Resolución gráfica de problemas de optimización

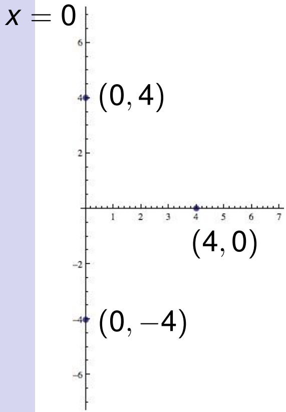
Un problema de optimización

$$
\begin{array}{rl}
\text{Opt.} & x + 3y \\
\text{s.a} & x^2 + y^2 \geq 16 \\
 & y \leq x^2 \\
 & y \geq x - 2 \\
 & x \geq 0
\end{array}
$$

Para resolver gráficamente un problema de optimización como éste empezamos representando sus restricciones con igualdad.

Un problema de optimización

$$\begin{array}{rl} \text{Opt.} & x + 3y \\ \text{s.a} & x^2 + y^2 \geq 16 \\ & y \leq x^2 \\ & y \geq x - 2 \\ & x \geq 0 \end{array}$$



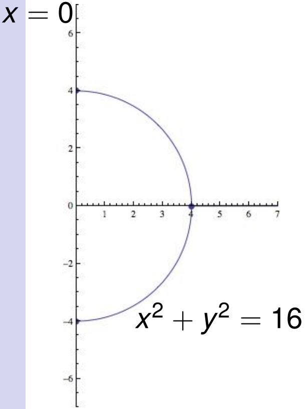
Para resolver gráficamente un problema de optimización como éste empezamos representando sus restricciones con igualdad.

Nos fijamos en la primera restricción $x^2 + y^2 = 16$. Es una circunferencia de centro en $(0, 0)$. Creamos una pequeña tabla de valores:

x	y
0	± 4
± 4	0

Un problema de optimización

$$\begin{array}{rl} \text{Opt.} & x + 3y \\ \text{s.a} & x^2 + y^2 \geq 16 \\ & y \leq x^2 \\ & y \geq x - 2 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

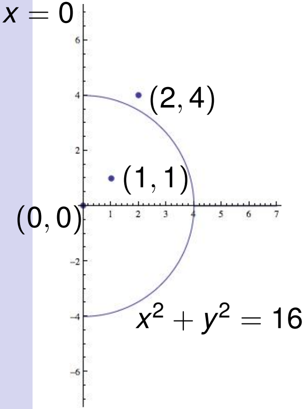


Para resolver gráficamente un problema de optimización como éste empezamos representando sus restricciones con igualdad.

Sabiendo que es una circunferencia, con esos pocos puntos basta para dibujarla. Representamos únicamente la parte que cumple $x \geq 0$ por la condición de signo del problema. La otra parte de la circunferencia no será factible.

Un problema de optimización

$$\begin{array}{rl} \text{Opt.} & x + 3y \\ \text{s.a} & x^2 + y^2 \geq 16 \\ & y \leq x^2 \\ & y \geq x - 2 \\ & x \geq 0 \end{array}$$



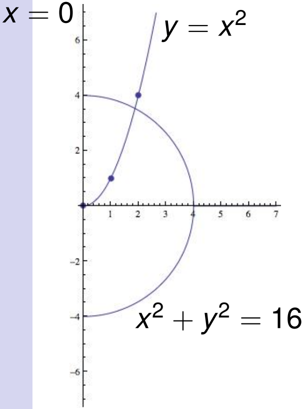
Para resolver gráficamente un problema de optimización como éste empezamos representando sus restricciones con igualdad.

La segunda restricción es una parábola $y = x^2$. Creamos otra tabla de valores:

x	y
0	0
1	1
2	4

Un problema de optimización

$$\begin{array}{rl} \text{Opt.} & x + 3y \\ \text{s.a} & x^2 + y^2 \geq 16 \\ & y \leq x^2 \\ & y \geq x - 2 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

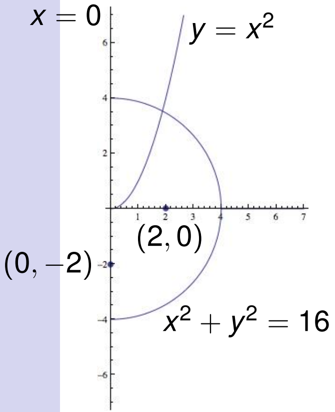


Para resolver gráficamente un problema de optimización como éste empezamos representando sus restricciones con igualdad.

Sabiendo que es una parábola, es fácil unirlos “con forma de parábola”.

Un problema de optimización

$$\begin{array}{rl} \text{Opt.} & x + 3y \\ \text{s.a} & x^2 + y^2 \geq 16 \\ & y \leq x^2 \\ & y \geq x - 2 \\ & x \geq 0 \end{array}$$



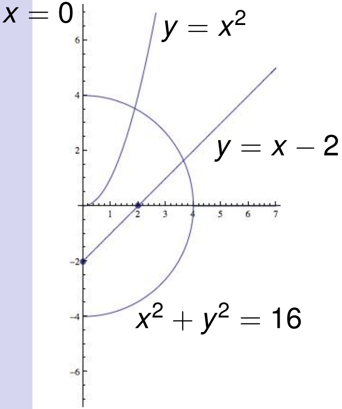
Para resolver gráficamente un problema de optimización como éste empezamos representando sus restricciones con igualdad.

La tercera restricción es una recta $y = x - 2$, luego nos basta una tabla con dos puntos:

x	y
0	-2
2	0

Un problema de optimización

$$\begin{array}{rl} \text{Opt.} & x + 3y \\ \text{s.a} & x^2 + y^2 \geq 16 \\ & y \leq x^2 \\ & y \geq x - 2 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

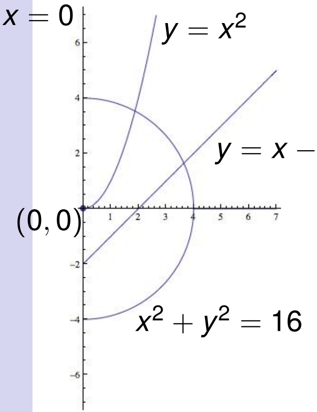


Para resolver gráficamente un problema de optimización como éste empezamos representando sus restricciones con igualdad.

Conviene escribir cada ecuación al lado de la curva correspondiente.

Un problema de optimización

$$\begin{array}{rl} \text{Opt.} & x + 3y \\ \text{s.a} & x^2 + y^2 \geq 16 \\ & y \leq x^2 \\ & y \geq x - 2 \\ & x \geq 0 \end{array}$$



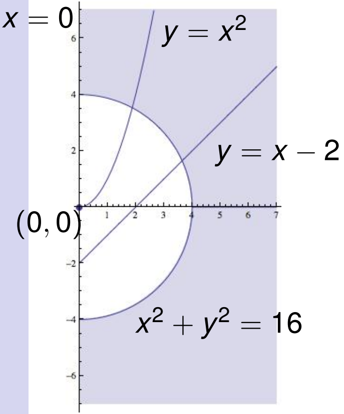
Ahora hay que determinar a qué parte de cada curva están los puntos que satisfacen su restricción.

Empezamos con la circunferencia. Para ello tomamos cualquier punto que no esté sobre la curva. Por ejemplo el $(0, 0)$, y observamos que no cumple la restricción:

$$0^2 + 0^2 \geq 16.$$

Un problema de optimización

$$\begin{array}{rl} \text{Opt.} & x+3y \\ \text{s.a} & \color{blue}{x^2+y^2 \geq 16} \\ & y \leq x^2 \\ & y \geq x-2 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

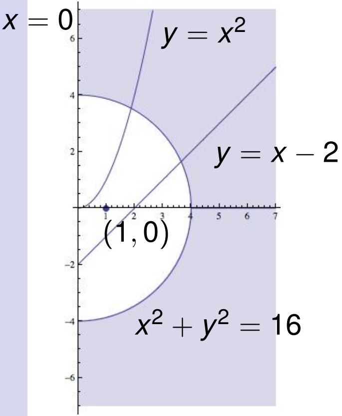


Ahora hay que determinar a qué parte de cada curva están los puntos que satisfacen su restricción.

Por lo tanto, los puntos que cumplen la primera restricción son los que están en la parte limitada por la circunferencia en la que no está el punto $(0,0)$ que hemos tomado de ejemplo.

Un problema de optimización

$$\begin{array}{ll} \text{Opt.} & x + 3y \\ \text{s.a} & x^2 + y^2 \geq 16 \\ & y \leq x^2 \\ & y \geq x - 2 \\ & x \geq 0 \end{array}$$



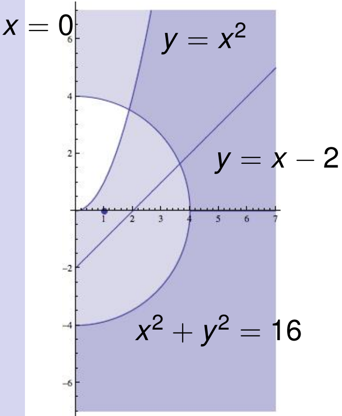
Ahora hay que determinar a qué parte de cada curva están los puntos que satisfacen su restricción.

Para la parábola no podemos tomar el punto $(0, 0)$ porque la parábola pasa por él, luego no nos determina ninguna de las dos partes en que ésta divide al plano. Tomamos en su lugar el $(1, 0)$ y observamos que

$$0 \leq 1^2.$$

Un problema de optimización

$$\begin{array}{rl} \text{Opt.} & x + 3y \\ \text{s.a} & x^2 + y^2 \geq 16 \\ & {\color{blue} y \leq x^2} \\ & y \geq x - 2 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

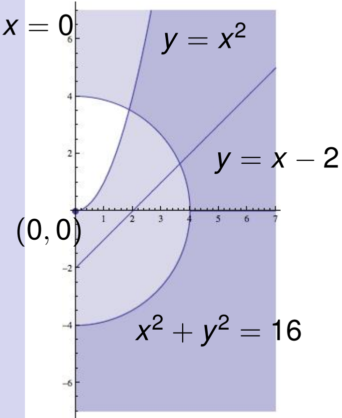


Ahora hay que determinar a qué parte de cada curva están los puntos que satisfacen su restricción.

Por lo tanto, los puntos que cumplen la segunda restricción son los que están en la parte de $(1, 0)$, es decir, los que están debajo de la parábola.
La zona más oscura es la de los puntos que cumplen a la vez las dos primeras restricciones, es decir, los que están fuera de la circunferencia y debajo de la parábola.

Un problema de optimización

$$\begin{array}{rl} \text{Opt.} & x + 3y \\ \text{s.a} & x^2 + y^2 \geq 16 \\ & y \leq x^2 \\ & y \geq x - 2 \\ & x \geq 0 \end{array}$$



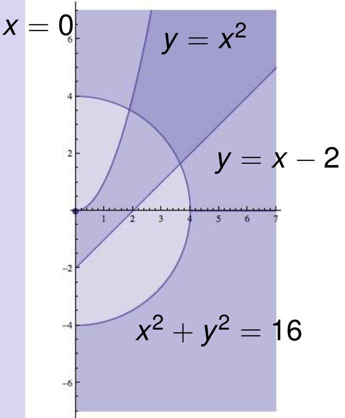
Ahora hay que determinar a qué parte de cada curva están los puntos que satisfacen su restricción.

Para la recta podemos tomar de nuevo el punto $(0, 0)$, porque la recta no pasa por él, y observamos que se cumple

$$0 \geq 0 - 2$$

Un problema de optimización

$$\begin{array}{rl} \text{Opt.} & x + 3y \\ \text{s.a} & x^2 + y^2 \geq 16 \\ & y \leq x^2 \\ & y \geq x - 2 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

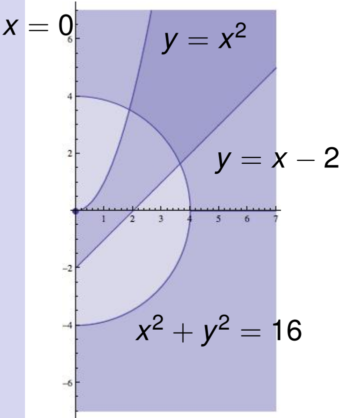


Ahora hay que determinar a qué parte de cada curva están los puntos que satisfacen su restricción.

Por lo tanto, la tercera restricción la cumplen los puntos que están en la parte del $(0,0)$, es decir, los de arriba de la recta. De nuevo, la zona más oscura está formada por los puntos que cumplen las tres restricciones.

Un problema de optimización

$$\begin{array}{rl} \text{Opt.} & x + 3y \\ \text{s.a} & x^2 + y^2 \geq 16 \\ & y \leq x^2 \\ & y \geq x - 2 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

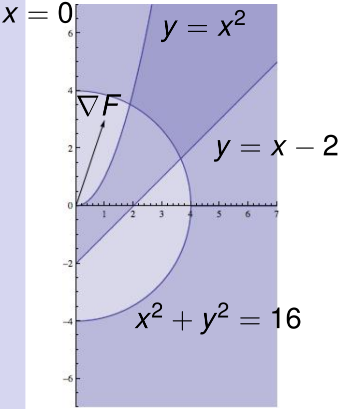


Ahora hay que determinar a qué parte de cada curva están los puntos que satisfacen su restricción.

Como también cumplen la condición de signo, $x \geq 0$, concluimos que las soluciones factibles del problema son las que aparecen más sombreadas en la figura.
De entre todas ellas, hemos de encontrar las que hacen que la función objetivo tome su valor máximo y su valor mínimo.

Un problema de optimización

$$\begin{array}{ll} \text{Opt.} & x + 3y \\ \text{s.a} & x^2 + y^2 \geq 16 \\ & y \leq x^2 \\ & y \geq x - 2 \\ & x \geq 0 \end{array}$$



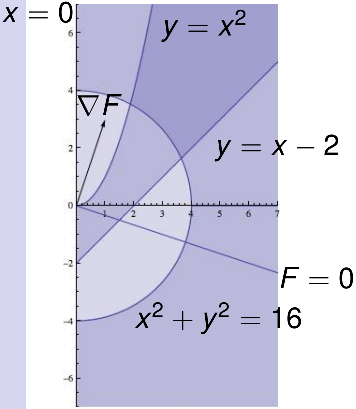
Para ello calculamos el gradiente de la función objetivo:

$$\nabla F = (1, 3)$$

y lo representamos, por ejemplo, a partir del punto $(0, 0)$: trazamos una flecha que parta de $(0, 0)$ y que avance un lugar a la derecha y tres hacia arriba.

Un problema de optimización

$$\begin{array}{rl} \text{Opt.} & x + 3y \\ \text{s.a} & x^2 + y^2 \geq 16 \\ & y \leq x^2 \\ & y \geq x - 2 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

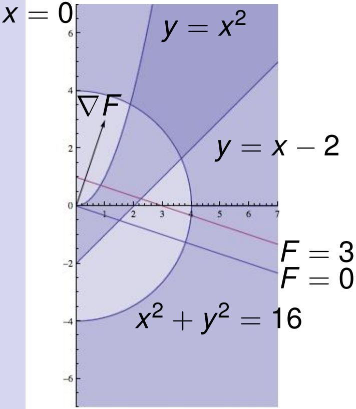


El gradiente indica la dirección hacia donde crece la función objetivo.
Dibujamos la recta perpendicular al gradiente, que contiene a los puntos donde la función objetivo vale 0.

Un problema de optimización

$$
\begin{array}{rl}
\textbf{Max.} & x + 3y \\
\text{s.a} & x^2 + y^2 \geq 16 \\
& y \leq x^2 \\
& y \geq x - 2 \\
& x \geq 0
\end{array}
$$

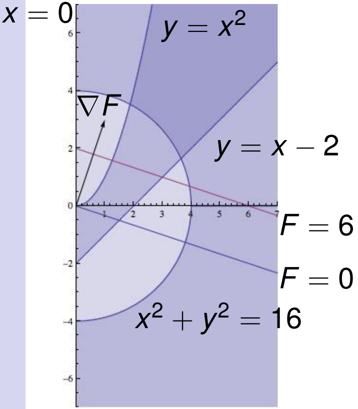
A medida que desplazamos dicha recta en la dirección del gradiente obtenemos puntos con mayor valor de la función objetivo.



Un problema de optimización

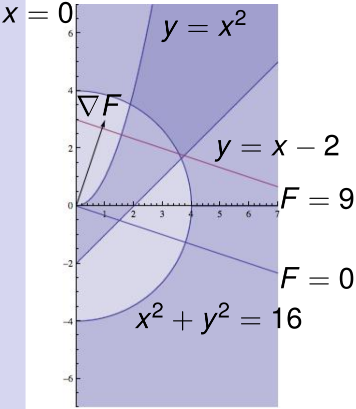
$$\begin{array}{ll} \text{Max.} & x + 3y \\ \text{s.a} & x^2 + y^2 \geq 16 \\ & y \leq x^2 \\ & y \geq x - 2 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

A medida que desplazamos dicha recta en la dirección del gradiente obtenemos puntos con mayor valor de la función objetivo.



Un problema de optimización

$$\begin{array}{ll} \text{Max.} & x + 3y \\ \text{s.a} & x^2 + y^2 \geq 16 \\ & y \leq x^2 \\ & y \geq x - 2 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

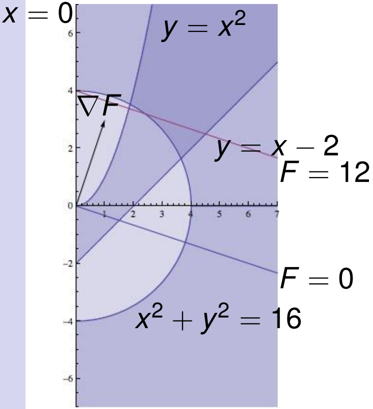


A medida que desplazamos dicha recta en la dirección del gradiente obtenemos puntos con mayor valor de la función objetivo.

Un problema de optimización

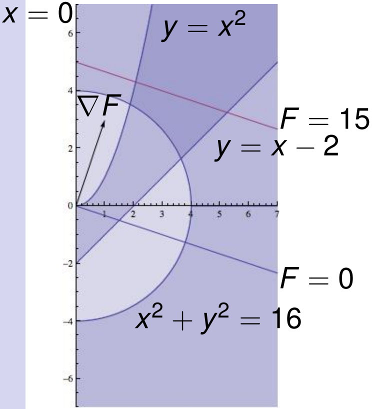
$$
\begin{aligned}
\text{Max.}\quad & x + 3y \\
\text{s.a}\quad & x^2 + y^2 \geq 16 \\
& y \leq x^2 \\
& y \geq x - 2 \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

A medida que desplazamos dicha recta en la dirección del gradiente obtenemos puntos con mayor valor de la función objetivo.



Un problema de optimización

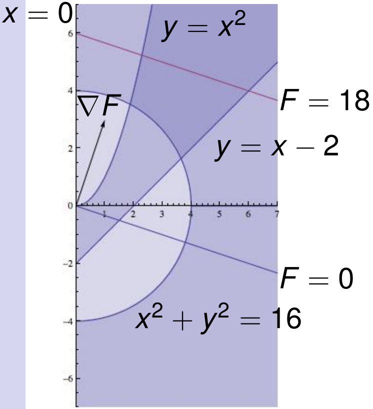
$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & x + 3y \\ \text{s.a} & x^2 + y^2 \geq 16 \\ & y \leq x^2 \\ & y \geq x - 2 \\ & x \geq 0 \end{array}$$



A medida que desplazamos dicha recta en la dirección del gradiente obtenemos puntos con mayor valor de la función objetivo.

Un problema de optimización

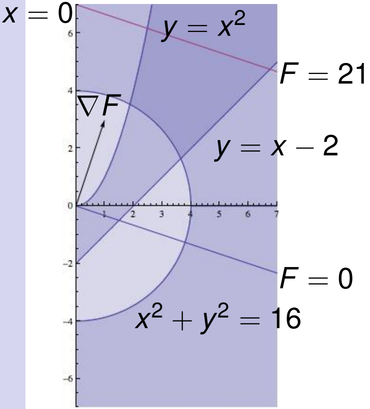
$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & x + 3y \\ \text{s.a} & x^2 + y^2 \geq 16 \\ & y \leq x^2 \\ & y \geq x - 2 \\ & x \geq 0 \end{array}$$



A medida que desplazamos dicha recta en la dirección del gradiente obtenemos puntos con mayor valor de la función objetivo.

Un problema de optimización

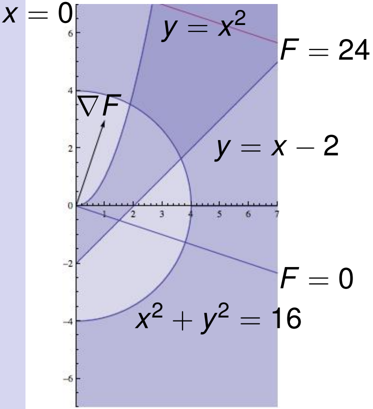
$$\begin{array}{rl} \textbf{Max.} & x + 3y \\ \text{s.a} & x^2 + y^2 \geq 16 \\ & y \leq x^2 \\ & y \geq x - 2 \\ & x \geq 0 \end{array}$$



A medida que desplazamos dicha recta en la dirección del gradiente obtenemos puntos con mayor valor de la función objetivo.

Un problema de optimización

$$
\begin{array}{rl}
\text{Max.} & x + 3y \\
\text{s.a} & x^2 + y^2 \geq 16 \\
 & y \leq x^2 \\
 & y \geq x - 2 \\
 & x \geq 0
\end{array}
$$



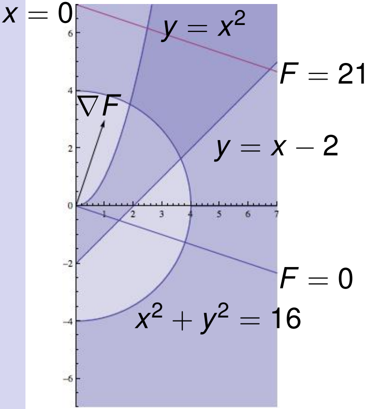
Como vemos que podemos subir indefinidamente por el conjunto de oportunidades, resulta que cualquier solución factible puede ser mejorada por otra, y concluimos que

el problema de maximizar es NO ACOTADO.

Un problema de optimización

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & x + 3y \\ \text{s.a} & x^2 + y^2 \geq 16 \\ & y \leq x^2 \\ & y \geq x - 2 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

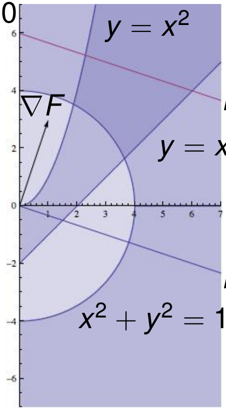
Para resolver el problema de minimizar debemos movernos en dirección opuesta al gradiente.



Un problema de optimización

$$\begin{array}{ll} \text{Min.} & x + 3y \\ \text{s.a} & x^2 + y^2 \geq 16 \\ & y \leq x^2 \\ & y \geq x - 2 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

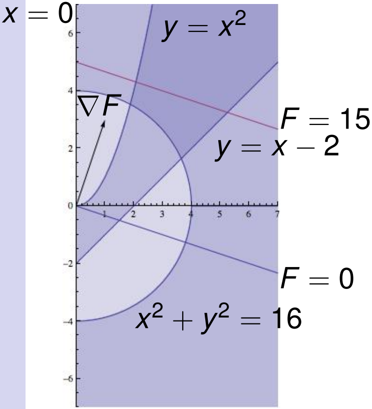
Para resolver el problema de minimizar debemos movernos en dirección opuesta al gradiente.



Un problema de optimización

$$
\begin{array}{rl}
\text{Min.} & x + 3y \\
\text{s.a} & x^2 + y^2 \geq 16 \\
 & y \leq x^2 \\
 & y \geq x - 2 \\
 & x \geq 0
\end{array}
$$

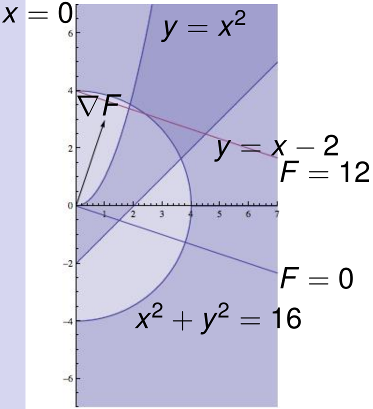
Para resolver el problema de minimizar debemos movernos en dirección opuesta al gradiente.



Un problema de optimización

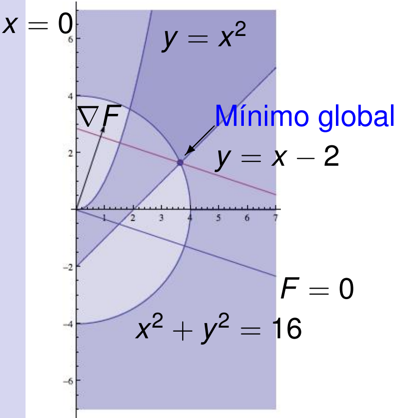
$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & x + 3y \\ \text{s.a} & x^2 + y^2 \geq 16 \\ & y \leq x^2 \\ & y \geq x - 2 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Para resolver el problema de minimizar debemos movernos en dirección opuesta al gradiente.



Un problema de optimización

$$\begin{array}{ll} \text{Min.} & x + 3y \\ \text{s.a} & x^2 + y^2 \geq 16 \\ & y \leq x^2 \\ & y \geq x - 2 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

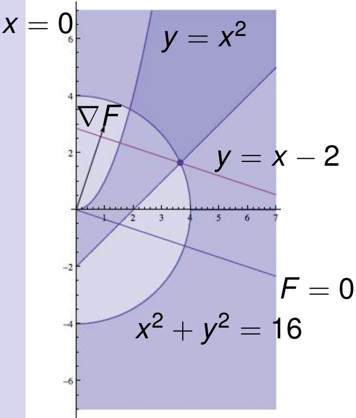


El último punto que podemos encontrar dentro del conjunto de oportunidades al desplazarnos en la dirección contraria al gradiente es la solución óptima.

Todo lo que se ve en la figura debería estar dibujado en una respuesta de examen: las restricciones, el gradiente, la perpendicular al gradiente $F = 0$ y la paralela desplazada para que pase por la solución óptima.

Un problema de optimización

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & x + 3y \\ \text{s.a} & x^2 + y^2 \geq 16 \\ & y \leq x^2 \\ & y \geq x - 2 \\ & x \geq 0 \end{array}$$



Para calcular analíticamente la solución óptima observamos que se encuentra sobre la circunferencia y la recta (pero no sobre la parábola), por lo que el punto (x, y) que buscamos debe satisfacer las dos ecuaciones:

$$x^2 + y^2 = 16, \quad y = x - 2.$$

Al resolver el sistema de ecuaciones obtenemos

$$(x, y) = (3.65, 1.65).$$