Tema 3

La Economía del Bienestar.

Propiedades de Bienestar de los Equilibrios Walrasianos: Los dos Teoremas Generales del Bienestar.

- La existencia del Equilibrio Walrasiano es un resultado positivo, pero nos interesa su contenido normativo: ***¿Son los equilibrios Walrasianos óptimos o eficientes en algún sentido?***
- Recordemos la eficiencia de Pareto:
- Eficiencia de Pareto: Una asignación es eficiente en el ***sentido de Pareto*** si no es posible mejorar a un agente sin que el otro empeore. Formalmente:
- Definición: Una asignación factible ***x*** es *eficiente en el sentido de Pareto* (o Pareto óptima, u óptimo de Pareto) si no existe otra asignación factible ***y*** tal que:
  1) $u^i(y^i) \geq u^i(x^i)$ para todo i, y
  2) $u^j(y^j) > u^j(x^j)$ para al menos algún j

Propiedades de Bienestar de los Equilibrios Walrasianos: Primer Teorema General del Bienestar

Recordemos la definición de Equilibrio Walrasiano que tiene en cuenta la asignación del equilibrio:

Definición (alternativa): Un par (x^*, p^*) de asignación-precio es un EW:

- 1) $\sum_i x^{*i} = \sum_i w^i$ (x es factible), y
- 2) Si $u^i(x^i) > u^i(x^{*i})$, entonces $p^* x^i > p^* w^i$ (x no es asequible).

Proposición (PTGB): Si (x^*, p^*) es un EW para las dotaciones iniciales w, entonces x^* *es eficiente en el sentido de Pareto.*

Demostración: Supongamos que no es cierto y que x* no es eficiente en el sentido de Pareto. Entonces existirá una asignación x tal que para todo *i*

$u^i(x^i) > u^i(x^{*i})$, *y* $\sum_i x^i = \sum_i w^i$ (*x es factible*), $\rightarrow p^* \sum_i x^i = p^* \sum_i w^i$ *(1)*

Como x^* es un EW cumple por definición que para todo i, $p^* x^i > p^* w^i$

y sumando sobre todas las *i's:*

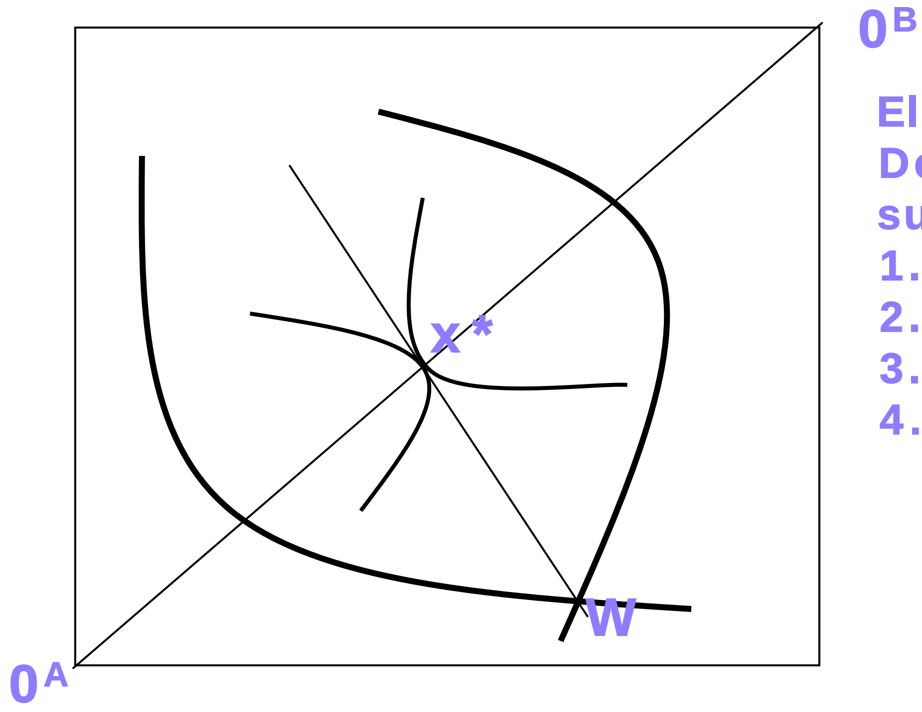
$p^* \sum_i x^i > p^* \sum_i w^i$, que contradice *(1)* (= $\sum_i x^i$)

Luego x* es Pareto eficiente.

Propiedades de Bienestar de los Equilibrios Walrasianos:

Primer Teorema General del Bienestar.

Recordemos la Caja de Edgeworth: Parece que en el caso “normal” todo EW es un OP (1º TGB) y todo OP es un EW (2º TGB)



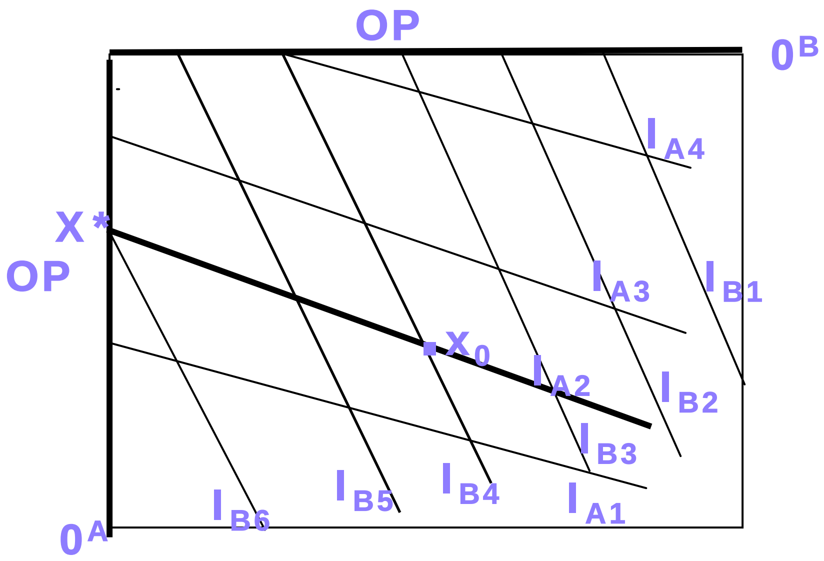
El caso normal
Descansa en muchos supuestos:
1.Convex. Preferec.
2. No saturación
3. Divisibilidad perfecta
4…

Propiedades de Bienestar de los Equilibrios Walrasianos:

Primer Teorema General del Bienestar.

¿Es todo EW (o EC) siempre un OP? Bajo los supuestos del modelo ***si***, pero, en general, puede crear problemas la relajación de dos supuestos: ***1) Saturación***→que existan puntos de saturación en la Caja y ***2) Indivisibilidad de los bienes***→bienes no divisibles.

Ejemplo 1. B tiene el punto de máxima saturacion en la Caja:



Las curvas de indiferencia son convexas pero no estrictamente.
Supongamos primero que no existen puntos de saturación:
Óptimos de Pareto: bordes norte y oeste de la Caja.

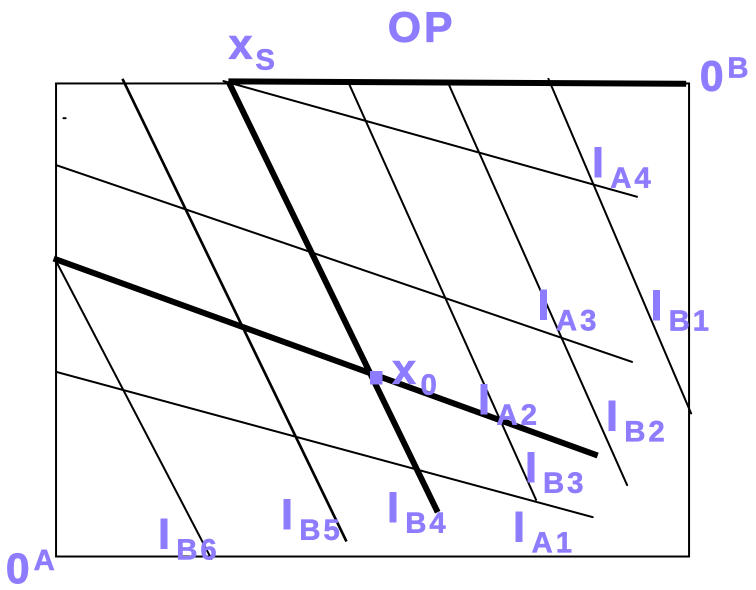
Supongamos que la recta del ratio de precios coincide con I_{A2} y $W=X_0$.

EW=X* y EW=OP

Propiedades de Bienestar de los Equilibrios Walrasianos:

Primer Teorema General del Bienestar.

Ejemplo 1 (cont.). Supongamos ahora que B tiene el punto de máxima saturación en la Caja. Sea $\boldsymbol{x_S}$ el punto de saturación de B y recordemos que $\boldsymbol{x_0}$ es la dotación inicial. La línea $\boldsymbol{x_S}$-$\boldsymbol{x_0}$ señala que B está totalmente saciado.



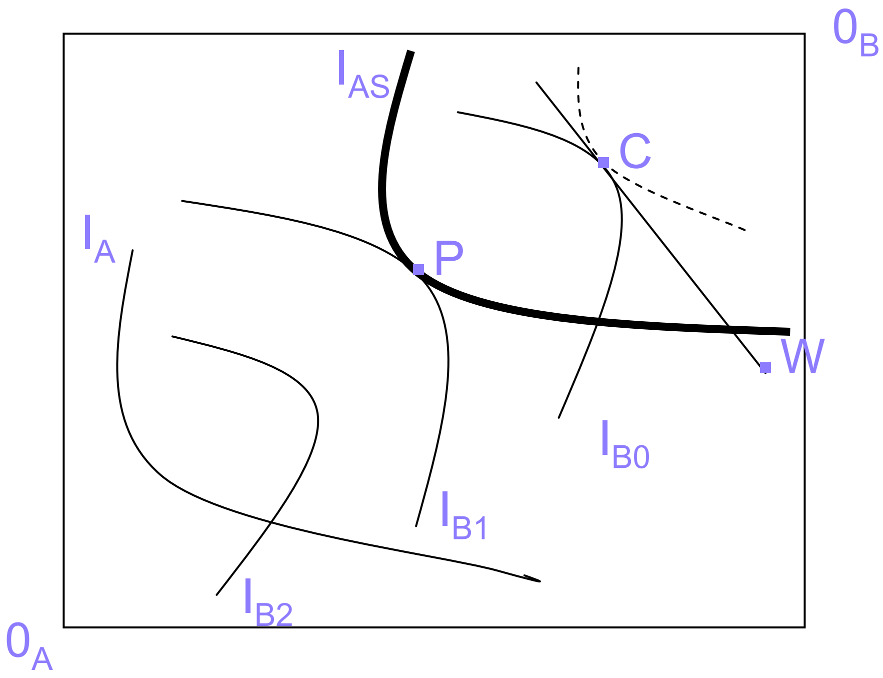
Óptimos de Pareto: de x_S a O_B en el borde norte e la Caja.

Supongamos, como antes, que la recta del ratio de precios coincide con I_{A2} y $W=X_{0.}$ Por saturación:

$EW=X_0$ y EW no es un OP, ya que A está mejor en x_S y B no empeora.

Propiedades de Bienestar de los Equilibrios Walrasianos: Primer Teorema General del Bienestar.

- *Ejemplo 2:* Variación del anterior. A está saciado sobre y por encima de I_{AS}. Cada asignación del área a partir de I_{AS} le reporta la misma utilidad a A.



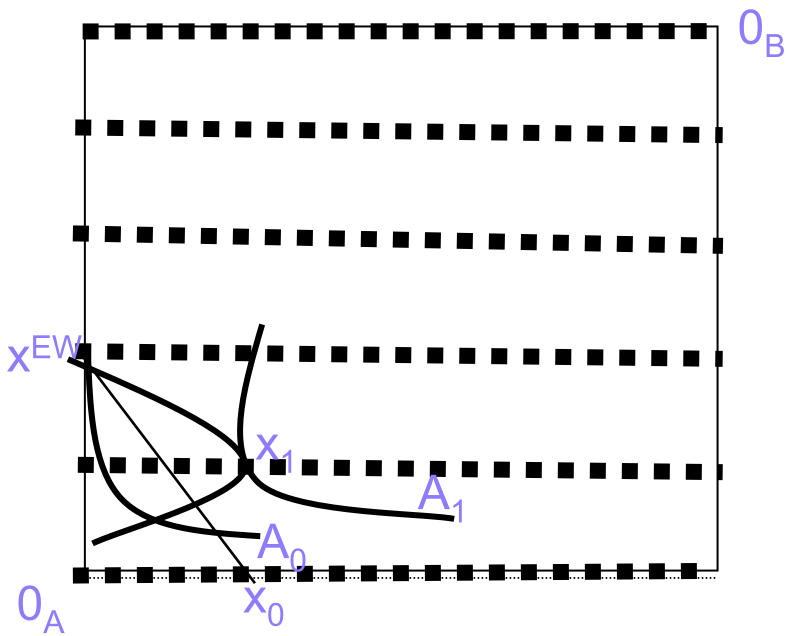
Sea W la dotación inicial. Bajo la restricción presupuestaria que pasa por W, la asignación C=EW.

Pero C no es un OP, ya que En la asignación P, B está mejor y A no empeora.

Propiedades de Bienestar de los Equilibrios Walrasianos:

Primer Teorema General del Bienestar.

Ejemplo 3: Bienes indivisibles. Las preferencias están definidas sobre puntos en $\mathbf{R}^2$, pero sólo se pueden elegir los puntos de disponibilidad. Sea x_0 la dotación adicional.



El EW es x^{EW}, pero no es OP, ya que en x_1 el individuo A está mejor sin que B empeore.

Propiedades de Bienestar de los Equilibrios Walrasianos:

Segundo Teorema General del Bienestar.

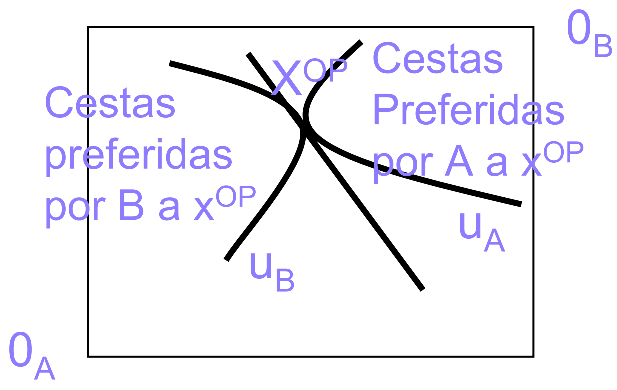
El contenido normativo de los EW viene dado por el 2º TGB:

OP→EW

Notar la siguiente propiedad de las asignaciones Pareto eficientes: Las cestas de bienes que prefiere A no tienen ningún punto en común con las cestas de vienes que prefiere B: es decir son dos ***conjuntos disjuntos.***

Entonces se puede trazar una recta (un hiperplano) entre estos dos conjuntos y separarlos y que a su vez pase por el OP:

Este OP podría "sostenerse" por un sistema de precios descentralizado



Propiedades de Bienestar de los Equilibrios Walrasianos:

Segundo Teorema General del Bienestar.

- Existe un teorema matemático que dá las *condiciones suficientes* para que un hiperplano separe a dos conjuntos: ***Teorema del Hiperplano separador.***
- ***<u>Hiperplano</u>*****:** Sea *a* en ***R***, *p* en $\mathbf{R}^n$. Un hiperplano *H(p,a)* en $\mathbf{R}^n$ es un conjunto tal que: $H(p,a)=\{x \text{ en } \mathbf{R}^n : px=a\}$

Es un conjunto de dimensión n-1: en $\mathbf{R}^2$ es una recta, en $\mathbf{R}^3$ un plano.

Ejemplo: En un modelo de dos bienes, la recta de balance es el hiperplano $H(p,M)=\{x \text{ en } \mathbf{R}^2 : px=M\}$, donde *M* es la renta de un individuo, *p* los precios y *x* la cantidad demandada por un individuo.

<u>Hiperplano de separación</u>*:* $H(p,a)=\{x \text{ en } \mathbf{R}^n : px=a\}$ separa (o separa estrictamente a los conjuntos no vacios S_1 y S_2 en $\mathbf{R}^n$ si:

x_1 en S_1 implica que $p\,x_1 \geq a$ $(> a)$

x_2 en S_2 implica que $p\,x_2 \leq a$ $(< a)$

Si *H* existe S_1 y S_2 son separables.

Propiedades de Bienestar de los Equilibrios Walrasianos:

Segundo Teorema General del Bienestar.

<u>Teorema de Separación</u>: *(o del Hiperplano separador (Minkowski))*

Sean los conjuntos ***no-vacios***, ***convexos*** *y* ***disjuntos*** S_1 y S_2 en $\mathbf{R}^n$,

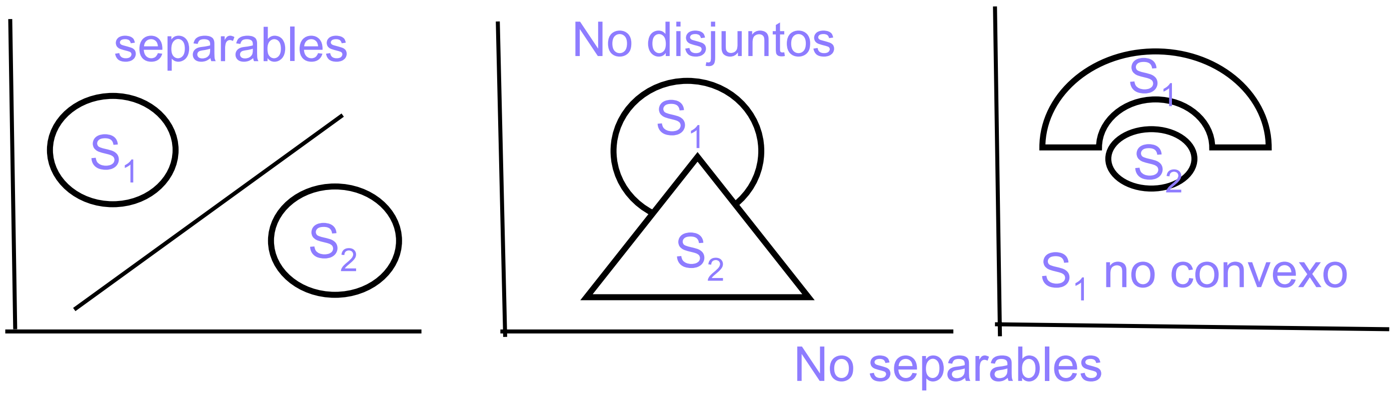
entonces existe un hiperplano que los separa, es decir: existe un

$H(p,a)=\{x \text{ en } \mathbf{R}^n : px=a\}$, *tal que*

x_1 en S_1 implica que $p\,x_1 \geq a$

x_2 en S_2 implica que $p\,x_2 \leq a$ ➡ $p\,x_1 \geq p\,x_2$

El Teorema dá las ***condiciones suficientes***:



Propiedades de Bienestar de los Equilibrios Walrasianos:

Segundo Teorema General del Bienestar.

La base lógico-formal del 2º TGB es el Teorema de la Separación ➡ se necesitan preferencias convexas para que los conjuntos preferidos sean convexos y poder encontrar el hiperplano que los separe.

<u>2º Teorema General del Bienestar</u>*: Supongamos que x^* es una asignación eficiente en el sentido de Pareto, con $x^{*i} >> 0$, para $i=1,2..,n$, y que las preferencias son convexas, continuas y monótonas. Entonces x^* es un EW para las dotaciones iniciales $w^i=x^{*i}$ $i=1,2,\ldots n$.*

<u>Demostración</u>: Sea $\mathbf{P}_i=\{x \text{ en } \mathbf{R^k}: u^i(x^i)> u^i(x^{*i})\}$, (conjunto de cestas preferidas por i a x^{*i}) y sea $\mathbf{P}=\sum_i \mathbf{P}_i =\{z : z=\sum_i x^i, x^i \text{ en } \mathbf{P}_i\}$, (conjunto de todas las combinaciones agregadas que pueden ser redistribuidas entre todos los agentes de modo que todos ellos mejoren su situación).

Propiedades de Bienestar de los Equilibrios Walrasianos:

Segundo Teorema General del Bienestar.

Demostración (cont.) Como las preferencias de los agentes son convexas ➨Cada $\boldsymbol{P}_i$ *es un conjunto convexo.*

Como la suma de conjuntos convexos es un convexo➨ $\boldsymbol{P}$ *convexo.*

Sea $w=\sum_i x^{*i}$ la combinación agregada existente.

Como x^* es un OP no existe ninguna redistribución de x^* que permita mejorar a los agentes ➨ w no pertenece a $\boldsymbol{P}$ y $w \cap \boldsymbol{P}=\varnothing$ (su intersección es vacía).

Tenemos dos conjuntos $w=\sum_i x^{*i}$ y $\boldsymbol{P}$ que son no-vacíos, convexos y disjuntos: por tanto, existirá un p tal que

$$pz \geq p \sum_i x^{*i} = pw, \text{ para todo } z \text{ en } \boldsymbol{P},$$

o reordenando,

$$p(z-\sum_i x^{*i}) \geq 0, \text{ para todo } z \text{ en } \boldsymbol{P}.$$

Propiedades de Bienestar de los Equilibrios Walrasianos:

Segundo Teorema General del Bienestar.

- Ahora hay que demostrar que *p* es un vector de precios de equilibrio➨ que el par (x^*, p) es un EW.
- Por la definición de EW lo sera si:
- 1) $\sum_i x^{*i} = \sum_i w^i$ (x es factible), y
- 2) Si $u^i(x^i) > u^i(x^{*i})$, entonces $p^* x^i > p^* w^i$ (*x* no es asequible).

1) se cumple por los supuestos de partida, por lo que sólo hay que

demostrar 2). La demostración consiste en tres pasos (no la hacemos):

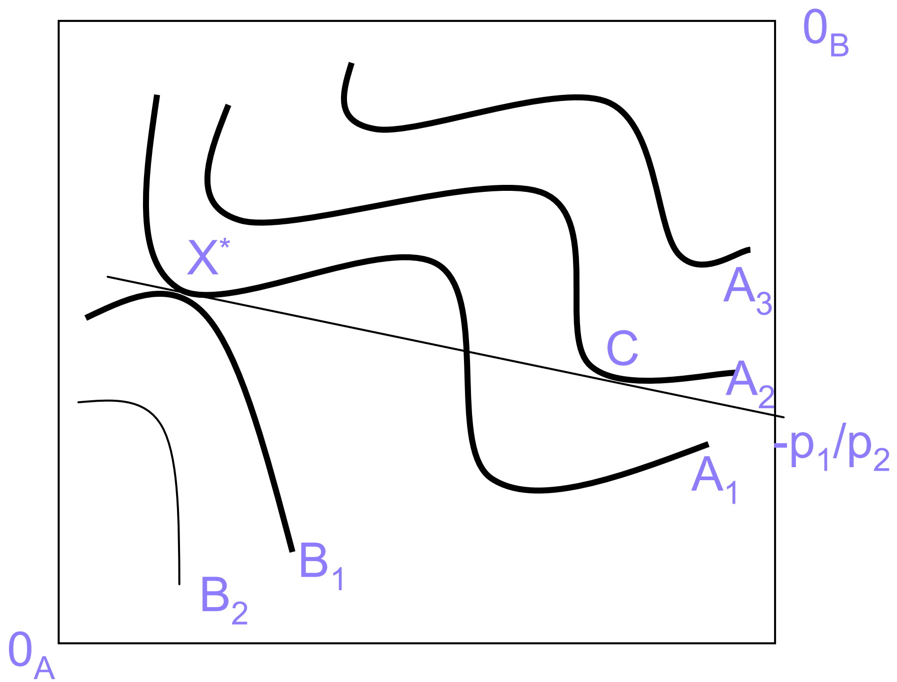
a) *p* es no-negativo
b) Si $u^i(y^i) > u^i(x^{*i})$, entonces $p^* y^i \geq p^* w^i$, para todo *i*
c) Si $u^i(y^i) > u^i(x^{*i})$, entonces $p^* y^i > p^* w^i$, para todo *i*.

Propiedades de Bienestar de los Equilibrios Walrasianos: Segundo Teorema General del Bienestar.

- *Implicaciones del 2º TGB*:
- Se pueden ***separar*** los problemas de distribución de los problemas de eficiencia.
- El mercado permite conseguir cualquier asignación de recursos que se desee: es ***neutral*** desde el punto de vista distributivo.
- ***Contenido normativo importante***: Todo OP se puede sostener por un sistema de precios dada una redistribución adecuada de las dotaciones iniciales➡ implicaciones para la Política Económica.

Segundo Teorema General del Bienestar: Casos en los que los OP no se pueden descentralizar

- ***Ejemplo 1:*** Preferencias no convexas: A tiene preferencias no convexas



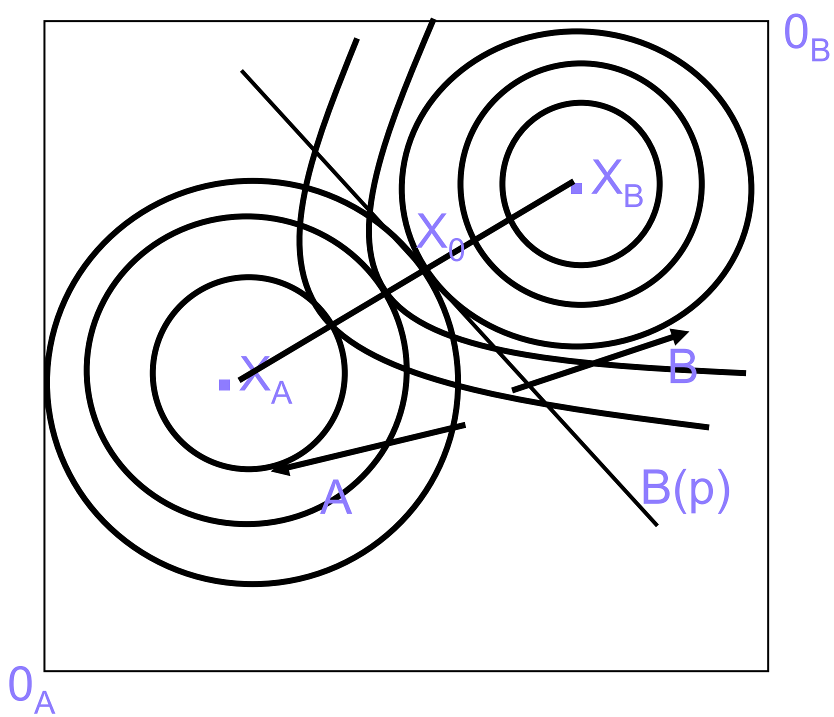
Sea X* un OP, y sea W= X* .

El vector de precios $p=(p_1,p_2)$ no puede descentralizar a X* como EW, ya que A prefiere el punto C a X*:

X* no es un EW.

Segundo Teorema General del Bienestar: Casos en los que los OP no se pueden descentralizar

- ***Ejemplo 2:*** Relajamos la no-saturación: los puntos de máxima satisfacción de A y B se encuentran en la Caja de Edgeworth. Sean X_A y X_B dichos puntos para A y B respec.

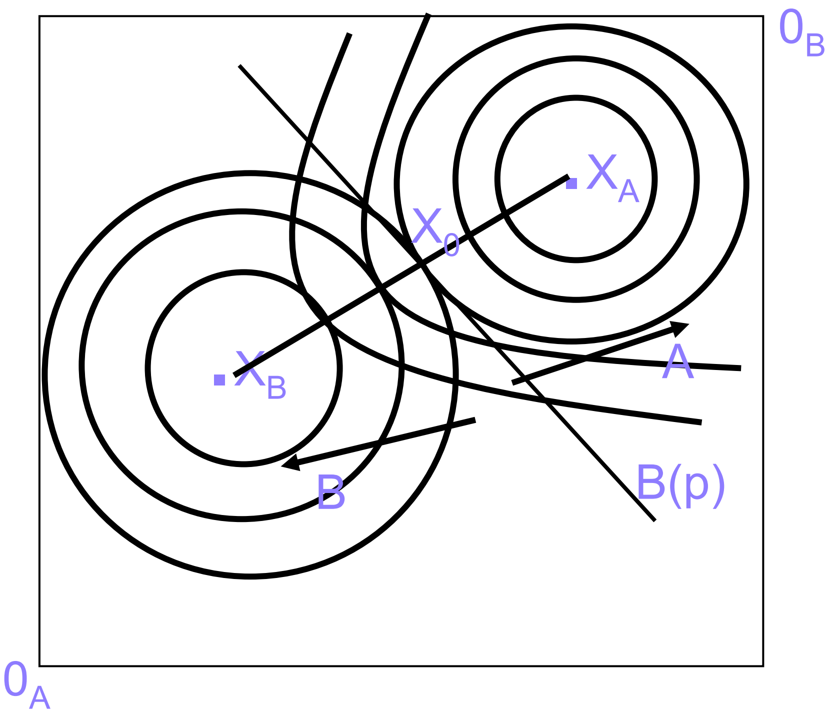


Asignaciones OP= ptos. de tangencia entre X_A y $X_{B..}$ El punto X_0=OP y sea W=X_0 y B(p) la recta de balance.

¿Es X_0 un EW? NO si los precios son positivos, ya que tanto A como B están mejor en X_A y X_B, respectivamente, y son factibles para los agentes.

Segundo Teorema General del Bienestar: Casos en los que los OP no se pueden descentralizar

- ***Ejemplo 2 (***cont). Notar que si X_A y X_B cambian de localización y cada uno en su puntos de saturación no es factible:

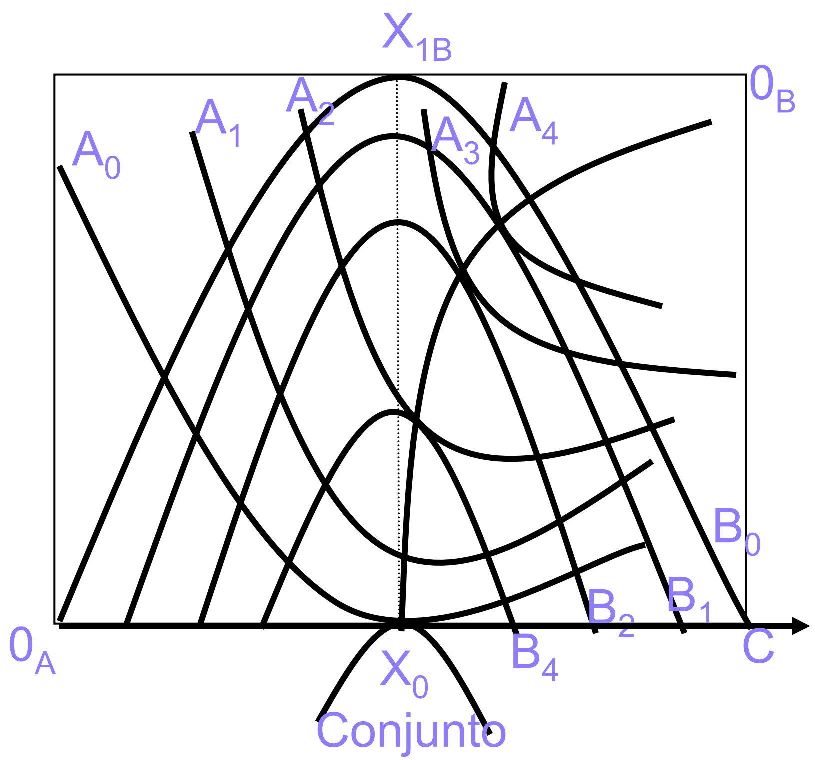


Asignaciones OP= ptos. de tangencia entre X_A y X_B.. El punto X_0=OP y sea W=X_0 y B(p) la recta de balance.

¿Es X_0 un EW? SI, ya que X_A y X_B no son factibles a esos precios.

Casos en los que los OP no se pueden descentralizar: el caso excepcional de Arrow

- ***Ejemplo 3. Caso excepcional de Arrow***: Supóngase saciedad: B está saciado de x_1 en x_{1B}. Sea $W=X_0$



En W, A no tiene nada excepto bien 1.
X_0=OP, ¿Es X_0 un EW?

El único vector de precios tangente a X_0 es $p_1/p_2=0$, por lo que $p_1=0$.
Pero si $p_1=0$, A maximiza en C,
Ya que x_1 es un bien libre.

Por lo tanto X_0 no es un EW.

Caso excepcional de Arrow

- Notar que en X_0, el valor de la cesta de consumo de A es cero y el conjunto preferido de B está fuera de la Caja (no factible)
- El caso excepcional de Arrow puede resumirse en cualquiera de las siguientes observaciones:
- 1. No es posible ningún estado de la Economía en el que las tenencias de A del bien 2 sean menores de lo que son en X_0. Luego para $p_1=0$, el valor de las tenencias de A en X_0 es el mínimo posible.
- 2. En X_0, la UMg de x_1 para B no es positiva (B está saciado)
- 3. En X_0, A no tiene nada que sea deseado por B (luego no se puede comerciar).

- Por tanto, para que un OP sea alcanzable como EW, se debe suponer que 1), 2) y 3) no se dan, es decir, que todos los agentes poseen algunas unidades de un bien que es deseado por alguien más ➡ nadie puede ser excluido de la posibilidad de intercambio.

La maximización del bienestar social

- Hasta ahora, las decisiones individuales han sido el referente de la discusión de la existencia y optimalidad del EW.
- Sin embargo, al estudiar el 2º TGB aparecen algunos problemas de ***decisión colectiva***: por ejemplo, se necesita algún criterio para decidir que óptimo descentralizar ➡ cómo distribuir el bienestar.
- Los problemas de *decisión colectiva* se remontan a a los estudios del bienestar prsonal de Bentham o Mills y la teoría de las votaciones de Condorcet y Borda.
- Su formulación moderna arranca del planteamiento del problema por Bergson (1938), en términos de la ***función de bienestar social*** (***fbs***).
- El trabajo de Arrow (1951, 1963) es el que marca la evolución actual del tema (***FBS***).
- Los problemas de decisión colectiva se enmarcan en la ***Teoría de la Elección Social***, cuyo fin es la obtención de reglas de evaluación que reflejen las preferencias de los individuos: "***buscar criterios de agregación de las preferencias individuales en preferencias sociales***".

Criterio de Pareto: Juicios de valor Paretianos.

- 1. ***Independencia del proceso***: el proceso por el que se alcanza una asignación particular no importa.
- 2. ***Individualismo***: Bajo el criterio Paretiano el único aspecto relevante de una asignación es su efecto en los individuos de la sociedad.
- 3. ***No paternalismo***: Los individuos son los mejores jueces de su propio bienestar.

  Discutible: ejemplo, los bienes de consumo no socialmente aceptados (drogas duras, pornografía infantil,..)
- 4. ***Benevolencia***: El criterio paretiano es benevolente con los individuos ya que un aumento caeteris paribus en la utilidad de un individuo se considera una mejora.

  Discutible: el aumento del bienestar del individuo más rico de una sociedad se considera una mejora si ningún otro individuo empeora, inluso si hay individuos que se están muriendo de hambre.

Criterio de Pareto:

Conjunto de posibilidades de utilidad:

Vectores de utilidad asignados a las asignaciones factibles,

$U=\{(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ en R^n: existe una asignación factible x tal que $u_i \leq u_i(x_i)$, para $i=1,2,3,\ldots,n\}$.

Este conjunto está formado por los vectores de utilidad asociados al conjunto de asignaciones factibles.

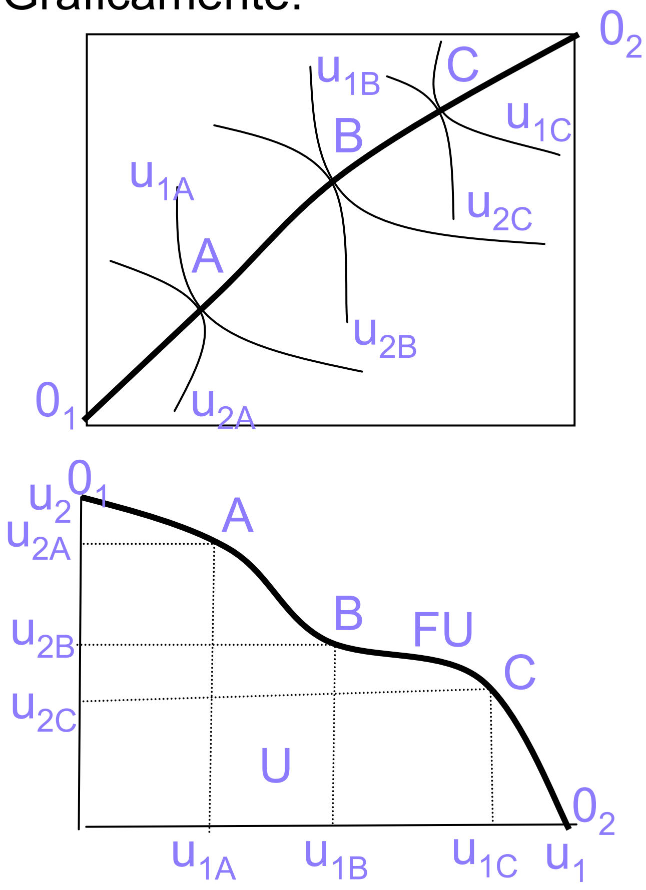
Frontera de utilidad o frontera de Pareto:

$FU=\{(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ en R^n: no existe otro vector $(u'_1, u'_2, \ldots, u'_n)$ en U tal que $u'_j \geq u_j$ para todo $j=1,2,..,n$, y $u'_i > u_i$ para algún $i\}$.

La frontera de utilidad recoge los vectores de utilidad correspondientes a las asignaciones eficientes en el sentido de Pareto.

Frontera de utilidad:

Gráficamente:



Asignaciones factibles y
Curva de contrato

Conjunto de posibilidades de utilidad U y frontera de utilidad FU o frontera de Pareto

Frontera de utilidad:

- La frontera de utilidad como función de los niveles de utilidad se obtiene a partir del problema de maximización definido para caracterizar las asignaciones eficientes:

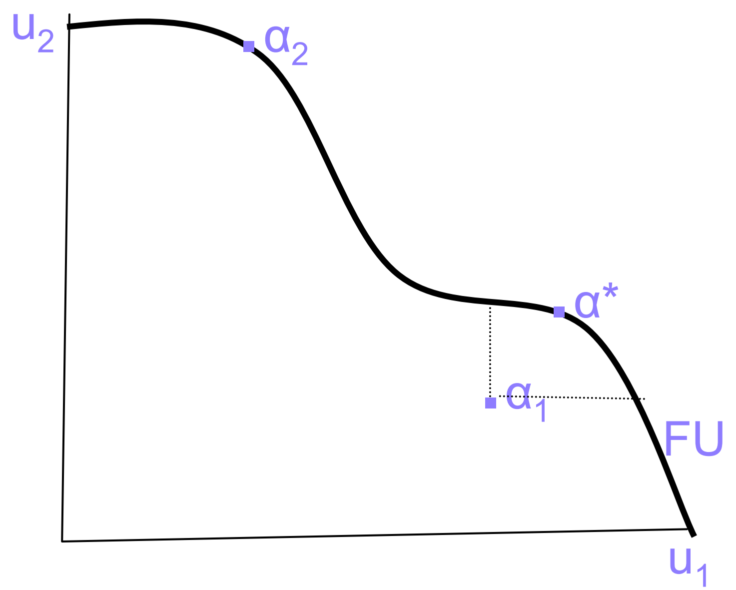
- Max $u_1(x_1)$
- s.a. $u_2(x_2) \geq u_2 = c$ (restricción de utilidad)
- s.a. $x_{11}+x_{21}=w_1$ y $x_{12}+x_{22}=w_2$ (factibilidad)

- Solución: $x_1{}^*(u_2, w_1, w_2)$ y $x_2{}^*(u_2, w_1, w_2)$, que sustituyendo en la función de utilidad del agente 1, da el resultado:
- $u_1(x_1{}^*(u_2, w_1, w_2)) = u_1(u_2, w_1, w_2)$,

- O como función implícita:
- $F(u_1, u_2)=0$

Funciones de Bienestar Social y óptimos sociales.

- **Problema**: el criterio de eficiencia Paretiana no puede generar una *ordenación completa* de las asignaciones, incluso algunos pares de asignaciones no pueden compararse.



α^* y α_2 no pueden compararse: α^* no es Pareto superior a α_2, ni α_2 es Pareto superior a α^* .

α_1 es ineficiente pero α_2 no es Pareto superior a α_1.

Funciones de Bienestar Social y óptimos sociales.

- ***La función de Bienestar social de Bergson*** (fbs) es una función que asigna valores de utilidad o bienestar social a las asignaciones factibles de una economía, de manera que genera una ordenación completa, transitiva y reflexiva del conjunto de asignaciones factibles.
- $W: R^n \rightarrow R, \quad W(u_1(x_1), u_2(x_2), \ldots, u_n(x_n))$
- Toda fbs bergsoniana representa o responde a unos determinados principios distributivos.
- ***fbs paretiana:*** fbs con principios de valor paretianos:
- 1. Independencia del proceso
- 2. Individualismo $\rightarrow W(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
- 3.No paternalismo$\rightarrow W(u_1(x_1), u_2(x_2), \ldots u_n(x_n)) = W(u_1, u_2, \ldots u_n)$
- 4. Benevolencia (Monotonicidad): W creciente en cada u_j

$$\frac{\delta W(u_1, u_2, .., u_n)}{\delta u_j} = W_j > 0, \text{ para todo } j = 1, 2, .., n$$

Funciones de Bienestar Social y óptimos sociales.

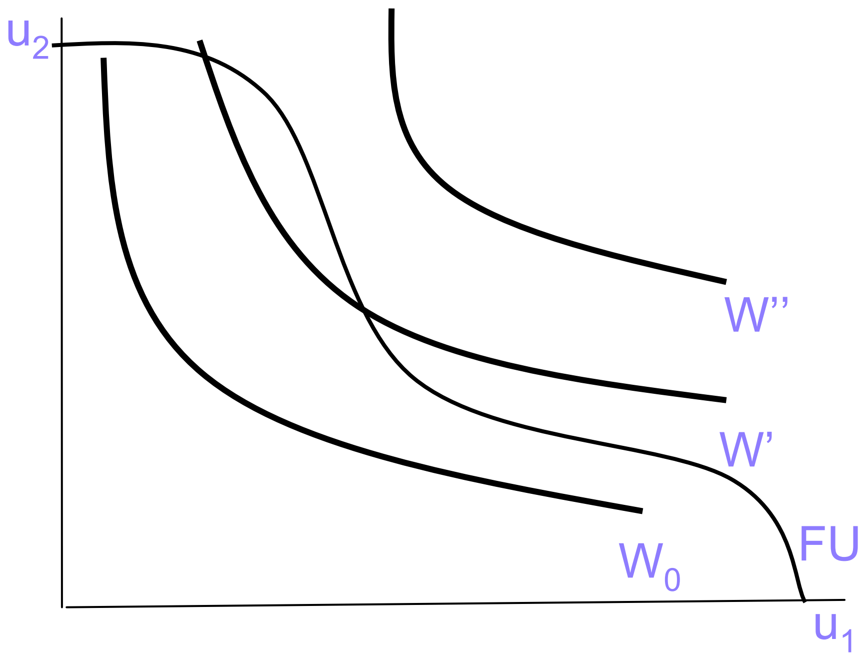
- ***Implicaciones de la benevolencia*** (o monotonicidad). Supongamos dos agentes.
- La fbs es $W(u_1,u_2)$
- 1. Las curvas de indiferencia de bienestar o curvas de isobienestar más alejadas del origen representan un mayor bienestar.
- 2. Las curvas de isobienestar tienen pendiente negativa: Sea $W(u_1,u_2)=W_0$ una curva de isobienestar.
- $dW=W_1\, du_1+W_2\, du_2=0$

$$\frac{du_2}{du_1} = -\frac{W_1}{W_2} < 0$$

- ya que $W_1>0$ y $W_2>0$

Funciones de Bienestar Social y óptimos sociales.

- Mapa de curvas de isobienestar en el espacio de utilidades



Óptimos sociales.

- Un ***óptimo social*** maximiza la fbs paretiana sobre el conjunto de asignaciones factibles.
- Como el conjunto de asignaciones factibles se corresponde con el conjunto de posibilidades de utilidad el problema es:
- Max $W(u_1,u_2,\ldots u_n)$ s.a. $F(u_1, u_2,\ldots,u_n)=0$.
- Para dos agentes: Max $W(u_1,u_2)$, s.a. $F(u_1, u_2)=0$
- *Lagrangiano asociado:* $L(u_1,u_2,\lambda)= W(u_1,u_2)-\lambda F(u_1,u_2)$

$$\frac{\delta L}{\delta u_1} = \frac{\delta W}{\delta u_1} - \lambda \frac{\delta F}{\delta u_1} = 0$$

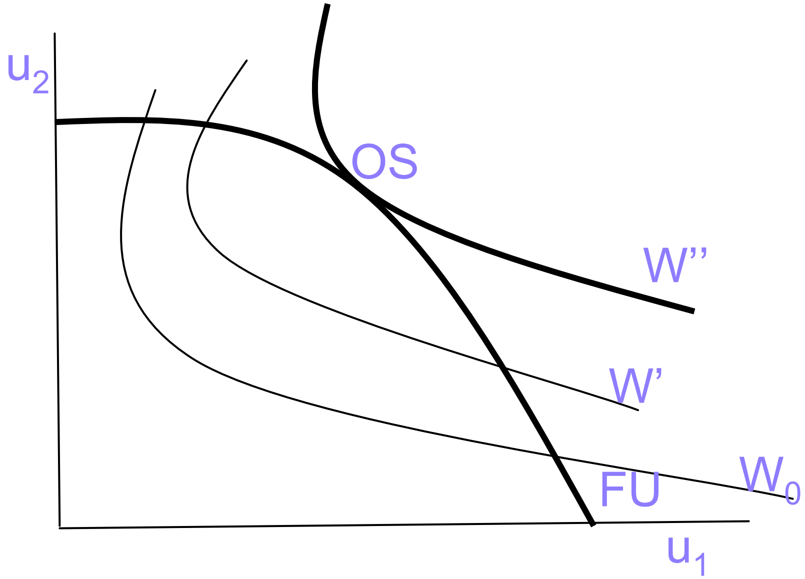
$$\frac{\delta L}{\delta u_2} = \frac{\delta W}{\delta u_2} - \lambda \frac{\delta F}{\delta u_2} = 0$$

$$\frac{\delta L}{\delta \lambda} = F(u_1, u_2) = 0$$

Óptimos sociales.

- Las C.P.O implican

$$\frac{\frac{\delta W}{\delta u_1}}{\frac{\delta W}{\delta u_2}} = \frac{\frac{\delta F}{\delta u_1}}{\frac{\delta F}{\delta u_2}} \rightarrow \frac{du_2}{du_1}\text{en W} = \frac{du_2}{du_1}\text{en F} \rightarrow RMS_W = RMS_F$$



En el OS, la isobienestar W'' es tangente a la FU

Óptimos sociales.

Sea *(u_1^{OS}, u_2^{OS}),* la utilidad del OS. Esta utilidad tiene asociada una asignación $x^*=(x_1^*,x_2^*)$ en la caja de Egeworth que maximiza la fbs. Entonces

Proposición: Si x^* maximiza una fbs, entonces x^* es eficiente en el sentidode Pareto.

Demostración: Trivial, como consecuencia de la monotonicidad de *W.* Supongamos que x^* no es eficiente en el sentido de Pareto. Entonces existirá otra asignación x' factible tal que:

$u_i(x_i') > u_i(x_i)$ para toda $i=1,2,..,n$, y por monotonicidad de W

$W(u_1(x_1'),u_2(x_2'),\ldots, u_n(x_n')) > W(u_i(x_1^*),u_2(x_2^*),\ldots, u_n(x_n^*))$, que contradice que x^* maximixa la fbs $W(u_1,u_2,\ldots, u_n)$.

Conclusión: la eficiencia de Pareto es necesaria para el OS.

Óptimos sociales.

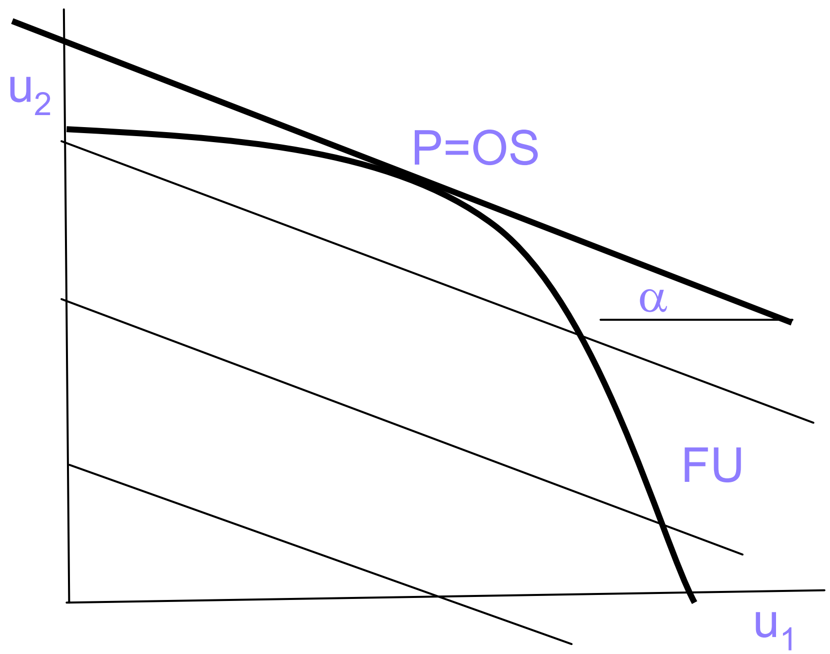
- Consecuencia: Las asignaciones de bienestar máximo son OP.
- Pregunta: ¿Es todo OP alcanzable como máximo de una fbs? En general no, pero:
- ***Proposición***: Sea x^* una asignacion OP, con $x_i^*>>0$, $i=1,2,..,n$. Las funciones de utilidad individuales u_i, $i=1,2,..,n$, son cóncavas, continuas y monótonas. Entonces, existe una cierta elección de ponderaciones a_i^* tal que x^* maximiza $\sum_i a_i^* u_i(x_i)$ sujeta a las restricciones de factibilidad.

Demostración: Para dos agentes la demostración es muy sencilla y se puede ver gráficamente.

Construyamos el conjunto de posibilidades de utilidad U de los agentes. Como las u_i son cóncavas, U es un conjunto convexo.

Óptimos sociales.

Isobienestares: $W_0=a_1u_1+a_2u_2$, o $u_2=W_0/a_2-(a_1/a_2)u_1$, $du_2/du_1=-(a_1/a_2)$ o $RMS_W=a_1/a_2$



Sea *P* el *OP* que se quiere alcanzar como *OS*, y sea la $RMS_{F\ en\ P}=\alpha$.
Entonces como en el *OS*: $RMS_W=RMS_F$, se elige un ratio $a_1/a_2=\alpha$, y la tangencia entre la isobienestar y la *FU* tendrá lugar en *P* y *P=OS.*

Elección Social: El Teorema de la Imposibilidad de Arrow

- *__Problema__*: con el criterio de eficiencia en el sentido de Pareto hay, normalmente, asociadas muchas asignaciones eficientes a muy distintas *distribuciones de bienestar* entre los individuos.
- *__Cuestión__*: Si se quiere definir una asignación socialmente óptima ¿Cómo se puede elegir?
- *__Cambio de enfoque:__* Se pueden definir unas *__preferencias sociales__* que permitan una *__ordenación__* del conjunto de asignaciones factibles, a partir de las *__preferencias individuales.__*
- Sea $\succcurlyeq_i$ la *relación de preferencia* del individuo *i* definida sobre el conjunto A: conjunto de todas las asignaciones factibles. Obsérvese que esta relación está definida ahora sobre asignaciones y NO sobre las cestas de consumo individuales.

Elección Social: El Teorema de la Imposibilidad de Arrow

- ¿Existe algún mecanismo para obtener una relación de preferencia social $\succcurlyeq$ a partir de las preferencias individuales $\{\succcurlyeq_i\}$ que garantice que las *ordenaciones sociales* cumplan una serie de *propiedades* deseables?
- Si existe tal mecanismo o regla, entonces se le denomina la ***Función de Bienestar Social*** *(FBS)*.
- Según este enfoque una *FBS* es un mecanismo de agregación de las preferencias individuales que permite obtener una ordenación social de las distintas asignaciones-.

Elección Social: El Teorema de la Imposibilidad de Arrow

- *Aclaración*:
- Una *función de bienestar social (fbs)* bergsoniana es una función del conjunto de posibilidades de utilidad y asocia un número real a cada vector de utilidades de manera que genera una ordenación del conjunto de posibilidades de utilidad.
- Una *Función de Bienestar Social (FBS)* es una función del conjunto de preferencias individuales sobre posibles estados sociales y asocia una preferencia social a cada posible configuración de las preferencias individuales.
- El concepto de *FBS* es más fundamental, general y moderno: *FBS's* generan *fbs's*. Cambios en las preferencias individuales con una *FBS* dada, cambian las preferencias sociales y, por tanto, la *fbs.* Y, una *FBS* diferente aplicada a un conjunto dado de preferencias individuales producirá una ordenación social diferente y también una *fbs* diferente.

Elección Social: El Teorema de la Imposibilidad de Arrow

- Sea *A* un conjunto de alternativas o estados sociales, $\{\succcurlyeq_i\}$ las preferencias individuales sobre A y consideremos un criterio o regla de agregación de $\{\succcurlyeq_i\}$ que genere unas preferencias sociales $\succcurlyeq$.
- <u>*Propiedades deseables del criterio de agregación*</u>.
- 1. *Completitud,*
- 2. *Reflexividad*,
- 3. *Transitividad*,

La regla genera un orden

- 4. *Universalidad o condición de dominio no restringido*: Para toda $\{\succcurlyeq_i\}$, existe una preferencia social $\succcurlyeq = \Sigma(\succcurlyeq_1, \succcurlyeq_2, \ldots, \succcurlyeq_n)$, con Σ denotando la regla o mecanismo de agregación de las preferencias individuales.

Elección Social: El Teorema de la Imposibilidad de Arrow

- *Universalidad o condición de dominio no restringido* (cont): Esta propiedad nos indica que de cualquier conjunto de preferencias individuales $\{\succcurlyeq_i\}$, se puede derivar una relación de preferencias sociales $\succcurlyeq$.
- Si bien esta propiedad tiene un contenido lógico claro al ser una propiedad de *completitud* en lo que respecta a la obtención de $\succcurlyeq$, tiene también un *contenido político* evidente: el mecanismo de agregación es lo suficientemente permisivo como para admitir cualesquiera valores y reglas de comportamiento individuales.
- Vamos a ver, sin embargo, como esta propiedad no es tan obvia como parece:
- Ejemplo de la *Paradoja del voto:*

Paradoja del voto.

- Ejemplo de la *Paradoja del voto:* Supongamos tres agentes y tres estados sociales (o alternativas): *{a,b,c}*
- Regla de agregación: *votación por mayoría*: el estado "a" se prefiere socialmente al "b" si lo prefiere la mayoría de los individuos.
- Preferencias individuales sobre estados sociales:
- $(a,b,c)_1$, $(b,c,a)_2$, $(c,a,b)_3$

Paradoja del voto

- <u>*Paradoja del voto (cont):*</u>
- Preferencia social: (se comparar a pares)

$$(a,b)\ \begin{cases} a: 2 \text{ votos} \\ b: 1 \text{ voto} \end{cases} \mapsto a \succ b \quad \text{o} \quad [a,b]$$

$$(b,c)\ \begin{cases} b: 2 \text{ votos} \\ c: 1 \text{ voto} \end{cases} \mapsto b \succ c \quad \text{o} \quad [b,c]$$

Transitividad implicaría que $a \succ c$, o $[a,c]$.
Comparamos ahora el par (a,c)

$$(a,c)\ \begin{cases} a: 1 \text{ voto} \\ c: 2 \text{ votos} \end{cases} \mapsto c \succ a \quad \text{o} \quad [c,a]$$

¡Luego la regla no es transitiva!

Paradoja del voto

- *Paradoja del voto (cont):* Por tanto, este mecanismo plantea un problema: puede generar una ordenación social de las asignaciones que *no sea transitiva*.
- La regla de la mayoría falla para este caso de preferencias individuales, pero daría una ordenación social transitiva para preferencias idénticas, por ejemplo, $(a,b,c)_i$, i=1,2,3.
- Otro ejemplo: $(a,c,b)_1$, $(b,a,c)_2$, $(a,b,c)_3$
- Lo que se busca es que la regla de elección social funcione para *cualquier* caso o tipo de preferencias individuales.
- Tipo de preferencias posibles para tres estados sociales:
- $(a,b,c)_i$, $(a,c,b)_i$, $(b,a,c)_i$, $(b,c,a)_i$, $(c,a,b)_i$, $(c,b,a)_i$
- Cada una de estas preferencias se puede combinar con cada una de las seis posibles preferencias de cada uno de los otros individuos: 6^3=216 posibles tipos de preferencias.
- La regla de elección social debe funcionar para todas ellas: el *dominio* de la función que transforma un conjunto de preferencias individuales en una ordenación social no está restringido.

Elección Social: El Teorema de la Imposibilidad de Arrow

5. *Unanimidad o regla de Pareto:*

   Para cualquier par **a** y **b** en A, si a $\succ_i$ b para todo i entonces a $\succ$ b.

- Condición demasiado débil o demasiado fuerte según la lectura que se le dé:
- Demasiado débil en su <u>lectura no excluyente</u> ya que cualquier relación de preferencia social debe considerar **a** mejor que **b** si así lo consideran unánimemente todos los individuos.
- Demasiado fuerte en su <u>lectura excluyente</u>, ya que exigir la unanimidad como único criterio de valoración social implica que la relación de preferencia social no podrá ordenar casi nunca.

Elección Social: El Teorema de la Imposibilidad de Arrow

6. *Independencia respecto de las alternativas irrelevantes*:
   Para cualquier par **a** y **b** en A_0 ($A_0 \subseteq A$), si a $\succcurlyeq_i$ b y a $\succcurlyeq_i^*$ b, para todo i, entonces a $\succcurlyeq$ b y a $\succcurlyeq^*$ b, y para todo A_0.

- A_0 es cualquier subconjunto de A, $\{\succcurlyeq_i\}$ y $\{\succcurlyeq_i^*\}$ dos conjuntos de preferencias individuales.
- Si las preferencias individuales cambian de una manera que dejan inalterada cada preferencia de i entre **a** y **b**, entonces se debe seguir manteniendo que **a** se prefiere socialmente a **b**.

Elección Social: El Teorema de la Imposibilidad de Arrow

<u>*Indep. altern. irrelevantes* (Cont)</u> →Implica:

Considérese tres alternativas (a,b,c) y dos individuos. Un cambio solamente en la posición de **c** en las ordenaciones individuales (cambio de preferencias) no tendría que afectar a la ordenación social de **a** y **b** (**c** es una alternativa irrelevante en la elección entre **a** y **b**).

<u>Ejemplo</u>: $\begin{cases} \text{Individuo uno: } (a,b,c)_1 \rightarrow a \succ_1 b \\ \text{individuo dos: } (b,c,a)_2 \rightarrow b \succ_2 a \end{cases}$

Considérese la regla de agregación: ***Votación mediante ordenaciones***: se le asigna un entero a cada alternativa con la propiedad de que las más preferidas tienen asignados enteros de menor valor. Se suman las valoraciones para cada par de alternativas y gana socialmente la que tiene menor puntuación.

Elección Social: El Teorema de la Imposibilidad de Arrow

Ejemplo (cont): Luego $(a=1,b=2,c=3)_1$ y $(b=1,c=2,a=3)_2$.
Comparamos el par de alternativas (a,b): a=1+3=4 y b=2+1=3 $\rightarrow$
$b \succ a$ (socialmente se prefiere **b** a **a**).
Considérese un cambio en las preferencias individuales:

$$\begin{cases} \text{Individuo uno: } (a,c,b)^*_1 \rightarrow a \succ_1^* b \\ \text{individuo dos: } (b,a,c)^*_2 \rightarrow b \succ_2^* a \end{cases}$$

Las preferencias individuales entre a y b no cambian

Luego: $(a=1,c=2,b=3)_1$ y $(b=1,a=2,c=3)_2$
Elegimos socialmente entre (a,b): a=1+2=3 y b=3+1=4 $\rightarrow$
$a \succ b$ (socialmente se prefiere ahora **a** a **b**).
Las preferencias individuales entre **a** y **b** no han cambiado mientras que sí lo han hecho las preferencias sociales.

La regla de agregación de Votación mediante ordenaciones no es independiente de las alternativas irrelevantes.

Elección Social: El Teorema de la Imposibilidad de Arrow

Otro ejemplo de que la regla de votación mediante ordenaciones no cumple la independencia de las alternativas irrelevantes:

Sea A=(a,b,c) y como en el ejemplo anterior

$$\begin{cases} \text{Individuo uno: } (a,b,c)_1 \rightarrow a \succ_1 b \\ \text{individuo dos: } (b,c,a)_2 \rightarrow b \succ_2 a \end{cases}$$

y la regla de la votación por ordenaciones nos daba que como $(a=1,b=2,c=3)_1$ y $(b=1,c=2,a=3)_2$, entonces cuando comparamos entre (a,b): a=1+3=4 y b=2+1=3 $\rightarrow$ $b \succ a$ (socialmente se prefiere **b** a **a**).

Consideremos el subconjunto de A, $A_0=(a,b)$, entonces $(a,b)_1$ y $(b,a)_2$, y la regla de votación mediante ordenaciones nos dice que como $(a=1,b=2)_1$ y $(b=1,a=2)_2$, entonces a=1+2=3 y b=2+1=3, por lo que socialmente: $a \backsim b$.

Elección Social: El Teorema de la Imposibilidad de Arrow

7. *No dictadura:*

   No existe un individuo i* tal que para todo **a** y **b** en A: $a \succcurlyeq_{i^*} b$, implica que $a \succcurlyeq b$.

Esta propiedad impide que las preferencias de un individuo sean *decisivas* en todas las elecciones, sean cuales sean las preferencias de los restantes individuos.

Elección Social: El Teorema de la Imposibilidad de Arrow

- ***Teorema de la Imposibilidad de Arrow:***
- *Si un mecanismo de elección social genera una ordenación, de los estados sociales o alternativas, que satisface las propiedades 1-6, debe ser una dictadura: todas las ordenaciones sociales son las ordenaciones de un individuo.*

- El Teorema muestra que las propiedades exigidas a la ordenación resultante de la regla de la Elección Social, que son plausibles y deseables, son, sin embargo, incompatibles con la democracia: no existe ningún sistema "perfecto" para tomar decisiones sociales. Si utilizamos alguno tendremos que renunciar a alguna de las propiedades definidas en 1-7.

Elección Social: El Teorema de la Imposibilidad de Arrow

¿Por dónde se está desarrollando la Teoría de la Elección Social?

- 1. Relajar condición de dominio no restringido.
- 2. Pedir sólo no-ciclicidad, en lugar de transitividad.
- Etc.