Tema 1

Equilibrio Walrasiano en Economías de Intercambio puro. Modelo General

Modelo General: Economía de n agentes y k bienes

- BIENES Y AGENTES
- BIENES O MERCANCIAS: Una **mercancia** es un bien o servicio completamente especificado en cuanto a sus característícas, su disponibilidad
  espacial y su disponibilidad temporal.
- **Supuesto 1 :** Existe un número finito de mercancías distingibles entre si que denominaremos k.
- **Supuesto 2 :** Cualquier número real puede representar una cierta cantidad de mercancía.
- Los bienes o mercancias son perfectamente divisibles. (las cantidades de bienes se expresan por números reales no-negativos y la cantidad que cada individuo puede intercambiar es un número real)
- **espacio de bienes o de mercancias:** R_+^k

Modelo General. Bienes

- Una asignación de bienes es un vector:

$$x = (x_1, x_2, \ldots., \quad x_k) \in R_+^k$$

- **Precios**
- Cada mercancia $l=1,2\ldots.$ tiene asociado un número real p_l que representa su **precio**. p_l *puede ser*
  - + *(bien escaso),*
  - - *(bien "nocivo")*
  - *0 (bien libre)*

- Un sistema de precios es un vector

  $p=(p_1,p_2,\ldots,p_l,..,p_k)$ *en* $\mathbf{R}^k$

Modelo General.

- Economía de trueque

  La economía funciona sin la ayuda de un bien que sirva de unidad de cuenta (dinero)

  El modelo es de información perfecta (o previsión perfecta)

  Modelo estático: Estado estacionario: loas agentes eligen planes de acción para “toda la vida”.

Modelo General. Agentes.

- Los **agentes=consumidores** son las unidades de decisión del modelo.

- **Supuesto:** Existe un número finito, n, de consumidores
- **Objetivo** del consumidor= decidir sobre planes de consumo de acuerdo con su criterio de elección y bajo limitaciones de supervivencia (CONJUNTO DE CONSUMO) y de riqueza.
- **Criterio de elección**: Su comportamiento se caracteriza por la
- búsqueda de las opciones que resultan mejores entre las alcanzables.
- **Supuesto:** los consumidores son precio-aceptantes
- **Descripción de los agentes**: Cada consumidor **I** está definido por
  - Su conjunto de consumo $\mathbf{X}^{i}$
  - Sus dotaciones iniciales: $W^i = (w_1^i, w_2^i, \ldots., w_k^i) \in R_+^k$
  - Sus preferencias sobre las combinaciones de bienes

Modelo General. Agentes.

- **El conjunto de consumo**: $X^i \subset R_+^k$

  El conjunto de todos los posibles consumos para el *i*-ésimo consumidor se denomina **conjunto de consumo**. Ejemplo: Mínimo de subsistencia.

- **Supuesto C1:** $X^i = R_+^k$
- Un plan de consumo o combinación de consumo del agente i es:

  $$x^i = (x_1^i, x_2^i, ...,\ x_k^i) \in X^i = R_+^k$$

- **Supuesto C2**: ***X***^{i} es convexo y cerrado (divisibilidad perfecta)

Modelo General. Preferencias: Relación binaria entre pares de cestas de consumo:

- $\succ$ denota *preferencia estricta* por lo que
x $\succ$ y significa que x es *estrictamente preferido* a y.

- $\sim$ denota *indiferencia* por lo que x $\sim$ y significa que x e y son *igualmente preferidos*.

- $\succcurlyeq$ denota *preferencia débil*

- x $\succcurlyeq$ y significa que x *es al menos tan preferido* como y.

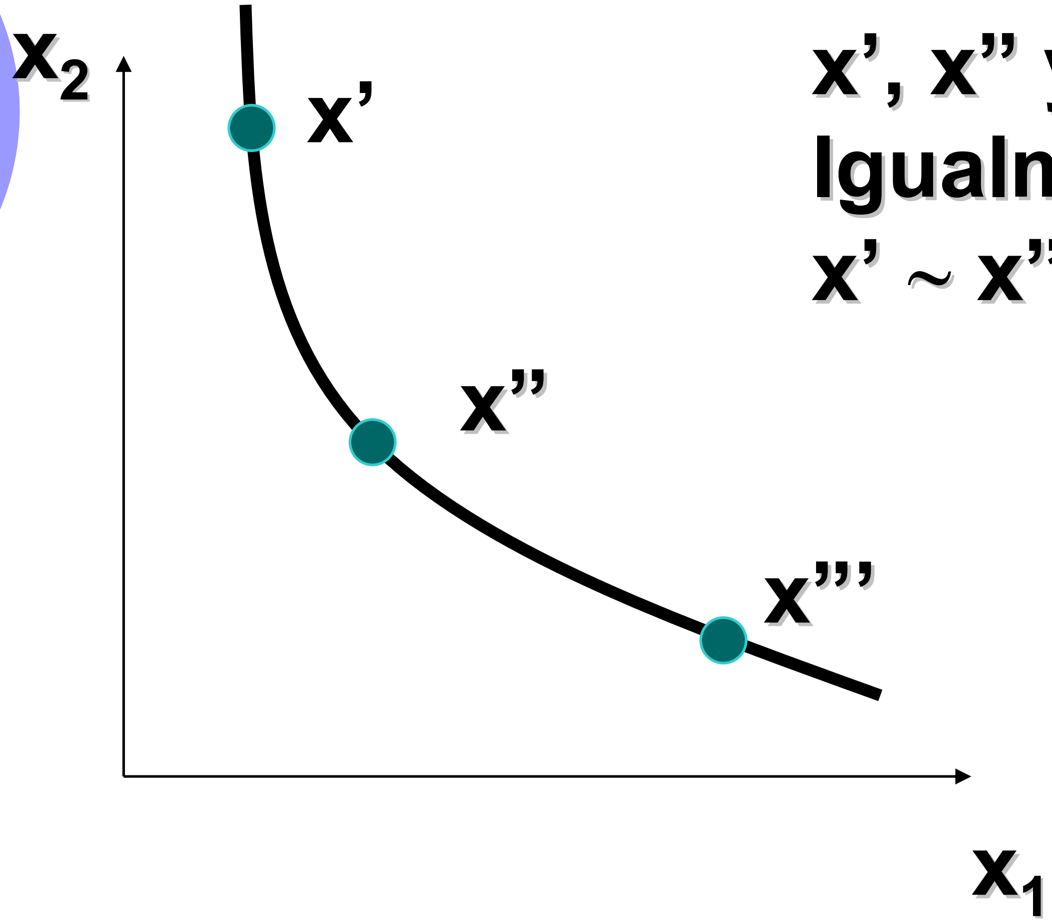
Supuestos sobre las preferencias

- <u>Supuesto 1</u>. *Completitud:* o bien x $\succcurlyeq$ y, o y $\succcurlyeq$ x, o ambos.
- <u>Supuesto 2</u>. *Reflexividad*: x $\succcurlyeq$ x.

- <u>Supuesto 3</u>. *Transitividad*: *si* x $\succcurlyeq$ y e y $\succcurlyeq$ z, entonces
- x $\succcurlyeq$ z.

- Pre-orden en X. La relación de indiferencia particiona X en clases de equivalencia que son disjuntas y exhaustivas=Conjuntos de indiferencia con al menos un elemento (no-vacios, por reflexividad).

Conjuntos de indiferencia



x', x" y x''' son Igualmente preferidas; x' ~ x" ~ x'''.

Modelo General. Función de utilidad

Función de utilidad: Regla que asocia un real a cada combinación de bienes en X:

$$U: \quad X \rightarrow \mathbf{R}, \quad \text{tal que}$$

$$x \succ y \leftrightarrow u(x) > u(y) \; ; \; x \sim y \leftrightarrow u(x) = u(y).$$

Se necesita un *isomorfismo* (relación que preserva el orden entre conjuntos) entre X y **R**, para poder representar las preferencias por funciones de utilidad.

Sea **I**= conjunto de clases de equivalencia:

(I, $\succ$) es isomórfica a (**Q**, $\succ$), donde **Q** son los racionales si I es finito.

Si **I** no es finito, se necesitan más supuestos para que las preferencias sean representables por funciones de utilidad.

Modelo General. Preferencias

- Supuesto 4. *Continuidad.* Para todo x e y ε X, los conjuntos {x: x $\succsim$ y } y {x: x $\precsim$ y} son cerrados.

Teorema: Si $\succsim$ es completa, reflexiva, transitiva y continua, existe una función de utilidad U: X→**R** que representa dichas preferencias. U es continua y cumple que u(x)≥u(y) sí y solo si x $\succsim$ y.

U(.) es **ordinal** y representa únicamente a $\succsim$ si se incluyen todas las transformaciones crecientes de U(.):

Si U(.) representa a $\succsim$ y si f:**R**→**R** es una función monótona creciente, entonces f(u(x)) también representa a $\succsim$ ya que f(u(x))≥f(u(y)) sí y solo sí u(x)≥u(y).

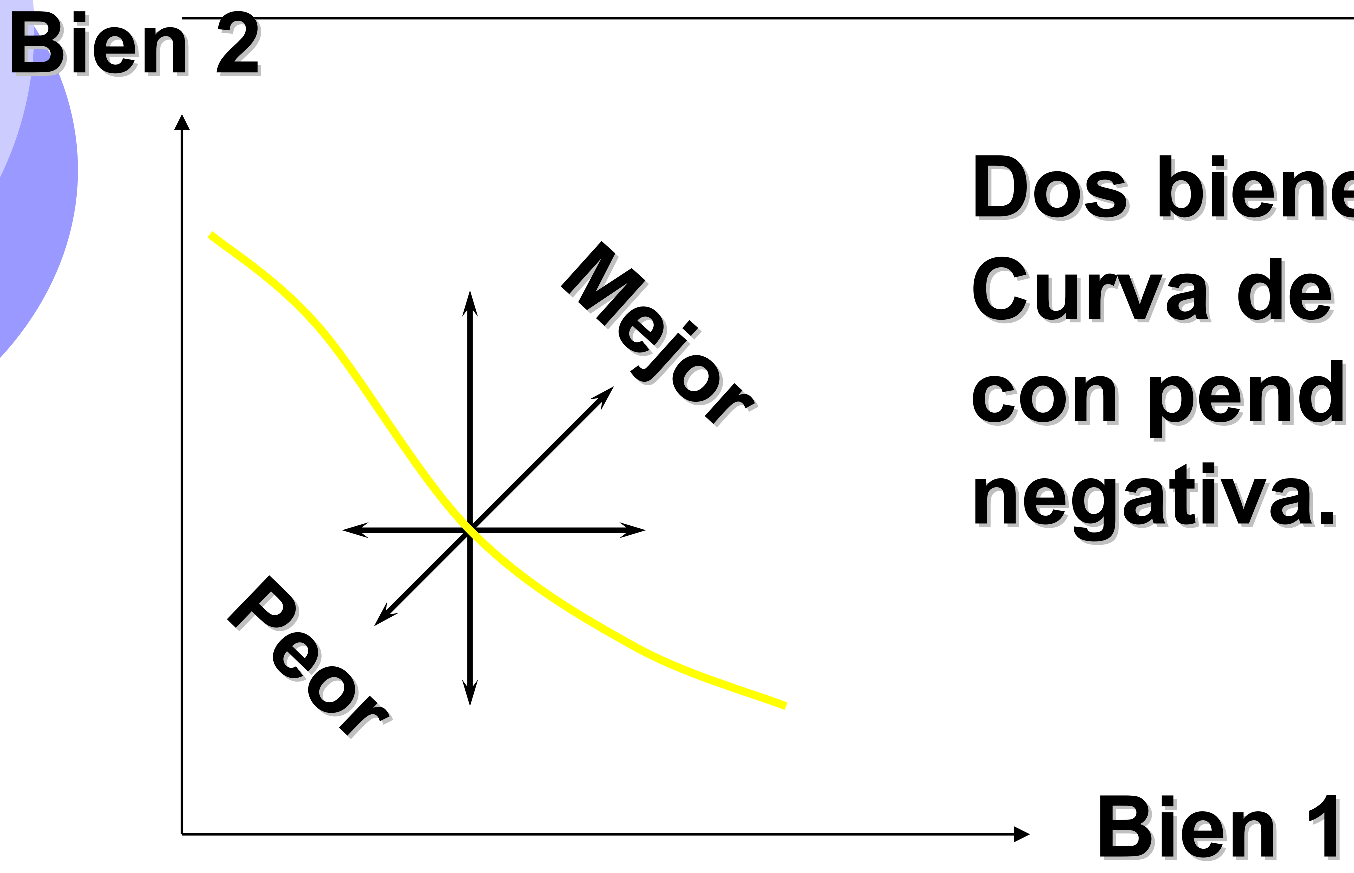
Modelo General. Preferencias

- Si se quiere que U(.) sea **creciente**:
- Supuesto 5. *Monotonicidad fuerte*: Si $x \geq y$ e $x \neq y \rightarrow$

$x \succ y$("Cuanto más mejor")

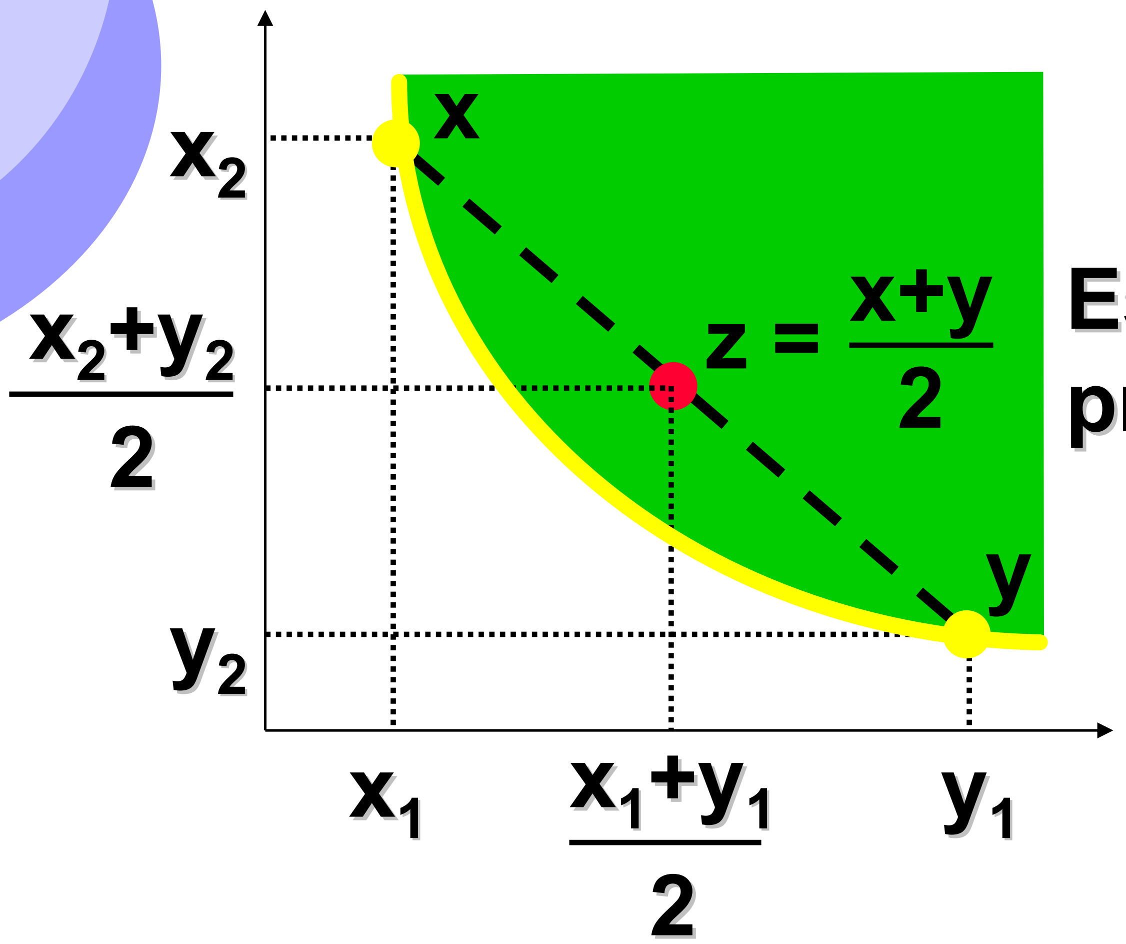
- Supuesto más débil: *Insaciabilidad local*:
- $x \in X$ y $e>0$, existe un $y \in X$, tal que
- $|x-y|<e \rightarrow y \succ x$.
- Para garantizar funciones de demanda con el comportamiento adecuado
- Supuesto 6. *Convexidad estricta*. Dados $x \neq y$ y $z \int X$, si $x \succcurlyeq z$ e $y \succcurlyeq z \rightarrow tx+(1-t)y \succ z$, para todo $t \int (0,1)$.
- Supuesto 6': *Convexidad débil*: Si $x \succcurlyeq y$, entonces
- $tx+(1-t)y \succcurlyeq y$, para todo $t \in (0,1)$.

Pendiente de los conjuntos de indiferencia bajo monotonicidad



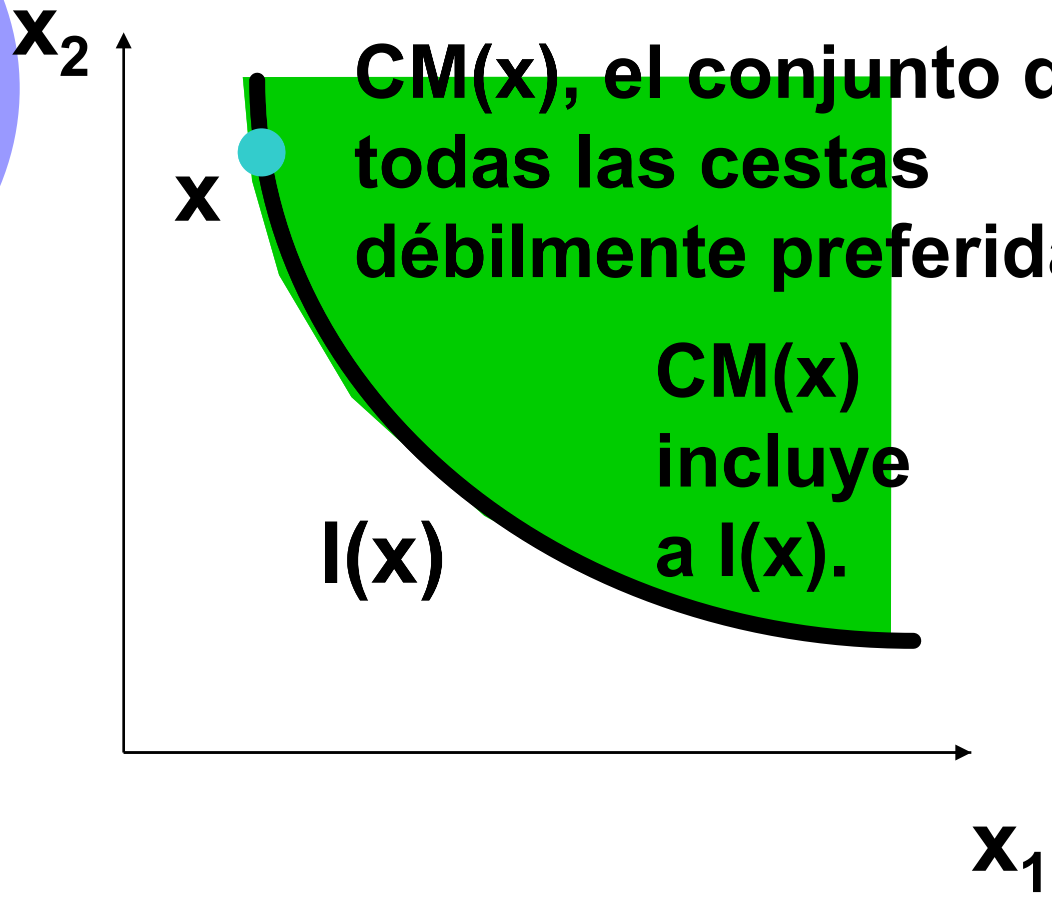
Dos bienes: ➡ Curva de indiferen. con pendiente negativa.

Preferencias -- Convexidad.

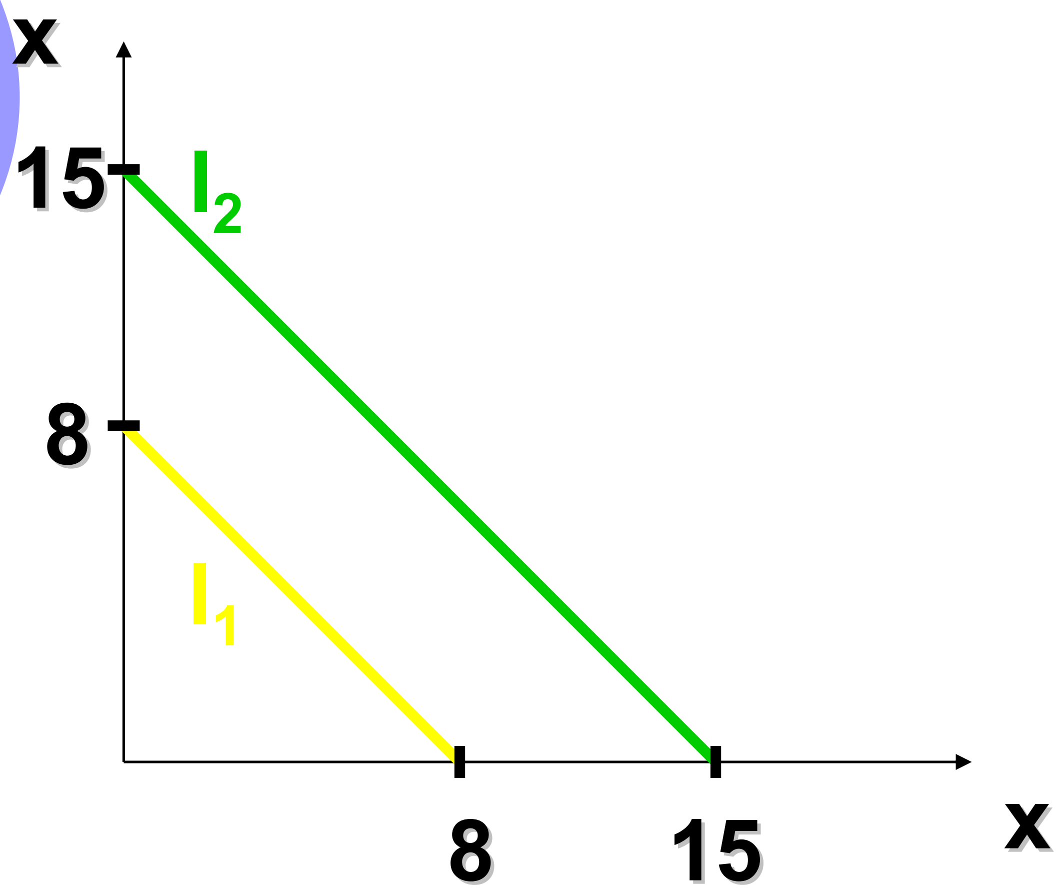


Es estrictamente preferido a x e y.

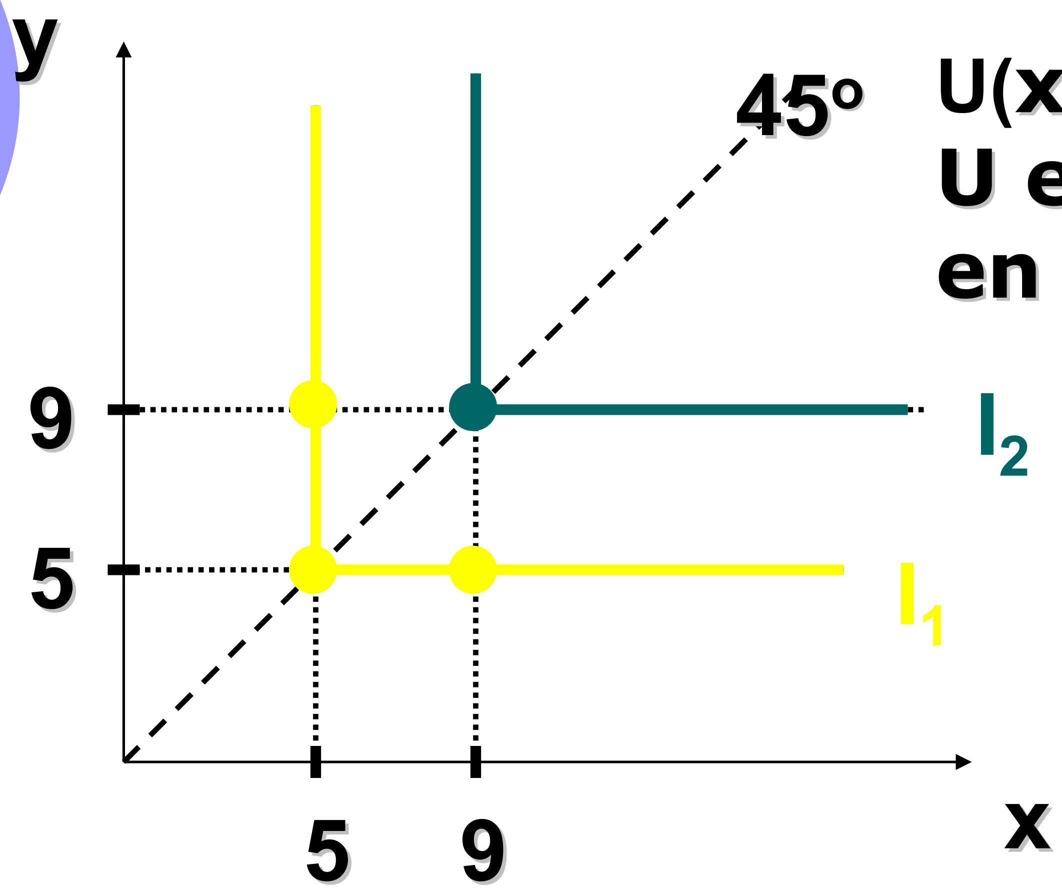
El conjunto débilmente preferido



Curvas de indiferencia convexas (pero no estrictamente). Bienes sustitutos perfectos: U(x,y)=x+y

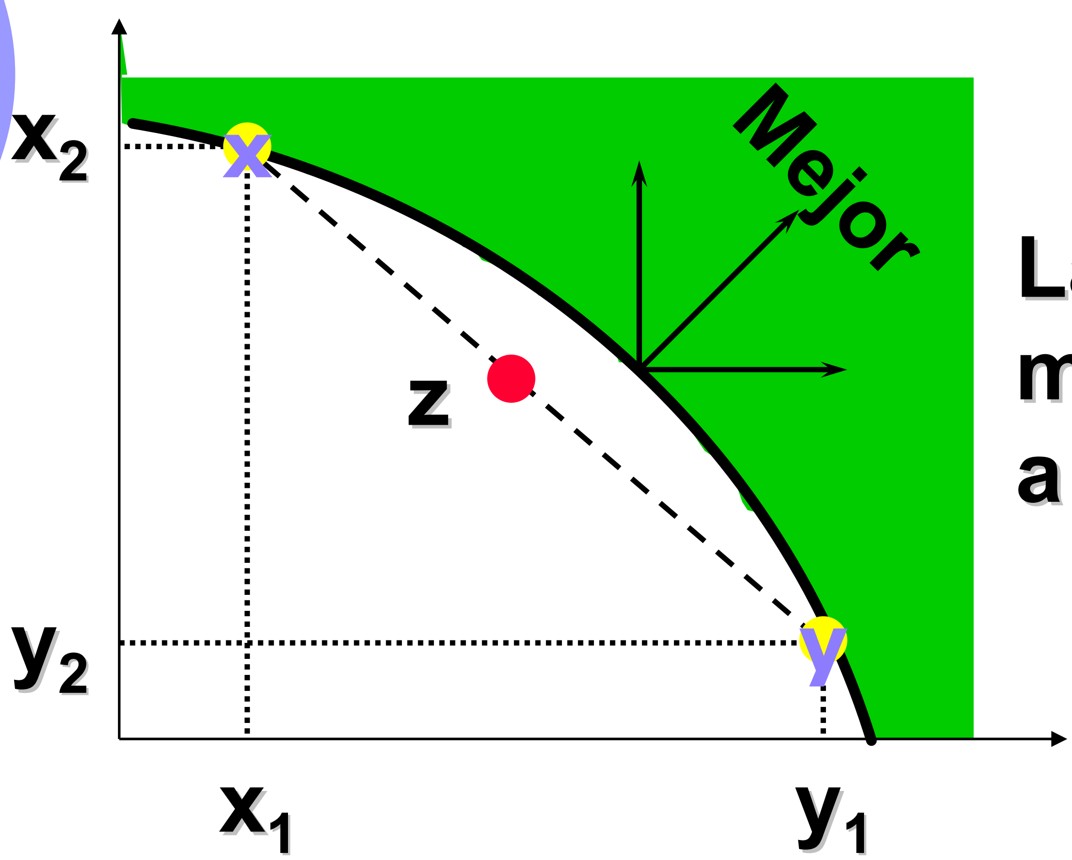


Curvas de indiferencia convexas (pero no estrictamente): Complementos perfectos.



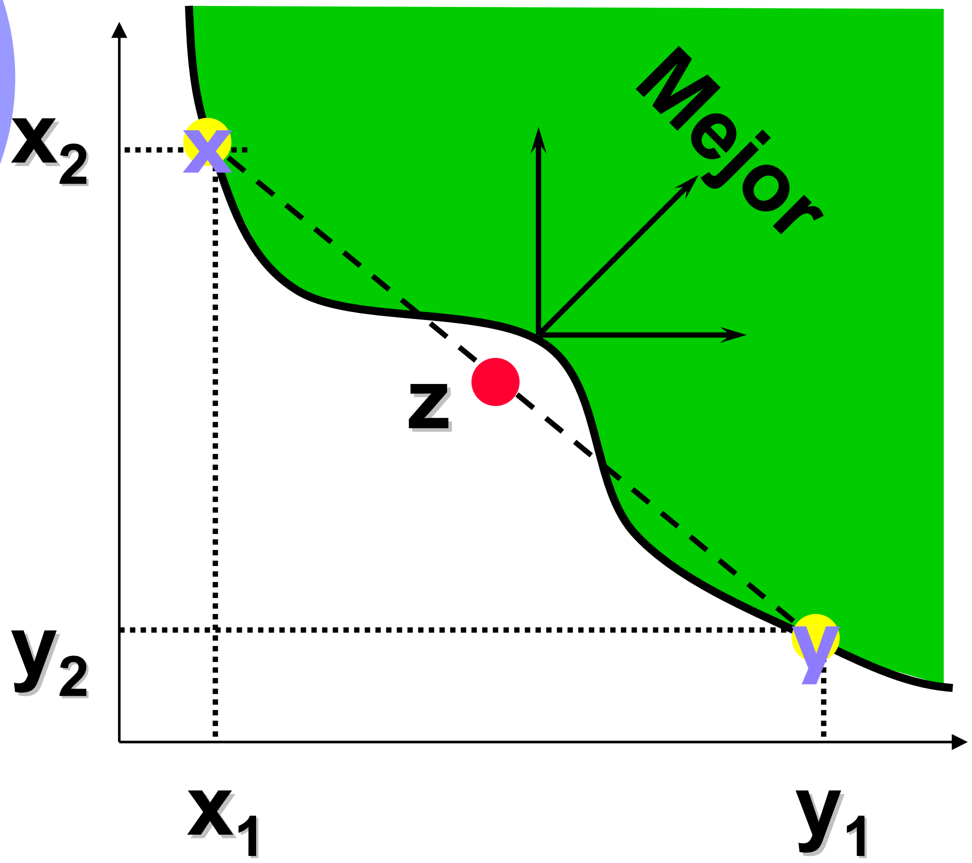
U(x,y)=Min{x,y}
U es discontinua en la esquina.

Preferencias no-convexas



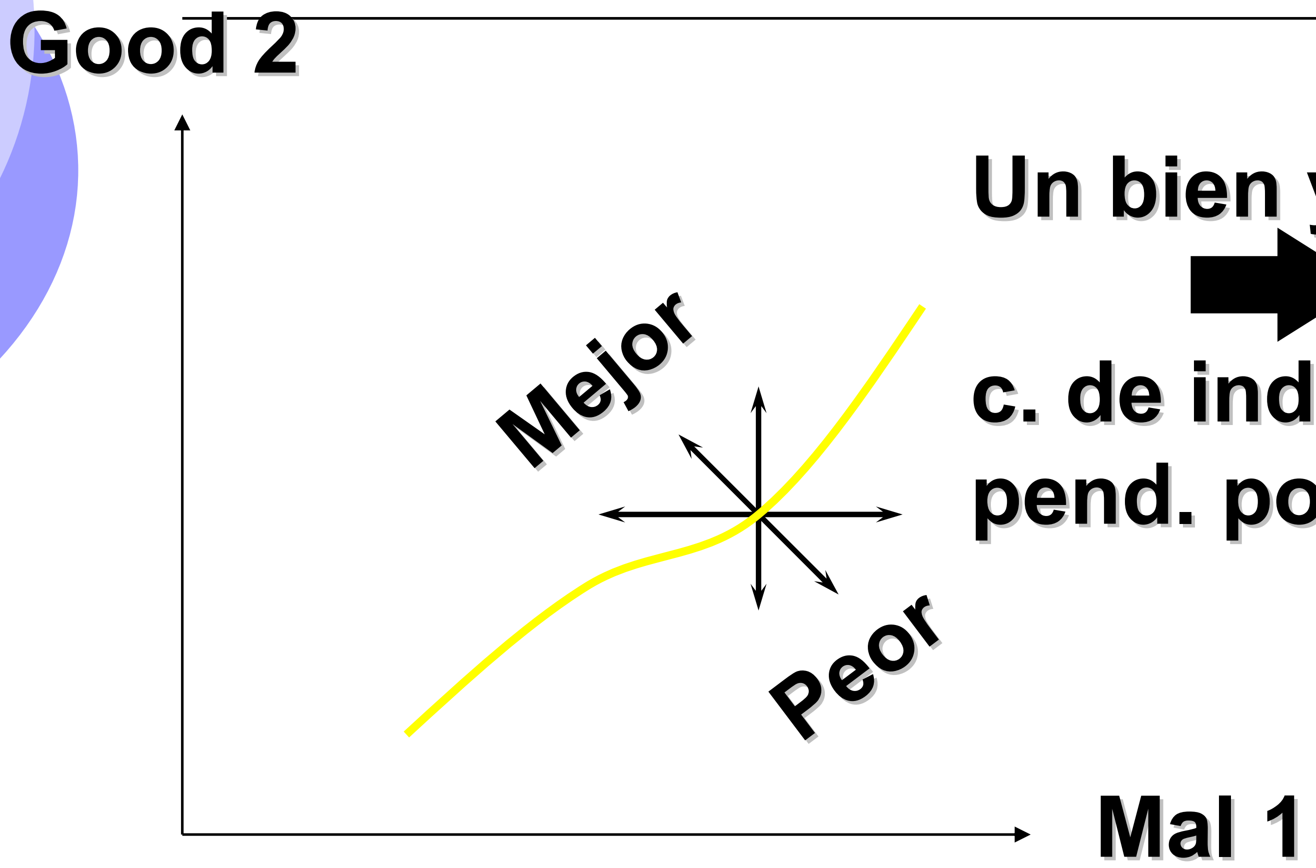
La mezcla z es menos preferida a x o a y.

Preferencias no-convexas



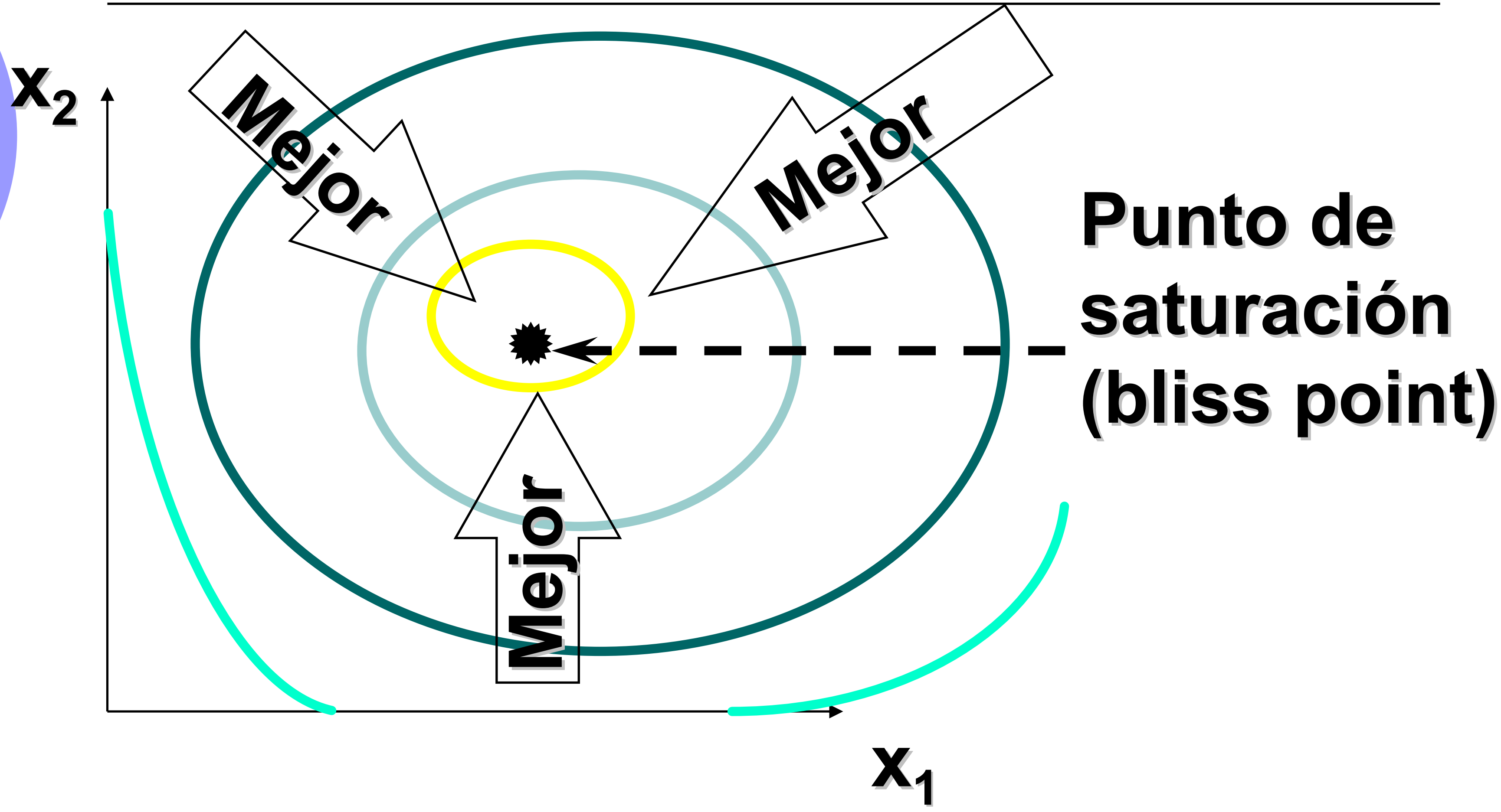
La mezcla z es menos preferida a x o a y.

Curvas de indiferencia: un bien y un mal



Un bien y un mal: ➡ **c. de indifer. con pend. positiva**

Curvas de indiferencia con Saturación.



Preferencias y Utilidad

- **<u>Teorema</u>**: Si $\succcurlyeq$ cumple los supuestos (1)-(6), entonces $\succcurlyeq$ se puede representar por una función de utilidad U(.), que es continua, creciente y estrictamente cuasi-cóncava.

- Tenemos ya caracterizado a un consumidor *i*
  - a) Su conjunto de consumo: X^i
  - b) Sus preferencias $\succcurlyeq_i \rightarrow u^i(.)$
  - c) Sus dotaciones iniciales w^i .

- ***Asignación***: $x=(x^1,x^2,\ldots,x^n)$ colección de *n* planes de consumo.
- ***Asignación factible***: $\sum_{i=1}^{n} x^i = \sum_{i=1}^{n} w^i$

Funciones de demanda y demanda agregada. Existencia y caracterización.

- ***Pregunta***: ¿Existe un vector *p* tal que: *1*) cada consumidor *i* maximize su $u^i(.)$ y 2) los planes de consumo de los *n* consumidores sean compatibles?

- 1. Funciones de demanda (Existencia)
- **Teorema de Weiertrass**: Sea *f* una función real y continua,definida en un conjunto compacto en un espacio n-dimensional, entonces *f* alcanza sus valores *maximo* y *mínimo* el algunos puntos del conjunto→*Implica:*

- *Sea f:* $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *continua y* $A \subset \mathbf{R}^n$ *compacto, entonces existe un vector x* que resuelve:*
  - *Max f(x)*
  - *sujeto a* $x \varepsilon A$

Funciones de demanda individuales. Existencia

- ***Problema del consumidor:***
  - *$Max_{\{x\}}\ u^i(x^i)$*
  - *sujeto a*

$$\sum_{l=1}^{k} p_l x_l^i \leq \sum_{l=1}^{k} p_l w_l^i$$

- Notar:
  - 1. Si $p \gg 0$, el conjunto presupuestario es compacto.
  - 2. Si u^i es continua y 1. se cumple, por el Teorema de Weiertrass existe al menos un $x^{*i}=x^i(p, pw^i)$ que maximiza el problema del consumidor y que además es continua.
  - Si u^i es estrictamente cuasi-cóncava, $x^{*i}=x^i(p, pw^i)$ es *única.*

  - ***Funciones de demanda de i*** *(vector)*→ $\boldsymbol{x^{*i}=x^i(p, pw^i)}$.

Por tanto: Si $\succcurlyeq$ son estrictamente convexas, continuas y monótonas, la función de demanda existe y es continua en todos sus puntos.

Funciones de demanda individuales. Caracterización.

- Max$_{\{x\}}$ $u^i(x^i)$
- *s.a.* $$\sum_{l=1}^{k} p_l x_l^i \leq \sum_{l=1}^{k} p_l w_l^i$$
- Lagrangiano asociado:
- $\Lambda(x_1^i, x_2^i, \ldots, x_k^i, \lambda) = u^i(x_1^i, x_2^i, \ldots, x_k^i) - \lambda[\sum_{l=1}^{l} p_l x_l^i - \sum_{l=1}^{l} p_l x_l^i]$
- Condiciones de Khun-Tucker.
- Para un máximo interior: C.P.O.:

$$\frac{\delta L}{\delta x_l^i} = \frac{\delta u^i}{\delta x_l^i} - \lambda p_l = 0, \qquad \text{l} = 1, 2 \ldots . \text{k}$$

$$\frac{\delta L}{\delta \lambda} = -[\sum_{l=1}^{k} p_l x_l^i - \sum_{l=1}^{k} p_l w_l^i] = 0$$

Funciones de demanda ordinaria y neta. Estática Comparativa.

- Funciones de demanda **ordinaria** o marshalliana de *i* (vector): $x^{*i}=x^i(p, pw^i)$
- Funciones de demanda **neta** de *i* (vector):
- $x^{*i}=x^i(p, pw^i)-w^i$
- Estática Comparativa:
  - 1. Efecto de un cambio en la dotación de un bien:
  - Sea $pw^i=M^i$.
- $$\frac{\delta x_l^{*i}}{\delta w_l^i}=\frac{\delta x_l^i}{\delta M}\times\frac{\delta M}{\delta w_l^i}=\frac{\delta x_l^i}{\delta M}p_l$$

Estática Comparativa. Ecuación de Slutsky.

- 2.Efecto de un cambio en el precio del bien *l:*

$$\frac{\delta x_l^{*i}}{\delta p_l} = \frac{\delta x_l^i}{\delta p_l}\Big|_M + \frac{\delta x_l^i}{\delta M}\frac{\delta M}{\delta p_l}$$

$$\frac{\delta x_l^{*i}}{\delta p_l} = \frac{\delta x_l^i}{\delta p_l}\Big|_M + \frac{\delta x_l^i}{\delta M} w_l$$

$$\frac{\delta x_l^{*i}}{\delta p_l} = \frac{\delta h_l^i}{\delta p_l} - x_l^{*i}\frac{\delta x_l^i}{\delta M} + \frac{\delta x_l^i}{\delta M}\frac{\delta M}{\delta p_l}$$

- y reordenado términos: ***Ecuación de Slutsky modificada:***

$$\frac{\delta x_l^{*i}}{\delta p_l} = \frac{\delta h_l^i}{\delta p_l} - \frac{\delta x_l^i}{\delta M}(x_l^{*i} - w_l^i)$$

Estática Comparativa.

- Ecuación de Slutsky: $$\frac{\delta x_l^{*i}}{\delta p_l} = \frac{\delta h_l^i}{\delta p_l} - \frac{\delta x_l^i}{\delta M}(x_l^{*i} - w_l^j)$$
- **Bien normal**:
  - Demanda neta positiva $\rightarrow$ $$\frac{\delta x_l^{*i}}{\delta p_l} < 0$$
  - Demanda neta negativa $\rightarrow$ $$\frac{\delta x_l^{*i}}{\delta p_l} = ?$$

Bien inferior:

Demanda neta positiva $\rightarrow$ $$\frac{\delta x_l^{*i}}{\delta p_l} = ?$$

- Demanda neta negativa $\rightarrow$ $$\frac{\delta x_l^{*i}}{\delta p_l} < 0$$

Demanda Agregada

Conjunto suma: Con la hipótesis de individualismo en las preferencias→Cantidades agregadas=suma de cantidades individuales (ausencia de efectos externos)

- $x^{*i}=x^i(p, pw^i)$ *vector de funciones de demanda de i.*
- $X(p)=\sum_i x^{*i}= \sum_i x^i(p, pw^i)$ *, función de demanda* ***agregada*** *de la Economía.*

- ***En cada mercado l:***
- $x_l^{*i} =x_l^i(p, pw^i)$ *es la función de demanda de i del bien l, y*
- $X_l(p)= \sum_i x_l^i(p, pw^i)$ *es la función* ***agregada*** *de demanda del bien l*

El equilibrio Walrasiano:

- Sea el vector de precios $p=(p_1,p_2,\ldots,p_k)$.
- Cada agente i: $Max_{\{x\}}\ u^i(x^i)$ *sujeto a* $px^i=pw^i$
- *Solución: función de demanda de i:* $x^{*i}=x^i(p, pw^i)$
- *Demanda agregada:* $X(p)=\sum_i x^{*i}= \sum_i x^i(p, pw^i)$
- *Oferta agregada:* $\sum_i w^{i}.$

- ¿Existe un vector de precios p^* tal que
- $\sum_i x^i(p, pw^i)= \sum_i w^i$, y con bienes libres
- $\sum_i x^i(p, pw^i) \leqslant \sum_i w^i$?

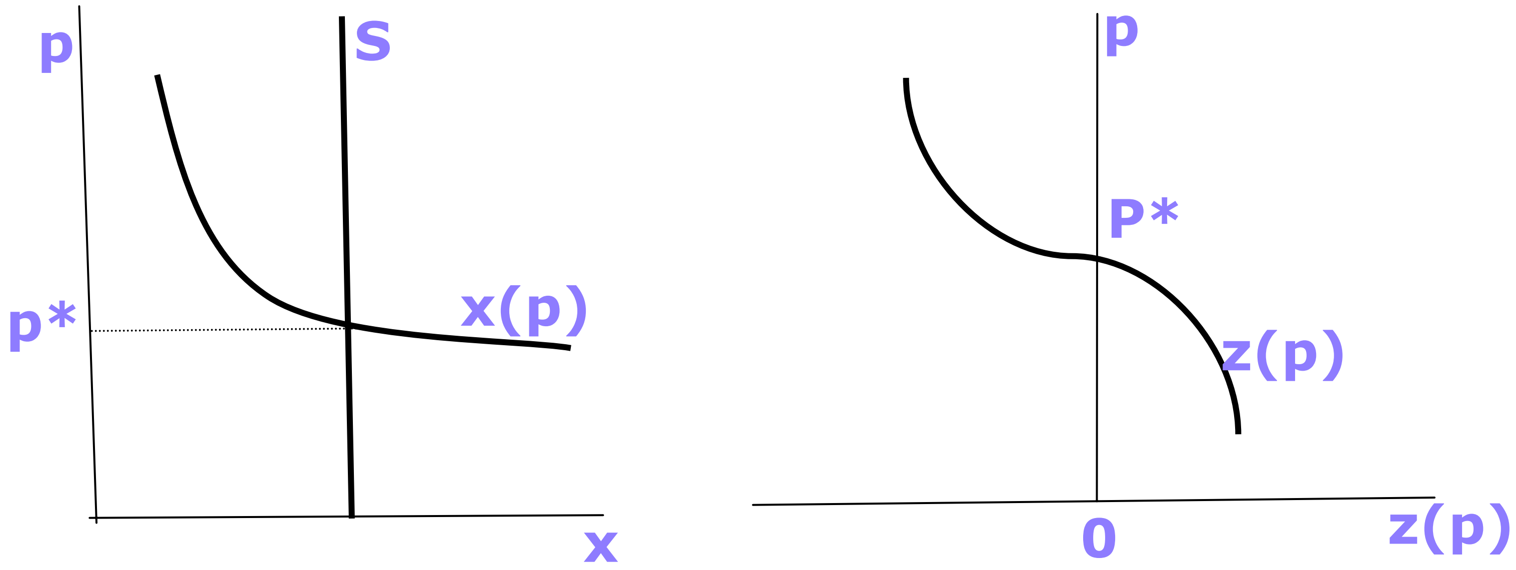
El equilibrio Walrasiano:

- Sea $z(p)=\sum_i x^i(p, pw^i)- \sum_i w^i$ la función de ***exceso de demanda*** de la economía, y

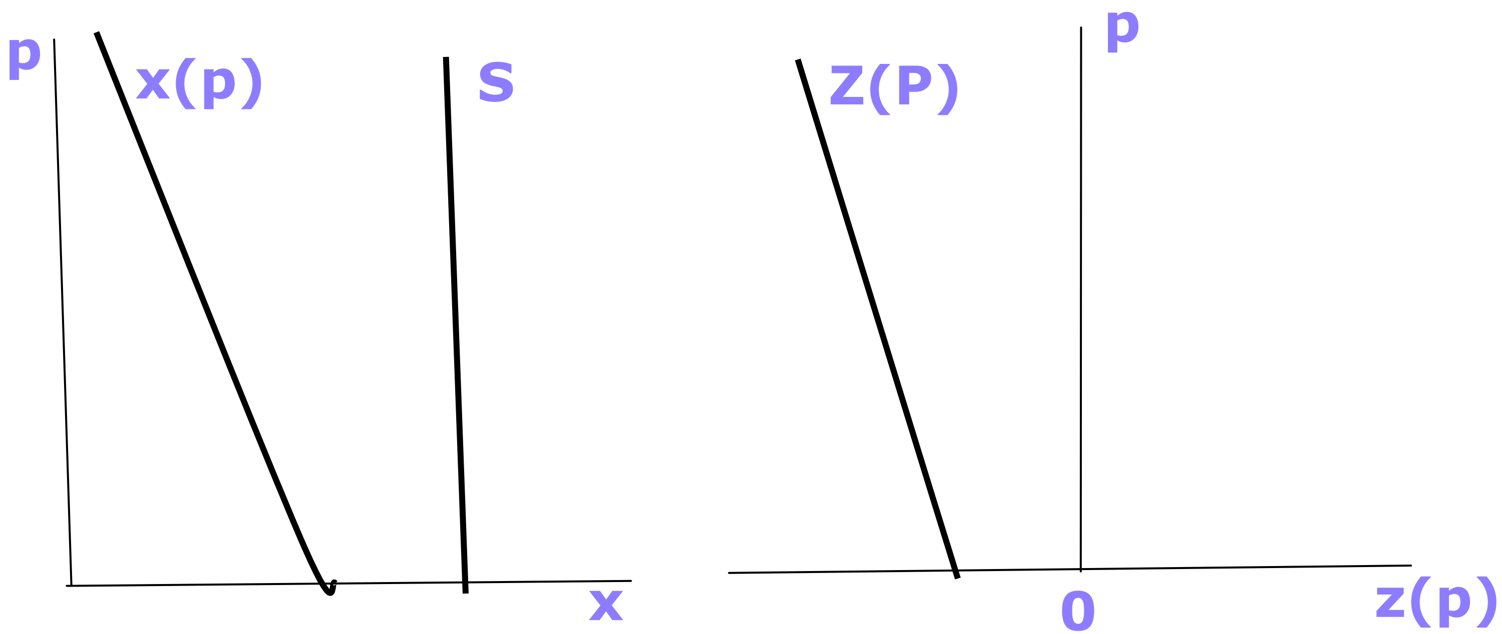
- $z_j\,(p)=\sum_i x_j^i(p, pw^i)- \sum_i w_j^i$, la función *de* ***exceso de demanda*** del bien *j*.

- Un vector de precios $p^* \geq 0$, *es un* ***equilibrio walrasiano*** *o* ***equilibrio competitivo*** *si:*
- $z_j\,(p^*)=0$, *si j* es un bien escaso ($p_j^* > 0$)
- $z_j\,(p^*)<0$ *si j* es un bien libre ($p_j^* = 0$).

Ejemplos de Equilibrio Walrasiano:



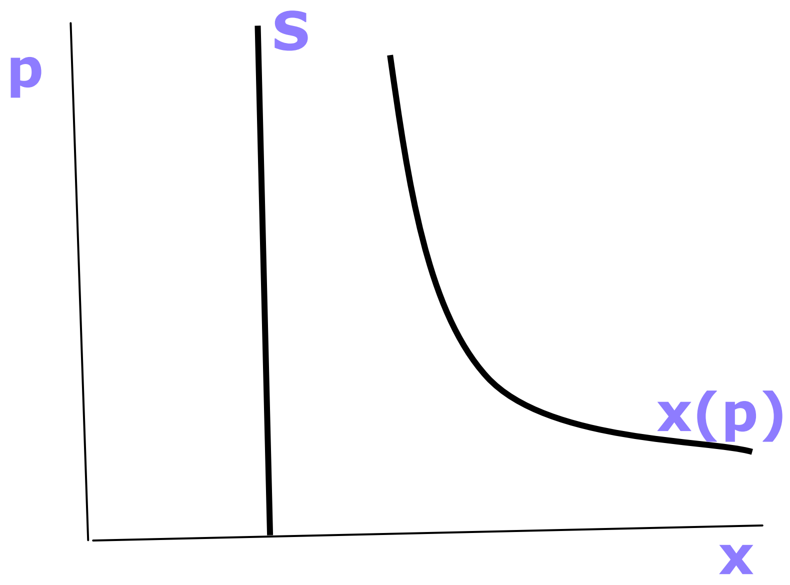
Ejemplos de Equilibrio Walrasiano: Bienes libres

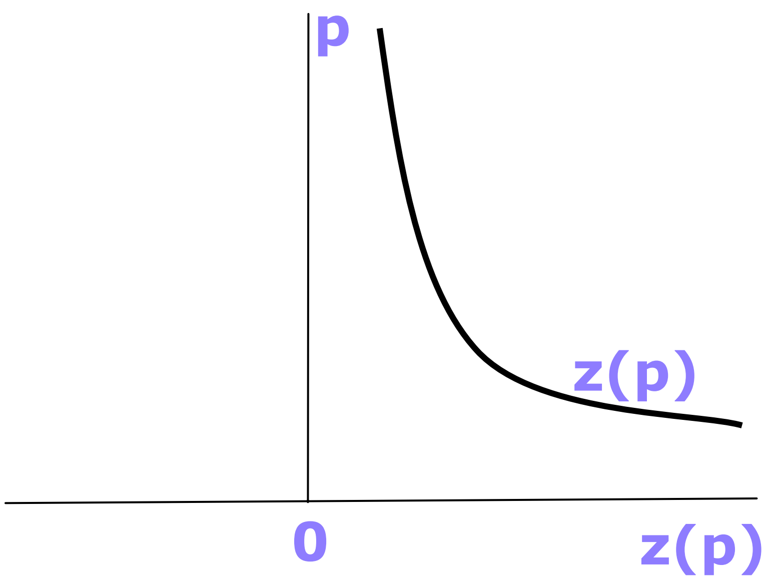


$p^*=0$

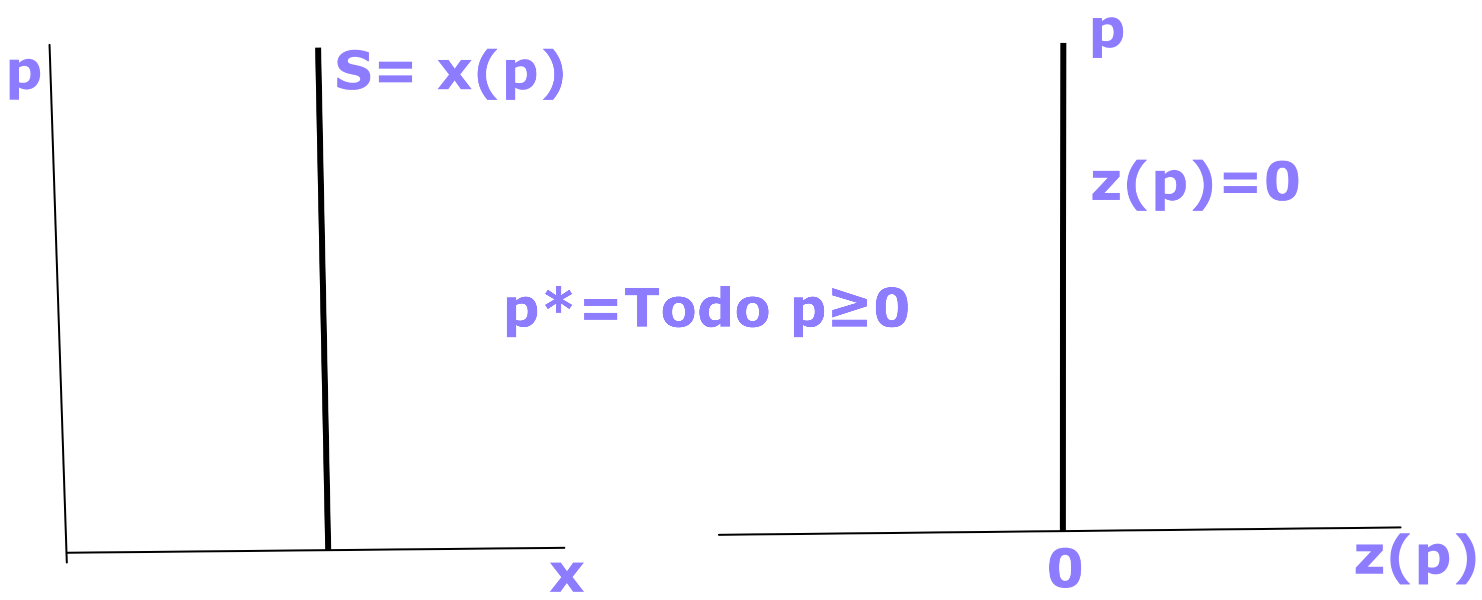
$z(p)<0 \rightarrow p^*=0$

Ejemplos de Equilibrio Walrasiano: No existen precios de equilibrio.





Ejemplos de Equilibrio Walrasiano:



Equilibrio Walrasiano: Propiedades de la función exceso de demanda de la economía: z(p).

- Volvemos a nuestro modelo: ¿Existe un vector p* tal que se vacían todos los mercados? Primero vemos las propiedades de z(p). Notar:
  - 1) El conjunto presupuestario de cada agente i no varía si se multiplican todos los precios por una misma constante positiva:→ El **conjunto presupuestario es homogéneo de grado cero en precios**.
  - 2) Por 1)→**La función de demanda es homogénea de grado cero en precios**: $x^i(kp,kpw^i)= x^i(p,pw^i)$.
  - 3) La suma de funciones homogéneas de grado r es homogénea de grado r:→la **función de demanda agregada es homogénea de grado cero en precios**: $\sum_i x^i(p,pw^i)$ es homogénea de grado cero en precios.
  - 4) La función exceso de demanda $\mathbf{z(p)= \sum_i x^i(p,pw^i)-\sum_i w^i}$ **es homogénea de grado cero en precios**.
  - 5) Por los supuestos sobre $\succcurlyeq$ la función de demanda es continua y como la suma de funciones continuas es continuas→función de demanda agregada continua: z(p) es una función continua.

  - **Z(p) es una función continua y homogénea de grado cero en precios.**

Equilibrio Walrasiano. Existencia: Teorema del punto fijo de Brower.

- Para demostrar la existencia del EW usaremos un teorema mátemático.
- La demostración de la existencia se realiza modelizando el comportamiento de revisión de precios del "subastador Walrasiano", hasta alcanzar los precios de equilibrio.

- $S \rightarrow p^0 \rightarrow z(p^0) \rightarrow S \rightarrow p^1 \rightarrow z(p^1) \rightarrow S\ldots$

subastador agentes S revisa según Signo de z(p) agentes

- Las transacciones se realizan sólo a los precios de equilibrio

Equilibrio Walrasiano. Existencia: Teorema del punto fijo de Brower.

- Consideremos la aplicación de un conjunto sobre si mismo: *f: X*→*X*.
- La cuestión que se plantea es: ¿Existe algún punto $\underline{x}$ que sea su propia imagen: $\underline{x}=f(\underline{x})$*?* Si existe a ese punto se le llama un ***punto fijo***.
- El equilibrio walrasiano se va a definir como un punto fijo de una aplicación del conjunto de precios en si mismo:
- $S \rightarrow p^* \rightarrow z(p^*) \rightarrow S$

subastador **agentes**

S no revisa el precio si los excesos de demanda son cero o negativos (bienes libres)

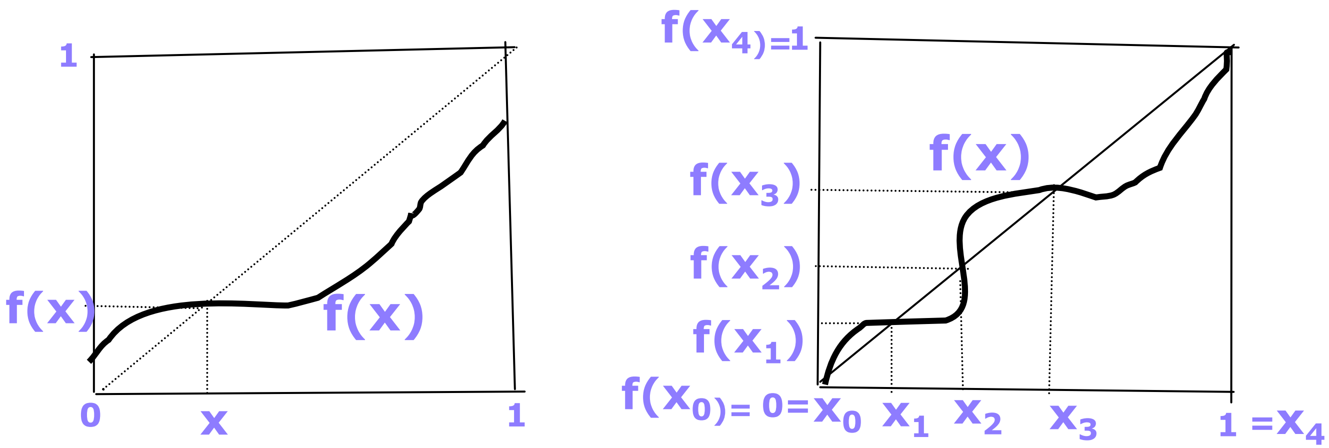
Equilibrio Walrasiano.Teorema del punto fijo de Brower

- ***Teorema del punto fijo de Brower:*** Sea *S* un subconjunto convexo y compacto (cerrado y acotado) de un espacio euclídeo y sea *f* una función continua, $f: S \rightarrow S$, entonces existirá como mínimo un punto fijo, es decir, existirá un $\underline{x}$ en *S* tal que $f(\underline{x}) = \underline{x}$ (*f* aplica un punto en si mismo).

- Notar:
- El Teorema no presupone unicidad
- El Teorema dá las condiciones <u>suficientes</u> (pero no necesarias) para la existencia de puntos fijos.

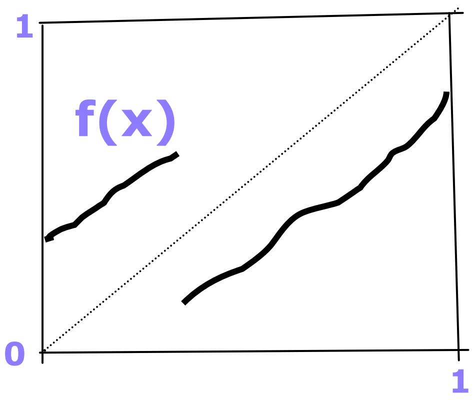
Equilibrio Walrasiano. Teorema del punto fijo de Brower

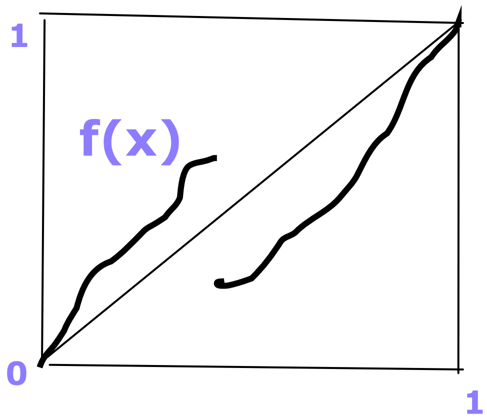
- Ejemplo: Sea S=[0,1] y sea f: [0,1]→ [0,1]
- Como S es compacto sí f es continua existe al menos un punto $\underline{x}$ tal que $f(\underline{x})=\underline{x}$



Equilibrio Walrasiano. Teorema del punto fijo de Brower. Importancia de los supuestos.

- 1. *f* no continua



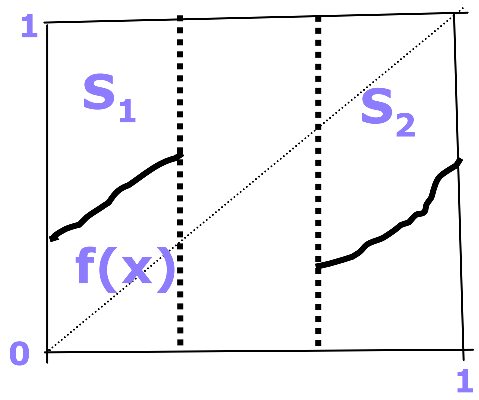


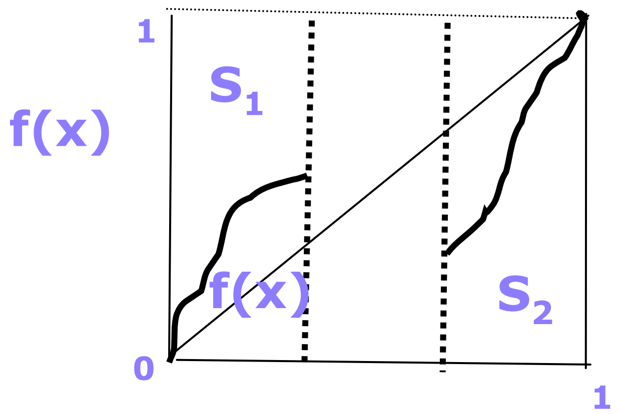
No existe pto. fijo

Dos puntos fijos:
uno en x=0
y otro en x=1

Equilibrio Walrasiano. Teorema del punto fijo de Brower. Importancia de los supuestos.

- 2. S no convexo: $S=S_1 \cup S_2$



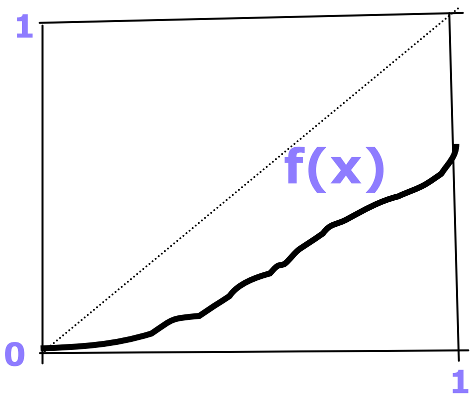


No existe pto. fijo

Dos puntos fijos:
uno en x=0
y otro en x=1

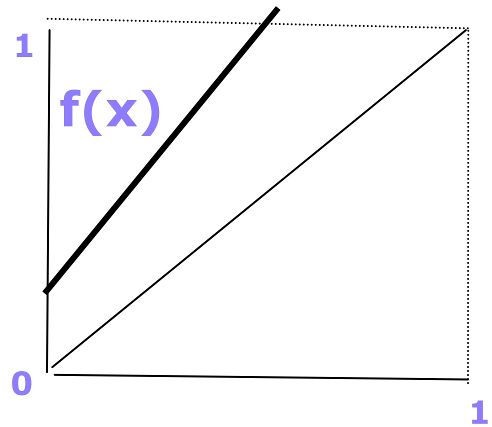
Equilibrio Walrasiano. Teorema del punto fijo de Brower. Importancia de los supuestos.

- 3. *S* no cerrado



$S=\{x:0<x\leqslant 1\}$
Pto. fijo x=0,
pero x no ∫ S

4. *S* no acotado



$S=\{x: x\geq 0\}$
No existe ningún punto fijo

Equilibrio Walrasiano. Existencia

- La demostración de la existencia del EW se basará en aplicar a nuestro problema el punto fijo de Brower→Buscar conj. S (convexo y compacto).
- 1. El conjunto de precios ***P*** (conjunto de vectores ($p_1, \ldots, p_k$) con elementos no-negativos) no es compacto:
  - Está acotado inferiormente: $p_l \geq 0$, para todo $l=1,\ldots,k$, pero no superiormente. Si que es cerrado. Luego ***P*** no es compacto.

- 2. ***"Normalizamos"*** el conjunto de precios para compactificarlo: Sustituimos cada precio absoluto p_l' por el precio normalizado p_l:

$$p_l = \frac{p_l'}{\sum_{j=1}^{k} p_j'}$$

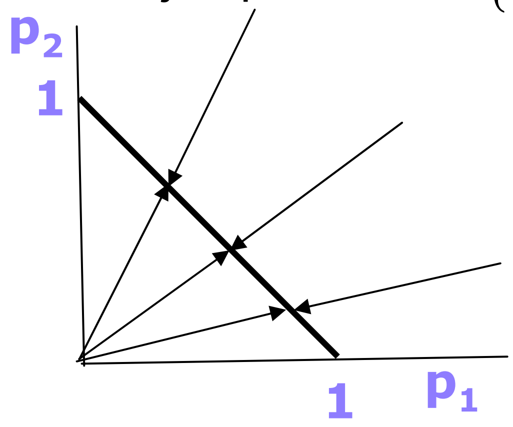
- con $\sum_l p_l = 1$. *Por ejemplo:* $p_1' = 4$ *y* $p_2' = 6 \rightarrow p_1 = 4/10 = 0.4$ *y* $p_2 = 6/10 = 0.6$ *y*
- $p_1 + p_2 = 1$. *(**Precios relativos**)*

Equilibrio Walrasiano. Existencia

- Nos centramos en los vectores de precios que pertenecen al **simplex unitario de dimensión k-1**.

$$S^{k-1} = \left\{ p \in R_+^2 : \sum_{l=1}^{k} p_l = 1 \right\}$$

  - Ejemplo: $S^1 = \left\{ \left(p_1, p_2 \right) \in R_+^2 : p_1 + p_2 = 1 \right\}$



Equilibrio Walrasiano. Existencia

- El conjunto S^{k-1} o conjunto normalizado de precios es:
  - acotado: $p_l \geq 0$ y $p_l \leq 1$, para todo $l=1,\ldots,k$
  - cerrado: $\{0,1\} \int S^{k-1}$
  - convexo: si p' y p'' pertenecen a S^{k-1}, que implica que

  $\sum_l p_l' = 1$ y $\sum_l p_l'' = 1$, entonces:

  $p = \lambda p' + (1-\lambda) p''$ *está en* S^{k-1}, ya que

  $\sum_l p_l = \sum_l \lambda p_l' + \sum_l (1-\lambda) p_l'' = \lambda \sum_l p_l' + (1-\lambda) \sum_l p_l'' = 1$

Equilibrio Walrasiano. Existencia

- 3. Como z(p) (y las funciones de demanda) es homogénea de grado cero en precios, se puede realizar la normalización anterior y expresar las demandas en términos de precios relativos:
- $z(p_1,p_2,\ldots,p_k)= z(tp'_1,tp'_2,\ldots,tp'_k)= z(p'_1,p'_2,\ldots,p'_k)$, *con* $t=1/\sum_j p_j'$.
- 4. Problema en potencia: *z(p)* es continua siempre que los precios sean estrictamente positivos.
  - Cuando algún $p_j=0$, por monotonicidad de las preferencias, las demandas serían infinitas→"discontinuidad"→z(p) podría no estar bien definida en la frontera del simplex.
  - <u>Solución del problema</u>: Se modifica el axioma de no-saturación: "Existen niveles de saturación para todos los bienes, pero siempre hay al menos un bien que el consumidor compra a precios positivos y del que no está saciado".

Equilibrio Walrasiano. Existencia. Ley de Walras.

- **Ley de Walras** ("identidad"): Para cualquier *p en* S^{k-1} se cumple que $pz(p)=0$.

- *Demostración:*
  $pz(p)=p(\sum_i x^i(p,pw^i)-\sum_i w^i)=\sum_i(px^i(p,pw^i)-pw^i)= \sum_i 0=0$.

- Implicaciones de la Ley de Walras:
- a) Si para $p»0$, k-1 mercados se vacian, entonces el k-ésimo mercado también se vaciará:
  $p_1z_1+p_2z_2=0$ por LW, $p_1>0$ y $p_2>0$, si $z_1=0$, LW$\rightarrow z_2=0$

- b) Bienes libres: si p^* es un EW y $z_j(p)<0$, entonces $p_j^*=0$, es decir, si en un EW un bien tiene exceso de oferta, tal bien ha de ser gratuito:
  $p_1z_1+p_2z_2=0$ por LW, si $z_2<0$, LW $\rightarrow p_2=0$.

Equilibrio Walrasiano. Teorema de la Existencia

- **Teorema de la existencia**: Si $z: S^{k-1} \rightarrow R^k$ es una función continua y cumple $pz(p)=0$ (LW), entonces existe un p^* *en* S^{k-1} tal que $z(p^*) \leqslant 0$.

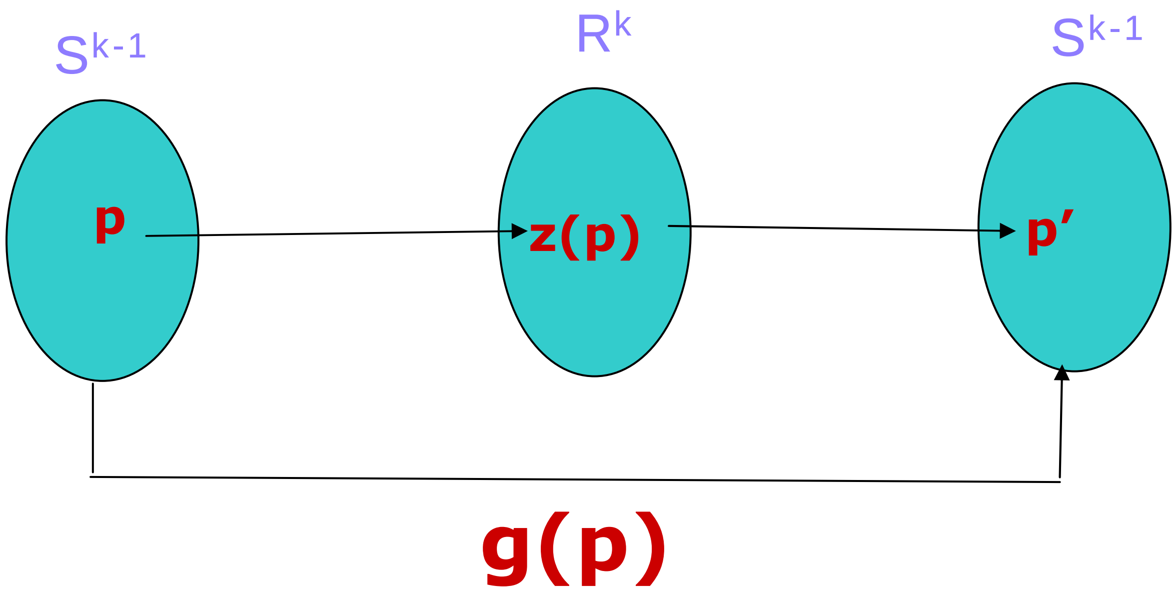
- <u>*Demostración*</u>: 1) demostrar que existe un p^* que es un punto fijo y 2) demostrar que este unto fijo es un EW.
- **1) *Defínase la aplicación*** $g: S^{k-1} \rightarrow S^{k-1}$ por

$$g_j(p) = \frac{p_j + \max(0, z_j(p))}{1 + \sum_{l=1}^{k} \max(0, z_l(p))}, \quad j = 1, 2, \ldots, k$$

- que es una regla de cambio o revisión de los precios. Notar que la función g es una función compuesta: para un p *en* S^{k-1} inicial, se obtiene $z(p)$ *en* R^k y por la regla que define la aplicación se obtine un nuevo p' en S^{k-1}.

Equilibrio Walrasiano. Teorema de la Existencia

- Gráficamente g(p) sería:



Equilibrio Walrasiano. Teorema de la Existencia

Por ejemplo: Supongamos

- $p_1=0.8$ y $z_1(p)=-2$; $p_2=0.2$ y $z_2(p)=8$. Entonces:
- $g_1(p)=[0.8+0]/[1+0+8]=0.8/9=0.09$ y $g_2(p)=[0.2+8]/[1+8]=8.2/9=0.91$.

- ***Notar:***

  a) g es continua, ya que *z(p)* es continua y cada $max(0,z_j(p))$ es también continua.

  b) *g(p) pertenece a* S^{k-1} ya que

$$\sum_{j=1}^{k} g_j(p) = \sum_{j=1}^{k}\left(\frac{p_j + \max(0, z_j(p))}{1+\sum_l \max(0, z_l(p))}\right) = \frac{\sum_{j=1}^{k} p_j + \sum_{j=1}^{k}\max(0, z_j(p))}{1+\sum_l \max(0, z_l(p))} = 1$$

La aplicación *g* puede explicarse económicamente: si $z_l(p)>0$, entonces $p_l\uparrow$ (como el subastador walrasiano).

Equilibrio Walrasiano. Teorema de la Existencia

Como g es continua y aplica S^{k-1} en S^{k-1}, por Brower: existe un p=g(p*), es decir:*

$$p_j^* = g_j(p^*) = \frac{p_j^* + \max(0, z_j(p^*))}{1 + \sum_{l=1}^{k} \max(0, z_l(p^*))}, \quad j = 1, 2, \dots k$$

- **2)** ***Ahora hay que demostrar que el vector p* es un EW (es decir que $z_j(p^*) \leqslant 0$, j=1,2,…,k)***. De la expresión anterior:

$$p_j^* + \sum_{l=1}^{k} \max(0, z_l(p^*)) = p_j^* + \max(0, z_j(p^*))$$

$$p_j^* \sum_{l=1}^{k} \max(0, z_l(p^*)) = \max(0, z_j(p^*))$$

Equilibrio Walrasiano. Teorema de la Existencia

- Multiplicando por $z_j(p^*)$ y sumando las k ecuaciones:

$$z_j(p^*)p_j^*\sum_{l=1}^{k}\max(0,z_l(p^*)) = z_j(p^*)\max(0,z_j(p^*))$$

$$[\sum_{l=1}^{k}\max(0,z_l(p^*))]\sum_j p_j^* z_j(p^*) = \sum_j z_j(p^*)\max(0,z_j(p^*))$$

- Por la Ley de Walras: $\sum_j p_j^* z_j(p^*) = 0$
- por lo que:

$$\sum_j z_j(p^*)\max(0,z_j(p^*)) = 0$$

Cada uno de los términos de esta suma es igual o mayor que 0 (ya que es 0 o $z_j(p^*)^2$). Si $z_j(p^*)>0$ no se cumpliría la igualdad anterior, luego $z_j(p^*)\leqslant 0$ y p^* es un EW.