KUHN-TUCKER

Sean:

- la función objetivo $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x=(x_i)_{i=1,\dots,n}=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$
- Las restricciones $g^k:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\quad k=1,\dots,m$

Supondremos que tanto la función objetivo f como las restricciones g^k son *diferenciables*. Vamos a considerar el siguiente problema de optimización:

$$\boxed{\begin{array}{ll} & \operatorname{Max} f(x) \\ \text{s.a.} & g^1(x)\le 0 \\ & \quad\vdots \\ & g^m(x)\le 0 \\ & x_1\ge 0,\dots,x_n\ge 0 \end{array}}$$

Construimos la siguiente función *Lagrangiana*

$$L(x,\lambda)=f(x)-\sum_{k=1}^{m}\lambda_k g^k(x)$$

Donde $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_m)\in\mathbb{R}^m$

Definición: Diremos que x verifica KT si existe un λ tal que:

- KT1: $\forall i=1,\dots,n:\ \dfrac{\partial L}{\partial x_i}\le 0,\ \ x_i\ge 0,\ \ x_i\dfrac{\partial L}{\partial x_i}=0$

$$\left(\text{si } x_i>0\ \Rightarrow\ \frac{\partial L}{\partial x_i}=0\ \ \text{. Solución positiva}\right)$$

- KT2: $\forall k=1,\dots,m:\quad \lambda_k\ge 0,\ \ g^k(x)\le 0,\ \ \lambda_k g^k(x)=0$

$$\left(\text{si } \lambda_k>0\ \Rightarrow\ g^k=0.\quad \text{Restricción saturada}\right)$$

Tenemos los siguientes resultados:

T.1 (*Condiciones necesarias*) Si x es solución óptima entonces x verifica KT.

T.2 (*Condiciones necesarias y suficientes*) Si f es una función cuasicóncava $\left(\Leftrightarrow\left\{x\in\mathbb{R}^n : f(x)\ge k\right\}\text{ es convexo }\forall k\right)$ y $\forall k=1,\dots,m$ las funciones g^k son convexas $\left(\Rightarrow\left\{x\in\mathbb{R}^n : g^k(x)\le 0\right\}\text{ es convexo}\right)$, entonces x es un óptimo si y sólo si verifica KT.

Ejemplo gráfico

Dos variables $x=(x_1,x_2)$ y una restricción g

Supondremos que se dan las condiciones necesarias y suficientes para aplicar el T.2. Supondremos también que f es una función estrictamente creciente, por lo tanto $\frac{\partial f}{\partial x_i}>0,\ i=1,2$. Denotamos por:

$$\nabla L=\left(\frac{\partial L}{\partial x_1},\frac{\partial L}{\partial x_2}\right),\ \nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2}\right),\ \nabla g=\left(\frac{\partial g}{\partial x_1},\frac{\partial g}{\partial x_2}\right)$$

$$L(x,\lambda)=f(x)-\lambda g(x)$$

Haremos el análisis para el caso de soluciones *positivas*: $x>0$.

Como $\nabla f(x)>0,\ \forall x$, no pueden existir máximos incondicionados: $\nabla f(x)=0$. Esto impide que $\lambda=0$, ya que si no, tendríamos $L(x,\lambda)=f(x)$ y por KT1, $\nabla L=\nabla f=0$ en contradicción con $\nabla f>0$. Entonces, como $\lambda>0$, por KT2 se tiene que $g(x)=0$ (se agota la restricción)

Como $x>0$, por KT1, tenemos $\nabla L=\nabla f-\lambda\nabla g=0 \iff \nabla f=\lambda\nabla g$