Tema 2

Teoria del Intercambio de Edgeworth.

Teoría del Intercambio de Edgeworth. Un modelo sencillo de intercambio puro: 2 agentes y 2 bienes

- Recordatorio:
- 2 individuos A y B y 2 bienes de consumo: x_1 y x_2
- No hay producción
- Los individuos posen dotaciones iniciales:

$$w^A = (w_1^A, w_2^A) \text{ y } w^B = (w_1^B, w_2^B) \text{ con}$$

$$w_1^A + w_1^B = w_1 \quad \text{y} \quad w_2^A + w_2^B = w_2$$

- Cada agente posee unas preferencias bien definidas sobre las cestas de bienes y puede consumir su dotación inicial o intercambiarla con otros agentes (trueque)

Teoría del Intercambio de Edgeworth. Un modelo sencillo de intercambio puro: 2 agentes y 2 bienes

- Sea las cestas de consumo de A y B:

$$x^A = (x_1^A, x_2^A) \text{ y } x^B = (x_1^B, x_2^B)$$

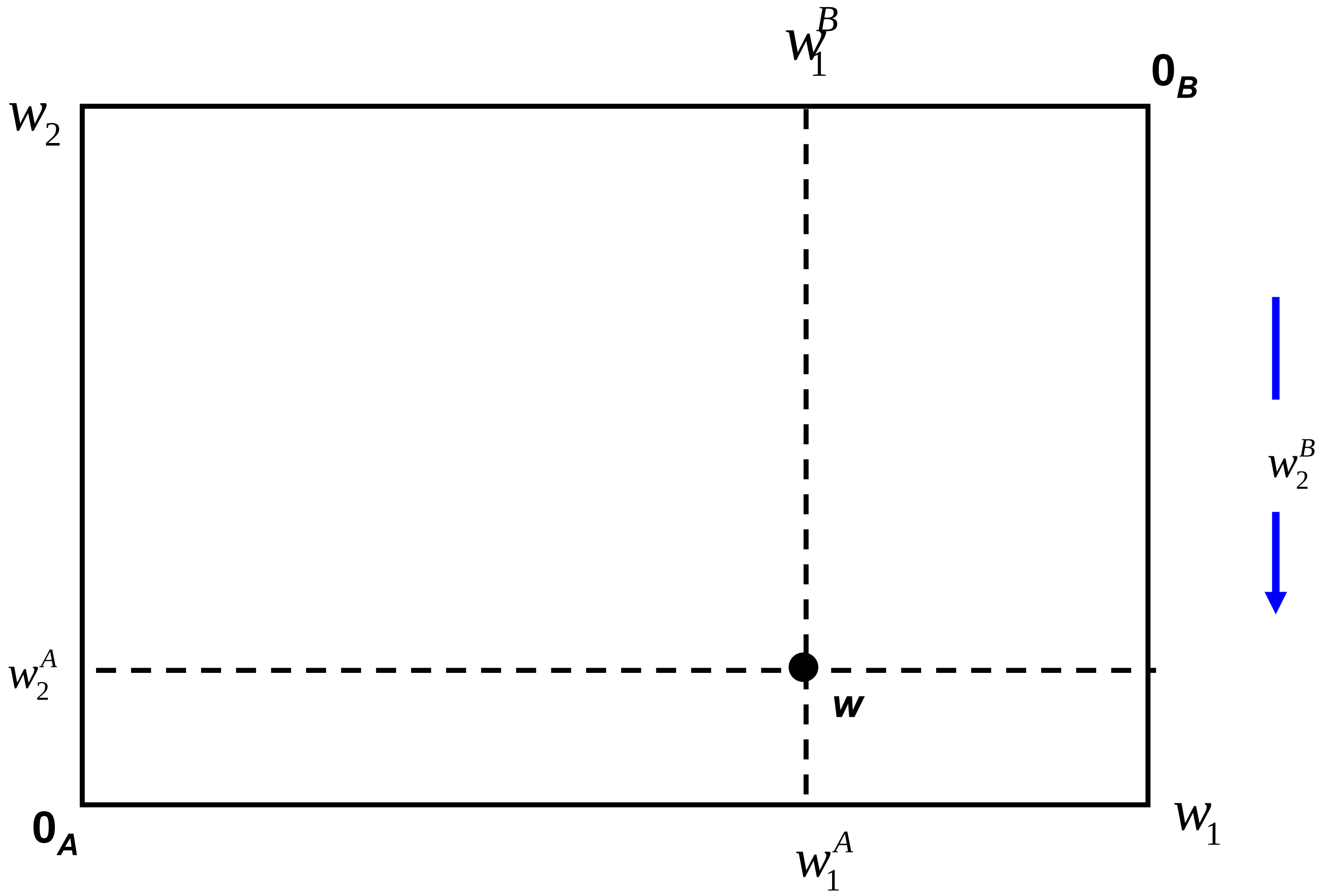
- Un par de cestas de consumo es una asignación:

$$x = (x^A, x^B)$$

- Una asignación es factible o viable si:

$$x_1^A + x_1^B = w_1^A + w_1^B = w_1 \quad \text{y} \quad x_2^A + x_2^B = w_2^A + w_2^B = w_2$$

Teoría del Intercambio de Edgeworth. Un modelo sencillo de intercambio puro: 2 agentes y 2 bienes : La Caja de Edgeworth-Bowley recoge todas las asignaciones factibles.



Teoría del Intercambio de Edgeworth. Racionalidad de Pareto

RACIONALIDAD DE PARETO: Una asignación es eficiente en el ***sentido de Pareto*** si no es posible mejorar a un agente sin que el otro empeore. Formalmente:

Definición: Una asignación factible ***x*** es *Pareto óptima* (o es un óptimo de Pareto) si no existe otra asignación factible ***y*** tal que:

1) $u^i(y^i) \geq u^i(x^i)$ para todo i, y

2) $u^j(y^j) > u^j(x^j)$ para al menos algún j

El conjunto de todas las asignaciones Pareto óptimas es la curva de contrato.

Para la economía de intercambio *2X2*, y si las funciones de utilidad son diferenciables, la curva de contrato se calcula: *Max* $u^1(x^1)$, *sujeto a* $u^2(x^2) \geq \underline{u}^2$ y sujeto a factibilidad (las dos primeras C.P.O. del Lagrangiano asociado $\rightarrow RMS^1 = RMS^2$ y factibilidad).

Teoría del Intercambio de Edgeworth. Núcleo de la Economía

- RACIONALIDAD INDIVIDUAL: Cualquier asignación x^i satisface racionalidad individual con respecto a w^i si: $u^i(x^i) \geq u^i(w^i)$

- El **Núcleo** de una economía de intercambio es aquel *conjunto de asignaciones que no pueden mejorarse (o bloquearse) por ninguna coalición de agentes*.

- Para las economías de intercambio con dos agentes el núcleo es equivalente a aquellas asignaciones que cumplen ***racionalidad individual y racionalidad de Pareto*.**

- Para economías con más de dos agentes: Se necesitan definit las coaliciones de agentes y como pueden bloquear a una signación dada.

Núcleo de la Economía cuando hay más de dos agentes:

- <u>Definición de **coalición**</u>: Una coalición *S* es cualquier subconjunto de agentes que puede llegar a acuerdos obligatorios.

- Cualquier coalición *S* puede bloquear una asignación propuesta *x* si los agentes en *S* pueden redistribuirse sus dotaciones iniciales y conseguir más utilidad que bajo <u>x.</u>

- ***Núcleo***: RI, R. de Pareto y racionalidad de las coaliciones intermedias.
- Ejemplo: tres agentes {A,B,C}
- Coaliciones: {A},{B},{C}; {A,B,C,}; {A,B}, {B,C} y
- {A,C}

Núcleo de una Economía con n agentes

- Sea n el número de agentes de la economía,
- $w=(w^1,w^2,\ldots,w^n)$ el vector de dotaciones iniciales ,
- $x=(x^1,x^2,\ldots,x^n)$ una asignación de la economía, y
- $F(w)=\{x: \sum_i x^i = \sum_i w^i\}$ el conjunto de asignaciones factibles.

- ***Coalición que bloquea:*** Sea *S* una coalición. *S bloquea* a la asignación *x* en F(W), a través de *y* en F(W) si:
- 1) $u^i(y^i) \geq u^i(x^i)$ para todo *i* en *S*, y
- 2) $u^j(y^j) > u^j(x^j)$ para al menos algún *j* en *S*
- 3) $\sum_{i \text{ en } S} y^i \leqslant \sum_{i \text{ en } S} w^i$ (factibilidad en *S*)

- El **núcleo** de una economía de intercambio ***C(w):***
- ***C(w)={x: no existe y que satisfaga 1),2) y 3) con x e y en F(w)}***

Existencia del núcleo de una Economía de intercambio. ¿Será vacío el núcleo de una economía?: No si existe el EW, ya que el EW pertenece al núcleo

Definición (alternativa): Un par (x^*, p^*) de asignación-precio es un EW:

- 1) $\sum_i x^{*i} = \sum_i w^i$ (x^* es factible), y
- 2) Si $u^i(x^i) > u^i(x^{*i})$, entonces $p^* x^i > p^* w^i$ (x no es asequible).

Proposición: Si (x^*, p^*) es un EW para las dotaciones iniciales w, entonces x^* pertenece a $C(w)$.

Demostración: Supongamos que no es cierto y que x* no pertenece a $C(w)$. Entonces existe una coalición S y una asignación x tal que para todo i en S, $u^i(x^i) > u^i(x^{*i})$, *y*

$\sum_{i\ en\ S} x^i = \sum_{i\ en\ S} w^i$ (x factible en S), $\rightarrow p^* \sum_{i\ en\ S} x^i = p^* \sum_{i\ en\ S} w^i$ *(1)*

Como x^* es un EW cumple por definición que para todo i en S

$p^* x^i > p^* w^i$ y sumando sobre todas las *i's:*

$$p^* \sum_{i\ en\ S} x^i > p^* \sum_{i\ en\ S} w^i$$, que contradice *(1)* (= $\sum_{i\ en\ S} x^i$)

Luego x* pertenece a C(w).

Contracción del núcleo y Economías réplica.

El núcleo posee más asignaciones que la del EW.

Vamos a desmostrar que si la Economía aumenta de tamaño,aparecen más coaliciones S y más oportunidades de bloquear:

el núcleo se contrae al hacerse mayor la economía.

Usamos un ***tipo de crecimiento*** de la economía muy sencillo.

Definición*:* 2 agentes son del mismo tipo si sus preferencias y sus dotaciones iniciales son idénticas.

Definición*:* Una economía es una ***réplica a escala r*** de otra si existen en la primera r veces tantos agentes de cada tipo que hay en la segunda.

Nos limitamos a 2 tipos de agentes: tipo A y tipo B.

Tratamiento igualitario en el núcleo.

El núcleo r-ésimo (C r-ésimo) de una economia es el núcleo de su réplica a escala r.

Lema:*Tratamiento igualitario en el núcleo*.

Las preferencias son estrictamente convexas, continuas y monótonas. Si *x pertenece al núcleo r-ésimo*, *dos agentes cualesquiera del mismo tipo han de recibir la misma combinación de bienes en x.*

Demostración: Sean

$A_1, A_2, \ldots A_r$ y

$B_1, B_2, \ldots B_r$,

2 tipos de agentes replicados a escala r.

Supongamos que los agentes no son tratados igualmente. Consideremos a los agentes peor tratados: marginado tipo *A*: A_M y marginado tipo *B*: B_M.

Tratamiento igualitario en el núcleo.

- (cont. Demos.) Sean las *asignaciones medias:*

$$\underline{x}_A = \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r} x_{A_j} \quad \text{y} \quad \underline{x}_B = \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r} x_{B_j}$$

- Se tiene que $x_{A_M} < \underline{x}_A, \quad x_{B_M} \leq \underline{x}_B$
- (Notar que si todos recibieran los mismo cada uno recibiría la media). Por convexidad de las preferencias A_M y B_M prefieren la asignación media a su asignación:

$$u_A(\underline{x}_A) > u_A(x_{A_M}), \quad u_B(\underline{x}_B) \geq u_B(x_{B_M})$$

- *¿Pueden A_M y B_M bloquear la asignación x del núcleo a través de las asignaciones medias?*
- Podrán ***sí*** la asignación media es ***factible*** para la coalición de ellos dos: $\underline{x}_A + \underline{x}_B = w_A + w_B$

Tratamiento igualitario en el núcleo.

- (cont. demos.). Comprobamos factibilidad de las asignaciones medias para la coalición de marginados: Por factibilidad de ***x*** y dado que todos los agentes *A* tienen la misma dotación y todos los *B* también (economía réplica).

$$\underline{x}_A + \underline{x}_B = \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r} x_{A_j} + \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r} x_{B_j} = x_{A_1} + x_{A_2} + \ldots + x_{A_r} + x_{B_1} + \ldots. + x_{B_r} =$$

$$w_{A_1} + w_{A_2} + \ldots + w_{A_r} + w_{B_1} + \ldots. + w_{B_r} = \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r} w_{A_j} + \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r} w_{B_j} =$$

$$\frac{1}{r} r w_A + \frac{1}{r} r w_B = w_A + w_B.$$

- Por tanto, las asignaciones medias son factibles para la coalición de A_M y B_M.

Tratamiento igualitario en el núcleo

- (Continuación). El marginado A_M prefiere la asignación media de su tipo a x_{AM} y el marginado B_M considera a la asignación media de su tipo al menos tan buena como x_{BM}.
- La monotonicidad fuerte permite a A_M prescindir de una pequeña porción de su asignación media: $\underline{x}_A - \varepsilon$
- y sobornar a B_M ofreciendole: $\underline{x}_B + \varepsilon$

  formando una coalición que puede bloquear (y mejorar) a la asignación *x.*

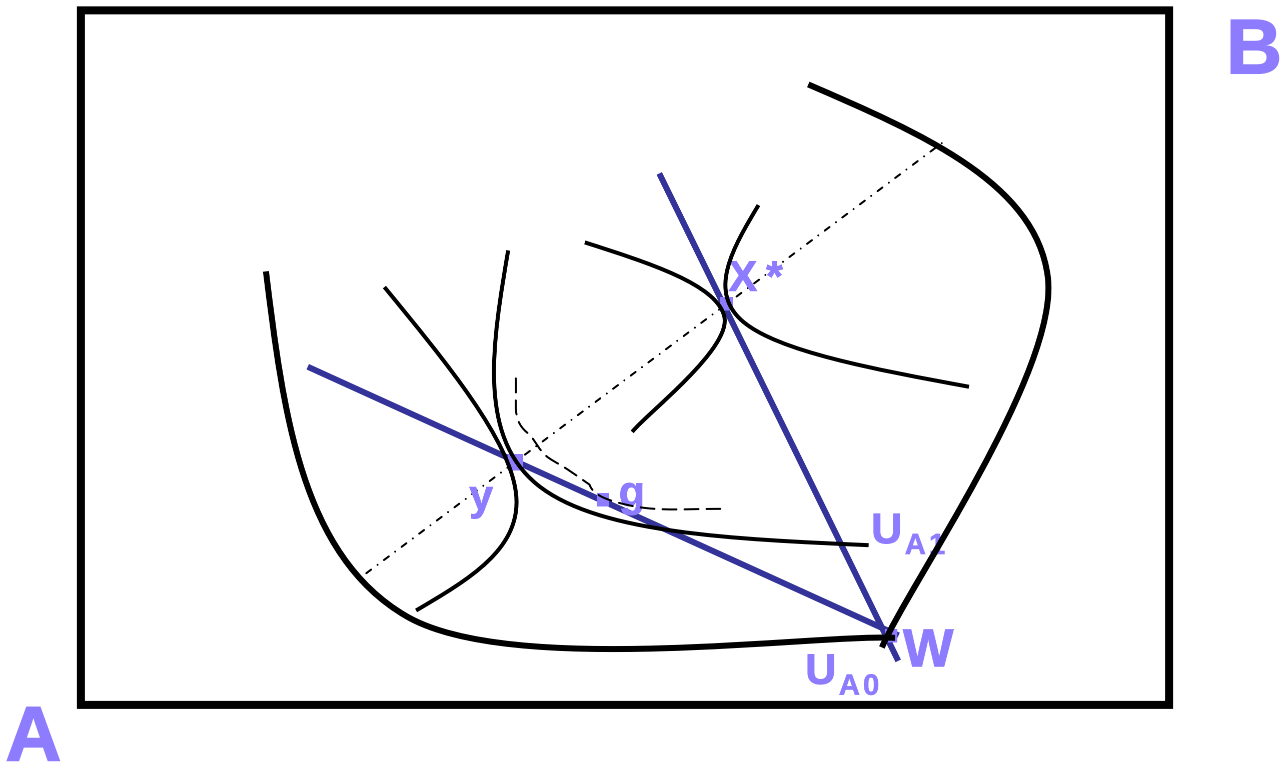
- **Luego los agentes no pueden recibir tratamiento distinto en el *núcleo r-ésimo de una economía*.**

Contracción del Núcleo

- ***Importancia del lema***. Simplificar el análisis del núcleo de las economías réplica: una asignación *x* en *C* indica lo que obtiene cada agente tipo A y tipo B y se puede seguir trabajando en dos dimensiones.
- Toda asignación *x* que no sea un EW quedará finalmente fuera del núcleo r-ésimo de la economía. Las asignaciones del núcleo tienden a coincidir con las del EW en economías grandes.
- ***Proposición***: *Contracción del núcleo*:
- *Supongamos que las preferencias son estrictamente convexas y monótonas y que existe una única asignación de EW:* ***x*,*** *para las dotaciones iniciales* ***w****. Entonces si* ***y*** *no es una asignación de un EW, existe una réplica a escala* ***r****, tal que* ***y*** *no pertenece al núcleo* ***r-ésimo*** *de la economía.*

Contracción del Núcleo

- Demostración: Observemos el siguiente gráfico:



Contracción del Núcleo

Como ***y*** no es un ***EW***, la recta que une ***w*** e ***y*** corta a la curva de indiferencia $\boldsymbol{u_{A1}}$ que pasa por ***y*****.** Entonces se puede elegir un punto como el ***g*** que ***A*** prefiere a ***y***.

Vamos a buscar una réplica y una coalición que bloquee a la asignación y.

Por continuidad de las preferencias: $g=\theta w+(1-\theta)y$

Sea $\theta=T/V<1$, con T *y* V números enteros.

Luego: $g_A=(T/V)w_A+(1-T/V)y_A$

Tomemos una **réplica** de la economía **a escala *V*.**

Formemos la **coalición**: ***V agentes tipo A y V-T agentes tipo B,***

y consideremos la **asignación *z*** que dá a los tipos A la asignación $\boldsymbol{g_A}$, y a los B, la signación $\boldsymbol{y_B}$:

Z: $\boldsymbol{g_A}$ *tipos* ***A*** con $\boldsymbol{u_A(z_A) > u_A(y_A)}$

$\boldsymbol{y_B}$ *tipos* ***B,*** con $\boldsymbol{u_B(z_B) \geq u_B(y_B)}$,

ya que los tipos A siempre puede sobornar a los tipos B, dándoles un epsilón más.

Contracción del Núcleo

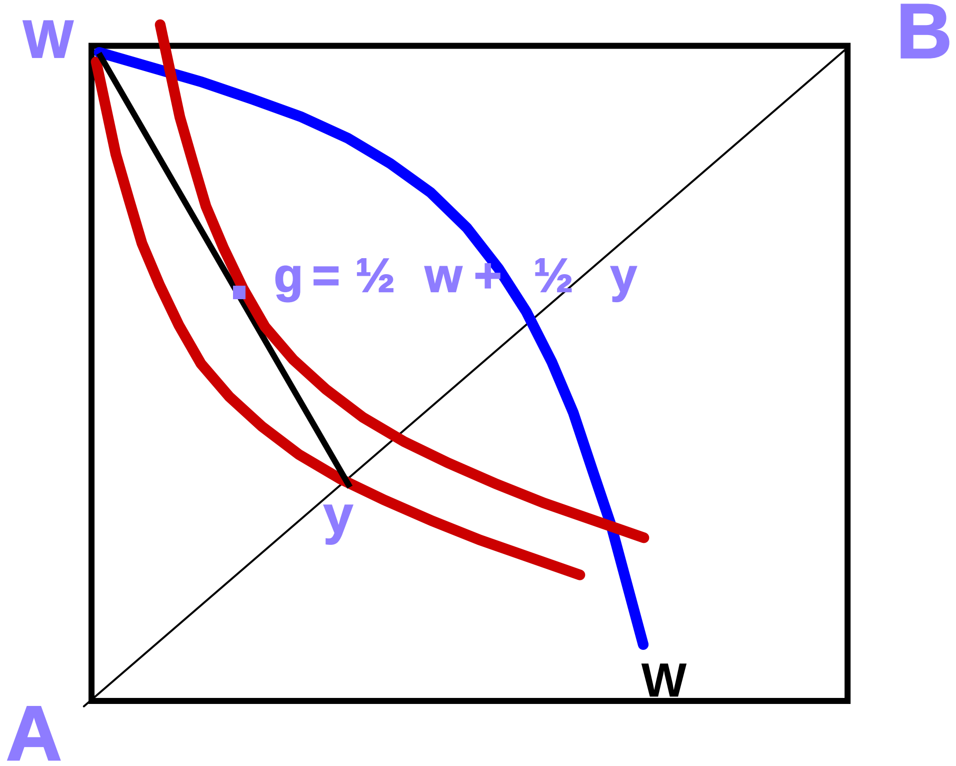
- Para que esta coalición pueda bloquear a la asignación ***y*** a través de ***z***, ***z*** tiene que ser factible para la coalición. Vamos a comprobar que este es el caso:

- $Vz_A+(V-T)z_B=Vg_A+(V-T)y_B=V[(T/V)w_A+(1-T/V)y_A]+ (V-T)y_B=$
- $Tw_A+(V-T)y_A+ (V-T)y_B= Tw_A+ +(V-T) (y_A+y_B)=$ *(por factb y)*
- $Tw_A+ +(V-T) (w_A+w_B)= V w_A+ +(V-T) w_B$, que es la dotación de la coalición propuesta.

- Por tanto, la coalición propuesta puede bloquear a la asignación y a través de z, en la réplica a escala V de la economía.
- De esta manera, todas las asignaciones del núcleo que no sean EW desaparecerán en alguna réplica de la economía.

Contracción del Núcleo. Ejemplo

- 2 agentes: A y B



Contracción del Núcleo. Ejemplo.

- ¿En qué **réplica** de la economía y qué **coalición** puede bloquear a ***y*** a través de ***z***: $\boldsymbol{g_A}$ para los A e ***y*** para los B?
- *g=1/2 w+1/2 y* *luego θ=T/V=1/2,*
- es decir*: V=2 y V-T=2-1=1*
- Replicamos a escala *V=2* (duplicamos la economía: 4 agentes) *y* formamos la coalición*:*
- *V*=2 agentes tipo A *y (V-T)=1* agente tipo B *(*coalición de 3 agentes).
- Esta coalición puede bloquear a ***y*** a través de ***z*** si ***z*** es factible para la coalición. Comprobamos la factibilidad:
- $Vz_A+(V-T)z_B = Vg_A + +(V-T)y_B = 2(1/2\ w_A + 1/2\ y_A)+y_B =$
- $w_A + y_A + y_B = w_A + w_A + w_B = 2w_A + w_B,$
- *que son las dotaciones iniciales de la coalición. Luego la coalición bloquea a y a través de z.*

Contracción del Núcleo. Ejemplo.

En general:

Si la asignación fuera $\boldsymbol{g=1/n\ w+(1-1/n)y}$

Entonces $\theta=T/V=1/n$, es decir: $V=n$ y $V\text{-}T=n-1$

Con $g_A=1/n\ w_A+(n-1)/n\ y_A$

- Se toma la réplica a escala $\boldsymbol{V=n}$ de la economía y la coalición:
- $V=\boldsymbol{n}$ agentes tipo A y $V\text{-}T=\boldsymbol{n-1}$ agentes tipo B