de forma aproximada amb derivades. Interpreta el resultat.

18. Considera de nou la funció de demanda del problema 6 (p.3):

$$D(r,p,p') = \frac{\sqrt{rp'}}{2p},$$

on r és la renda mitjana dels consumidors, p és el preu del producte X i p' el preu d'un bé substitutiu. Calcula la seua elasticitat respecte de les tres variables per a $(r,p,p') = (36,1,1)$. Interpreta els resultats.

19. Calcula l'elasticitat de la funció de demanda $D(p) = 100/p$.

20. La demanda d'un article ve donada per la funció

$$D(r,p) = 3000\sqrt[3]{\frac{r}{p^2}} - 20\ln p,$$

on p és el preu i r la renda dels consumidors. Calcula l'elasticitat respecte del preu quan $r = 16\,000$ i $p = 4$ i interpreta el resultat.

21. Una empresa ven un article a un preu $p = 2$€ i estima que la demanda prevista depén a més de la renda r dels consumidors i ve donada per

$$D(r,p) = \frac{re^{\sqrt{r}}}{p}.$$

   (a) Calcula $\left.\dfrac{\partial D}{\partial r}\right|_{(9,2)}$ i interpreta el resultat.
   (b) Calcula l'increment esperat de la demanda si la renda dels consumidors passa de 9 u.m. a 9.2 u.m.
   (c) Calcula l'increment anterior de forma aproximada mitjançant derivades.
   (d) Calcula l'elasticitat de la demanda respecte de la renda per a $(r,p) = (9,2)$ i interpreta el resultat.

Qüestions

22. Indica el signe que tindran en condicions normals les derivades següents:

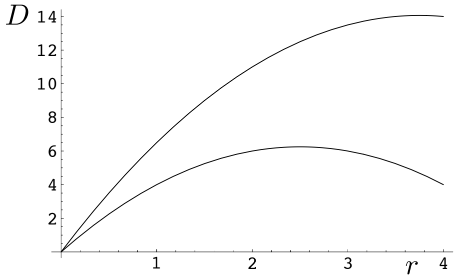
   (a) La derivada del salari d'un treballador respecte al temps.
   (b) La derivada parcial de la demanda d'un article respecte del seu preu.
   (c) La derivada parcial del volum de vendes d'una empresa respecte de la seua inversió en publicitat.
   (d) La derivada parcial de l'estalvi mitjà dels habitants d'un país respecte de l'índex de preus.
   (e) La derivada respecte al temps de la població d'un país en què cada família té una mitjana de 1.8 fills.
   (f) La derivada de l'índex general de la borsa de Madrid respecte del temps.

23. Siga $C(x)$ la funció de costos d'una empresa, on x és la quantitat produïda d'un article. Explica la diferència d'interpretació entre

$$\left.\frac{\partial C}{\partial x}\right|_{10} \qquad \text{i} \qquad \left.\frac{\partial C}{\partial x}\right|_{1000}.$$

Quin signe cal esperar que tinguen aquestes derivades?

Pràctica 8 Derivades de funcions d'una variable



1. Considera de nou la funció de demanda del problema 1 de la p. 1:

$$D(r,p) = \frac{15r}{p} - r^2 \text{ l/mes},$$

on p és el preu (en €) d'un litre de cervesa i r és la renda mensual del consumidor (en milers d'euros).

Els valors actuals són $p = 2$€ i $r = 2$ milers d'euros. La figura mostra les gràfiques de les funcions $D(r,2)$ i $D(r,3)$.

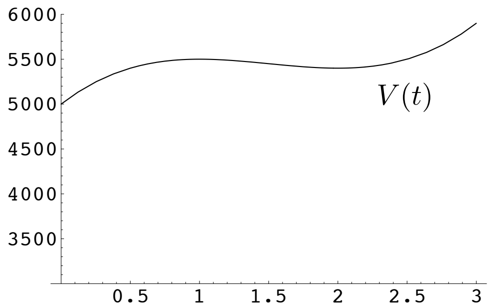
   (a) Calcula les derivades $\left.\frac{\partial D}{\partial r}\right|_{(2,2)}$, $\left.\frac{\partial D}{\partial p}\right|_{(2,2)}$ i interpreta-les.

   (b) Calcula l'increment de consum que es produirà si el preu de la cervesa augmenta 1 u.m. Fes el càlcul de forma exacta i de forma aproximada amb derivades. És bona l'aproximació? A què es pot deure?

   (c) Calcula l'elasticitat-preu i l'elasticitat-renda de la demanda en el punt $(2,2)$. Interpreta-les.

   (d) A partir de l'expressió de $\frac{\partial D}{\partial p}$, raona que la cervesa no és un bé Giffen per al consumidor siga quin siga el preu a què es venga, és a dir, raona que aquest sempre disminuirà el seu consum de cervesa davant d'un augment de preu *(ceteris paribus)*.

   (e) Un bé es diu *normal* si quan els consumidors tenen més renda augmenten el consum, i es diu *inferior* en cas contrari. Determina a partir de quin nivell de renda la cervesa passa a ser un bé inferior per al consumidor quan $p = 2$.



2. Hem comprat unes accions en el moment $t = 0$ (on el temps està en anys) per un valor de 5 000 €, i les hem venut al cap de 3 anys. Durant aquest període, el seu valor ha vingut donat per la funció

$$V(t) = 200t^3 - 900t^2 + 1200t + 5000 \text{€}.$$

   (a) Calcula el valor final de les accions.

   (b) La figura mostra que, a partir d'un cert moment t_1, el valor de les accions va començar a decréixer, però en un altre moment posterior t_2 va tornar a créixer. Calcula aquests instants on el valor de les accions va prendre un màxim primer i un mínim després.

   (c) Calcula la rendibilitat (la derivada de V en tant per 1) inicial de les accions, la rendibilitat final i la rendibilitat en els instants t_1 i t_2.

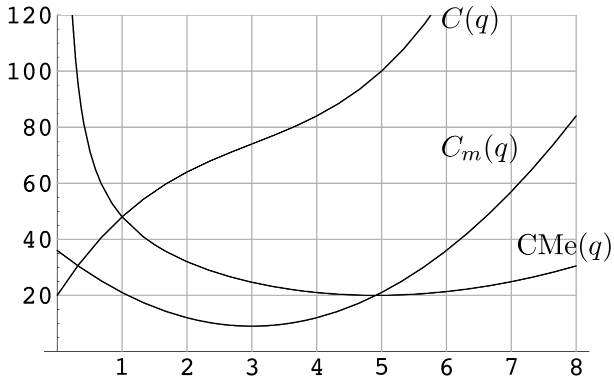
   (d) Durant els tres anys que va durar la inversió, en quin moment van arribar les accions al seu valor màxim?

   (e) Quina haguera sigut la teua resposta si no hagueres conegut la gràfica?

3. Considerem de nou la funció de costos del problema 13 de la p. 9:

$$C(q) = q^3 - 9q^2 + 36q + 20 \text{ u.m.}$$

La figura mostra el cost C, el cost marginal C_m i el cost mitjà $CMe = C(q)/q$.



(a) Calcula el cost marginal i el cost mitjà.

(b) Calcula la producció a partir de la qual el cost marginal deixa de ser decreixent i passa a ser creixent.

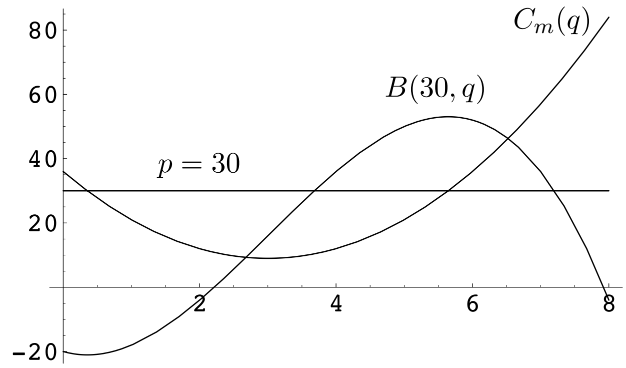
(c) La figura mostra que el cost mitjà és mínim just on coincideix amb el cost marginal. Demostra que açò no és casual.

---

4. Continuant amb el problema anterior, la funció de beneficis de l'empresa és

$$B(p, q) = pq - C(q).$$

La figura mostra la funció de benefici per a un preu $p = 30$ u.m. i el cost marginal.



(a) Calcula la funció $B(30, q)$ i troba les produccions q per a les quals el benefici és mínim i màxim.

(b) Comprova en la figura que aquestes produccions coincideixen amb les que fan que el cost marginal siga precisament p.

(c) Justifica que açò és així siga quin siga el preu p i siga quina siga la funció de costos $C(q)$.

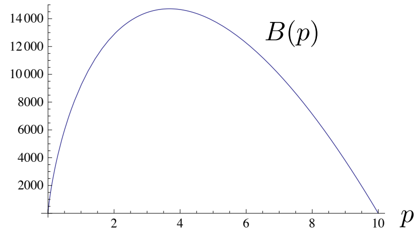
(d) Calcula la funció d'oferta $S(p)$ que determina la producció més convenient per a l'empresa en funció del preu de mercat p.

(e) Justifica que el *preu de tancament*, és a dir, el preu per al qual els beneficis de l'empresa són nuls, és el corresponent a la producció q per a la qual el cost mitjà coincideix amb el cost marginal. Dedueix de la figura el seu valor en aquest cas.

5. Seguint el model del problema anterior, comprova que la funció d'oferta del problema 1 de la p. 13 és la indicada en l'apartat (b) d'eixe problema, és a dir, calcula la producció q que fa que p siga igual al cost marginal.

6. Comprova que el preu a què a l'empresa del problema 14 de la p. 10 li convé llançar el seu producte és el que indica la gràfica.

7. La funció $B(p) = 1000p \ln \frac{10\,000}{p^4}$ representa els beneficis d'una empresa en funció del preu p a què ven el seu producte. Determina el preu a què l'empresa li convé vendre el seu producte.



8. Una xicoteta població s'abasteix de les maduixes que cultiven dos agricultors A i B. El preu del quilo de maduixes el fixa un intermediari en funció de les produccions anuals q_1 i q_2 de A i B, segons la relació

$$p = 10 - \frac{q_1 + q_2}{100}.$$

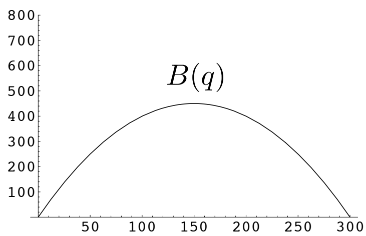
La producció de cada quilo de maduixes té un cost de 4 u.m. Per consegüent, el benefici que aconsegueix A amb la seua producció és

$$B_1(q_1, q_2) = pq_1 - 4q_1 = (p-4)q_1 = \left(6 - \frac{q_1 + q_2}{100}\right) q_1.$$

Anàlogament, el benefici que obté B és

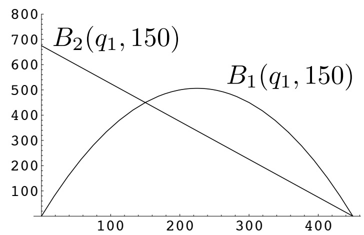
$$B_2(q_1, q_2) = pq_2 - 4q_2 = (p-4)q_2 = \left(6 - \frac{q_1 + q_2}{100}\right) q_2.$$

(a) Suposem que ambdós agricultors queden d'acord en repartir-se els beneficis a parts iguals, la qual cosa suposa que ambdós produïsquen la mateixa quantitat de maduixes $q = q_1 = q_2$. Calcula la funció de beneficis $B(q)$ corresponent (la que resulta de substituir q_1 i q_2 per q en qualsevol de les dues funcions de beneficis anteriors).



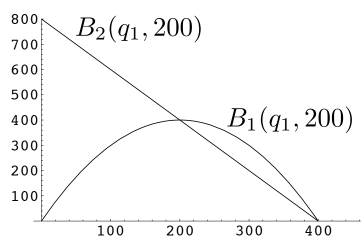
(b) Comprova analíticament que, tal com mostra la figura, el benefici dels agricultors és màxim quan cada un d'ells produeix $q = 150\,\text{kg}$ de maduixes. Quin és el benefici que obté cadascun? A quin preu es pagarà el quilo de maduixes?

(c) Suposem que B decideix respectar l'acord i produeix $q_2 = 150\,\text{kg}$ de maduixes, però A es planteja violar el pacte i produir-ne la quantitat q_1 que més li convinga. Calcula les funcions de beneficis $B_1(q_1, 150)$ i $B_2(q_1, 150)$.



(d) Calcula la producció q_1 que maximitza el benefici de A. Quin benefici aconsegueix cada agricultor? A quin preu es pagarà el quilo de maduixes?

(e) Es pot demostrar (encara que no ho veurem ací) que si B no es fia de A, la producció amb què aconsegueix el màxim benefici de manera que a A no li convinga guanyar més que ell és $q_2 = 200\,\text{kg}$. Calcula les funcions de beneficis $B_1(q_1, 200)$ i $B_2(q_1, 200)$.



(f) Calcula la producció q_1 que maximitza el benefici de A. Quin benefici obté cada agricultor? A quin preu es compraran les maduixes si A i B no estableixen cap acord?

(g) Explica, amb l'ajuda d'un diccionari, per què un pacte d'aquest tipus entre dues o més empreses rep el nom de *col·lusió.*

Pràctica 9 Derivades successives

1. Donada la funció $f(x,y,z) = x^4 e^{y/2} \sin(4z)$,

   (a) Calcula
$$\left.\frac{\partial^6 f}{\partial x \partial z^3 \partial x \partial y}\right|_{(1,0,\pi)}, \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}.$$

   (b) Calcula la matriu hessiana de f en el punt $(2,0,0)$.

2. Calcula la matriu hessiana de les funcions
$$f(x,y) = \frac{1}{xy}, \qquad h(x,y,z,w) = x^2 + y^2 - xw - zw + x - y + 5.$$

3. La funció de costos d'una empresa és $C(x,p) = 600\sqrt{p}\ln x$, on x és la producció i p el preu mitjà dels seus inputs.

   (a) Calcula el domini de C i el subdomini amb sentit econòmic.

   (b) Actualment la producció és de 100 unitats de producte i el preu de 4 unitats monetàries. Calcula l'efecte que té sobre el cost marginal (respecte a la producció) un increment unitari del preu dels inputs.

   (c) Quant augmentaria aproximadament el cost si el preu passara a ser $p = 4.1$ u.m.?

   (d) I el cost marginal?

4. La funció d'utilitat d'un consumidor respecte de dos productes A i B és
$$U(x,y) = \ln(1 + xy),$$
on x i y són les quantitats de producte que adquireix. Suposem que actualment consumeix $(x,y) = (10,10)$.

   (a) Calcula la utilitat marginal respecte del producte A. Interpreta el seu signe.

   (b) Justifica matemàticament aquesta afirmació: "Per cada unitat que augmenta el consum de A, la utilitat marginal disminueix, és a dir, el consumidor obté cada vegada menys satisfacció addicional en incrementar el seu consum de A".

   (c) Justifica matemàticament aquesta afirmació: "Per cada unitat que augmenta el consum de B la utilitat marginal de A augmenta, és a dir, si el consumidor augmenta el consum de B, aleshores li és més útil augmentar el consum de A."

   (d) Posa un exemple de dos productes per als quals aquestes propietats siguen raonables.

---

5. L'IPC d'un cert país en un instant t (expressat en anys) ve donat per la fórmula
$$P = e^{(1+t/50)^{3/2}}.$$

   (a) Calcula la inflació I del país, és a dir, la derivada de P en percentatge. (Una vegada simplificada, t'ha de donar $I = 3(1+t/50)^{1/2}$.) Quin tant per cent d'inflació es té en $t = 0$?

(b) Estudia mitjançant derivades el comportament de la inflació en $t = 0$. Està augmentant o disminuint?

(c) Calcula la taxa d'increment de la inflació T en el país, és a dir, la derivada de I en percentatge. Quant val $T(0)$?

(d) Com varia la taxa d'increment de la inflació del país? Creix o decreix?

(e) Explica la frase següent:

> *En la crisi de* 1972 *el president Nixon va anunciar que la taxa d'increment de la inflació estava descendint. Aquesta va ser la primera vegada que un president va usar la tercera derivada com a argument per a la seua reelecció.*
> Hugo Rossi, Notices of the AMS, v.43, núm. 10, octubre 1996.

Derivades successives

6. Calcula les derivades indicades de les funcions indicades:

(a) $f(a,b) = (a^2+b)^3$ $\qquad \left.\dfrac{\partial^3 f}{\partial a \partial b^2}\right|_{(2,1)}$

(b) $T(x,y,z) = \dfrac{x \ln y}{z}$ $\qquad \dfrac{\partial^5 T}{\partial z^2 \partial y \partial x \partial y}$

(c) $h(r,s) = s^2\sqrt{\cos r}$ $\qquad \left.\dfrac{\partial^4 h}{\partial r \partial s^3}\right|_{(1,1)}$

(d) $g(x,y,z) = z\sin(x - \ln y)$ $\qquad \left.\dfrac{\partial^4 g}{\partial x \partial z \partial y^2}\right|_{(0,1,3)}$

(e) $M(u,v,w) = v\,(\cos u^2)^{2w}$ $\qquad \dfrac{\partial^3 M}{\partial u \partial v \partial w}$

(f) $L(x,y,z,t) = \dfrac{2^x \ln t\,(z-x)}{\sqrt{3x-y}}$ $\qquad \left.\dfrac{\partial^4 L}{\partial t^2 \partial z \partial x}\right|_{(1,2,0,\sqrt{2})}$

(g) $f(m,n) = 2\,e^{m-n}$ $\qquad \left.\dfrac{\partial^{20} f}{\partial m^9 \partial n^{11}}\right|_{(2,2)}$

7. La funció de beneficis d'una empresa ve donada per $B(t) = 5t^2$ u.m., on t és el temps en anys. L'any actual és $t = 1$. A quin ritme està augmentant el benefici marginal de l'empresa?

8. La funció $B(x,y)$ determina el benefici d'una empresa a partir de les quantitats produïdes x i y de dos articles. Interpreta la derivada

$$\left.\frac{\partial^2 B}{\partial y^2}\right|_{(3\,000,1\,000)} = -0.3.$$

9. La demanda d'un article ve donada per $D(p,r,t) = (\sqrt{r} + 0.1t)/p^2$, on p és el preu, r la renda dels consumidors i t el temps en anys. Raona si $\frac{\partial D}{\partial p}$ augmenta o disminueix amb el temps.

10. La funció $B(p, q, t) = 1000e^{0.1t}(10p - 2q)$ representa els beneficis d'una empresa en funció del preu p de venda del seu producte, el preu q de la seua principal matèria primera i el temps t en anys. En l'actualitat $(t = 0)$ es té que $p = 1$ i $q = 2$. Calcula aproximadament mitjançant derivades l'increment que experimentarà el benefici marginal respecte de q quan passen tres mesos $(\Delta t = 1/4)$.

11. La demanda d'un article ve donada per la funció
$$D(r, p) = 3000\sqrt[3]{\frac{r}{p^2}} - 20\ln p,$$
on p és el preu i r la renda dels consumidors. Calcula $\left.\dfrac{\partial^2 D}{\partial p \partial r}\right|_{(16\,000,4)}$ i interpreta el resultat.

12. S'estima que la producció anual d'una empresa ve donada per
$$Q(p, q, t) = 6\,000\,\frac{\sqrt{p}}{q}\,e^{t/100} \text{ milers d'articles,}$$
on t és el temps en anys, p el preu (en euros) i q és el preu de la principal matèria primera (també en euros). Actualment $(t = 0)$ els preus són $(p, q) = (9, 2)$.

    (a) Calcula la producció actual.
    (b) Calcula les tres derivades parcials de Q, indica les seues unitats i interpreta-les.
    (c) Calcula la derivada en percentatge $I(p, q, t)$ de la producció Q respecte de q. Simplifica l'expressió.
    (d) Calcula $I(9, 2, 0)$ i interpreta el resultat.
    (e) Estudia com un descens de 0.20 € en el preu q afecta I .

Hessianes

13. Calcula la matriu hessiana de les funcions següents:

    (a) $f(x, y) = x^2 - 2xy^3 + 3x$,
    (b) $g(x, y, z) = e^{x^2}\sin(y + z)$,
    (c) $h(u, v, w) = u + 2v - w$,
    (d) $r(a, b) = \dfrac{1}{a + b^5}$.
    (e) $f(x, y) = x^{3y}$
    (f) $f(x, y, z) = xyz$
    (g) $f(x, y) = x^3\ln(y + 1)$
    (h) $G(x, y) = 9\ln(x + y)$
    (i) $f(x, y) = x^{-4}\ln y$
    (j) $g(x, y) = \sqrt{x}\,e^y$
    (k) $f(x, y, z) = x^3 + e^{y^2+3}\cdot 3^z$
    (l) $h(x, y) = (x + \ln y)^2$
    (m) $Q(x, y) = 2\sqrt{x}\,\ln y$
    (n) $h(x, y, z) = e^{x+2y} + z^2$
    (o) $g(x, y) = \dfrac{8\ln(y + 2)}{x + 2}$
    (p) $f(x, y, z) = x\sin y + z^3$
    (q) $R(x, y) = 2 + e^x\ln y$
    (r) $h(r, s, t) = e^r s + t^4$
    (s) $P(x, y) = e^x\sin y$
    (t) $f(x, y) = 4\sqrt[4]{x}\,\ln y$
    (u) $P(K, L) = K^3 + L^3 + K^2L$
    (v) $f(x, y, z) = \frac{\sin y^2}{x} + 7^{2z+3}$

Pràctica 10 Diferenciabilitat

1. Donada la funció
$$f(x,y,z) = x^3y^2 + xyz,$$
   (a) Calcula df.
   (b) Calcula $df(2,1,-1)$.
   (c) Calcula $df(2,1,-1)(1,-2,3)$.
   (d) Calcula la direcció de màxim creixement, la direcció de màxim decreixement i el conjunt de direccions de creixement nul de f en el punt $(2,1,-1)$.

2. Repeteix el problema anterior amb la funció $f(x,y) = xe^{y^2-1}$ (eliminant els valors de z en les dades).

3. La funció $D(p,p') = 100\ln(1+\frac{p'}{p})$ u.p. representa la demanda de l'article que fabrica una empresa, on p i p' representen el preu (en euros) a què l'empresa ven el seu producte i el preu mitjà a què la competència ven un article equivalent (però no es diu quina variable representa cada cosa).
   (a) Calcula les derivades parcials en $(p,p') = (4,2)$ €. Indica les seues unitats.
   (b) A partir de les derivades que has calculat, raona quina variable representa el preu de l'empresa i quina variable representa el preu de la competència.
   (c) Interpreta les derivades.
   (d) Calcula aproximadament mitjançant la diferencial l'increment de demanda que es produirà si de la situació actual $(p,p') = (4,2)$ € es passa a $(p,p') = (3,3)$ €.
   (e) Calcula l'increment exacte.
   (f) Comprova que el percentatge d'error és d'un 13%.
   (g) Explica per què l'error és relativament gran.

4. Una empresa fabrica dos productes A i B en quantitats x i y. Els beneficis que obté amb la seua producció vénen donats per una certa funció $B(x,y)$. Actualment els beneficis ascendeixen a 200 u.m., però l'empresa té més demanda de la que realment està cobrint, per la qual cosa es planteja augmentar la seua producció. Els seus recursos li permeten un augment de 10 unitats de producte. L'empresa estima que, per a la producció actual $\bar{p} = (x,y)$, es compleix
$$\left.\frac{\partial B}{\partial x}\right|_{\bar{p}} = 3 \text{ u.m./unitat de A}, \qquad \left.\frac{\partial B}{\partial y}\right|_{\bar{p}} = 2 \text{ u.m./unitat de B}.$$
   (a) Quina és exactament la interpretació d'aquestes derivades en aquest context concret?
   (b) Quins beneficis passaria a obtindre l'empresa si augmentara en 5 unitats la producció de A? I si augmenta en 5 unitats la producció de B?
   (c) Per a estimar amb aquestes dades els beneficis de l'empresa en el cas que augmente simultàniament 5 unitats la producció de A i 5 la de B necessitem una hipòtesi sobre la funció B. Quina?
   (d) Amb aquesta hipòtesi, quins passarien a ser els beneficis de l'empresa?

Càlcul de diferencials i de direccions de creixement

5. Calcula la diferencial de les funcions següents:

(a) $P = 2x^3y - 3x + 4y^2$,

(b) $Q = 3x - 5y + 7$,

(c) $z = \ln xy$,

(d) $T = e^{3u^2+y-\sqrt{t}}$,

(e) $V = \sqrt[3]{\sin(x^2y)}$,

(f) $r = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{p}$.

6. Calcula la diferencial de les funcions següents en els punts indicats.

(a) $h(x,y) = (x + \ln y)^2$ en $(3,1)$,

(b) $Q(x,y) = 2\sqrt{x}\,\ln y$ en $(4,4)$,

(c) $g(x,y,z) = \sqrt[3]{x}\ln\frac{y}{z+1}$ en $(2,1,1)$,

(d) $j(a,b) = ab$ en $(3,1)$,

(e) $h(u,v,w) = 3u^3 - w^4$ en $(1,0,1)$,

(f) $f(x,y) = x^2 + 2xy$ en $(3,4)$,

(g) $g(u,v,w) = u^2e^{v-w}$ en $(2,3,3)$,

(h) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2xy - z^2$ en $(1,2,0)$,

(i) $h(p,q) = 3p + 4q$ en $(1,1)$,

(j) $f(x,y) = x^3\ln(y+1)$ en $(2,0)$,

7. Calcula la direcció de màxim creixement, màxim decreixement i les direccions de creixement nul de les funcions del problema anterior en els punts indicats.

Aproximació d'increments totals

8. Una empresa estima que els seus beneficis $B(p,x)$ depenen del preu mitjà de les seues matèries primeres p i de la quantitat de producte que fabrica x. Actualment els seus beneficis són de 100 u.m. i corresponen a una producció de $x = 5$ unitats i a uns preus de $p = 1$ u.m. Així mateix considera que

$$\left.\frac{\partial B}{\partial p}\right|_{(1,5)} = -3 \text{ u.m./u.m.}, \qquad \left.\frac{\partial B}{\partial x}\right|_{(1,5)} = 2 \text{ u.m./u.p.}$$

(a) Interpreta les derivades, especialment el seu signe.

(b) Quins beneficis caldria esperar si els preus augmenten a 1.3 u.m.?

(c) I si, a més d'aquest augment de preus, l'empresa augmenta la seua producció en 3 unitats?

(d) Cal cap hipòtesi matemàtica sobre la funció B per a justificar la resposta a l'apartat (c)?

9. Considera la funció de producció $P(K,L) = K^3 + L^3 + K^2L$, on K i L són les quantitats emprades de dos factors de producció. Les quantitats emprades actualment són $(K,L) = (2,1)$.

(a) Calcula la producció marginal respecte a cada factor de producció per a la situació actual. Interpreta el resultat.

(b) Calcula de forma aproximada amb la diferencial l'increment de producció que pot aconseguir-se si s'empra $(K,L) = (2.2, 1.1)$.

(c) Calcula el percentatge d'error de l'aproximació anterior.

10. Siga $D(p,r,t)$ la funció de demanda d'un article en un mercat, on p és el preu (en u.m.), r la renda mitjana dels consumidors (en u.m.) i t el temps en anys. Actualment ($t=0$) es té que $(p,r)=(5,14)$ i $D(5,14,0)=200$. A més

$$\left.\frac{\partial D}{\partial t}\right|_{(5,14,0)}=20, \qquad \left.\frac{\partial D}{\partial p}\right|_{(5,14,0)}=-15, \qquad \left.\frac{\partial D}{\partial r}\right|_{(5,14,0)}=10.$$

   (a) Interpreta aquestes derivades.

   (b) Quina demanda caldria esperar d'ací a un any si la renda ha passat a $r=13$ u.m. i el preu a $p=4.5$ u.m.? Quina hipòtesi sobre D cal suposar per a respondre a aquesta pregunta amb les dades disponibles?

11. La funció $C(x,p)$ determina el cost de producció d'una empresa a partir del nivell de producció x i del preu p d'un factor de producció. Actualment es té que $(x,p)=(1\,000,3)$ i el cost és de 500 u.m. A més

$$\left.\frac{\partial C}{\partial x}\right|_{(1\,000,3)}=3, \qquad \left.\frac{\partial C}{\partial p}\right|_{(1\,000,3)}=10.$$

   (a) Interpreta aquestes derivades.

   (b) Calcula el cost (no l'increment de cost) que caldria esperar si la producció passa a ser de 1 050 u.p. i el preu es redueix en 0.8 u.m.

   (c) Calcula $\Delta_x C(1\,000,3)(10)$ i interpreta el resultat.

12. La funció $D(p,P,t)$ representa la demanda diària d'una empresa en funció del preu p (en euros) a què ven el seu producte, de la quantitat P (en euros) que inverteix mensualment en publicitat i del temps t (en anys). Actualment ($t=0$) l'empresa ven el seu article a $p=30$€ i inverteix $P=90\,000$ euros mensuals en publicitat. Sabem que

$$\left.\frac{\partial D}{\partial p}\right|_{(30,90\,000,0)}=\pm 10\,000, \qquad \left.\frac{\partial D}{\partial P}\right|_{(30,90\,000,0)}=\pm 3\,000, \qquad \left.\frac{\partial D}{\partial t}\right|_{(30,90\,000,0)}=-1\,000.$$

   (a) Raona el signe correcte que cal esperar per a les dues primeres derivades.

   (b) Interpreta les tres derivades.

   (c) Calcula l'increment de la demanda que cal esperar d'ací a un mes (1/12 d'any). L'empresa augmentarà o disminuirà els seus ingressos respecte a la situació actual?

   (d) Suposa que l'empresa decideix vendre el seu producte a 29.50€. Quin seria en aquest cas l'increment de la demanda d'ací a un mes?

   (e) L'empresa es planteja augmentar la seua inversió en publicitat d'ací a uns mesos. Per això està interessada a saber si l'efecte que tindrà sobre la seua demanda un augment de la inversió en publicitat augmenta o disminueix amb el temps. Quina derivada indica l'efecte que té sobre la demanda un augment en la inversió en publicitat? Quina derivada indica si aquesta derivada augmenta o disminueix amb el temps?

13. Un consumidor consumeix dos béns en quantitats x i y, i amb això obté una utilitat $U(x,y) = x^2 + x\sqrt{y}$. El seu consum actual és de 2 unitats de A i 4 de B.
    (a) Calcula la utilitat marginal de A i B per al consum actual. Interpreta-la.
    (b) Calcula a partir de les utilitats marginals l'increment d'utilitat que es produirà si el consum de A s'incrementa en 0.1 unitats i (al mateix temps) el consum de B s'incrementa en 0.5 unitats.
    (c) Calcula el percentatge d'error de l'aproximació anterior.

14. Una empresa fabrica un producte Z a partir de dos factors de producció A i B. La seua funció de producció ve donada per

$$Q(x,y,P) = \sqrt{xy} - \sqrt{P},$$

on x i y són les quantitats emprades del factors A i B i P és el nivell de producció d'altres articles que fabrica la mateixa empresa. Actualment l'empresa empra 200 unitats de A i 800 de B, i el nivell de producció d'altres articles és $P = 100$ u.p.
    (a) Calcula el nivell de producció actual del producte Z.
    (b) Calcula les derivades parcials de Q per als valors actuals de les variables.
    (c) Interpreta les derivades de l'apartat anterior.
    (d) Calcula $dQ(200, 800, 100)$.
    (e) Utilitza la diferencial que has calculat per a aproximar l'increment de producció que aconseguiria l'empresa si augmentara en 5 unitats ambdós factors de producció i reduïra la producció d'altres articles a $P = 81$ u.p.

15. La funció $B(p, D, t)$ representa els beneficis d'una empresa en funció del preu p (en euros) a què ven un article, la demanda diària D d'aquest article i el temps t en anys. Actualment ($t = 0$) ven el seu article a un preu $p = 25$ €, té una demanda de 20 000 articles diaris i $B(25, 20\,000, 0) = 300\,000$ €. A més

$$\left.\frac{\partial B}{\partial t}\right|_{(25,20\,000,0)} = 120, \quad \left.\frac{\partial B}{\partial p}\right|_{(25,20\,000,0)} = -700, \quad \left.\frac{\partial B}{\partial D}\right|_{(25,20\,000,0)} = 12.$$

    (a) Interpreta les derivades. Són raonables els signes?
    (b) Quins beneficis caldria esperar d'ací a dos mesos (2/12 d'any) si l'empresa reduïra el seu preu a 22 unitats i això provocara un augment de la demanda de 100 articles diaris?
    (c) Quina hipòtesi cal suposar sobre B per a respondre a la pregunta anterior? Per què?
    (d) L'empresa vol estudiar si el seu benefici marginal sobre el preu augmenta o disminueix amb el pas del temps. Quina derivada conté aquesta informació?

16. La funció de producció d'una empresa és $Q(x,y) = 2\sqrt{x}\,\ln y$, on x i y són les quantitats emprades de dos factors de producció. Actualment, l'empresa utilitza 400 unitats del primer i 100 del segon.

(a) Calcula $\Delta_x Q(400, 100)(10)$ de forma exacta i aproximadament mitjançant derivades. Interpreta el resultat.

(b) Calcula de forma aproximada l'increment de producció que pot aconseguir-se utilitzant els factors de producció en quantitats $(415, 105)$.

(c) Raona mitjançant derivades si un augment de la quantitat emprada del primer factor fa augmentar o disminuir la producció marginal respecte de x.

17. La funció $B(x, y, p) = \dfrac{1\,000 \ln(p + x + 2y)}{p}$ representa el benefici d'una empresa en funció de la seua producció de dos articles A i B i del preu p de la seua principal matèria primera. Actualment l'empresa produeix 48 tones de A, 25 de B i compra la seua matèria primera a 2 u.m./t.

    (a) Calcula dB.

    (b) Calcula $dB(48, 25, 2)$.

    (c) Calcula la direcció de màxim creixement, màxim decreixement i el conjunt de direccions de creixement nul de B en el punt $(48, 25, 2)$.

    (d) Calcula l'increment exacte de benefici que cal esperar si, partint de la situació actual, el preu de la matèria primera descendeix un 5% i l'empresa augmenta la seua producció a 50 t. de A i 30 de B.

    (e) Comprova que el percentatge d'error que resulta en aproximar l'increment anterior mitjançant la diferencial (sense tindre en compte el signe) no supera el 4%.

18. La funció $C(x, p, q) = 1000\sqrt{3x + 1}(x + 2p + 3q)$ representa el cost de producció d'una empresa quan x és la quantitat produïda i p i q són els preus de les seues principals matèries primeres. Actualment l'empresa produeix 8 tones del seu producte i els preus són $p = 3$€, $q = 2$€.

    (a) Calcula dC.

    (b) Calcula $dC(8, 3, 2)$.

    (c) Calcula la direcció de màxim creixement, màxim decreixement i creixement nul de C en el punt $(8, 3, 2)$.

    (d) Fent ús dels càlculs que has fet, aproxima l'increment de cost que es produiria si l'empresa augmenta la seua producció un 2% i el preu p disminueix 10 cèntims d'euro (i el preu q no varia).

    (e) Comprova que el percentatge d'error de l'aproximació de l'apartat anterior no excedeix de l'1%.

Pràctica 11 La regla de la cadena

1. Donades les funcions $f(x,y) = x^2 + y,\ \ x = y^2$ calcula la funció composta. Calcula

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \qquad \text{i} \qquad \frac{\partial f(y)}{\partial y}.$$

   En el cas de la derivada de la dreta, fes el càlcul derivant directament la funció i per la regla de la cadena.

2. Siga $B(p,p')$ la funció de beneficis d'una empresa E, on p és el preu del seu producte i p' el preu mitjà de la competència. Per als preus actuals $p = 21$, $p' = 20$ s'estima que

$$\left.\frac{\partial B(p,p')}{\partial p}\right|_{(21,20)} = -3, \qquad \left.\frac{\partial B(p,p')}{\partial p'}\right|_{(21,20)} = 2.$$

   (a) Interpreta aquestes derivades.

   (b) Suposem que la competència ajusta els seus preus segons els de l'empresa E, de manera que $p' = p - 1$. Calcula
$$\left.\frac{\partial B(p)}{\partial p}\right|_{21}.$$

   (c) Explica la diferència entre les dues derivades respecte de p, des d'un punt de vista matemàtic i pel que fa a la seua interpretació econòmica. Quina d'elles ens serviria per a estimar l'efecte que tindria sobre els beneficis una disminució del preu p de 2 u.m.?

3. Considera l'equació
$$f(x,y,z) = e^{xy}z - 10e^z = 0.$$

   (a) Comprova que defineix x com a funció implícita de y, z sempre que y, $z \neq 0$.

   (b) Calcula la funció $x(y,z)$.

   (c) Calcula $x(5,10)$ fent i sense fer ús de l'apartat anterior.

   (d) Calcula
$$\left.\frac{\partial x}{\partial z}\right|_{(5,10)}$$
   derivant la funció implícita.

   (e) Calcula la mateixa derivada derivant implícitament l'equació.

4. La funció de costos d'una empresa és
$$C = q^3 - 6q^2 + 15q + 5,$$
   on q és el seu nivell de producció, que actualment és de $q = 10$ u.p.

   (a) Calcula el cost de producció actual.

(b) Demostra que l'equació anterior defineix q com a funció implícita de C per a valors de q i C pròxims als actuals.

(c) Calcula

$$\frac{dq}{dC}$$

per als valors actuals i interpreta el resultat.

5. Una empresa utilitza $K = 20$ màquines i $L = 100$ treballadors per a produir un article. La producció diària que pot aconseguir-se en general amb K màquines i L treballadors ve donada per la funció

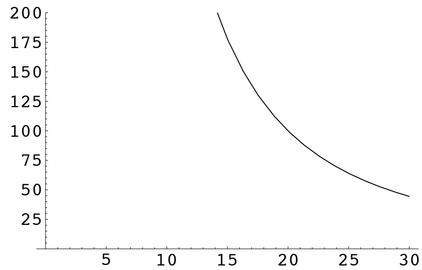
$$Q(K, L) = K^2 L.$$

L'amo de l'empresa s'està plantejant la possibilitat d'abaratir el procés de producció substituint part de la plantilla per una màquina addicional.

(a) Calcula la producció diària actual de l'empresa.

(b) Escriu l'equació de la *isoquanta* (= corba de nivell de producció) actual. Interpreta-la.

(c) La figura mostra la gràfica de la isoquanta. Localitza-hi la situació actual de l'empresa.



(d) Calcula la funció implícita $L(K)$ definida per la corba de nivell. Interpreta-la.

(e) Calcula $L(20)$ i $L(21)$, i interpreta els resultats.

(f) Calcula la *Relació de Substitució Tècnica*

$$\text{RST}(20) = -\left.\frac{dL}{dK}\right|_{20}$$

derivant la funció implícita i interpreta el resultat.

(g) Repeteix el càlcul derivant implícitament la corba de nivell.

(h) Quants treballadors aniran al carrer si la negociació sindical no ho impedeix?

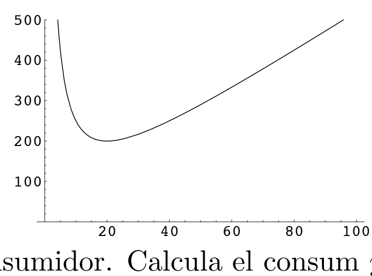
---

6. Un consumidor consumeix dos béns en quantitats anuals x i y. La seua funció d'utilitat és $U(x, y) = xy$. Suposem que el consumidor ajusta el seu consum al seu nivell de renda anual r, de manera que la seua corba d'indiferència (corba de nivell d'utilitat) és $xy = r$. Si els preus dels dos béns són, respectivament, p i q, aleshores la despesa del consumidor ve donada per la funció $G(x, y, p, q) = px + qy$.

(a) Calcula la funció implícita $y(x, r)$ determinada per la isoquanta. Interpreta-la.

(b) Calcula la funció composta $G(x, p, q, r)$. Interpreta-la.

(c) La figura mostra la funció $G(x, 5, 2, 1\,000)$.



Calcula el consum x que minimitza la despesa del consumidor. Calcula el consum y del segon bé i la despesa del consumidor. Interpreta tots tres resultats.

(d) Comprova que, en general, el consum que minimitza la despesa del consumidor (per a uns valors fixos de p, q i r) és

$$x(p,q,r) = \sqrt{\frac{rq}{p}} = r^{1/2}q^{1/2}p^{-1/2}.$$

Aquesta funció es representa també com $D(p,q,r)$ i no és sinó la funció de demanda del consumidor.[1]

(e) Considerant la funció $y(x,r)$, comprova que la demanda del segon bé és

$$y(p,q,r) = r^{1/2}q^{-1/2}p^{1/2},$$

així com que la despesa és

$$G(p,q,r) = 2r^{1/2}q^{1/2}p^{1/2}.$$

Interpreta aquesta funció.

(f) Comprova que es compleix el lema de Shephard: La derivada de la despesa G d'un consumidor respecte del preu p d'un bé és igual a la demanda (compensada) d'aquest bé.[2]

Derivades de funcions compostes

7. Siga $f(x,y) = x^2 + 3y - y^3$, on $y = x^2 + 3$. Calcula

$$\frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{i} \quad \frac{df}{dx},$$

fent ús de la regla de la cadena quan siga possible.

8. Siga $z = xy$, $x = u^2 + v$, $y = u - v$. Calcula

$$\left.\frac{\partial z}{\partial u}\right|_{(1,2)}$$

per la regla de la cadena.

[1]Més precisament, és la *demanda hicksiana* o *demanda compensada,* que depén (en aquest cas a través de la renda) del nivell d'utilitat desitjat pel consumidor. La *demanda marshalliana* és la que maximitza la utilitat fixat un nivell de despesa (un pressupost).

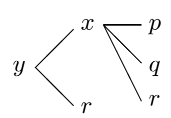
[2]Es fàcil demostrar que el lema de Shephard es compleix en general (almenys per al cas de dos béns): La condició perquè la despesa $G = px + qy$ siga mínima és

$$\frac{\partial G}{\partial x} = p + q\frac{\partial y}{\partial x} = 0,$$

i la derivada de la despesa respecte de p és

$$\frac{\partial G}{\partial p} = x + p\frac{\partial x}{\partial p} + q\frac{\partial y}{\partial p} = x + p\frac{\partial x}{\partial p} + q\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial p} = x + \frac{\partial x}{\partial p}\left(p + q\frac{\partial y}{\partial x}\right) = x,$$

on hem derivat px com un producte i hem aplicat la regla de la cadena a la composició



9. Siga $w = x^2 + y^2 + z^2$, on $z = x + 2y$. Aleshores

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Explica la diferència entre les dues primeres derivades que apareixen en la fórmula. Calcula la del membre esquerre en el punt $(x, y) = (2, 1)$.

10. Siga $p(r, s) = 5\sqrt{r^2 + s^2} + 3\sqrt[3]{5 - r}$, on $s = u + \sin v$, $r = 4\cos v$.

    (a) Calcula la funció composta.

    (b) Calcula $\left.\frac{\partial p}{\partial u}\right|_{(3,0)}$ mitjançant la regla de la cadena.

11. Considera les funcions $z = x^3yt^3$, $x = u^2v$, $y = 2u$, $t = v^2 + 1$. Calcula la funció composta i la seua derivada respecte de u en el punt $(1, 2)$ per la regla de la cadena.

12. El cost de producció d'una empresa està en funció del preu de cada un dels dos inputs que utilitza, $C(x, y) = 2 + 3x + 5y$ u.m. D'altra banda, el preu dels inputs varia amb el temps. Concretament $x(t) = 1 + 2t$ u.m., $y(t) = 1 + t$ u.m., on t és el temps expressat en anys.

    (a) Calcula els preus dels inputs en el primer any estudiat ($t = 0$). Calcula el cost corresponent.

    (b) Calcula la funció $C(t)$.

    (c) Calcula l'increment de costos corresponent al primer any (període $[0, 1]$).

    (d) Calcula les derivades

    $$\left.\frac{\partial C}{\partial x}\right|_{(1,1)}, \quad \left.\frac{\partial C}{\partial y}\right|_{(1,1)}, \quad \left.\frac{dC}{dt}\right|_{0}$$

    derivant directament cada funció (indica les unitats corresponents).

    (e) Calcula l'última derivada de l'apartat anterior mitjançant la regla de la cadena.

    (f) Interpreta totes les derivades que has calculat.

13. Una empresa estima que els seus beneficis vénen donats per la funció

$$B(t, p) = \frac{4 + 0.2t}{\sqrt{p^2 - 5}},$$

on el numerador és una estimació de la demanda futura en funció del temps t i el denominador és una correcció en funció de l'IPC p. El temps actual és $t = 1$ i l'IPC és $p = 3$ u.m. No hi ha cap previsió fiable de l'evolució de l'IPC, però l'empresa estima que en l'actualitat

$$\left.\frac{dp}{dt}\right|_{1} = 0.2.$$

Segons aquestes estimacions, els beneficis de l'empresa augmentaran o dismunuiran a curt termini?

14. Siga $D(p, r, t)$ la funció de demanda d'un article en un mercat, on p és el preu, r la renda mitjana dels consumidors i t el temps en anys. Actualment ($t = 0$) es té que $(p, r) = (5, 14)$ i $D(5, 14, 0) = 200$. A més

$$\left.\frac{\partial D}{\partial t}\right|_{(5,14,0)} = 20, \qquad \left.\frac{\partial D}{\partial p}\right|_{(5,14,0)} = -15, \qquad \left.\frac{\partial D}{\partial r}\right|_{(5,14,0)} = 10.$$

   (a) Interpreta aquestes derivades.

   (b) Suposem que $r = r(t)$ i $p = p(t)$, de manera que

$$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{0} = 0.2, \qquad \left.\frac{dp}{dt}\right|_{0} = 0.1.$$

   Interpreta aquestes derivades.

   (c) Calcula

$$\left.\frac{dD(t)}{dt}\right|_{0},$$

   (d) Interpreta aquesta derivada explicant especialment la diferència amb la interpretació de

$$\left.\frac{\partial D(p, r, t)}{\partial t}\right|_{(5,14,0)}.$$

15. La funció $B(p, q, t) = 1000e^{0.1t}(10p - 2q)$ representa els beneficis d'una empresa en funció del preu p de venda del seu producte, el preu q de la seua principal matèria primera i el temps t en anys. En l'actualitat ($t = 0$) es té que $p = 1$ i $q = 2$.

   (a) Calcula la derivada parcial de B respecte de t en el moment actual i interpreta-la.

   (b) L'empresa ajusta el preu p en funció del temps i del preu q de la matèria primera. Sabent que

$$\left.\frac{\partial p}{\partial q}\right|_{(2,0)} = 0.1, \qquad \left.\frac{\partial p}{\partial t}\right|_{(2,0)} = 0.2,$$

   estudia si aquestes dades modifiquen la previsió de l'apartat (a).

16. El benefici d'una empresa ve donat per la funció $B(p, D) = 1\,000p \ln D$, on p és el preu a què ven el seu producte i D és la seua demanda. Al seu torn, la demanda depén del preu segons la relació

$$D(p) = \frac{10\,000}{p^4}.$$

   Actualment l'article es ven a un preu $p = 5$ €.

   (a) Calcula la demanda actual del producte.

   (b) Calcula

$$\frac{\partial B(p, D)}{\partial p}$$

   per als valors actuals de les variables. Interpreta el resultat. Podem deduir que a l'empresa li convé augmentar el preu del seu article?

   (c) Calcula mitjançant la regla de la cadena la derivada que indica realment l'efecte que té sobre el benefici un augment unitari del preu.

17. La funció $B(t,p,D)$ determina els beneficis anuals previstos per a una empresa en funció del temps t, el preu mitjà p dels seus factors de producció i la demanda D. Actualment $(t=0)$ es té que $p=15$ i $D=1\,000$. A més s'estima que

$$\left.\frac{\partial B}{\partial t}\right|_{(0,15,1\,000)} = 500, \quad \left.\frac{\partial B}{\partial p}\right|_{(0,15,1\,000)} = -100, \quad \left.\frac{\partial B}{\partial D}\right|_{(0,15,1\,000)} = 100,$$

$$\left.\frac{\partial p}{\partial t}\right|_{0} = 2, \quad \left.\frac{\partial D}{\partial t}\right|_{0} = -300.$$

   (a) Interpreta les derivades.
   (b) Raona per què no podem afirmar, d'acord amb la primera de les derivades anteriors, que d'ací a un any els beneficis de l'empresa hauran augmentat en 500 u.m.
   (c) Calcula l'increment esperat per als beneficis anuals de l'empresa l'any pròxim.

18. La funció $U(x,y)$ representa la utilitat que obté un consumidor en adquirir dos béns en quantitats x i y. El seu consum actual és $(x,y)=(10,50)$. Els béns són complementaris, i el consumidor els compra segons la proporció $y=5x$. Sabem que

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{(10,50)} = 2, \quad \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{(10,50)} = 4.$$

   (a) Explica breument per què no podem usar la derivada de l'esquerra per a predir l'increment d'utilitat que es produiria si el consumidor adquirira una unitat més del primer bé.
   (b) Calcula la derivada que ens proporciona aquesta informació.

19. La funció $U(x,y,z)=xy\sqrt{z}$ representa la utilitat que obté un consumidor per l'adquisició de tres béns A, B i C en quantitats x, y, z, respectivament. El consumidor adquireix aquests béns mantenint les relacions $x=2z$, $y=3z+1$.

   (a) Calcula la funció composta.
   (b) Calcula les derivades

$$\left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_{(8,13,4)}, \quad \left.\frac{dU}{dz}\right|_{4}$$

   fent ús de la regla de la cadena quan siga possible.
   (c) Interpreta separadament ambdues derivades i explica després la diferència entre ambdues.

20. La demanda d'un article depén del temps t, del seu preu p i de la renda r dels consumidors segons la funció

$$D(t,p,r) = 1\,000\,\frac{r}{p}\,e^{t/10}.$$

Actualment el preu és $p=2$ € i la renda és $r=400$ €.

(a) Calcula $\left.\dfrac{\partial D}{\partial t}\right|_{(0,2,400)}$ i interpreta el resultat.

(b) Raona per què no podem usar únicament la derivada anterior per a determinar la demanda de l'any pròxim si sabem a més que

$$\left.\frac{dp}{dt}\right|_0 = 0.2\text{€}/\text{any}, \qquad \left.\frac{dr}{dt}\right|_0 = 15\text{€}/\text{any}.$$

(c) Calcula la derivada que indica realment la demanda esperada per a l'any pròxim i interpreta el resultat.

21. La funció $B(D, p)$ representa el benefici d'una empresa en funció de la seua demanda D i del preu p a què ven el seu producte. D'altra banda, la demanda D és funció del preu p. Actualment l'article es ven a un preu $p = 10$€ i $D(10) = 5\,000$.

    (a) Interpreta les derivades

    $$\left.\frac{\partial B}{\partial p}\right|_{(5\,000,10)}, \qquad \left.\frac{dB}{dp}\right|_{10}$$

    i explica la diferència d'interpretació entre l'una i l'altra.

    (b) Una de les dues derivades anteriors val $5\,000$€/€, i l'altra val -200€/€. Raona quina és quina.

22. La funció de costos d'una empresa és $C(x) = 2\,000 + 5x$, on x és la quantitat produïda d'un article. La seua funció de beneficis és $B(x, C, D)$, on D representa la demanda. Per als valors actuals (x_0, C_0, D_0) es té que

    $$\left.\frac{\partial B}{\partial x}\right|_{(x_0,C_0,D_0)} = 8, \quad \left.\frac{\partial B}{\partial C}\right|_{(x_0,C_0,D_0)} = -3, \quad \left.\frac{\partial B}{\partial D}\right|_{(x_0,C_0,D_0)} = 10.$$

    (a) Explica breument per què no és correcte afirmar que si l'empresa produeix una unitat més els seus beneficis augmentaran en 8 unitats monetàries.

    (b) Raona si a l'empresa li convé o no augmentar la seua producció.

23. Un xicotet empresari empra $K = 5$ màquines i $L = 12$ treballadors. La seua funció de producció és $Q(K, L) = \sqrt{K^3 + KL^2}$.

    (a) Calcula les derivades parcials de Q per a les condicions actuals i interpreta-les.

    (b) Per a manejar K màquines calen $L(K) = 2K + 2$ treballadors. Calcula la funció $Q(K)$.

    (c) Calcula la derivada de $Q(K)$ per a $K = 5$ mitjançant la regla de la cadena.

    (d) Explica la diferència d'interpretació entre les dues derivades de Q respecte de K que has calculat. Quina indica realment el que succeiria si decidírem emprar una màquina més en el procés de producció?

24. La funció $D(r, p, q) = r^2/pq$ representa la demanda d'un producte en funció del seu preu p, de la renda r dels consumidors i del preu q d'un bé complementari. Actualment $r = 100$, $p = 5$ i $q = 2$. La renda depén del temps $r(t) = 100e^{0.1t}$ i, d'altra banda, l'empresa ajusta el preu del seu producte en funció del temps i del preu q, de manera que $p(t, q) = e^{0.2t}(q + 3)$.

(a) Calcula la funció composta $D(t,q)$.

(b) Calcula les derivades parcials de la funció composta mitjançant la regla de la cadena per a $t=0$ i $q=2$.

(c) Explica la diferència d'interpretació entre les derivades

$$\left.\frac{\partial D}{\partial q}\right|_{(100,5,2)} \quad \text{i} \quad \left.\frac{\partial D}{\partial q}\right|_{(0,2)}$$

de manera que l'explicació reflectisca clarament quines variables depenen d'altres i quines no.

25. La producció $Q(p,t)$ d'una empresa depén del preu p a què ven el seu article i del temps t. Actualment el preu és $p = 3$€ i la producció és de 100 000 articles. S'estima que

$$\left.\frac{\partial Q}{\partial p}\right|_{(3,0)} = 5\,000 \text{ articles/€}, \qquad \left.\frac{\partial Q}{\partial t}\right|_{(3,0)} = 1\,000 \text{ articles/any}.$$

(a) Interpreta aquestes derivades.

(b) Si la política de preus de l'empresa ve donada per $p(t) = 3 + 0.05(t+1)^2$ €, calcula $\left.\frac{dQ}{dt}\right|_0$.

(c) Interpreta aquesta derivada i explica la diferència amb la derivada anàloga que apareix en l'enunciat.

(d) Quina producció cal esperar d'ací a dos anys tenint en compte la política de preus de l'empresa?

Derivades de funcions implícites

26. Estudia si l'equació $x^2 + 4y^2 = 4$ defineix x com a funció implícita de y i y com a funció implícita de x prop del punt $(2,0)$.

27. La funció de producció d'una empresa és $q(K,L) = 3K^2L^3$, on K és el capital i L el treball. Actualment, l'empresa utilitza els factors $(K,L) = (5,4)$.

(a) Calcula la isoquanta (= corba de nivell de producció) actual. Interpreta-la.

(b) Calcula la funció implícita $K(L)$ determinada per la isoquanta. Interpreta-la.

(c) Calcula la Relació de Substitució Tècnica

$$\text{RST} = -\frac{dK}{dL}$$

Fes el càlcul a partir de la funció $K(L)$ i derivant implícitament l'equació de la isoquanta.

(d) Calcula la RST actual i interpreta-la.

28. Un consumidor adquireix dos béns en quantitats x i y, de manera que la seua funció d'utilitat és $U(x,y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$. El seu nivell de consum actual és $(x,y) = (9,4)$.

(a) Calcula la utilitat actual.

(b) Escriu l'equació de la corba d'indiferència (= corba de nivell d'utilitat) actual i interpreta-la.

(c) Calcula la *Relació Marginal de Substitució*

$$\mathrm{RMS}(9) = -\left.\frac{dy}{dx}\right|_9$$

i interpreta-la. Fes el càlcul derivant implícitament l'equació i derivant la funció implícita.

29. Considera de nou el problema 6 de la p. 18, on una empresa fabrica dos articles en quantitats x i y subjecta a la frontera de possibilitats de producció $3x^2 + y^2 = 6\,300$. Calcula la *Relació de Transformació de Producte*

$$\mathrm{RTP}(9) = -\left.\frac{dy}{dx}\right|_9$$

i interpreta-la.

30. Per a cadascuna de les funcions d'utilitat

$$U_1(x, y) = xy, \qquad U_2(x, y) = x^2y^2, \qquad U_3(x, y) = \ln x + \ln y,$$

on x i y són les quantitats consumides de dos articles:

(a) Calcula la utilitat marginal respecte de x i estudia en cada cas mitjançant derivades si aquesta augmenta o disminueix a mesura que x augmenta.

(b) Considera una corba d'indiferència (= corba de nivell d'utilitat) $U(x, y) = \alpha$ arbitrària i calcula la funció implícita $y(x)$ que determina. Interpreta-la.

(c) Calcula la *Relació Marginal de Substitució*

$$\mathrm{RMS}(x) = -\frac{dy}{dx}.$$

Interpreta-la.

(d) Comprova mitjançant derivades que $\mathrm{RMS}(x)$ és decreixent en els tres casos, és a dir, que disminueix quan el consum x augmenta.

31. Una empresa fabrica dos articles en quantitats x i y, però les seues possibilitats de producció exigeixen que es complisca la relació $x^2 + y^2 = 125$.

(a) Calcula la funció implícita $y(x)$ determinada per l'equació.

(b) Calcula $y(10)$ i interpreta el resultat.

(c) Calcula la *Relació de Transformació de Producte*

$$\mathrm{RTP}(x) = -\frac{dy}{dx}.$$

(d) Calcula RTP(10) i interpreta el resultat.

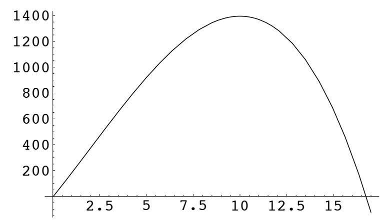
(e) Raona si la RTP augmenta o disminueix en augmentar la producció de x.

32. Continuant amb el problema 4, la funció de beneficis de l'empresa serà

$$B(p,q) = pq - q^3 + 6q^2 - 15q - 5,$$

on p és el preu del producte. La figura mostra la gràfica de la funció $B(195, q)$.

(a) Calcula la producció q amb què l'empresa aconsegueix el benefici màxim si el preu del producte és $p = 195$ u.m.



(b) Escriu l'equació $\dfrac{\partial B}{\partial q} = 0$ per a un preu p arbitrari i comprova que defineix q com a funció de p per a valors pròxims als actuals.

(c) Calcula $\dfrac{dq}{dp}$ per als valors actuals i interpreta el resultat. (Nota que la funció implícita és la funció d'oferta de l'empresa.)

33. Una oposició consta de tres exercicis puntuats de 0 a 10. Per a aprovar cal obtindre una nota final d'almenys 5, on, si les notes obtingudes en els exercicis són x, y, z, la nota final es calcula mitjançant la fórmula

$$N(x,y,z) = \frac{1}{2}(x^3yz)^{1/5} + \frac{1}{2}z.$$

(a) Calcula la nota final d'un opositor que ha obtingut un 5 en cada exercici.

(b) Escriu l'equació de la corba de nivell 5 de la funció N. Interpreta-la.

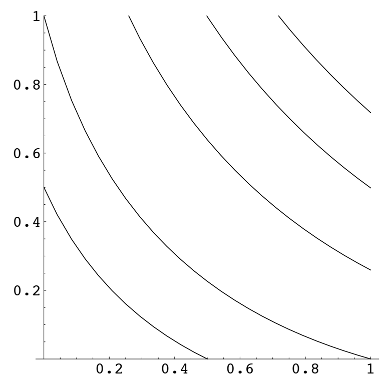
(c) Comprova que aquesta equació defineix una funció implícita $z(x,y)$ per a valors qualssevol x, y, $z \geq 0$.

(d) Calcula $z(5,5)$ i $z(6,0)$. Interpreta els resultats.

(e) Calcula $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(5,5)}$ i interpreta el resultat.

34. La utilitat d'un consumidor ve donada per $U(x,y) = xe^y + ye^x$, on x i y són les quantitats adquirides de dos béns.

(a) Comprova mitjançant el teorema de la funció implícita que les corbes de nivell de U defineixen y com a funció implícita de x sempre que x, $y \geq 0$.



(b) La figura mostra diverses corbes de nivell de U. A quin nivell d'utilitat correspon la que passa pels punts $(0,1)$ i $(1,0)$? Escriu l'equació corresponent i interpreta-la.

(c) Observa que no és possible calcular la funció implícita $y(x)$, tot i que hem justificat que existeix i que la figura així ho mostra.

(d) Calcula la Relació Marginal de Substitució RMS $= -\dfrac{dy}{dx}$.

35. Una empresa fabrica tres articles en quantitats x, y, z. Els recursos de l'empresa exigeixen que x, y, z complisquen la relació

$$xy + xz + yz = 80.$$

(a) Justifica mitjançant el teorema de la funció implícita que aquesta equació defineix z com a funció implícita $z(x, y)$ per a produccions x, y, $z > 0$.

(b) Calcula $z(10, 2)$ i interpreta el resultat.

(c) Calcula

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(10,2)}$$

derivant implícitament l'equació i interpreta el resultat.

36. La demanda d'un article ve donada per la funció

$$D(r, p) = 3\,000\sqrt[3]{\frac{r}{p^2}} - 20 \ln p,$$

on r és la renda dels consumidors i p el preu. Actualment $r = 16\,000$ i $p = 4$.

(a) Escriu l'equació de la corba de nivell de demanda actual. Interpreta-la.

(b) Comprova que aquesta equació defineix p com a funció implícita de r per a valors pròxims als actuals.

(c) Calcula i interpreta la derivada $\left.\dfrac{dp}{dr}\right|_{16\,000}$.

37. La funció d'utilitat d'un consumidor és $U(x, y) = 4xy^{3/2}$, on x i y són les quantitats que consumeix de dos béns. El seu consum actual és $(x, y) = (3, 4)$.

(a) Escriu l'equació de la corba d'indiferència corresponent al nivell d'utilitat actual.

(b) Raona mitjançant el teorema de la funció implícita que l'equació anterior defineix x com a funció implícita $x = x(y)$.

(c) Calcula la Relació Marginal de Substitució

$$\text{RMS} = -\frac{dx}{dy}$$

derivant implícitament la corba d'indiferència. Indica l'expressió general (per a x, y arbitraris), i també el seu valor per al consum actual.

(d) Calcula explícitament la funció implícita $x(y)$ i, a partir d'ella, calcula directament la RMS per al consum actual. Comprova que obtens el mateix resultat.

(e) Raona que la RMS és decreixent, és a dir, que disminueix a mesura que y augmenta.

38. Una fàbrica elabora dos productes en quantitats x i y, i la seua frontera de possibilitats de producció ve donada per l'equació $2x^2 + y^3 = 80$. La producció actual és $(x, y) = (6, 2)$.
    (a) Comprova que l'equació anterior permet definir y com a funció implícita $y = y(x)$ per a produccions semblants a l'actual.
    (b) Calcula la Relació de Substitució del Producte
    $$\text{RSP} = -\left.\frac{dy}{dx}\right|_6$$
    derivant implícitament.
    (c) Calcula explícitament la funció $y(x)$ i calcula la RSP derivant directament.
    (d) Interpreta el valor obtingut per a la RSP.

39. Un consumidor compra 10 llibres a l'any, va 40 vegades al cine i 5 vegades al teatre. La utilitat que aconsegueix amb aquestes aficions ve donada per la funció
    $$U(L, C, T) = L^2CT^3.$$
    (a) Escriu l'equació de la corba d'indiferència corresponent al consum actual.
    (b) Raona que aquesta equació defineix C com a funció implícita $C = C(L, T)$.
    (c) Calcula les derivades
    $$\left.\frac{\partial C}{\partial L}\right|_{(10,5)}, \quad \left.\frac{\partial C}{\partial T}\right|_{(10,5)}$$
    sense calcular la funció $C(L, T)$.
    (d) Interpreta les derivades de l'apartat anterior.
    (e) Calcula la funció $C(L, T)$ i, a partir d'ella, torna a calcular les derivades anteriors.

40. La funció $U(x, y, z) = xy\sqrt{z}$ representa la utilitat que obté un consumidor per l'adquisició de tres béns A, B i C en quantitats x, y, z, respectivament. Aquest consumidor desitja obtindre un nivell d'utilitat de 100 unitats.
    (a) Escriu l'equació de la corba d'indiferència triada pel consumidor.
    (b) Comprova que l'equació anterior defineix z com a funció implícita $z(x, y)$ sempre que les quantitats consumides siguen no nul·les.
    (c) Calcula explícitament la funció $z(x, y)$.
    (d) Calcula $z(10, 5)$ i interpreta el resultat.
    (e) Calcula i interpreta la derivada $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(10,5)}$.

Pràctica 12 Primitives

1. Calcula les integrals següents:

    1. $\int \cos x \, dx$
    2. $\int (4x^7 - 6x^3 + 3x^2 + 2x - 6) \, dx$
    3. $\int (3x^2 + 5) \cos(x^3 + 5x) \, dx$
    4. $\int x^4 2^{x^5} \, dx$
    5. $\int \frac{7x^3}{x^4 + 8} \, dx$
    6. $\int \frac{4}{3\sqrt{x}} \sin(7\sqrt{x}) \, dx$
    7. $\int 3\cos(5 - x) \sin(5 - x) \, dx$
    8. $\int \frac{5}{x} \sqrt[4]{\ln x} \, dx$
    9. $\int \frac{x^2 + 1}{(x^3 + 3x)^7} \, dx$
    10. $\int \frac{1}{x} \ln x \, dx$
    11. $\int xe^{x^2} - \frac{1}{x^4} \, dx$
    12. $\int \frac{9}{5 - x} \, dx$
    13. $\int \frac{x^2}{4\sqrt[5]{x^3 - 3}} \, dx$
    14. $\int \frac{2\cos x}{1 + \sin^2 x} \, dx$
    15. $\int xe^x \, dx$
    16. $\int (x - 3) \sin(x + 4) \, dx$
    17. $\int x \ln x \, dx$
    18. $\int \ln x \, dx$
    19. $\int (1 - x)2^{-x} \, dx$

---

2. Calcula les integrals següents:

    1. $\int (3x^3 - 6x^2 + x - 5) \, dx$
    2. $\int (x^6 + \frac{1}{x^3} - 5\cos x) \, dx$
    3. $\int (\sin 5x + \cos 4x + 3) \, dx$
    4. $\int 7e^{3x} \cos e^{3x} \, dx$
    5. $\int 5^{2x} \sin 5^{2x} \, dx$
    6. $\int \frac{x^2}{1 + (1 + x^3)^2} \, dx$
    7. $\int \frac{1}{\sqrt{x}} (3\sqrt{x} + 8)^9 \, dx$
    8. $\int \frac{\cos x - \sin x}{(\cos x + \sin x)^2} \, dx$
    9. $\int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} \, dx$
    10. $\int \frac{3x + 5}{(3x + 5)^2 + 10} \, dx$
    11. $\int \frac{5^x}{\sqrt[5]{5^x + 5}} \, dx$
    12. $\int \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\cos\sqrt{x}} \sin\sqrt{x} \, dx$
    13. $\int 9x\, 3^{-x^2} \, dx$
    14. $\int \sin x \cos x \, dx$
    15. $\int \frac{1}{x} \ln^5 x \, dx$

16. $\displaystyle\int e^x\,\sqrt{3+5e^x}\,dx$
17. $\displaystyle\int \frac{e^{3x}+x^2}{e^{3x}+x^3}\,dx$
18. $\displaystyle\int \frac{2\cos\ln(3x+5)}{3x+5}\,dx$
19. $\displaystyle\int \frac{7}{5+5x^2}\,dx$
20. $\displaystyle\int \frac{7x}{5+5x^2}\,dx$
21. $\displaystyle\int \sin(5-x)\,dx$
22. $\displaystyle\int \frac{3x^4\sin(x^5-1)}{\cos(x^5-1)}\,dx$
23. $\displaystyle\int 4x^4\sin x^5\cos x^5\,dx$
24. $\displaystyle\int 4\sin^5 x\cos x\,dx$
25. $\displaystyle\int (\sqrt{x}+x)(1+\frac{1}{2\sqrt{x}})\,dx$
26. $\displaystyle\int (\sqrt{x}+x)^5(1+\frac{1}{2\sqrt{x}})\,dx$
27. $\displaystyle\int (5-x)\sin(5-x)\,dx$
28. $\displaystyle\int \ln x^4\,dx$
29. $\displaystyle\int x^3\ln x^4\,dx$
30. $\displaystyle\int x^{-1}\ln x^4\,dx$
31. $\displaystyle\int (1-x)e^{-x}\,dx$
32. $\displaystyle\int (xe^x+x)\,dx$
33. $\displaystyle\int x^3\sin x^4\,dx$
34. $\displaystyle\int x\sin x\,dx$
35. $\displaystyle\int 3x(4\sin 2x+9\cos 3x)\,dx$
36. $\displaystyle\int \frac{3x\sin x^2}{5\cos x^2}\,dx$
37. $\displaystyle\int (1-2x)e^x\,dx$
38. $\displaystyle\int 7e^{x/2}\sqrt[5]{3+e^{x/2}}\,dx$
39. $\displaystyle\int x\sin(2x+1)\,dx$

3. Calcula les integrals següents:
    1. $\displaystyle\int \frac{5}{\sqrt{3x}}\sin\sqrt{3x}\,dx$
    2. $\displaystyle\int \frac{7\sin(5x+3)}{8}\,\cos(5x+3)\,dx$
    3. $\displaystyle\int \frac{7(5x+3)}{8}\,\cos(5x+3)\,dx$
    4. $\displaystyle\int x^2\ln x^2\,dx$
    5. $\displaystyle\int (5-3x)2^{3-5x}\,dx$
    6. $\displaystyle\int \frac{5\cos 3x\,\sin 3x}{1+\cos^2 3x}\,dx$
    7. $\displaystyle\int (3x+\cos 3x)^5(1-\sin 3x)\,dx$
    8. $\displaystyle\int \frac{5\sin 8x}{1+\cos^2 8x}\,dx$
    9. $\displaystyle\int (1-x)^3\ln(1-x)\,dx$
    10. $\displaystyle\int \frac{5x^{-2/3}}{1+(\sqrt[3]{x})^2}\,dx$
    11. $\displaystyle\int x\,5^{x+1}\,dx$
    12. $\displaystyle\int te^{-0.1t}\,dt$

13. $\int 3e^{5x}\cos e^{5x}\,dx$

14. $\int \sqrt{x}\,\ln x\,dx$

15. $\int \ln^{27}(2x+3)\frac{1}{2x+3}\,dx$

16. $\int \ln(2x)\,dx$

17. $\int \frac{2e^{3x}}{\sqrt{4+5e^{3x}}}\,dx$

18. $\int \frac{2e^{3x}}{4+5e^{3x}}\,dx$

19. $\int 8\cos^{10}x\sin x\,dx$

20. $\int xe^{3x+2}\,dx$

21. $\int \frac{e^{-3x}}{\sqrt{1-e^{-3x}}}\,dx$

22. $\int x\ln x^2\,dx$

23. $\int \cos^5(3x+2)\sin(3x+2)\,dx$

24. $\int x\sin(3x+2)\,dx$

25. $\int \frac{5}{\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}\,dx$

26. $\int (x+1)\sqrt[3]{1-2x}\,dx$

27. $\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$

28. $\int (5+e^{2x}+7xe^{x})\,dx$

29. $\int \frac{5}{x}\,3^{7\ln x}dx$

30. $\int x\,3^{x}\,dx$

31. $\int \frac{10x^2e^{-x^3}}{\sqrt{2+e^{-x^3}}}\,dx$

32. $\int 2x\sin 2x\,dx$

33. $\int e^{2x}\sin e^{2x}\,dx$

34. $\int 5(\sin 3x)\sin(\cos 3x))\,dx$

35. $\int x\sin(x/3)\,dx$

36. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{(x-5)^2}}\,e^{-\sqrt[3]{x-5}}\,dx$

37. $\int (1-2x)\sin(3x)\,dx$

38. $\int \frac{5}{2x+1}\ln^3(2x+1)\,dx$

39. $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\ln\sqrt{x}\,dx$

40. $\int \frac{5e^{2x}\sin e^{2x}}{\cos e^{2x}}\,dx$

41. $\int (x-1)\cos 5x\,dx$

42. $\int 10e^{3x+2}\sin e^{3x+2}\,dx$

43. $\int 7x^9\ln x\,dx$

44. $\int x(x-2)^{-2/3}\,dx$

45. $\int \ln x^3\,dx$

46. $\int \frac{5}{2x+1}\,3^{\ln(2x+1)}\,dx$

47. $\int 7\sqrt[5]{\cos 3x}\sin 3x\,dx$

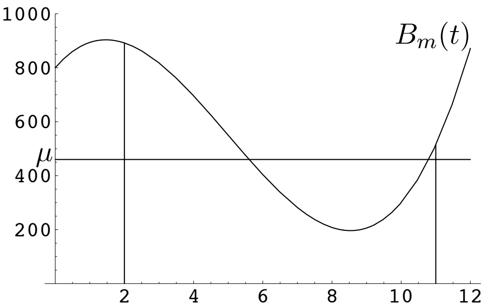
48. $\int xe^{1-x/30}\,dx$

Pràctica 13 La integral de Riemann

1. El benefici marginal d'una empresa durant un període d'un any ha vingut donat per la funció

$$B_m(t) = 4t^3 - 60t^2 + 150t + 800 \,\text{u.m./mes},$$

on t és el temps en mesos ($0 \le t \le 12$).



(a) Calcula $B_m(2)$ i $B_m(11)$. Interpreta els resultats.

(b) Calcula $\displaystyle\int_2^{11} B_m(t)\,dt$. Interpreta el resultat.

(c) Interpreta geomètricament el resultat anterior.

(d) Calcula el benefici mitjà μ de l'empresa en el període comprés des de març a novembre inclusivament. Interpreta'l.

(e) Interpreta geomètricament en la figura el benefici que hauria acumulat l'empresa en el període indicat en l'apartat anterior si el seu benefici marginal haguera sigut constant igual a μ.

(f) Calcula el benefici $B(t)$ acumulat per l'empresa des de l'1 de gener fins a l'instant t.

(g) A partir de l'expressió obtinguda en l'apartat anterior, comprova que el benefici marginal de l'empresa és el donat en l'enunciat del problema.

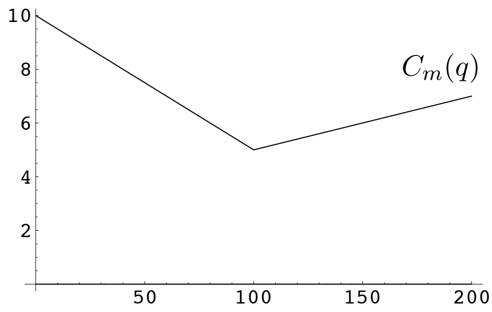
2. Calcula

$$\int_{-1}^{8} \sqrt[3]{x}\,dx, \qquad \int_0^5 xe^x\,dx.$$

3. Els costos marginals d'una empresa vénen donats per la funció

$$C_m(q) = \begin{cases} 10 - \frac{q}{20} & \text{si } 0 \le q \le 100, \\ 3 + \frac{q}{50} & \text{si } 100 \le q. \end{cases}$$

A més, l'empresa té un cost fix de 300 u.m.



(a) Calcula $\displaystyle\int_0^{150} C_m(q)\,dq$.

(b) Interpreta econòmicament el resultat.

(c) Interpreta geomètricament el resultat.

(d) Calcula el cost de produir 150 unitats de producte.

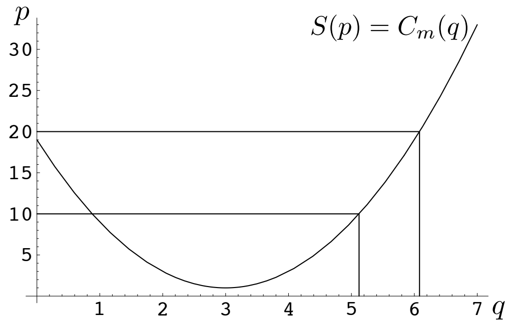
4. La funció de cost marginal d'una empresa és $C_m(q) = 1 + \dfrac{(2q-6)^2}{2}$ i els seus costos fixos són de 20 u.m.

   (a) Calcula la funció de cost de l'empresa.

   (b) Tenint en compte que la producció que maximitza el benefici de l'empresa és la que compleix que $C_m(q) = p$, on p és el preu de mercat del producte, calcula la funció d'oferta de l'empresa[3] $q = S(p)$.

   (c) Calcula les quantitats de producte q_0 i q_1 que li convé produir a l'empresa si el preu de mercat és $p_0 = 9.66$ i $p_1 = 20$, respectivament. Identifica-les en la figura.

   (d) Calcula l'increment de benefici que aconsegueix l'empresa si el preu de mercat passa de ser p_0 a ser p_1.



   (e) Calcula $\Delta C = \displaystyle\int_{q_0}^{q_1} C_m(q)\,dq$. Interpreta el resultat econòmicament i gràficament.

   (f) Es defineix l'*excedent del productor* com

$$\mathrm{EP} = \int_0^p S(p)\,dp = \int_{p_0}^p S(p)\,dp,$$

   on p_0 és el preu de tancament i p el preu de venda. Calcula'l per a $p = p_1 = 20$ i interpreta el resultat geomètricament.

   (h) A partir de la figura, interpreta econòmicament la suma $\Delta I = \Delta C + \mathrm{EP}$.

   (i) Interpreta econòmicament l'excedent del productor.

5. Raona quines de les funcions següents són integrables Riemann en l'interval $[-5, 5]$ i quines no:

$$x^5, \quad \frac{1}{x^5}, \quad \frac{6}{(x+10)^5}, \quad \ln x^2, \quad \frac{e^{x+2}}{e^{x+2}-1}, \quad \frac{e^{x+7}}{e^{x+7}-1}, \quad \sqrt[3]{x-2},$$

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 & \text{si } x \le 0, \\ \ln x & \text{si } x > 0, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-2} & \text{si } x < 0, \\ 2^x & \text{si } x \ge 0, \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} \dfrac{5}{\sqrt{1-x}} & \text{si } x < 0, \\ \dfrac{3}{\sqrt{x}} & \text{si } x \ge 0. \end{cases}$$

---

6. Calcula

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin x^2\,dx, \quad \int_{10}^{17} \sqrt{x-1}\,dx, \quad \int_0^5 x e^x\,dx, \quad \int_1^2 x^4 \ln x\,dx,$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^5 x \cos x\,dx, \qquad \int_0^5 \frac{dx}{3x+2}, \qquad \int_1^5 (x^3 + \ln x)\,dx.$$

[3]Pot provar-se que el preu de tancament de l'empresa, és a dir, el preu per davall del qual els seus beneficis són negatius, és $p_0 = 9.66$ u.m. Així, el domini amb sentit econòmic de $S(p)$ és $[p_0, +\infty[$ o, equivalentment $S(p) = 0$ per a $p < p_0$.

7. Calcula les integrals en l'interval $[-5,5]$ de les funcions del problema 5 que siguen integrables.

8. Calcula la integral en $[3,15]$ de la funció

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x\le 10,\\ \sqrt{x} & \text{si } x>10.\end{cases}$$

9. Calcula el valor mitjà en l'interval $[4,10]$ de la funció

$$f(x)=\begin{cases} 4+3\sqrt{x} & \text{si } 0\le x\le 5,\\ \dfrac{1}{2-x} & \text{si } x>5.\end{cases}$$

10. Calcula la integral de la funció

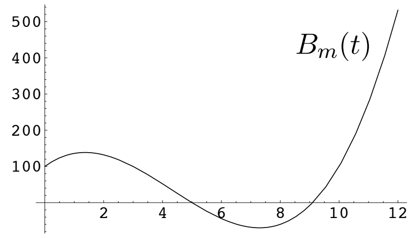
$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x\le 4,\\ \dfrac{5}{\sqrt{x}}\cos\sqrt{x} & \text{si } x>4,\end{cases}$$

en l'interval $[1,9]$.

11. Els beneficis marginals d'una empresa al llarg d'un any han vingut donats per la funció

$$B_m(t)=2t^3-26t^2+60t+100\,\text{u.m./mes},$$

on t és el temps en mesos ($0\le t\le 12$).



(a) Calcula el benefici acumulat per l'empresa al llarg de l'any

(b) Interpreta geomètricament el resultat.

(c) Quin signe tindrà el benefici acumulat durant els mesos de juliol i agost?

(d) Calcula el benefici mitjà corresponent a aquests dos mesos.

12. El benefici marginal d'una empresa durant un any (des de $t=0$ fins a $t=1$) ha vingut donat per $B_m(t)=te^{1-t^2}$ milions d'euros/any. El benefici inicial (és a dir, els costos de llançament del producte quan encara no hi havia ingressos) era $B(0)=-0.5$ milions d'euros.

(a) Calcula la funció de benefici acumulat $B(T)$ per a aquest període.

(b) Calcula l'instant T en què els beneficis de l'empresa van ser nuls (és a dir, l'instant en què l'empresa va compensar la inversió inicial i va passar de tindre pèrdues a tindre beneficis).

(c) Calcula l'instant en què el benefici marginal va ser màxim.

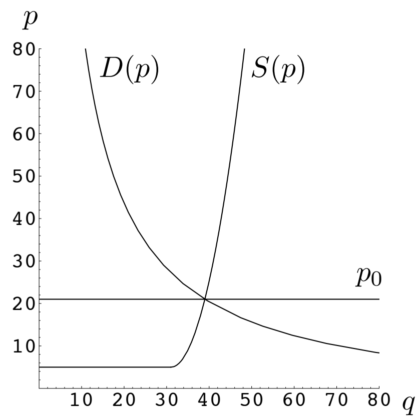
13. Els costos fixos d'una empresa són de 100 u.m., mentres que la funció de costos marginals és
$$C_m(q) = 3q^2 - 60q + 345 \text{ u.m./u.p.}$$
   (a) Calcula el cost de produir 8 unitats de producte.
   (b) Calcula la funció de cost total.

14. El benefici marginal d'una empresa durant un període de 10 anys $[0, 10]$ ha sigut
$$B_m(t) = \frac{10\,000}{(2t+1)^3}.$$
Calcula el benefici mitjà en el període $[4, 9]$. Interpreta'l. En quin instant el benefici marginal va coincidir amb el benefici mitjà?

15. Calcula la funció de costos d'una empresa que té uns costos fixos de 500 u.m. i la funció de cost marginal de la qual és $C_m(q) = 0.1q^2 - 2q + 15$ u.m./u.p.

16. Calcula la cotització mitjana de les accions del problema 17 de la p. 12 durant l'any considerat en eixe problema.

17. Les funcions d'oferta i demanda d'un bé són, respectivament,
$$S(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } p < 5, \\ 31 + 2\sqrt{p-5} & \text{si } p \geq 5, \end{cases}, \qquad \text{i} \qquad D(p) = \frac{1\,000}{p+4} - 1.$$
   (a) Comprova que el preu d'equilibri és $p_0 = 21$.
   (b) Calcula el preu p_1 a partir del qual el producte deixa de tindre demanda.
   (c) Si el preu de venda és el preu d'equilibri, calcula l'excedent del productor i l'excedent del consumidor:
$$\text{EP} = \int_0^{p_0} S(p)\,dp, \qquad \text{EC} = \int_{p_0}^{p_1} D(p)\,dp.$$
   (d) Interpreta geomètricament ambdues integrals.[4]



18. La funció d'oferta d'un bé en un mercat és $S(p) = 1\,250p$, on p és el preu de venda. La demanda la determina un total de 1 000 consumidors, cada un dels quals segueix la funció de demanda
$$D(p) = \frac{10}{\sqrt{p}},$$

[4] Tenint en compte el lema de Shephard (problema 6 (p. 43)) la funció $D(p)$ és la derivada de la despesa G del consumidor (la despesa total necessària per mantindre el seu nivell actual d'utilitat), per tant
$$\text{EC} = \int_{p_0}^{p_1} D(p)\,dp = \int_{p_0}^{p_1} \frac{dG}{dp}\,dp = G(p_1) - G(p_0) = \Delta G.$$
Així doncs: l'excedent del consumidor és l'increment de la despesa del consumidor que es produiria si el preu de l'article passara de p_0 a p_1 o, equivalentment, el que s'estalvia el consumidor a l'hora d'aconseguir el seu nivell d'utilitat gràcies a què el preu de l'article és p_0 i no un altre que estiga fora de les seues possibilitats.

(a) Calcula el preu d'equilibri.

(b) Calcula el nou preu d'equilibri si el nombre de consumidors augmenta a 1 100.

(c) Calcula l'increment de l'excedent del productor i l'increment de l'excedent del consumidor (d'un consumidor) deguts a la variació del preu.

19. El benefici marginal d'una empresa durant un període de cinc anys ha vingut donat per la funció

$$B_m(t) = \begin{cases} 1\,000\sqrt{t} & \text{si } 0 \le t \le 2, \\ 500\,t & \text{si } 2 < t \le 5. \end{cases}$$

Calcula el benefici mitjà dels quatre últims anys. Interpreta'l.

20. La funció de costos marginals d'una empresa és

$$C_m(x) = \begin{cases} 10 + \dfrac{120}{x+10} & \text{si } 0 \le x < 50, \\ 10 + \dfrac{120}{(x+10)^2} & \text{si } x \ge 50, \end{cases}$$

on x és la quantitat produïda d'un cert article. Tenint en compte que la producció té un cost fix de 1 000 u.m., calcula el cost de produir 110 u.p.

21. Calcula el valor mitjà en l'interval $[1, 5]$ de la funció

$$f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } 0 < x < 2, \\ x^2 & \text{si } 2 \le x < 4, \\ xe^{x^2} & \text{si } 4 \le x < 6, \\ \ln x & \text{si } 6 \le x. \end{cases}$$

22. Una empresa produeix un article amb la següent funció de cost marginal:

$$C_m(x) = \begin{cases} 20 & \text{si } 0 \le x \le 100, \\ \dfrac{1\,000}{x} & \text{si } 100 < x. \end{cases}$$

Calcula el cost mitjà de produir 200 unitats de producte.

23. El cost marginal d'una empresa ve donat per la funció

$$C_m(q) = \begin{cases} 5 - q & \text{si } 0 \le q \le 4, \\ 2q - 7 & \text{si } q \ge 4, \end{cases}$$

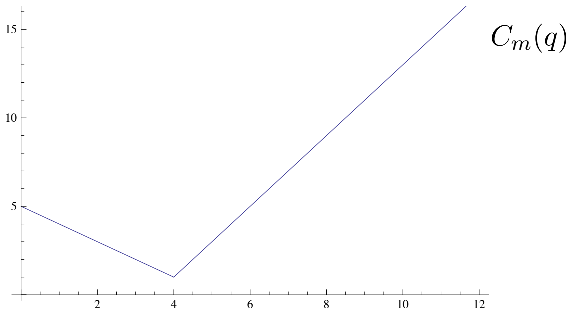
on q és la quantitat produïda d'un article. Els costos fixos són de 15 u.m.

(a) Calcula $\displaystyle\int_0^{10} C_m(q)\,dq$.

(b) Interpreta la integral anterior gràficament i econòmicament.

(c) Suposem que l'empresa passa de produir 6 articles a produir-ne 9. Calcula el cost mitjà dels nous articles produïts.

(d) Calcula el cost de produir 3 articles.



24. El benefici marginal d'una empresa durant un període de 10 anys ha vingut donat per la funció

$$B_m(t) = \begin{cases} 3+t & \text{si } 0 \le t \le 5, \\ 18-2t & \text{si } 5 \le t \le 10. \end{cases}$$

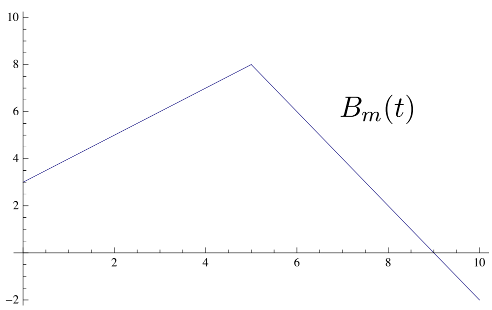
Al principi del període el capital de l'empresa era de 100 u.m.

(a) Calcula $\displaystyle\int_6^{10} B_m(t)\,dt$.

(b) Interpreta la integral anterior gràficament i econòmicament.

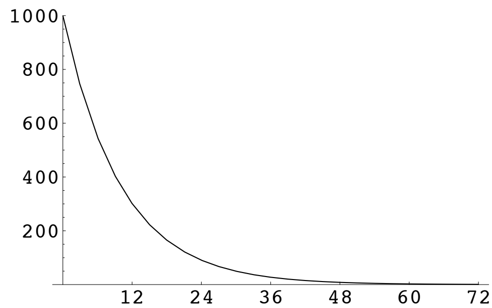
(c) Escriu l'expressió per al benefici mitjà que va obtindre l'empresa en els quatre últims anys del període.

(d) Calcula el capital de l'empresa al final del període.



Pràctica 14 La integral impròpia

1. Un empresari compra una nova màquina per a la seua fàbrica de la qual espera obtindre un rendiment de 1 000 € /mes. No obstant això, el desgast de la màquina fa que aquest rendiment marginal no es mantinga constant, sinó que vaja disminuint segons la funció $R_m(t) = 1\,000\,e^{-0.1t}$ € /mes, on t és el temps en mesos a comptar des del moment de compra. La figura mostra la seua gràfica.



   (a) A partir de quin instant t es fa 0 el rendiment marginal de la màquina?

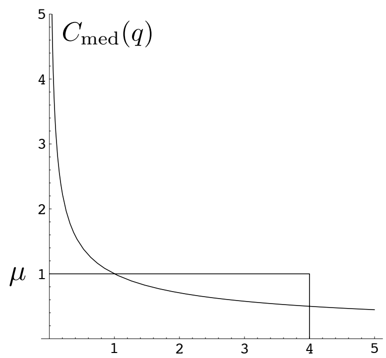
   (b) Calcula el rendiment acumulat $R(t) = \int_0^t R_m(t)\,dt$ per la màquina des de $t = 0$ fins a un temps t.

   (c) Calcula el rendiment acumulat al cap de 5, 6, 10 i 20 anys. Interpreta econòmicament els resultats. Interpreta geomètricament els dos primers.

   (d) Calcula $\int_0^{+\infty} R_m(t)\,dt$. Interpreta el resultat.

2. La funció de costos d'una empresa és $C(q) = \sqrt{q}$, amb la qual cosa el cost mitjà és

$$C_{\text{med}}(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{1}{\sqrt{q}}.$$



   (a) És el cost mitjà integrable Riemann en l'interval $[0, 4]$?

   (b) Té sentit (matemàticament) calcular el seu valor mitjà

$$\mu = \frac{\int_0^4 C_{\text{med}}(q)\,dq}{4 - 0}$$

   en aquest interval?

   (c) Comprova que

$$\int_0^4 C_{\text{med}}(q)\,dq = 4 \text{ u.m.}$$

   Interpreta geomètricament aquest resultat.

   (d) Conclou que el valor mitjà és $\mu = 1$. Interpreta geomètricament aquest resultat.

3. Estudia si les integrals següents són convergents o divergents i, en el cas que siguen convergents, calcula el seu valor.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx \qquad \int_{-\infty}^{0} x^3\,dx \qquad \int_0^1 \frac{1}{1-x}\,dx \qquad \int_0^1 \frac{2}{\sqrt{x}}\,dx \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^x\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^3\,dx \qquad \int_0^5 \frac{1}{1-x}\,dx \qquad \int_{-2}^{3} \frac{6x-3}{x^2-x-2}\,dx \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4}\,dx \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{x^6}\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{2} \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx \qquad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\,dx$$

4. Calcula la integral $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$, on

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x < 1, \\ 1/x^2 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

---

5. Estudia si les integrals en l'interval $[-5,5]$ de les funcions de l'exercici 5 de la p. 58 que no són integrables Riemann són convergents o divergents.

6. Calcula les integrals

$$\int_{-1}^{1} \frac{3}{x^2}\,e^{5/x}\,dx, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{5}{x^2}\,e^{3/x}\,dx.$$

7. Calcula

$$\int_1^5 \frac{dx}{6-2x} \qquad \int_{-\infty}^{2} \frac{6\,dx}{\sqrt{4-2x}} \qquad \int_{10}^{+\infty} \frac{1}{x}\ln^{-5}x\,dx \qquad \int_1^5 \frac{x-3}{x^2-6x}\,dx \qquad \int_{-1}^{5} \frac{x-3}{x^2-6x}\,dx$$

$$\int_5^{10} \frac{x-3}{x^2-6x}\,dx \qquad \int_1^5 \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-4}}\,dx \qquad \int_{-1}^{1} \frac{e^x}{1-e^x}\,dx \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}e^{-2/x}\,dx \qquad \int_0^3 \frac{3x}{\sqrt[3]{(x^2-4)^5}}\,dx$$

$$\int_0^2 \frac{x}{x^2-1}\,dx \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{1-x^2}\,dx \qquad \int_1^5 \frac{1}{x}\frac{1}{\ln^2 x}\,dx \qquad \int_{-2}^{+\infty} \frac{1}{x^3}e^{1/x^2}\,dx \qquad \int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2}e^{-2/x}\,dx$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{7}{x^3}\left(3+\frac{1}{x^2}\right)^5 dx \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-5)^2}}\,e^{-\sqrt[3]{x-5}}\,dx \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{(e^x-1)^5}\,dx \qquad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x-3)^4}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[5]{x-1}} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2^{-x}}{2^{-x}-1}\,dx \qquad \int_{-1}^{+\infty} \frac{6x-3}{x^2-x-2}\,dx \qquad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-3x}}{\sqrt{1-e^{-3x}}}\,dx \qquad \int_0^5 \frac{4x}{x^2-4}\,dx$$

8. Donada la funció

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2e^{3x}}{\sqrt{4+5e^{3x}}} & \text{si } x < 1, \\ 1/x & \text{si } x \geq 1, \end{cases}$$

calcula la seua integral en $[0,5]$ i en $]-\infty,0]$.

9. Calcula la integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$, on

$$f(t) = \begin{cases} 2+\sqrt{t} & \text{si } 0 \leq t < 10, \\ e^{-0.02t} & \text{si } t \geq 10. \end{cases}$$

10. Un empresari realitza una inversió en maquinària el rendiment marginal de la qual s'estima en $R_m(t) = 2\,000e^{-0.01t}$ € /any, on t és el temps en anys.

    (a) Calcula el rendiment mitjà del període $[4, 10]$.

    (b) Calcula el rendiment màxim que pot donar la maquinària, és a dir, el rendiment des de $t = 0$ fins a $+\infty$.

11. Un producte es ven a un preu $p = 2$ € , i la seua funció de demanda és

$$D(p) = \frac{500}{p^2}.$$

Calcula l'excedent del consumidor

$$\text{EC} = \int_p^{+\infty} D(p)\,dp.$$

12. L'oferta i la demanda d'un article vénen donades per les funcions

$$S(p) = \begin{cases} 5p^2 - 125 & \text{si } p \geq 5, \\ 0 & \text{si } p < 5, \end{cases} \qquad D(p) = \frac{37\,500}{p^2}.$$

    (a) Comprova que el preu d'equilibri és $p_0 = 10$ €.

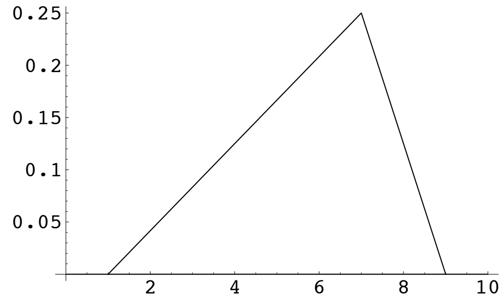
    (b) Calcula l'excedent del productor i l'excedent del consumidor:

$$\text{EP} = \int_0^{p_0} S(p)\,dp, \qquad \text{EC} = \int_{p_0}^{+\infty} D(p)\,dp.$$

Pràctica 15 Variables aleatòries contínues

1. Suposa que la funció de densitat de probabilitat de la nota X que trauràs en Matemàtiques I és

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ \dfrac{x-1}{24} & \text{si } 1 \leq x < 7, \\ \dfrac{9-x}{8} & \text{si } 7 \leq x \leq 9, \\ 0 & \text{si } 9 < x. \end{cases}$$



   (a) Calcula la teua probabilitat de suspendre, la teua probabilitat d'aprovar i la teua probabilitat de traure un notable.

   (b) Quina és la probabilitat que tragues exactament un 8?

   (c) Calcula la teua probabilitat de traure una nota qualsevol entre $-\infty$ i $+\infty$.

   (d) Calcula la teua nota esperada.

   (e) Quina és la probabilitat de traure més de 9? Pots posar un exemple de circumstàncies en què es donara aquest cas?

2. La variable aleatòria X mesura la duració en anys d'una pereta halògena. La seua funció de densitat és

$$f(x) = \begin{cases} 0.1e^{-0.1x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{en qualsevol altre cas.} \end{cases}$$

   (a) Comprova que $f(x)$ compleix el que cal per a ser una funció de densitat de probabilitat.

   (b) Li convé al fabricant oferir una garantia d'un any?

3. Siga X l'edat d'un alumne de classe triat a l'atzar, i suposem que X és una variable aleatòria amb aquesta funció de densitat:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{45-2x}{20} & \text{si } 18 \leq x \leq 22, \\ 0 & \text{en qualsevol altre cas.} \end{cases}$$

   (a) Comprova que la funció $f(x)$ és acceptable com a funció de densitat.

   (b) Calcula l'edat mitjana $E[x]$ dels alumnes de la classe.

   (c) Calcula la *mediana* M de les edats dels alumnes de la classe, és a dir, l'edat M per a la qual $\mathrm{P}(X \leq M) = 0.5$.

   (d) Calcula la probabilitat que un alumne pres a l'atzar tinga 18 anys (i tin present que una persona no té 18 anys només el dia del seu aniversari, sinó que en té 18 fins que en compleix 19).

---

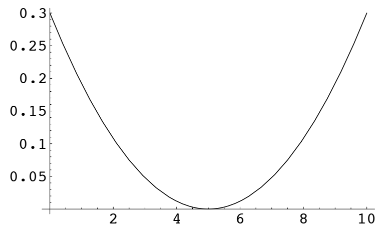
4. Siga X una variable la funció de densitat de probabilitat de la qual és la de la distribució normal:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

   Comprova que l'esperança de X val 0.

5. Suposa ara que X és la nota que traurà en aquesta assignatura un alumne del grup pres a l'atzar (no la nota d'un alumne en concret). No seria desgavellat que la funció de densitat de X fóra de la forma

$$f(x) = \begin{cases} k(5-x)^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 10, \\ 0 & \text{en qualsevol altre cas.} \end{cases}$$



   (a) Calcula el valor de k perquè $f(x)$ siga certament una funció de densitat.
   (b) Dóna una possible interpretació de la funció $f(x)$, suposant que aproximadament la meitat dels alumnes del grup no assisteix a classe.
   (c) Calcula la probabilitat que X corresponga a un aprovat just (no a un notable ni a un excel·lent).
   (d) Calcula la nota mitjana esperada per al grup.

6. Siga X una variable aleatòria amb funció de densitat de la forma

$$f(x) = \begin{cases} k(1+\sqrt{x}) & \text{si } 0 \leq x \leq 4, \\ 0 & \text{en qualsevol altre cas.} \end{cases}$$

   (a) Calcula el valor de k.
   (b) Calcula $\mathrm{P}(2.1 \leq X \leq 3.5)$.
   (c) Calcula l'esperança de X.

7. En les enquestes d'avaluació del professorat, els alumnes responen a diverses preguntes sobre el seu professor puntuant-les entre 1 i 5. Siga X la mitjana de les respostes d'un alumne del grup triat a l'atzar i suposem que la funció de densitat de probabilitat de X és de la forma

$$f(x) = \begin{cases} k(1-x)(25-x^2) & \text{si } 1 \leq x \leq 5, \\ 0 & \text{en qualsevol altre cas.} \end{cases}$$

   (a) Calcula el valor de k.
   (b) Calcula la valoració mitjana que els alumnes han fet del professor (l'esperança $E[x]$).
   (c) Calcula la probabilitat que un alumne assigne al professor una valoració major que 4.

8. Siga X l'edat d'una persona presa a l'atzar en una població donada. Suposem que la densitat de probabilitat de X és

$$f(x) = \begin{cases} 0.025e^{-0.025x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{en qualsevol altre cas.} \end{cases}$$

   (a) Comprova que la funció $f(x)$ és realment una funció de densitat de probabilitat.
   (b) Calcula la probabilitat que, en triar una persona a l'atzar, la seua edat estiga compresa entre els 6 i els 14 anys.
   (c) Calcula l'edat a que compleix $\mathrm{P}(X \leq a) = 0.95$.
   (d) Calcula la probabilitat de trobar-nos amb una persona de més de 500 anys.

9. Per preparar el partit de la pròxima jornada de lliga, l'entrenador de l'equip de futbol A ha analitzat tots els partits en què el seu equip s'ha enfrontat al seu adversari B, i ha conclòs que el temps (en minuts) que l'equip B tarda a fer el primer gol és una variable aleatòria amb funció de densitat de la forma

$$f(t) = \begin{cases} ke^{-0.3t} & \text{si } t \geq 0, \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

   (a) Calcula el valor de k.
   (b) Calcula la probabilitat que l'equip B faça el primer gol en els primers 10 minuts de partit.
   (c) Hauria d'estar preocupat el porter de l'equip A?

10. La variable aleatòria X representa la temperatura mínima del dia 1 de gener en una certa ciutat. La seua funció de densitat és

$$f(x) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/18}.$$

   Calcula la temperatura mínima esperada $E[X]$ per al pròxim 1 de gener.

11. La funció de densitat d'una variable aleatòria és

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{\sqrt[3]{(2-x)^2}} & \text{si } 0 < x < 2, \\ 0 & \text{en qualsevol altre cas.} \end{cases}$$

   (a) Calcula el valor de k.
   (b) Calcula l'esperança de X.
   (c) Calcula la mitjana de X.

12. Calcula la mitjana d'una variable aleatòria amb funció de densitat

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{6x+3}{312} & \text{si } 2 < x < 10, \\ 0 & \text{en qualsevol altre cas.} \end{cases}$$

13. Suposem que la nota X en aquesta assignatura d'un alumne triat a l'atzar tinga la funció de distribució

$$f(x) = \begin{cases} k \sin \frac{x}{4} & \text{si } 0 \leq x \leq 10, \\ 0 & \text{en qualsevol altre cas.} \end{cases}$$

   (a) Comprova que f és una funció de densitat de probabilitat i calcula el valor de k.
   (b) Calcula l'esperança $E[X]$.

14. L'edat dels habitants d'una població és una variable aleatòria X amb funció de densitat de la forma

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{k} e^{1-x/30} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

   (a) Calcula el valor de k.
   (b) Calcula l'edat mitjana de la població.
   (c) Calcula l'edat t tal que $\Pr(X \leq t) = 0.95$.

Pràctica 16 Equacions diferencials

1. Resol les equacions diferencials següents:

   (a) $\dfrac{dy}{dx} = 2y$,

   (b) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$,

   (c) $(1+e^x)y\,\dfrac{dy}{dx} = e^x, \quad y(0) = 1$,

   (d) $(1+y^2)\,dx + (1+x^2)\,dy = 0$,

   (e) $(1+y^2)\,dx + xy\,dy = 0$,

   (f) $\dfrac{dy}{dx}\sin x = y\cos x$,

   (g) $x\sqrt{1-x^2}\,dx + y\sqrt{1-y^2}\,dy = 0, \qquad y(0) = 1$,

   (h) $y\ln y\,dx + x\,dy = 0, \qquad y(1) = e$.

2. Siga p el preu d'un bé, i suposem que l'oferta i la demanda vénen donades per

$$S(p) = 2p, \qquad D(p) = 100 - 8p.$$

   (a) Calcula el preu d'equilibri.

   (b) Suposem que el preu p varia amb el temps $p = p(t)$ i que compleix l'equació de Walras:

$$p' = k(D(p) - S(p)) \quad \text{amb } k > 0.$$

   Interpreta econòmicament aquesta condició.

   (c) Calcula $p(t)$ si $k = 0.5$.

   (d) Comprova que $\lim\limits_{t\to+\infty} p(t)$ és el preu d'equilibri.

3. Siga $D(p)$ la demanda d'un article en funció del seu preu. Suposem que quan $p = 1$ la demanda és de 100 unitats de producte, així com que l'elasticitat és constant $E = -1$. Calcula la demanda corresponent a un preu $p = 5$ u.m.

4. Hem invertit 1 000 € durant un any en uns fons la rendibilitat dels quals ha resultat ser la donada per $i_\infty = 10\cos 2\pi t$. Calcula el capital final que hem obtingut.

---

5. Resol les equacions diferencials següents:

   (a) $\dfrac{y^2}{x}\dfrac{dy}{dx} = e^x, \qquad y(0) = 3$

   (b) $\dfrac{dy}{dx} = xy\sin x, \qquad y(0) = 5$

   (c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x\sin x^2}{\sqrt{y}}, \qquad y(0) = 4$

   (d) $xy\dfrac{dy}{dx} = 1$

(e) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}, \qquad y(2) = 4$

(f) $\sqrt{2x}\,\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3}{y}$

(g) $3(y+1)\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1+(y+1)^2}{1+(x+1)^2}$

(h) $\cos 2x\,\dfrac{dy}{dx} = 6\sqrt{y}\sin 2x$

(i) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2^x}{y}$

(j) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sqrt{y}}{x^5}$

(k) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x}{e^y}, \qquad y(1) = 0$

(l) $xe^{2y}\dfrac{dy}{dx} = \ln x, \qquad y(1) = 0$

6. Un article es ven a un preu $p = 4$€ i la seua demanda actual és de 100 000 unitats diàries. Determina quina demanda caldria esperar si el preu fóra de 5€ sabent que l'elasticitat de la demanda és $E = -p/10$.

7. Un article es ven a un preu $p = 2$€ i la seua demanda actual és de 10 000 unitats. Calcula la demanda corresponent a un preu $p = 3$€ si l'elasticitat és $E = p\sqrt[3]{2-p}$.

8. L'elasticitat de la demanda d'un bé respecte de la renda dels consumidors és $E(r) = -r\ln r$. Calcula la demanda corresponent a una renda $r = 2$ u.m. si quan la renda és de 1 u.m. la demanda és de 1 000 u.p.

9. La població actual d'una ciutat és $P = 1\,000\,000$ habitants, i evoluciona en el temps segons l'equació diferencial
$$\frac{dP}{dt} = \frac{1}{2}\sqrt{P}.$$
Calcula la població que tindrà la ciutat d'ací a dos anys.

10. La població d'un cert país augmenta proporcionalment al nombre d'habitants. Si després de dos anys la població s'ha duplicat i després de tres anys és de 20.000 habitants, calcula la població inicial.

11. Invertim un capital de 3 000€ a un interés continu variable donat per $i_\infty = 0.01t$ durant 3 anys. Calcula el capital final.

12. Invertim un capital de 1 000€ en una inversió que ens proporciona una rendibilitat $i_\infty = 0.02t$ (a partir de $t = 0$). Calcula la funció $C(t)$ que dóna el capital en cada instant t. Quants anys han de passar per a aconseguir un capital de 2 000€?

13. Se'ns planteja la possibilitat d'invertir un capital per un període de tres anys. De entre les distintes expectatives sobre la rendibilitat de la inversió, la menys favorable pronostica que l'evolució de l'interés serà $i_\infty(t) = 5 + 16t - 3t^2$ %. Determina el mínim capital que cal invertir per assegurar-nos un capital final de 1000€.

14. L'oferta i la demanda d'un bé depenen del seu preu p, però també varien amb el temps t (donat en mesos), de manera que

$$S(p) = (40 + 10p)(t + 1), \quad D(p) = (100 - 20p)(t + 1).$$

Actualment (en $t = 0$) el preu és de $p = 3$ €. Determina el preu que cap esperar per a d'ací a un mes, per a d'ací a dos mesos i per a d'ací a tres mesos si aquest compleix l'equació de Walras (cf. problema 2) amb $k = 0.02$. Compara els resultats amb el preu d'equilibri.

15. Un article es ven a un preu de $p = 2$ € i la seua demanda actual és de 200 u.p. S'estima que, per a valors de p pròxims a l'actual, l'elasticitat de la demanda és $p - 4$. Calcula la demanda que caldria esperar si el preu s'incrementara en 0.5 €.

16. El benefici marginal d'una empresa és $B_m(t) = B/100$, on t és el temps en anys (i B el benefici). Sabent que l'any passat el benefici va ser de 1 000 u.m., calcula el benefici actual (en $t = 0$) i el benefici esperat per a l'any pròxim.

17. Depositem un capital de 1000 u.m. durant 10 anys a un interés continu variable, que ha resultat ser $i_\infty(t) = 0.05 + 0.01t$. Calcula el capital final.

18. Volem invertir un capital durant un any (des de $t = 0$ fins a $t = 1$) i esperem que la rendibilitat de la inversió siga $i_\infty = 0.07 + 0.06\sqrt{t} + 0.09t^2$. Calcula el capital que cal invertir si volem assegurar-nos un capital final de 3 450 €.

19. Una inversió durant un any (des de $t = 0$ fins a $t = 1$) ha proporcionat una rendibilitat $i_\infty = 0.04(t+1)$. Calcula quant hauríem d'haver-hi invertit per haver aconseguit un capital final de 5 000 €.

20. La demanda actual d'un producte és de 740 u.p. i la seua elasticitat respecte de la renda dels consumidors és $E(r) = r/1\,000$. Si la renda actual és de 2 000 u.m., calcula la demanda que cal esperar si la renda augmenta en 100 u.m.

21. La població d'una ciutat (en milers d'habitants) té una taxa de creixement anual de $2\sqrt{P}\,t\cos t$ milers d'habitants/any. Calcula la població esperada d'ací a vuit anys si la població actual (en $t = 0$) és $P = 100$.

22. La variació amb el temps de la demanda d'un article (en percentatge) ve donada per la funció $e^{-0.1t}$. Si la demanda actual (en $t = 0$) és de 1 000 u.p., calcula la demanda prevista d'ací a un any.

23. La població d'una ciutat creix a un ritme de $\sqrt{P}\,e^{0.1t}$ habitants/any, on P és la població en l'instant t. Determina el nombre d'habitants en $t = 0$ sabent que en $t = 10$ la ciutat comptava amb dos milions d'habitants.

24. Uns fons d'inversió han proporcionat durant un període de tres anys $[0, 3]$ una rendibilitat $i_\infty = t\cos t^2$. Determina quin capital caldria haver-hi invertit per tal de garantir un capital final de 10 000 €.

25. L'oferta i la demanda d'un producte en funció del seu preu vénen donades per

$$S(p) = 3p, \qquad D(p) = \frac{375}{p^2}.$$

   (a) Calcula el preu d'equilibri p_0.
   (b) Aplica l'equació de Walras (problema 2) amb $k = 1$ per a determinar la funció $p(t)$ que determina l'evolució del preu de l'article amb el pas del temps.
   (c) Calcula el preu que cal esperar d'ací a tres anys si actualment (en $t = 0$) el preu és $p = 10$ €.

26. L'oferta i la demanda d'una empresa vénen donades per

$$S(p) = \frac{p^2 - 4}{p}, \qquad D(p) = \frac{5}{p}.$$

   (a) Calcula el preu d'equilibri p_0.
   (b) Calcula l'excedent del consumidor $\int_{p_0}^{+\infty} D(p)\, dp$.
   (c) Calcula l'evolució del preu en funció del temps resolent l'equació de Walras (problema 2) amb $k = 1$.

27. La rendibilitat d'unes accions ha vingut donada per

$$i_\infty(t) = 0.15 \sin(0.8t + 2).$$

   (a) Planteja i resol l'equació diferencial que determina el valor $C(t)$ de les accions en cada instant t.
   (b) Determina la quantitat que hauríem d'haver-hi invertit en $t = 0$ per a haver aconseguit un capital de 1 000 € en $t = 1$.
   (c) Ens haguera convingut mantindre la inversió durant 3 anys?

28. La rendibilitat de les accions d'una empresa durant un període de quatre anys $0 \leq t \leq 4$ ha vingut donada per

$$i_\infty(t) = 0.2\, \frac{t - 5}{t^2 - 10t - 11}.$$

   (a) Calcula la rendibilitat mitjana dels dos primers anys.
   (b) Planteja i resol l'equació diferencial que determina el valor $C(t)$ de les accions en cada instant t.
   (c) Si hem comprat un paquet de 500 € d'aquestes accions en $t = 1$, calcula el seu valor en $t = 4$.

Pràctica 17 Àlgebra lineal i sistemes d'equacions

Productes de matrius

1. Calcula:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Determinants

2. Calcula els determinants següents:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 8, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -8, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 27, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 18, \quad \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2.$$

3. Calcula els determinants següents:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 16, \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 2.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 24, \quad \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -8,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -26, \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & -2 \\ 8 & 3 & -5 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ -2 & -3 & 6 & 3 \end{vmatrix} = -27, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 7 & 7 \\ -1 & -3 & -11 & 2 \end{vmatrix} = 110,$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 5 & -1 & 2 & 10 \\ -3 & 0 & -3 & -15 \end{vmatrix} = -60, \qquad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 & 9 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ -3 & -1 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -29.$$

Matrius inverses

4. Calcula la matriu inversa de les matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Calcula la matriu inversa de les matrius següents:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ -1/6 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -8 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & -4 & 3/2 \\ 1/2 & 2 & -1/2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & -1/3 \\ 1 & -4/3 & -1/3 \\ -1 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 5/10 & 0 & 0 \\ 3/10 & 4/10 & -2/10 \\ -4/10 & -2/10 & 6/10 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & -3 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/10 & -2/10 & -4/10 \\ 7/10 & -2/10 & 1/10 \\ 13/10 & -8/10 & -1/10 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -2/12 & -3/12 & 7/12 \\ 6/12 & 3/12 & -3/12 \\ -2/12 & 3/12 & 1/12 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/4 & -1 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2/4 & 1 & 2/4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 2/4 & -1/4 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

Sistemes d'equacions lineals

6. Resol els sistemes d'equacions següents:

$$\left.\begin{aligned} x+2y+z&=6\\ -x-y+4z&=12\\ 2x+3y-z&=6 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} 2x-y-z&=-1\\ x+2y+5z&=2\\ -3x+y+2z&=9 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} x+3y-z&=15\\ x-y+z&=-1\\ x+2y&=0 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} -2x+y&=10\\ y+2z&=0\\ 2x+z&=6 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} 5x+10y+z&=2\\ 3x+6y+z&=2\\ -2x+y+10z&=0 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} 6x-y+z&=0\\ x+y+z&=-3\\ 2x-3y-4z&=2 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} 2x+3y-z&=11\\ x-y+z&=2\\ -x+2y+3z&=4 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} 3x+2y+z&=4\\ x+2y-z&=0\\ -2x-y+4z&=7 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} x+2y-6z&=10\\ 2x-y+3z&=0\\ -x-y+10z&=1 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x+4y-z&=1\\ 2x+10y-3z&=-2\\ -5x-21y+6z&=1 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} 2x+5y-3z&=-2\\ x+3y-z&=2\\ -3x-y+z&=2 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} 3x+10y+8z&=5\\ x+5y+2z&=1\\ -2x-9y+3z&=5 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} x-2y+3z&=5\\ 3x+y+2z&=1\\ -3x+5y-3z&=-8 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} 3x+y+2z&=1\\ x-2y+3z&=5\\ -3x+5y-3z&=-8 \end{aligned}\right\}$$

Sistemes d'equacions

7. Resol els sistemes d'equacions següents:

$$\left.\begin{aligned} \frac{y}{x}&=\frac{5}{10}\\ 5x+10y&=1\,600 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} \frac{y}{x+3}&=1\\ 2x+2y&=400 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} \frac{\frac{2}{3}x^{-1/3}y^{1/3}}{\frac{1}{3}x^{2/3}y^{-2/3}}&=\frac{8}{4}\\ 8x+4y&=600 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{y}{x}&=\frac{20}{5}\\ 20x+5y&=4\,000 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x^{1/2}y^{1/2}&=200\\ y&=2x \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} 2xy&=25\,600\\ y&=x \end{aligned}\right\}$$

8. Resol els sistemes d'equacions següents:

$$\left.\begin{array}{r} 8-4x-8y=0 \\ 10-6x-3y=0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 4x+6y=24 \\ 8x+3y=24 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 3x^2+y^2=6\,300 \\ 3x+2y=210 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} p+1.5q=6 \\ p-\lambda=0 \\ q-1.5\lambda=0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} 3x^2+y^2=6\,300 \\ 3-6x\lambda=0 \\ 2-2y\lambda=0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} h+1.5r=6 \\ 2h-\quad p=0 \\ 2r-1.5p=0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} \sqrt{x}+y=11 \\ x+20y=120 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} \sqrt{x}+y=9 \\ x+20y=81 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} x+\ \ y=30 \\ 4x+2y=80 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} x+2y=8 \\ y-\lambda=0 \\ x-2\lambda=0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} \frac{4}{\sqrt{x}}-2x\lambda=0 \\ \frac{5}{2\sqrt{y}}-10y\lambda=0 \\ x^2+5y^2=21 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 1-2KL\lambda=0 \\ 3-K^2\lambda=0 \\ K^2L=36 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} yz-2\lambda=0 \\ xz-\quad\lambda=0 \\ xy-3\lambda=0 \\ 2x+y+3z=18 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 16-4x\lambda=0 \\ 24-6y\lambda=0 \\ 12-2z\lambda=0 \\ 2x^2+3y^2+z^2=29 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 3-yz\lambda=0 \\ 4-xz\lambda=0 \\ 2-xy\lambda=0 \\ xyz=72 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} 9-\lambda(y+5)=0 \\ 2-\lambda(x+2)=0 \\ xy+5x+2y=6 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 1-2x\lambda=0 \\ \frac{1}{y}-6y\lambda=0 \\ x^2+3y^2=146 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 3-\lambda-4\mu=0 \\ 2-\lambda-2\mu=0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} 2x+4y-\lambda-\mu=0 \\ 2y+4x-\lambda-\nu=0 \\ \mu x=0 \\ \nu y=0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} -2x+8-\lambda=0 \\ -2y-\lambda-\nu=0 \\ \nu y=0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} -2x+z=0 \\ 10-2y-2\lambda y=0 \\ 9-2z+x=0 \\ \lambda(1-y^2)=0 \end{array}\right\}$$