Tema 3

Teoría clásica de la Demanda

Teoría clásica de la demanda:

- En la Teoría clasica de la demanda, el comportamiento del consumidor se basa en una relación de preferencias sobre las cestas de consumo en el conjunto de consumo $X \subset R_{+}^{L}$
- Las preferencias del consumidor se recogen en la relación de preferencias $\succcurlyeq$ sobre X.
- Suponemos que $\succcurlyeq$ es <u>*racional*</u> , es decir cumple completitud (y reflexividad) y transitividad.
- Vamos a introducir otros dos supuestos sobre las preferencias: la ***deseabilidad o monotonicidad*** (mayor cantidad de bienes se prefiere a menor cantidad) y la ***convexidad.***

Preferencias monótonas

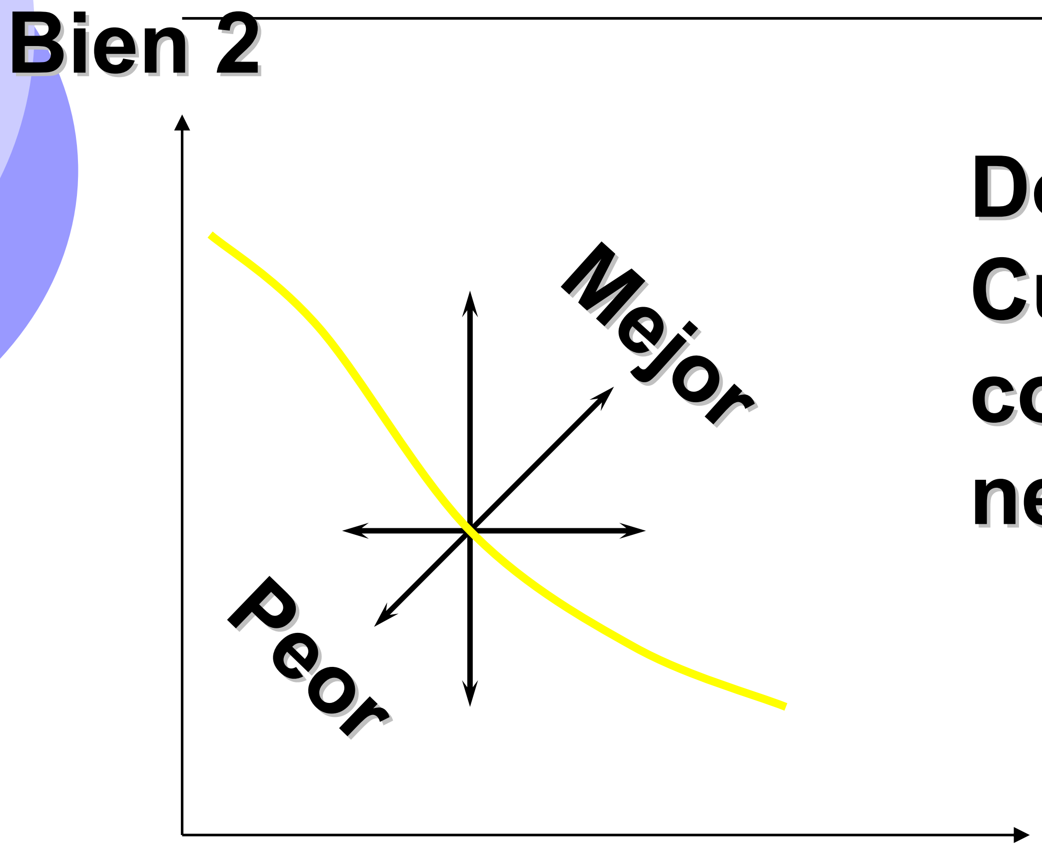
Definición: La relación de preferencias $\succcurlyeq$ sobre X es ***monótona*** si x en X e y >>*x,* implica x $\succ$y ("Cuanto más mejor"). Es ***fuertemente monótona*** si x≥y e x≠y → x $\succ$y .

Nótese que este supuesto se satisface en tanto en cuanto las mercancias sean bienes y no "males".

- Supuesto más débil: ***Insaciabilidad local***:
- x ε X y *e*>0, existe un y ε X, tal que ||x-y||<*e*→ *y* $\succ$ *x.*

- Dada la relación de preferencias y la cesta de consumo x,se pueden definir tres conjuntos de consumo: dado x en X
  - El conjunto indiferente: {y en X: y $\sim$ x}
  - El conjunto de contorno superior: {y en X: y $\succcurlyeq$ x}
  - El conjunto de contorno inferior: {y en X: x $\succcurlyeq$ y}

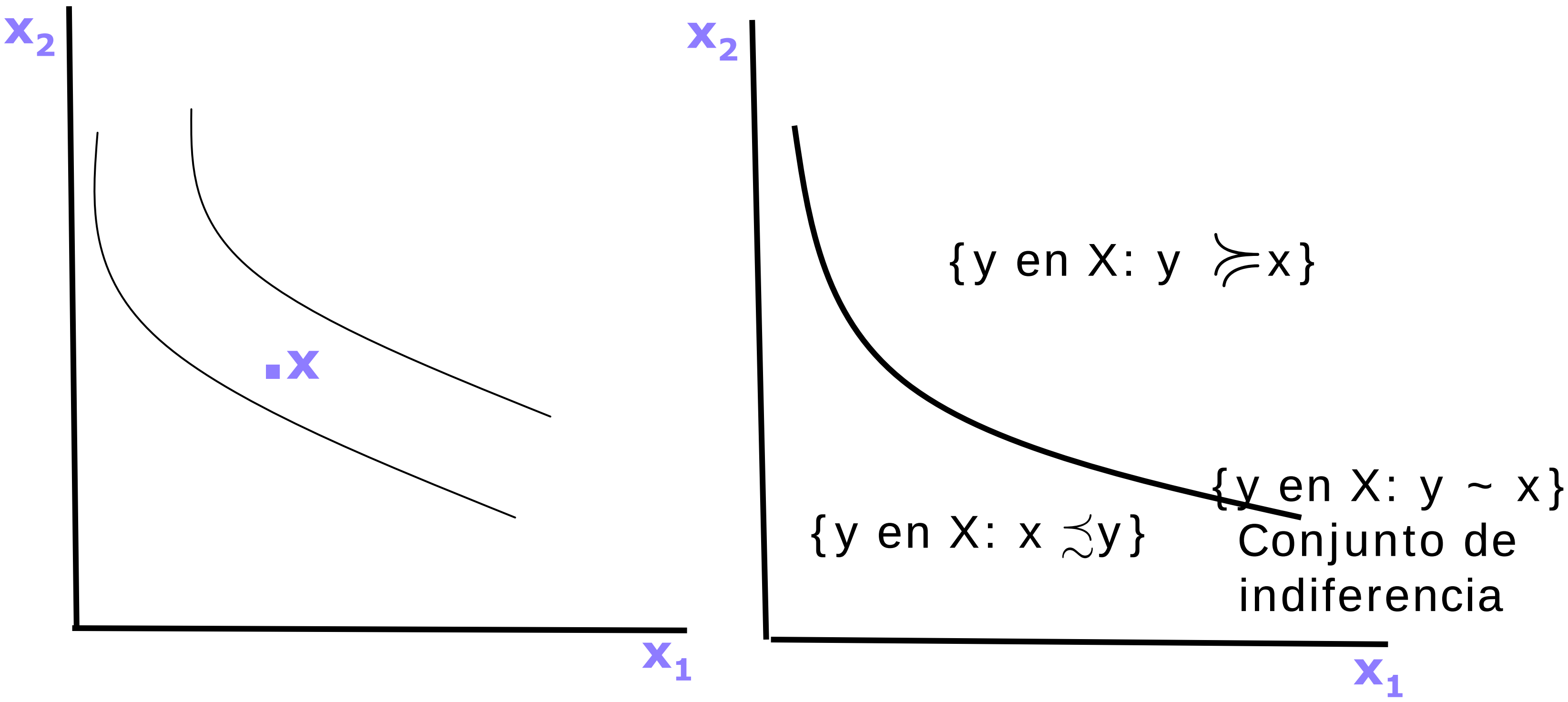
Pendiente de los conjuntos de indiferencia bajo monotonicidad



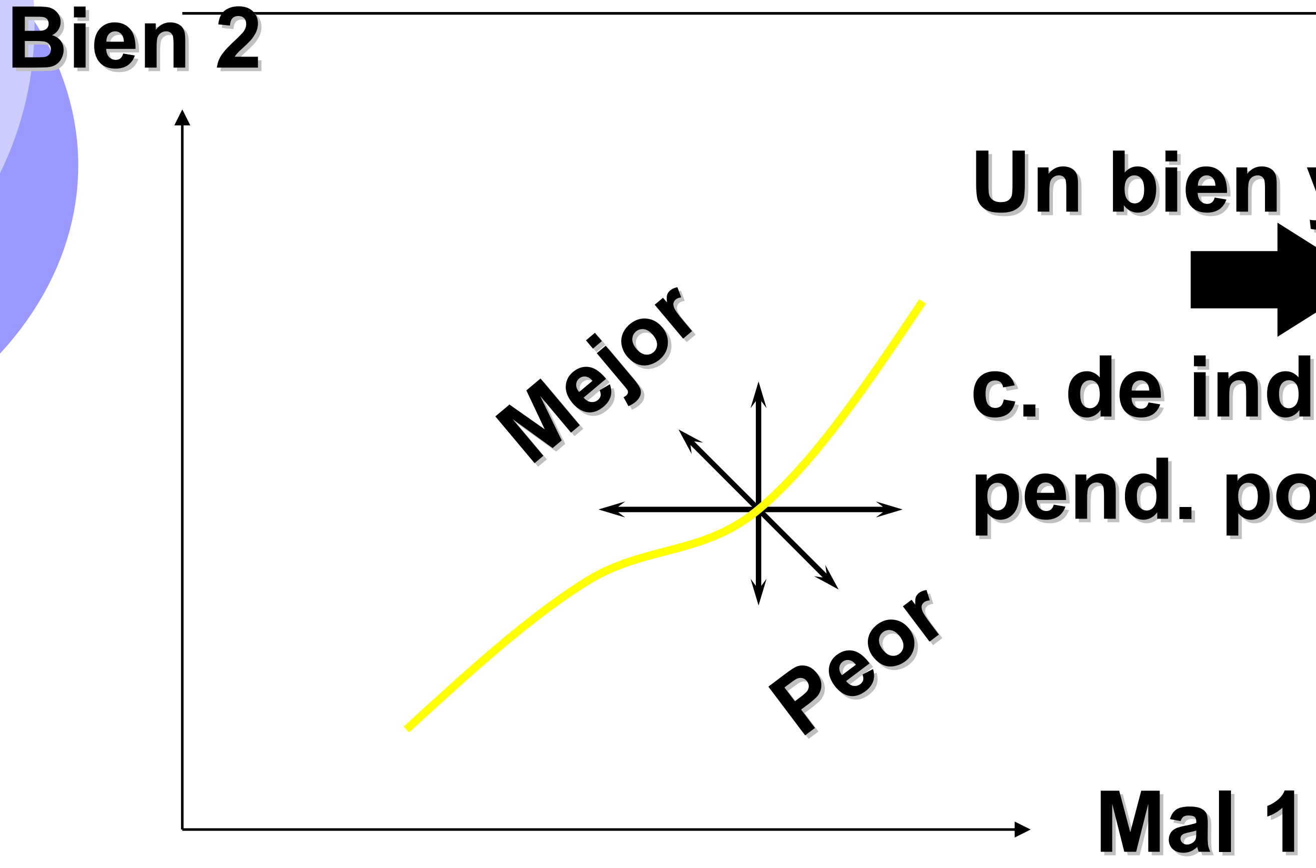
Dos bienes: ➡ **Curva de indiferen. con pendiente negativa.**

Preferencias monótonas

- Las curvas de indiferencia no pueden ser gruesas

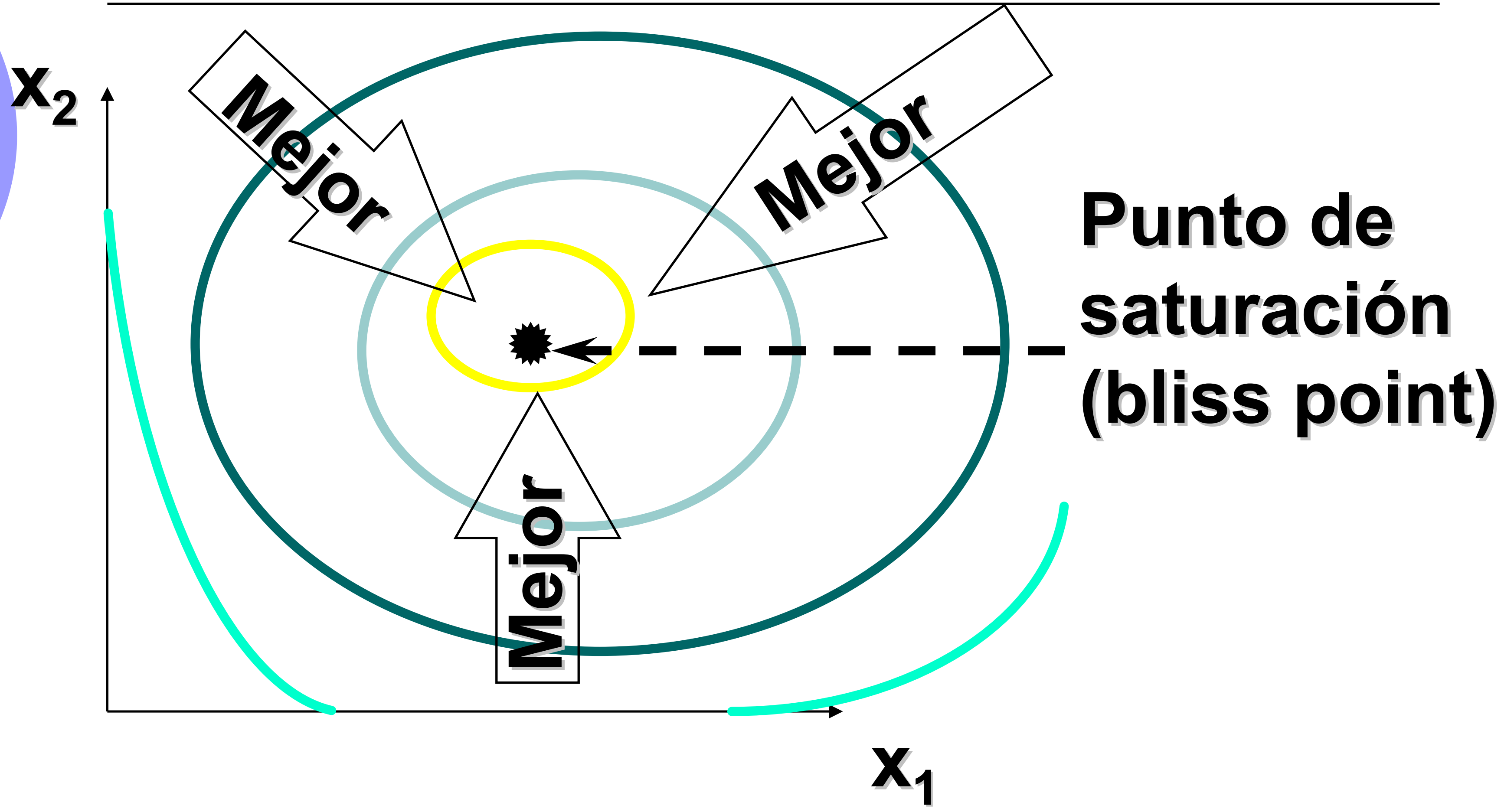


Curvas de indiferencia: un bien y un mal



Un bien y un mal: ➡ **c. de indifer. con pend. positiva**

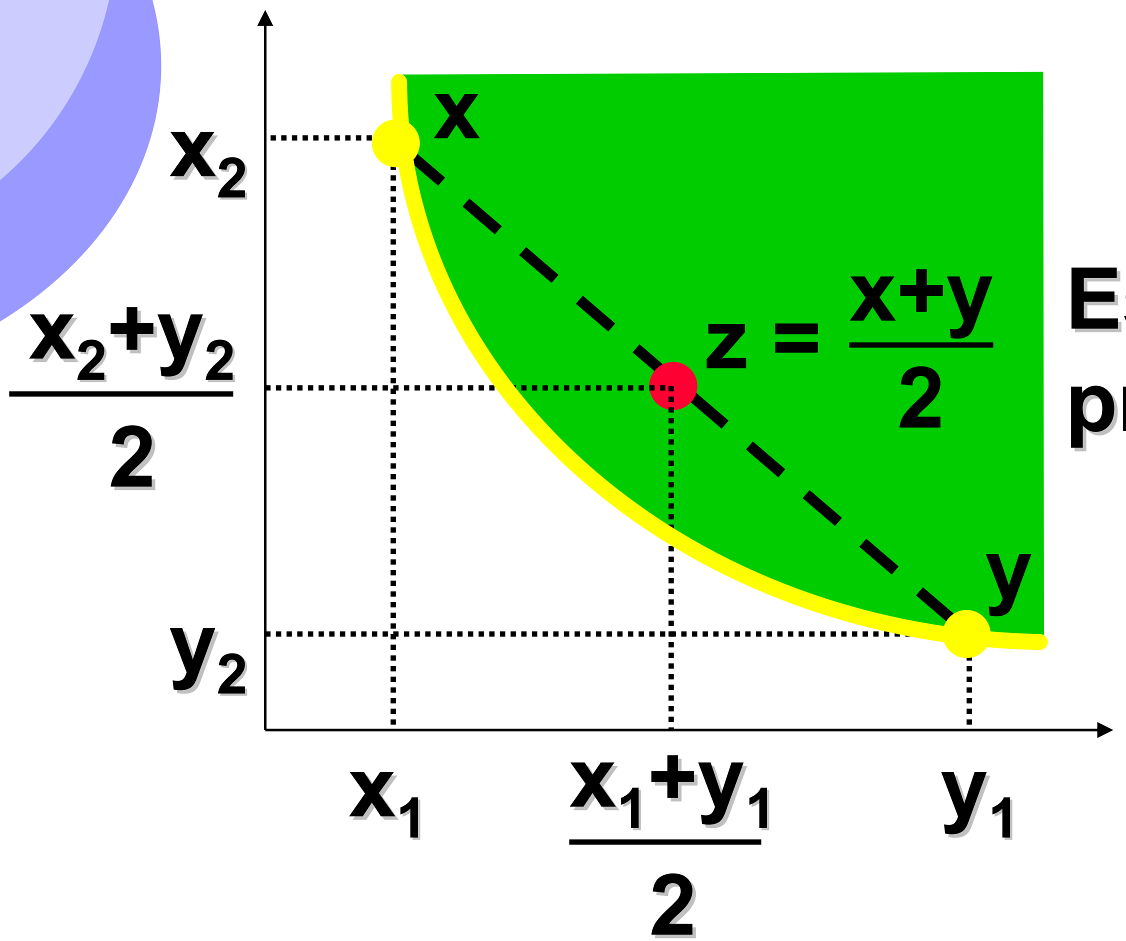
Curvas de indiferencia con Saturación.



Preferencias convexas

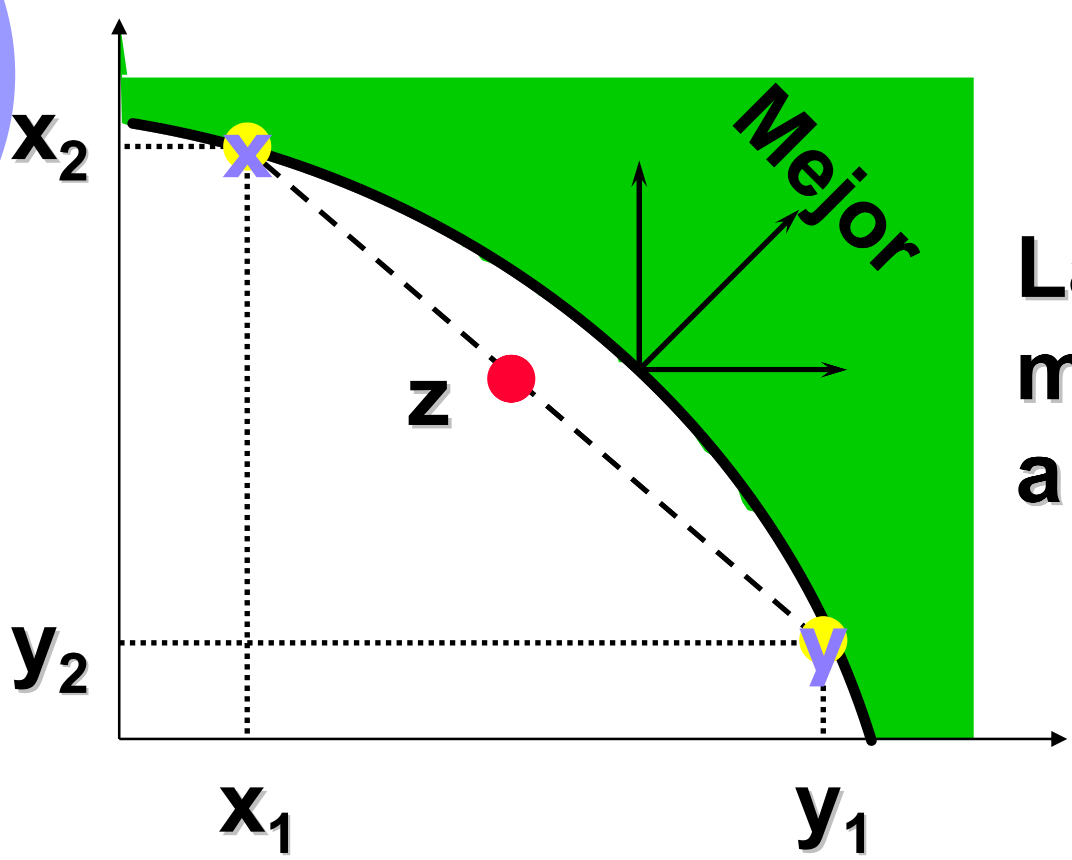
- ***Convexidad***: Para garantizar funciones de demanda con el comportamiento adecuado.
- Este supuesto se refiere al intercambio que el consumidor está dispuesto a realizar entre los diferentes bienes.
- Supuesto 6. ***Convexidad estricta (o fuerte)***. Dados $x \neq y$ y z en X, si $x \succcurlyeq z$ e $y \succcurlyeq z \rightarrow tx+(1-t)y \succ z$, para todo t en (0,1).
- En otras palabras, la relación de preferencias es convexa, si para cada x en X, el conjunto de contorno superior $\{y \text{ en } X: y \succcurlyeq x\}$ es convexo.
- Supuesto 6': ***Convexidad débil***: Si $x \succcurlyeq y$, entonces
- $tx+(1-t)y \succcurlyeq y$, para todo t en (0,1).

Preferencias: Convexidad.



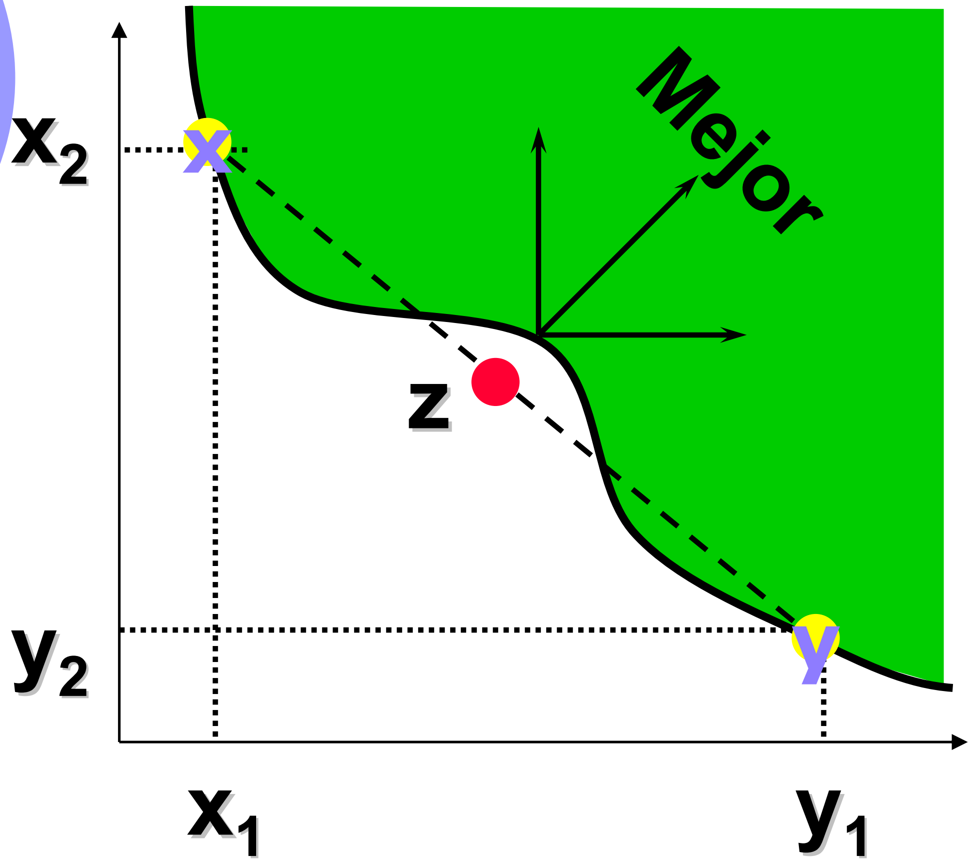
Es estrictamente preferido a x e y.

Preferencias no-convexas



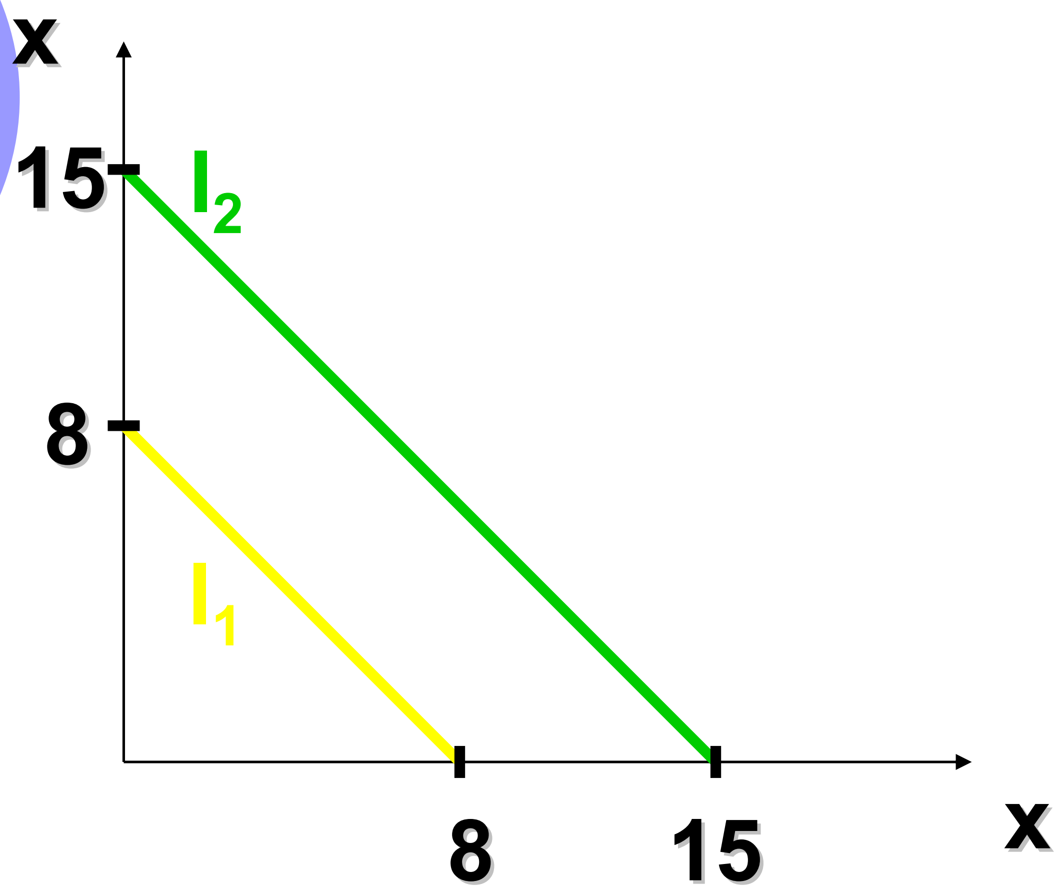
La mezcla z es menos preferida a x o a y.

Preferencias no-convexas

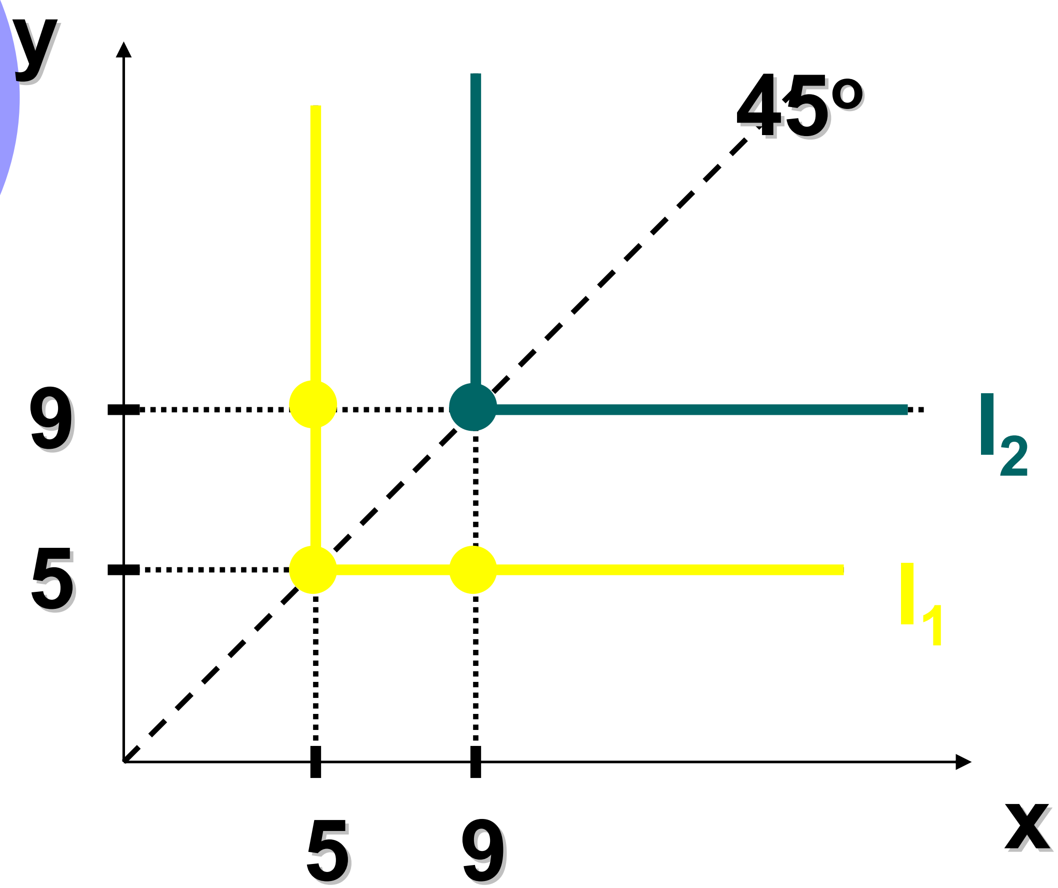


La mezcla z es menos preferida a x o a y.

Curvas de indiferencia convexas (pero no estrictamente). Bienes sustitutos perfectos.



Curvas de indiferencia convexas (pero no estrictamente): Complementos perfectos.

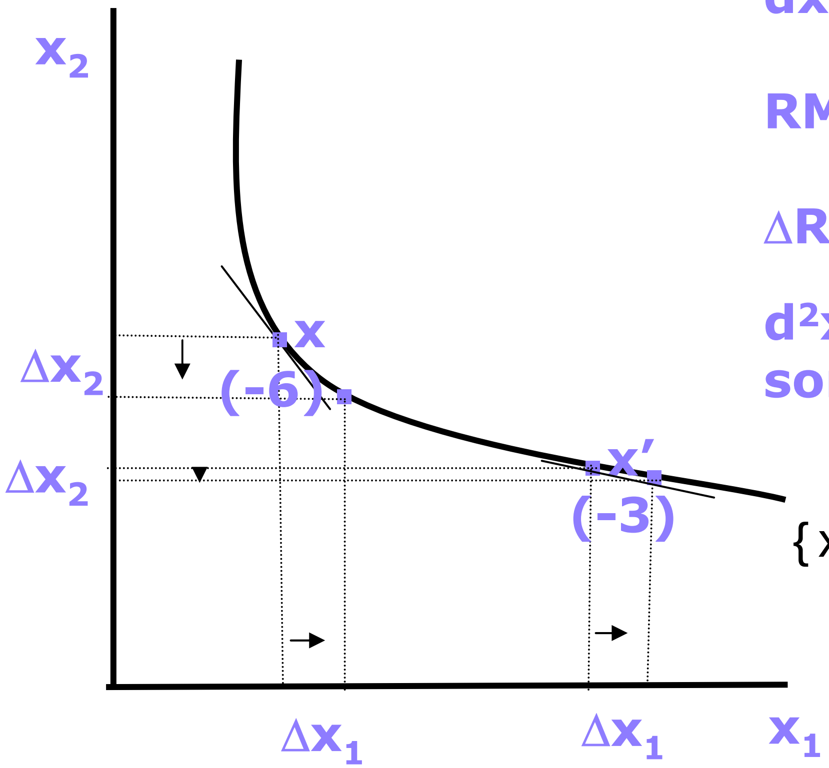


Preferencias convexas: relación marginal de sustitución decreciente.

- Convexidad es un supuesto fuerte pero central en Economía.
- Se puede interpretar en términos de la ***relación marginal de sustitución (RMS) decreciente*** entre dos bienes cualquiera: $\Delta x_2 / \Delta x_1$, en un punto x.
- A medida que se tienen más unidades de x_1, se necesitan más unidades de este bien para compensar la pérdida de unidades de x_2.

Relación marginal de sustitución decreciente.

- Gráficamente:



$\{x \text{ en } R^2 : x \sim x'\}$

dx_2/dx_1=pdte curva de indif.

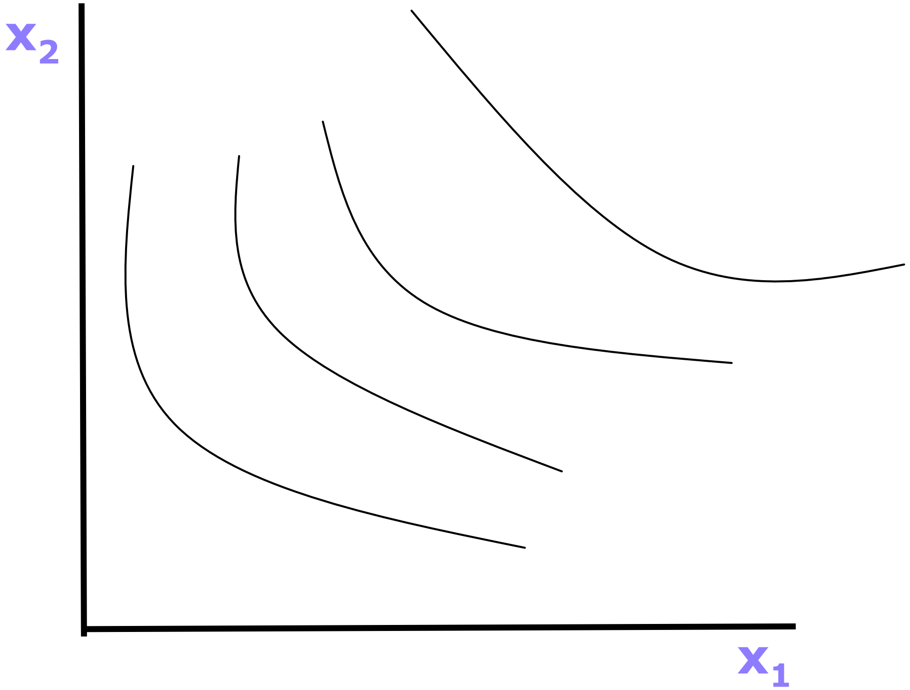
$RMS = -dx_2/dx_1$

$\Delta RMS/\Delta x_1 = \Delta dx_2/\Delta dx_1 =$

$d^2x_2/dx_1^2 < 0$ si las preferen. son convexas.

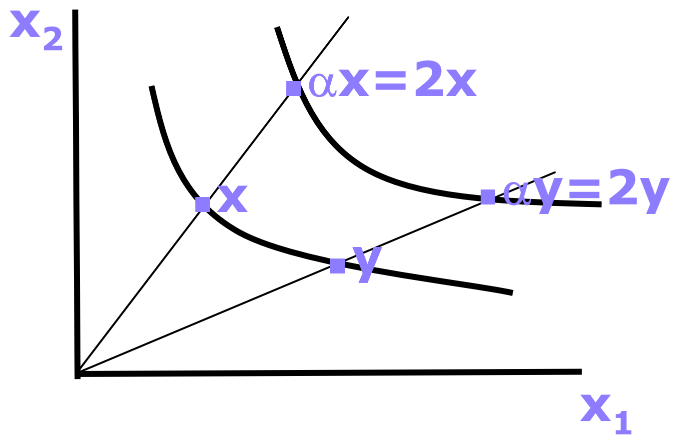
Mapa de conjuntos de indiferencia

- El mapa de los conjuntos de indiferencia sería:



Algunas preferencias especiales

- En las aplicaciones, sobre todo econométricas, es común centrarse en preferencias para las que es posible deducir la relación entera de preferencias del consumidor de un único conjunto de indiferencia. Dos ejemplos son la clase de preferencias homotéticas y las preferencias cuasi-lineales.
- ***Definición***: Una relación de preferencias monótona en X es ***homotética*** si todos los conjuntos de indiferencia se relacionan por expansiones proporcionales a lo largo de rayos; es decir, si $x \sim y$, entonces $\alpha x \sim \alpha y$, para cualquier $\alpha>0$.



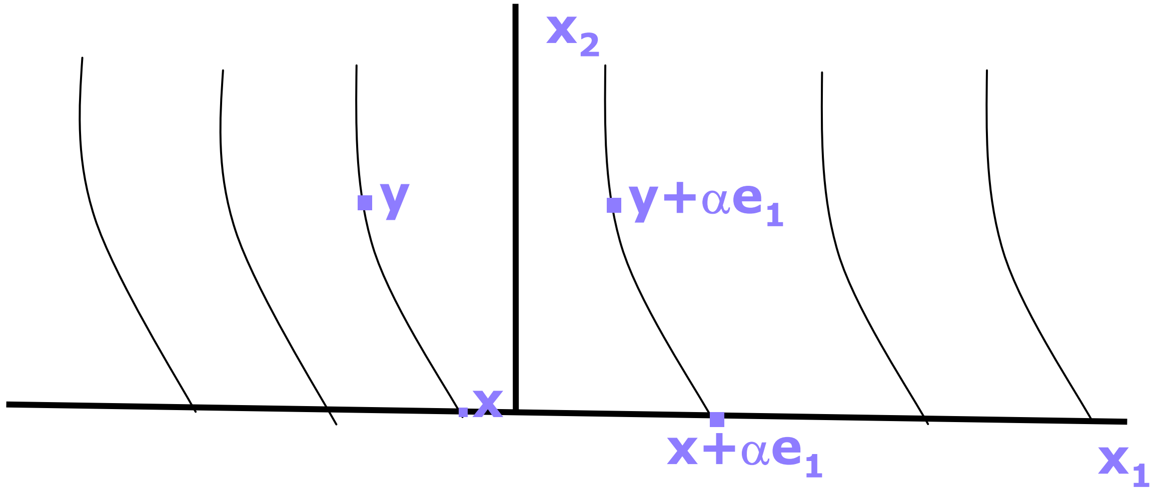
$RMS=x_2/x_1$

Algunas preferencias especiales

- ***Definición***: Una relación de preferencias en $X=(-\infty,\infty)xR_+^{L-1}$ es ***cuasi-lineal*** con respecto al bien 1 (que se denomina numerario) sí:

  (i) Todos los conjuntos de indiferencia son desplazamientos paralelos de cualquiera de ellos a lo largo del eje del bien 1, es decir, si $x \sim y$, entonces $(x+\alpha e_1) \sim (y+\alpha e_1)$, para $e_1=(1,0,..,0)$ y cualquier α en R.

  (ii) El bien 1 es deseable; es decir, $(x+\alpha e_1) \succ x$, para todo x.



Preferencias y utilidad

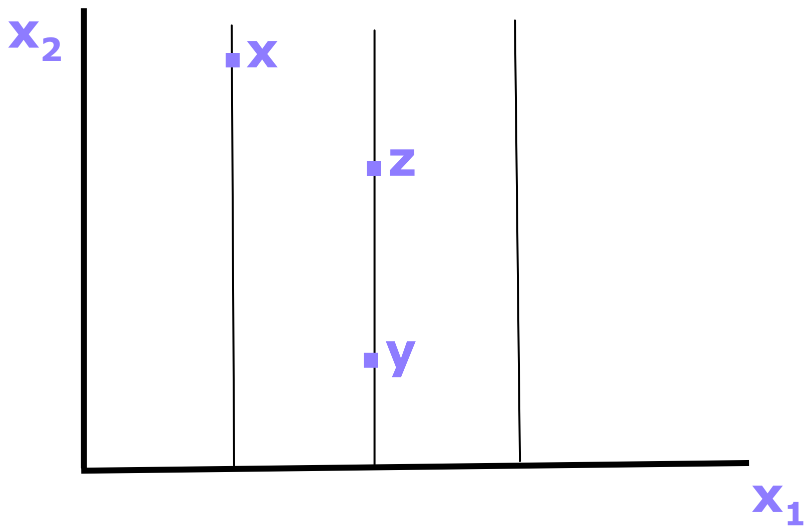
- Por motivos analíticos es útil transladar las preferencias del consumidor a una función de utilidad, ya que se pueden usar las técnicas de programación matemática para resolver el problema del consumidor.
- Con los supuestos realizados hasta ahora una relación de preferencias racional no es necesariamente representable por una función de utilidad.
- Ejemplo: Las ***preferencias lexicográficas***
  Supongamos que $X=R_+^2$. Definamos $x=(x_1,x_2) \succcurlyeq y=(y_1,y_2)$ si:

  1) $x_1 > y_1$
  2) $x_1 = y_1$, pero $x_2 > y_2$

  El nombre se deriva de la manera en que un diccionario se organiza. El bien 1 tiene la mayor prioridad para determinar el orden de preferencia, de manera similar a como la primera letra de una palabra determina su orden en el diccionario. Cuando el nivel del primer bien es el mismo, la cantidad del segundo determina las preferencias.

Preferencias lexicográficas

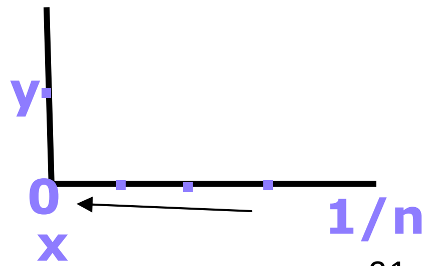
- El orden lexicográfico es completo, transitivo, fuertemente monótono y convexo. Pero no existe ninguna función de utilidad que lo represente.
- Razón: Los conjuntos de indiferencia son un único punto. A cada uno de estos conjuntos debe asignársele un número de utilidad diferente (un número real) de tal manera que se preserve el orden. ¡Esto es imposible!



$$z \succ y \succ x$$

Preferencias continuas

- El supuesto que se necesita para asegurar la existencia de una función de utilidad es que las preferencias sean continuas.
- ***<u>Definición</u>***: La relación de preferencias $\succsim$ en X, es continua si se preserva en los límites. Es decir, para cualquier secuencia de pares $\{(x^n,y^n)\}_{n=1,2,\ldots\infty}$, con $x^n \succsim y^n$ para toda n, $x=\lim_{n\to\infty} x^n$ e $y=\lim_{n\to\infty} y^n$, se tiene que $x \succsim y$.
- Las preferencias no pueden dar saltos, como, por ejemplo,si el consumidor prefiriera cada elemento en la secuencia $\{x^n\}$ a $\{y^n\}$, pero cambiara sus preferencias en los puntos límite x e y.
- Ejemplo: Las preferencias lexicográficas no son continuas.
- Consideremos la secuencia de cestas: $x^n=(1/n, 0)$ e $y^n=(0,1)$
- Para toda n, se tiene que $x^n \succsim y^n$,
- pero $\text{límite}_{n\to\infty} y^n=(0,1) \succ (0,0)= \text{límite}_{n\to\infty} x^n$



Existencia de una función de utilidad.

- Otra manera de expresar *Continuidad* es: para todo x e y en X, los conjuntos $\{x: x \succsim y\}$ y $\{x: x \precsim y\}$ son cerrados.
- La continuidad es suficiente para la existencia de una función de utilidad que representa las preferencias.

<u>Teorema</u>: Si $\succsim$ es completa, reflexiva, transitiva y continua, existe una función de utilidad U: X→**R** que representa dichas preferencias. U es continua y cumple que u(x)≥u(y) sí y solo si x $\succsim$ y.

U(.) es **ordinal** y representa únicamente a $\succsim$ si se incluyen todas las transformaciones crecientes de U(.):

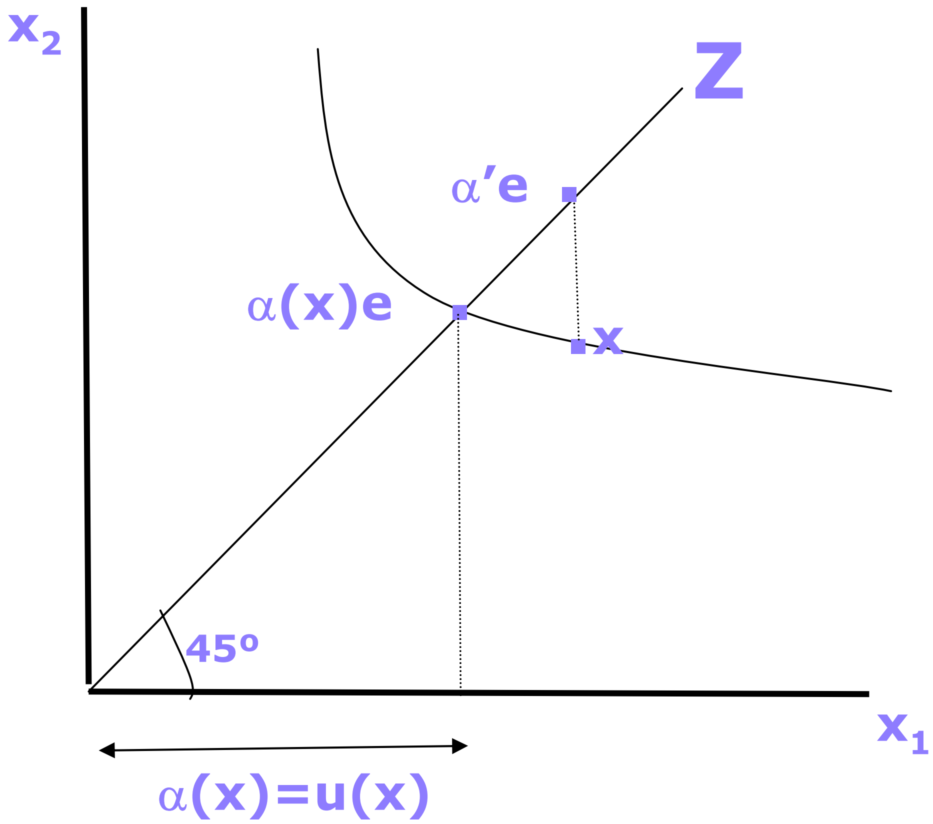
Si U(.) representa a $\succsim$ y si f:**R**→**R** es una función monótona creciente, entonces f(u(x)) también representa a $\succsim$ ya que f(u(x))≥f(u(y)) sí y solo sí u(x)≥u(y).

Existencia de una función de utilidad.

- ***Demostración del Teorema***: Para $X=R_+^L$ y unas preferencias monótonas, la demostración sencilla se realiza con la ayuda de un gráfico.
- Sea Z el rayo diagonal en R_+^L, y sea e el vector de L elementos que son todos iguales a 1. Entonces, αe pertenece a Z, para $\alpha \geqslant 0$. Para cada x en Z, la monotonicidad implica que $x \succcurlyeq 0$. Además, para cualquier α' tal que $\alpha' e >> x$, se tiene que $\alpha' e \succcurlyeq x$.
- Monotonicidad y continuidad implican que existe un único valor $\alpha(x)$ en $[0, \alpha']$, tal que $\alpha(x)e \sim x$.
- Tomemos $\alpha(x)$ como la función de utilidad $\alpha(x)=u(x)$. Ahora hay que demostrar que representa las preferencias y que es continua (ver texto de Mas-Colell).

Existencia de una función de utilidad.

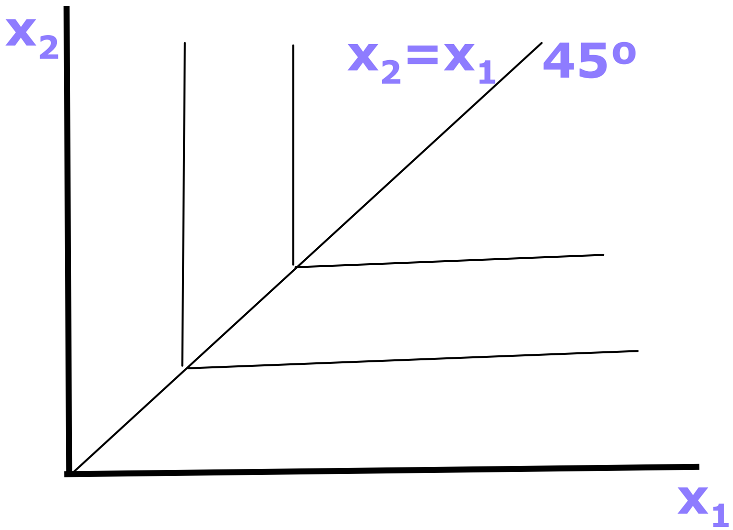
- Gráficamente:



Función de utilidad

- Supondremos a partir de ahora que las preferencias son continuas y, por tanto, representables por una función de utilidad u(x).
- También es conveniente que u(x) sea diferenciable.
- Es posible que algunas preferencias continuas no sean representables por funciones de utilidad diferenciables. Ejemplo: ***Las preferencias de Leontieff*** :

  $x'' \succcurlyeq x'$ si y solo si $\text{Min}\{x''_1, x''_2\} \geqslant \text{Min}\{x'_1, x'_2\}$



La no diferenciabilidad se dá por la esquina en las curvas de indiferencia cuando $x_1 = x_2$.

Propiedades de la función de utilidad

- Las restricciones en las preferencias se traducen en restricciones en la forma de la función de utilidad:
- 1) La propiedad de monotonicidad implica que u(x) es creciente.
- 2) La propiedad de convexidad implica que u(x) es cuasi-cóncava. Si las preferencias son estrictamente convexas, u(x) es estrictamente cuasi-cóncava.

  Recordad que u(x) es cuasi-cóncava si el conjunto:

  $\{y \text{ en } R_+^L : u(y) \geq u(x)\}$ es convexo.

- **Teorema**: Si $\succcurlyeq$ cumple los supuestos (1)-(6), entonces $\succcurlyeq$ se puede representar por una función de utilidad U(.), que es continua, creciente y estrictamente cuasi-cóncava.

El problema del consumidor

- Suponemos que el consumidor posee unas preferencias racionales, continuas y localmente no saciadas. Por tanto, existe una u(x), continua que las representa.
- ***Problema del consumidor***: escoger la cesta más preferida, dados los precios p>>0 y el nivel de renta w>0. Este problema se puede representar como un problema de maximización de la utilidad:

PMU

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \max\limits_{\{x\geq 0\}} u(x) \\ \\ \bullet\ \text{s.a. } px\leq w \end{array}\right\}$$

- En el PMU el consumidor elige una cesta de consumo en el conjunto presupuestario walrasiano $B_{p,w}$={x en R_+^L: px ≤0}, para maximizar su nivel de utilidad.

Funciones de demanda. Existencia

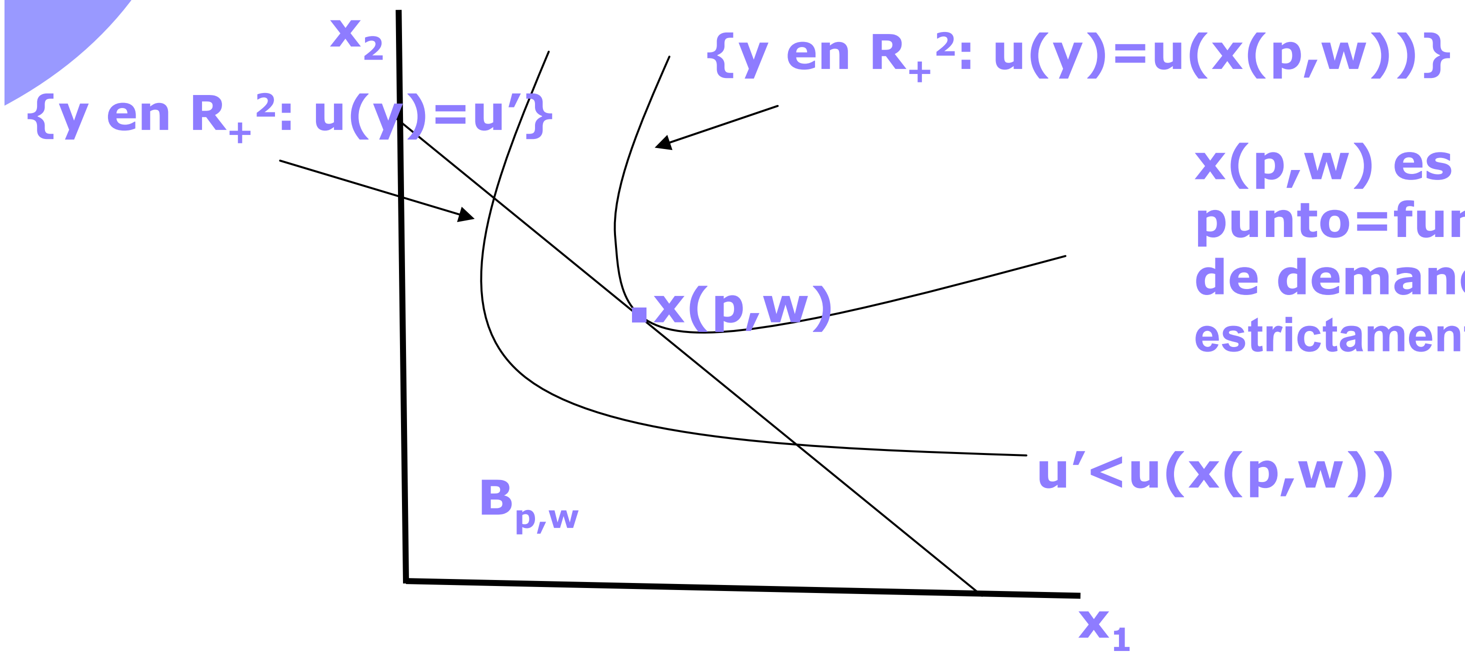
- ***Proposición:*** Si $p>>0$ y $u(x)$ es continua, entonces el PMU tiene solución.
- ***Demostración:*** El problema del consumidor es:
  - *$Max_{\{x\}}\ u(x)$*
  - *sujeto a* $\sum_{l=1}^{L} p_l x_l \leq w$
  - 1. Si $p \gg 0$, el conjunto presupuestario $B_{p,w}$ es compacto, porque esta acotado (para cualquier l=1,2,…L, se tiene que $x_l \leq w/p_l$) y es cerrado.
  - 2. Si *u* es continua y 1. se cumple, por el Teorema de Weiertrass (una función continua siempre alcanza un valor máximo en cualquier conjunto compacto) existe al menos un $x^*=x(p,w)$ que maximiza el problema del consumidor y que además es continua.
  - Si *u* es estrictamente cuasi-cóncava, $x^*=x(p,w)$ es *única.*

Con este resultado nos centramos en las propiedades:

1) El conjunto de cestas óptimas del consumidor (el conjunto de soluciones del PMU)
2) El valor máximo de la utilidad del consumidor (la función de valor del PMU)

La correspondencia/función de demanda walrasiana.

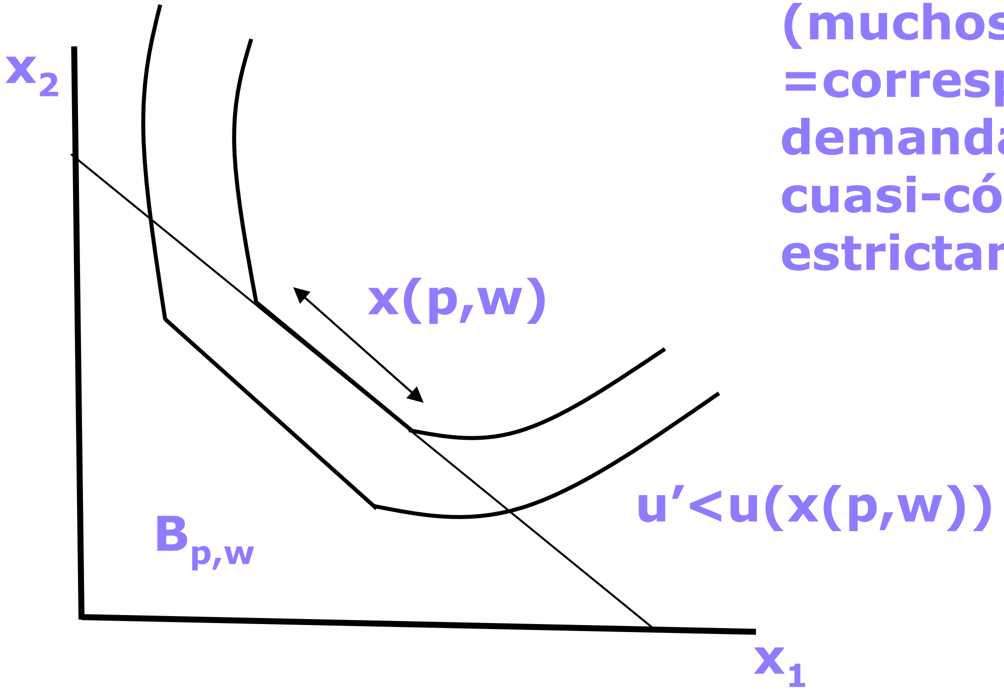
- $x(p,w)$ en R_+^L es la ***correspondencia de demanda walrasiana***= la regla que asigna en el PMU un conjunto de vectores óptimos a cada par precios-riqueza (p,w).
- Por ejemplo si L=2



x(p,w) es un solo punto=función de demanda ↔ u(x) estrictamente cuasi-cóncava

La correspondencia/función de demanda walrasiana.

- En general, x(p,w) puede tener más de un elemento:
- Por ejemplo si L=2



x(p,w) es multivaluada (muchos puntos) =correspondencia de demanda ↔ u(x) cuasi-cóncava, pero no estrictamente

Propiedades de x(p,w)

- ***Propiedades:*** Supongamos que u(x) es una función de utilidad representando unas preferencias no saciadas definidas en $X=R_+^L$. Entonces, la correspondencia de demanda walrasiana posee las siguientes propiedades:
- 1) Homogeneidad de grado cero en (p,w): $x(\alpha p, \alpha w)=x(p,w)$, para cualquier p y w, y escalar $\alpha>0$.
- 2) Ley de Walras: px=w, para todo x en x(p,w).
- 3) Convexidad/unicidad: Si las preferencias son convexas, u(x) es cuasi-cóncava,entonces x(p,w) es un conjunto convexo; además, si las preferencias son estrictamente convexas, u(x) es estrictamente cuasi-cóncava y x(p,w) consiste en un solo elemento.

Propiedades de x(p,w)

- ***Demostración***:
- 1) Nótese que para cualquier escalar $\alpha>0$,el conjunto

  $\{x \text{ en } R_+^L: \alpha px \leq \alpha w\} = \{x \text{ en } R_+^L: px \leq w\}$

  es decir, el conjunto de cestas de consumo factibles en el PMU no cambia cuando todos los precios y renta se multiplican por una misma constante $\alpha>0$. Por tanto, el conjunto de cestas que maximizan la utilidad debe ser el mismo: $x(p,w)=x(\alpha p, \alpha w)$.

  2) La Ley de Walras es una consecuencia de no-saciedad local (o monotonicidad). Si $px<w$ para algún x en x(p,w), debe existir otra cesta de consumo y, suficientemente cerca de x, talque $py<w$ e $u(y)>u(x)$. Pero esto contradice que x pertenece a x(p,w).

Propiedades de x(p,w)

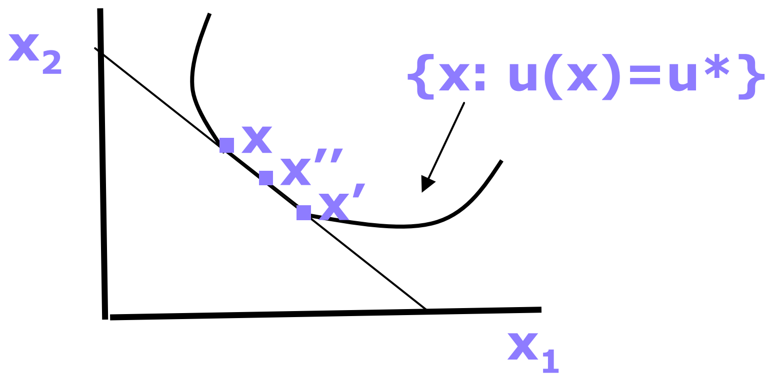
- ***<u>Demostración (cont.)</u>***:
- 3) Supongamos que u(x) es cuasi-cóncava y que existen dos cestas de consumo x y x', con $x \neq x'$, tal que x y x' pertenecen a x(p,w). Para establecer el resultado se tiene que demostrar que:

  $x'' = \alpha x + (1-\alpha)x'$ pertenece a x(p,w), para cualquier α en [0,1].

  Sabemos que u(x)=u(x'), denotemos este nivel por u*. Por cuasi-concavidad, $u(x'') \geq u^*$. Además, como $px < w$ y $px' < w$,

  $px'' = p\,[\alpha x + (1-\alpha)x'\,] \leq w$.

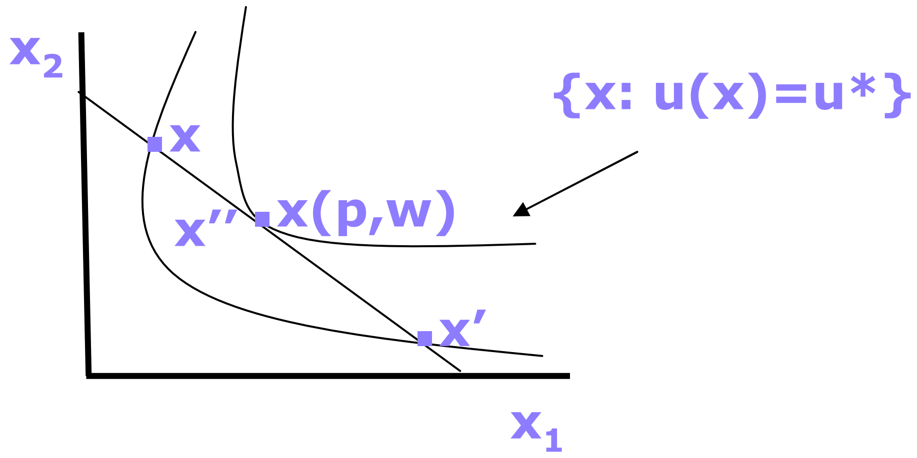
  Por tanto, x'' es una cesta factible en el PMU, y como $u(x'') \geq u^*$, entonces x'' pertenece a x(p,w). Por tanto x(p,w) es un conjunto convexo.



Propiedades de x(p,w)

- ***Demostración (cont.)***:

- Supongamos ahora que u(x) es estrictamente cuasi-cóncava. Por el mismo argumento anterior, establecemos que x'' es una elección factible y que u(x'')>u* para α>0. Esto contradice que x y x' pertenezcan a x(p,w). Luego solamente puede existir un elemento en x(p,w).



Characterización de las cestas óptimas (por medio del cálculo)

- Si u(x) es continuamente diferenciable, una cesta de consumo óptima x* en x(p,w) se puede caracterizar por las condiciones de primer orden (condiciones necesarias) del problema de maximización restringido:
- Max u(x)

  $x_l \geq 0$, $l=1,..L$

  - sujeto a $px \leq w$

que tiene asociado el Lagrangiano:

- $L(x_1, x_2, \ldots, x_L, \lambda) = u(x) - \lambda[px - w]$,

o lo que es lo mismo:

- $$L(x_1, x_2, \ldots, x_L, \lambda) = u(x_1, x_2, \ldots, x_L) - \lambda[\sum_{l=1}^{L} p_l x_l - w]$$

Condiciones de Kuhn-Tucker

- Dado el Lagrangiano:
  $$L(x_1, x_2, ..., x_L, \lambda) = u(x_1, x_2, ..., x_L) - \lambda[\sum_{l=1}^{L} p_l x_l - w]$$
- Las condiciones de primer orden (Kuhn-Tucker) para $x^*_l \geq 0$:

$$\frac{\delta L}{\delta x_l} = \frac{\delta u(x^*)}{\delta x_l} - \lambda p_l \leq 0, \quad x_l^* \frac{\delta L}{\delta x_l} = 0, \;\; \mathrm{l}=1,2....\mathrm{L}$$

$$\frac{\delta L}{\delta \lambda} = -[\sum_{l=1}^{L} p_l x_l - w_l] \geq 0, \quad \lambda \frac{\delta L}{\delta \lambda} = 0$$

- Sea $\nabla u(x) = \left[\frac{\delta u(x)}{\delta x_1}, ..., \frac{\delta u(x)}{\delta x_L}\right]$ el vector gradiente,

entonces las L primeras ecuaciones se pueden expresar:

$$\nabla u(x^*) \leq \lambda p, \;\; \text{y} \;\; x^*[\nabla u(x^*) - \lambda p] = 0$$

Soluciones interiores

- Las condiciones para soluciones interiores: $x^*_l>0$, para toda l=1,2,…L, son (soluciones esquina son las que $x^*_l=0$, para alguna l):

$$\nabla u(x^*) - \lambda p = 0$$

$$\frac{\delta L}{\delta \lambda} = -[\sum_{l=1}^{L} p_l x_l - w_l] = 0$$

- O, lo que es lo mismo: para los bienes l y k :

$$\frac{\delta L}{\delta x_l} = \frac{\delta u(x^*)}{\delta x_l} - \lambda p_l = 0, \text{ y } \frac{\delta L}{\delta x_k} = \frac{\delta u(x^*)}{\delta x_k} - \lambda p_k = 0, \quad \text{es decir,}$$

$$\frac{\delta u(x^*)}{\delta x_l} = \lambda p_l, \text{ y } \frac{\delta u(x^*)}{\delta x_k} = \lambda p_k$$

Interpretación de las condiciones de primer orden.

- Para interpretar las condiciones anteriores, dividimos la condición de primer orden del bien l, por la del bien k:

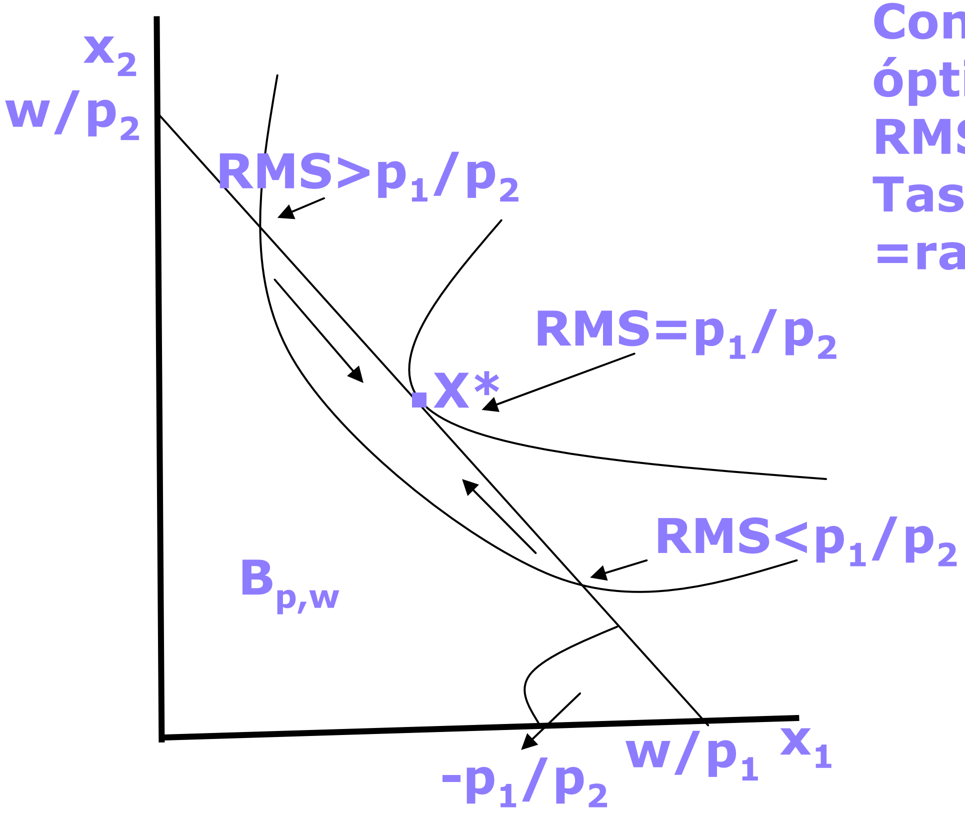
$RMS_{k,l}$= $$\frac{\frac{\delta u(x^*)}{\delta x_l}}{\frac{\delta u(x^*)}{\delta x_k}} = \frac{p_l}{p_k}$$

La $RMS_{k,l}$ es la cantidad del bien l que se le debe dar al consumidor para compensarle de una unidad marginal de reducción en el bien k. Nótese que si la utilidad no cambia con cambios diferenciales dx_l y dx_k en x_l y x_k,

$$\frac{\delta u(x)}{\delta x_l} dx_l + \frac{\delta u(x)}{\delta x_k} dx_k = 0, \quad \rightarrow \quad \frac{dx_k}{dx_l} = -\frac{\frac{\delta u(x)}{\delta x_l}}{\frac{\delta u(x)}{\delta x_k}} = -RMS_{k,l}$$

Solución interior

- Gráficamente, para L=2



Condición para óptimo interior:
$RMS=p_1/p_2$
Tasa marginal de intercambio =ratio de precios

Si $RMS>p_1/p_2$:
un Δ en x_1 y un ∇ en x_2 Δ la utilidad.
Si RMS $<p_1/p_2$:
un ∇ en x_1 y un Δ en x_2 Δ la utilidad.

Soluciones esquina

- Con L=2, las condiciones de primer orden (Kuhn-Tucker) para $x^*_2=0$ y $x^*_1>0$, son:

$$\frac{\delta L}{\delta x_1} = \frac{\delta u(x^*)}{\delta x_1} - \lambda p_1 = 0, \quad \text{es decir} \quad \frac{\delta u(x^*)}{\delta x_1} = \lambda p_1$$

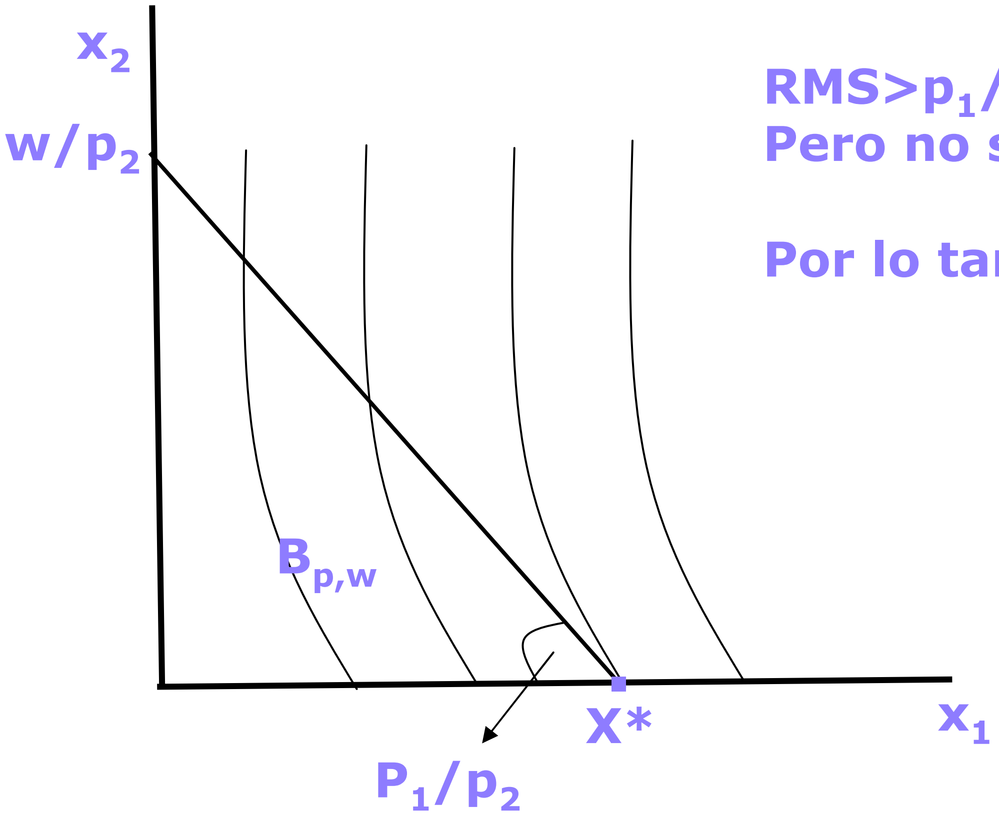
$$\frac{\delta L}{\delta x_2} = \frac{\delta u(x^*)}{\delta x_2} - \lambda p_1 < 0, \quad \text{es decir} \quad \frac{\delta u(x^*)}{\delta x_2} < \lambda p_2$$

Luego,

$$RMS = \frac{\dfrac{\delta u(x^*)}{\delta x_1}}{\dfrac{\delta u(x^*)}{\delta x_2}} > \frac{p_1}{p_2}, \quad \text{es decir} \quad RMS > \frac{p_1}{p_2}$$

Solución esquina

- Gráficamente, para L=2, con $x^*_2 = 0$ y $x^*_1 > 0$:



RMS>p_1/p_2
Pero no se puede Δx_1 y ∇x_2.

Por lo tanto: $x^*_2=0$, $x^*_1=w/p_1$

Interpretación del multiplicador Lagrangiano λ

- λ*= valor de la utilidad marginal de la renta en el óptimo del consumidor,es decir:

$$\lambda^* = \frac{\delta u(x^*(p,w))}{\delta w}$$

- Para demostrarlo, supongamos que x*(p,w) es diferenciable y que x*(p,w)>>0 (solución interior). Por la regla de la cadena (se puede también usar directamente el Teorema de la envolvente):

$$\frac{\delta u(x^*(p,w))}{\delta w} = \sum_{l=1}^{L} \frac{\delta u(x^*(p,w))}{\delta x_l^*} \frac{\delta x_l^*}{\delta w} = \sum_{l=1}^{L} \lambda p_l \frac{\delta x_l^*}{\delta w} = \lambda \sum_{l=1}^{L} p_l \frac{\delta x_l^*}{\delta w} = \lambda$$

Por C.P.O. óptimo interior

=1, Por agreg. Engel

Ejemplo

- ***Ejemplo***: Sea L=2, y la función de utilidad del consumidor:

$$u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{(1-\alpha)}, \quad \alpha \in (0,1)$$

- Función de utilidad Cobb-Douglas.
- 1) Comprobar que la función es homogénea de grado cero en precios y renta.
- 2) Es creciente en todas los pares $(x_1,x_2) \gg 0$.
- 3) Calcular las funciones de demanda $x_1(p,w)$ y $x_2(p,w)$.

- Es más facil trabajar con su transformación creciente: $u(x_1,x_2)=\alpha \ln x_1+(1-\alpha)\ln x_2$

Condiciones de segundo orden

- Supongamos que L=2 y x*>>0. Las C.P.O. del lagrangiano

$$L(x_1, x_2, \lambda) = u(x_1, x_2) - \lambda[\sum_{l=1}^{2} p_l x_l - w]$$ son:

$$\frac{\delta L}{\delta x_1} = \frac{\delta u(x^*)}{\delta x_1} - \lambda p_1 = 0,$$

$$\frac{\delta L}{\delta x_2} = \frac{\delta u(x^*)}{\delta x_2} - \lambda p_2 = 0$$

$$\frac{\delta L}{\delta \lambda} = w - \sum_{l=1}^{2} p_l x_l = 0$$

Diferenciando totalmente con respecto a x_1,x_2 y w, cada una de las ecuaciones anteriores se tiene:

Condiciones de segundo orden

- Matriz de segundas derivadas:

$$\begin{pmatrix} \frac{\delta^2 L}{\delta x_1^2}dx_1, & \frac{\delta^2 L}{\delta x_1 \partial x_2}dx_2, & \frac{\delta^2 L}{\delta x_1 \partial \lambda}d\lambda \\ \frac{\delta^2 L}{\delta x_2 \partial x_1}dx_1, & \frac{\delta^2 L}{\delta x_2^2}dx_2, & \frac{\delta^2 L}{\delta x_2 \partial \lambda}d\lambda \\ \frac{\delta^2 L}{\delta \lambda \partial x_1}dx_1, & \frac{\delta^2 L}{\delta \lambda \partial x_2}dx_2, & \frac{\delta^2 L}{\delta \lambda_2}d\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\delta^2 u(x^*)}{\delta x_1^2}dx_1, & \frac{\delta^2 u(x^*)}{\delta x_1 \partial x_2}dx_2, & -p_1 d\lambda \\ \frac{\delta^2 u(x^*)}{\delta x_2 \partial x_1}dx_1, & \frac{\delta^2 u(x^*)}{\delta x_2^2}dx_2, & -p_2 d\lambda \\ -p_1 dx_1, & -p_2 dx_2, & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Condiciones de segundo orden

- Matriz de segundas derivadas que se puede expresar:

$$\begin{pmatrix} \frac{\delta^2 u(x^*)}{\delta x_1^2}, & \frac{\delta^2 u(x^*)}{\delta x_1 \partial x_2}, & -p_1 \\ \frac{\delta^2 u(x^*)}{\delta x_2 \partial x_1}, & \frac{\delta^2 u(x^*)}{\delta x_2^2}, & -p_2 \\ -p_1, & -p_2, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ d\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

H^{orl}

- A la matriz de segundas derivadas de u(x), orlada por ($-p_1$,$-p_2$) se le denomina el ***Hessiano orlado***, H^{orl}.

Condiciones de segundo orden

- CSO= El ***Hessiano orlado*** tiene que ser semi-definido negativo: el determinante del menor principal orlado de orden k, tiene signo "0" o $(-1)^k$. Sea

$$u_1 = \frac{\delta u(x)}{\delta x_1},\ u_2 = \frac{\delta u(x)}{\delta x_2},\ u_{11} = \frac{\delta^2 u(x)}{\delta x_1^2},\ u_{12} = \frac{\delta^2 u(x)}{\delta x_1 \partial x_2},\ u_{22} = \frac{\delta^2 u(x)}{\delta x_2^2}\ \text{y}\ u_{21} = \frac{\delta^2 u(x)}{\delta x_2 \partial x_1}$$

- La anterior condición es equivalente a

$$(-1)^1 H_1^{orl} \le 0 \to \begin{vmatrix} u_{11} & -p_1 \\ -p_2 & 0 \end{vmatrix} \le 0,\ \text{y} \begin{vmatrix} u_{22} & -p_2 \\ -p_2 & 0 \end{vmatrix} \le 0,\ (-1)^2 H_2^{orl} \ge 0 \to \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & -p_1 \\ u_{21} & u_{22} & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{vmatrix} \ge 0$$

$(< 0$ estricta cuasi-concavidad$)$, $(> 0$ estricta cuasi-concavidad$)$

Estas condiciones implican que $u(.)$ es localmente cuasi-cóncava:

$$\begin{bmatrix} p_1 & p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \le 0$$

Teorema del Máximo

- Un teorema que es importante saber que existe es:

- ***<u>Teorema del Máximo (Berge)</u>***:
- Si f(x,a) es una función continua, su rango es compacto y el conjunto de restricciones G(a) es una función (o correspondencia) no vacía, compacta y continua,:
- a) La solución óptima x*(a) es una función (si x*(a) es una correspondencia, entonces x*(a) es una correspondencia semi continua superior).
- b) La función de valor M(a)=f(x*(a),a) es una función continua.

La función indirecta de utilidad

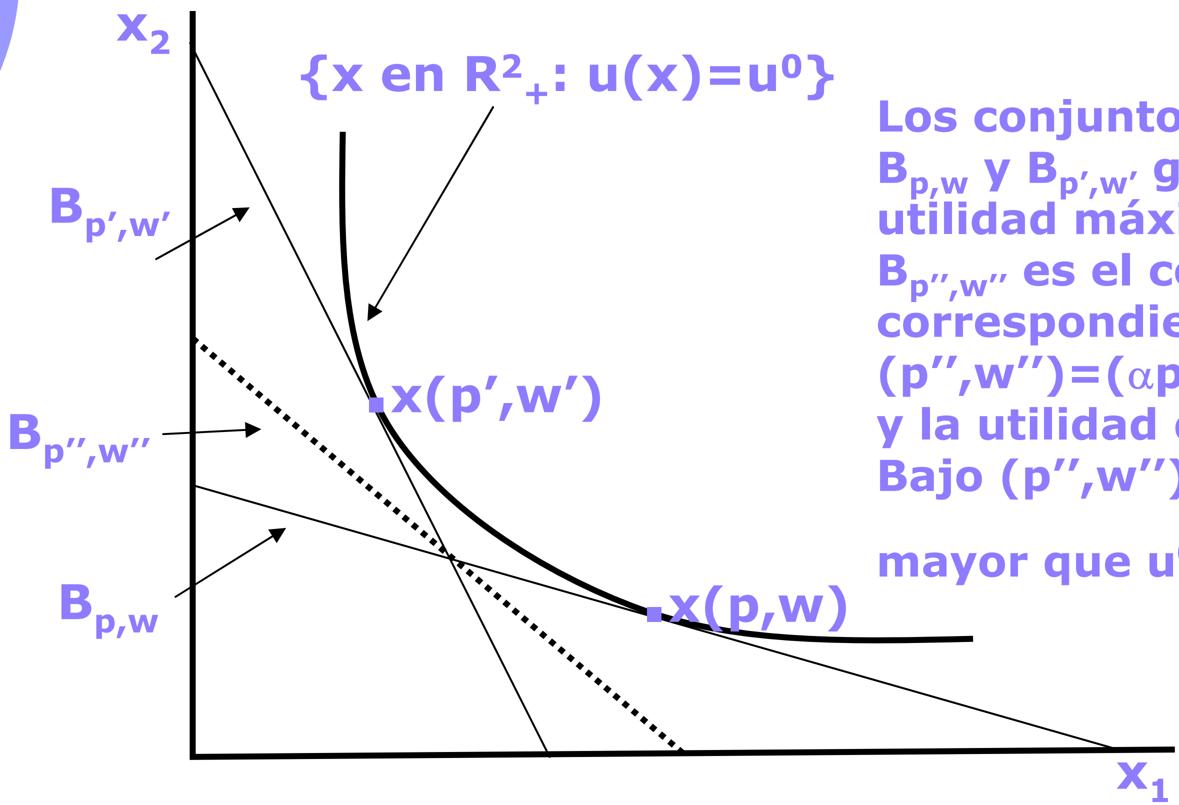
- Para cada par (p,w)>>0,el valor de la utilidad del PMU se denota por: $v(p,w)=u(x^*_1(p,w),\ldots,x^*_L(p,w))$= ***función indirecta de utilidad***.
- Es igual a u(x*) para cualquier x* en x(p,w).

<u>Proposición</u>: (Propiedades de v(p,w) Supongamos que u(.) es una función de utilidad continua que representa a unas preferencias localmente no-saciadas. La función indirecta de utilidad *v(p,w)* es:

1) Homogénea de grado cero.
2) Estrictamente creciente en w y no-creciente en p_l, para todo l.
3) Cuasi-convexa: el conjunto $\{(p,w): v(p,w) \leq v^0\}$ es convexo para cualquier *v*.
4) Continua en p y en w (por el Teorema del máximo)

La función indirecta de utilidad

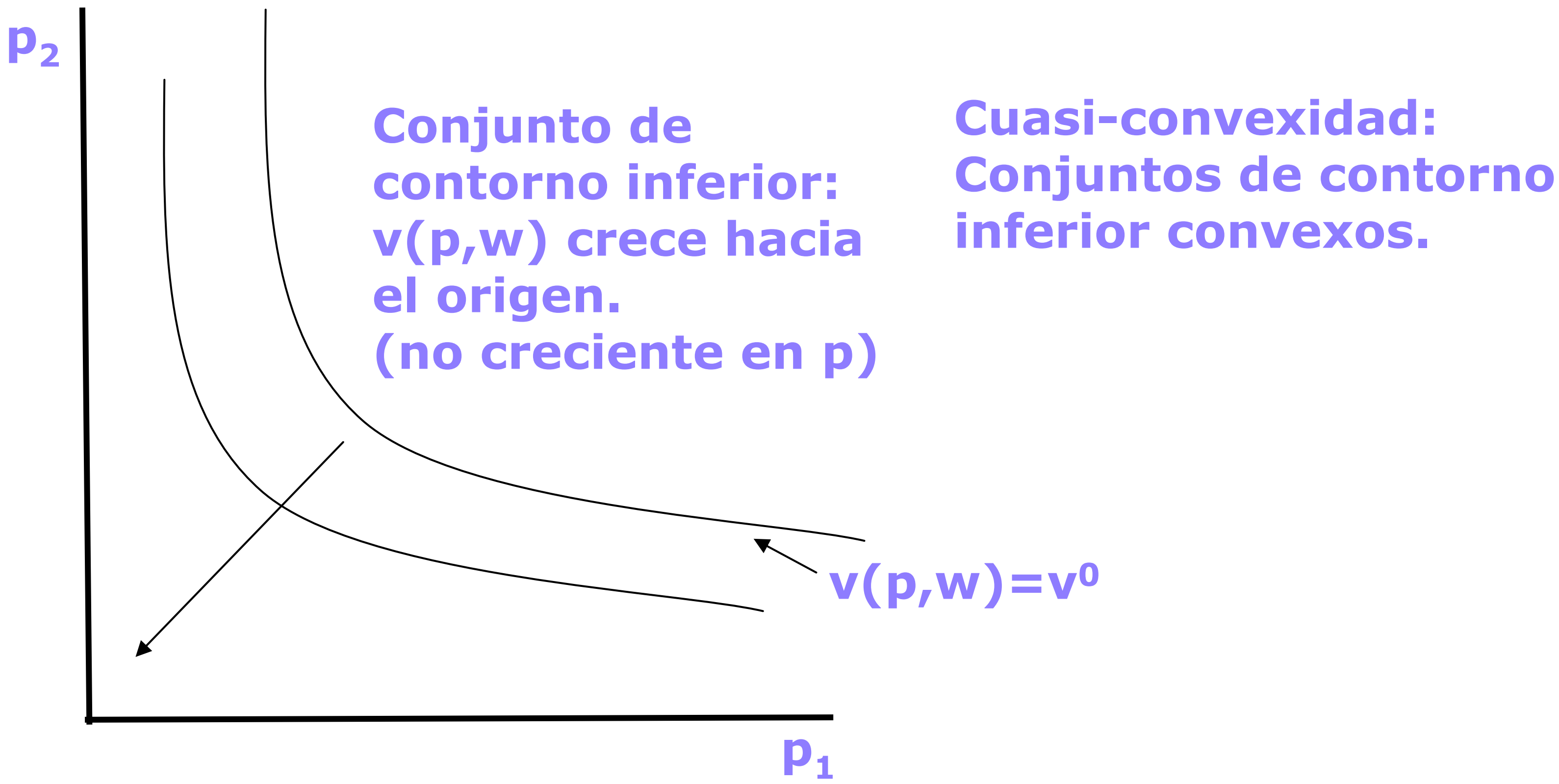
- *Demostración:* (ver en texto). Además, 1) y 2) se deducen facilmente. 3) se ilustra gráficamente:



Los conjuntos presupuestarios, $B_{p,w}$ y $B_{p',w'}$ generan la misma utilidad máxima u^0.
$B_{p'',w''}$ es el conjunto presupuestario correspondiente a:
$(p'',w'')=(\alpha p+(1-\alpha)p', \alpha w+(1-\alpha)w')$
y la utilidad que se puede alcanzar Bajo (p'',w'') es necesariamente no mayor que u^0.

La función indirecta de utilidad

- En el espacio de precios, *v(p,w)* se representa



La función indirecta de utilidad

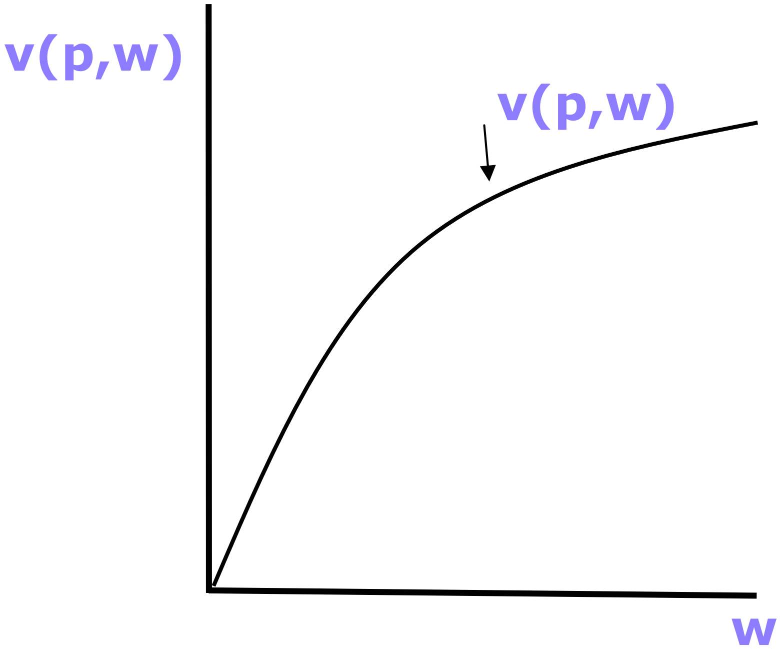
- Nótese que la función indirecta de utilidad depende de la representación de u(.)elegida.
- Si *v(p,w)* es la función indirecta de utilidad correspondiente a u(.), entonces la función indirecta de utilidad de:

$$\tilde{u}(x) = f(u(x)), \text{ es } \tilde{v}(p,w) = f(v(p,w)).$$

- ***Ejemplo***: Hallar la función indirecta de utilidad para la función de utilidad $u(x_1,x_2)=\alpha \ln x_1+(1-\alpha)\ln x_2$.

Dualidad: La función de gasto

- Nótese que si las preferencias satisfacen insaciabilidad local (o monotonicidad), u(.) será estrictamente creciente en x_1 y x_2 y *v(p,w)* será estrictamente creciente en w.



Como v(p,w) es estrictamente en w, se puede despejar w en función del nivel de utilidad. Es decir, dado un nivel de utilidad u, se podría hallar la cantidad mínima de renta necesaria para alcanzar u a precios p. La función que relaciona w y u de esta manera (la inversa de la unción indirecta de utilidad) se denomina: la función de gasto

Dualidad: La Minimización del gasto

- Pasamos a estudiar el siguiente problema de minimización del gasto para p>>0 y u(0)=u(0,0,0….0):

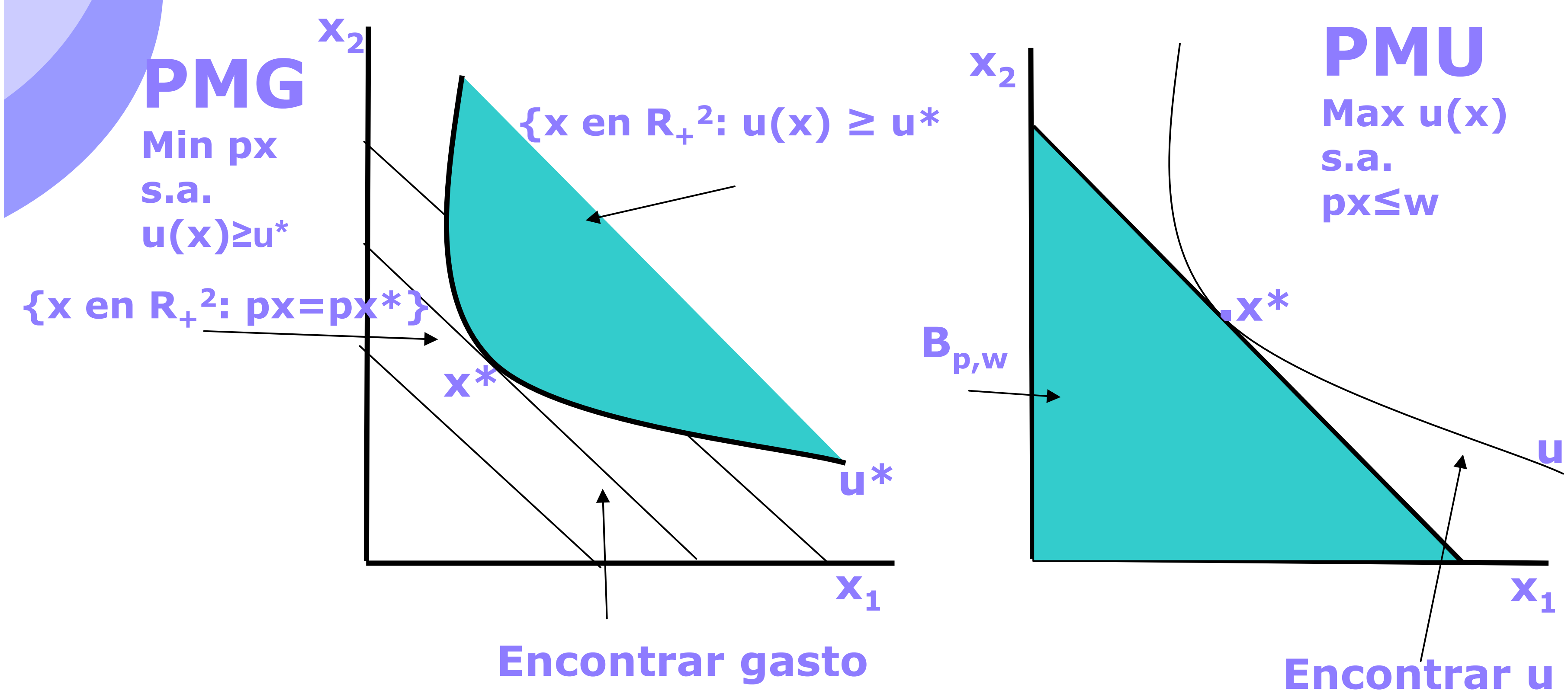
PMG

- $\text{Min}_{\{x\geq 0\}}\ px=\Sigma_l\ p_l x_l$
- s.a. $u(x)\geq u$

- Mientras que el PMU calcula el máximo nivel de utilidad dada una renta w, el PMG calcula el nivel mínimo de gasto que se requiere para alcanzar el nivel de utilidad u.
- El PMG es el problema “dual” del de PMU: persigue el mismo uso eficiente del poder de compra del consumidor, cambiando los “roles” de la función objetivo y de las restricciones.

Dualidad: La Minimización del gasto

- Gráficamente para L=2:



Relación entre el PMU y el PMG

- ***Proposición:*** Supongamos que u(x) es una función de utilidad representando una relación de preferencias no saciadas localmente, en R_+^L y que el vector de precios es p>>0. Entonces:
- (i) Si x* es óptima en el PMU con renta o riqueza w>0, entonces x* es óptima en el PMG para un nivel de utilidad u(x*). Además, el nivel de gasto mínimo en el PMG es exactamente w.
- (ii) Si x* es óptima en el PMG cuando el nivel de utilidad requerido es u>u(0), entonces x* es óptima en el PMU cuando la renta es px*. Además, el nivel de utilidad máximo en el PMU es exactamente u.

La función de gasto: e(p,u)

- ***La función de gasto:*** Dados los precios p>>0 y un nivel de utilidad requerido u>u(0), la función de gasto es el valor del gasto mínimo que resuelve el PMG:

  Es decir, si x* resuelve el problema del PMG, x*=x(p,u) y el gasto mínimo es px(p,u)=px*. Sea **e(p,u)=px*.**

  <u>Proposición:</u> (Propiedades) La función de gasto e(p,u) es:

1) Homogénea de grado uno en p.
2) Estrictamente creciente en u y no decreciente en p_l, para cualquier l=1,…L.
3) Cóncava en p.
4) Continua en p y u (por el Teorema del Máximo)

La función de gasto: e(p,u)

- ***Demostración***: 1) El PMG es Min px, (con $x \geq 0$) s.a. $u(x) \geq u$. Primero se demuestra que **x* es homogénea de grado cero en p**: si los precios cambian, el conjunto-restricción es el mismo, luego si x* minimizaba px, también minimiza:
- Min αpx
  $\{x \geq 0\}$
  sujeto a $u(x) \geq u$.

Luego:
$e(\alpha p,u)=\alpha px^*=\alpha e(p,u)$

Se demuestra ahora 3). Para demostrar **concavidad** fijemos un nivel de utilidad u* y sea $p'' = \alpha p + (1-\alpha)p'$, para α en [0,1]. Sea x'' una cesta óptima en el PMG a precios p''. Entonces:

$e(p'',u^*)=e(\alpha p+(1-\alpha)p', u^*)=p''x''=\alpha px''+(1-\alpha)p'x'' \geq$

$\alpha e(p,u^*)+(1-\alpha)e(p',u^*)$,

ya que $u(x'') \geq u^*$ y por la definición de función de gasto

$px'' \geq e(p,u^*)$ y $p'x'' \geq e(p',u^*)$.

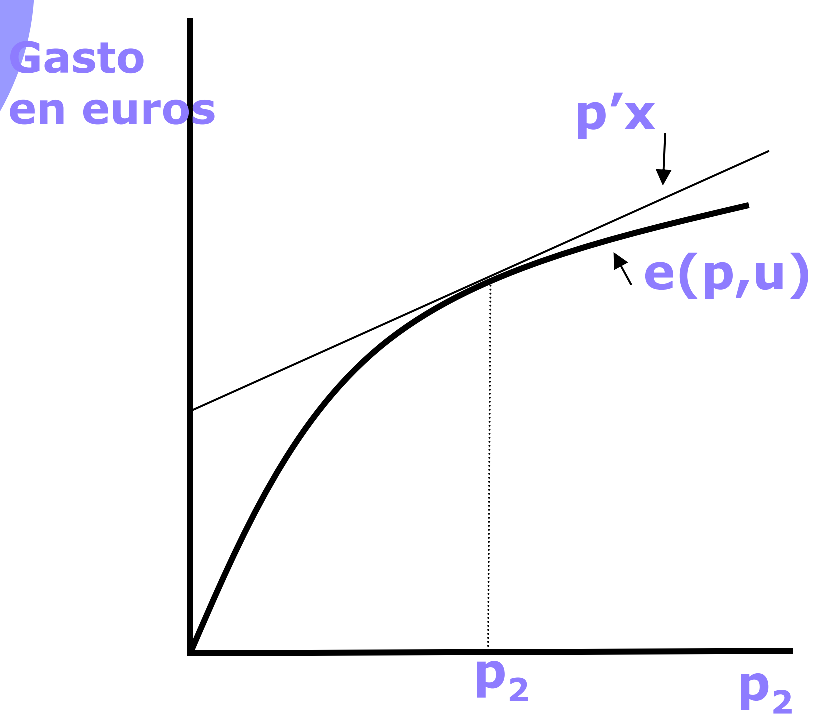
La función de gasto: e(p,u)

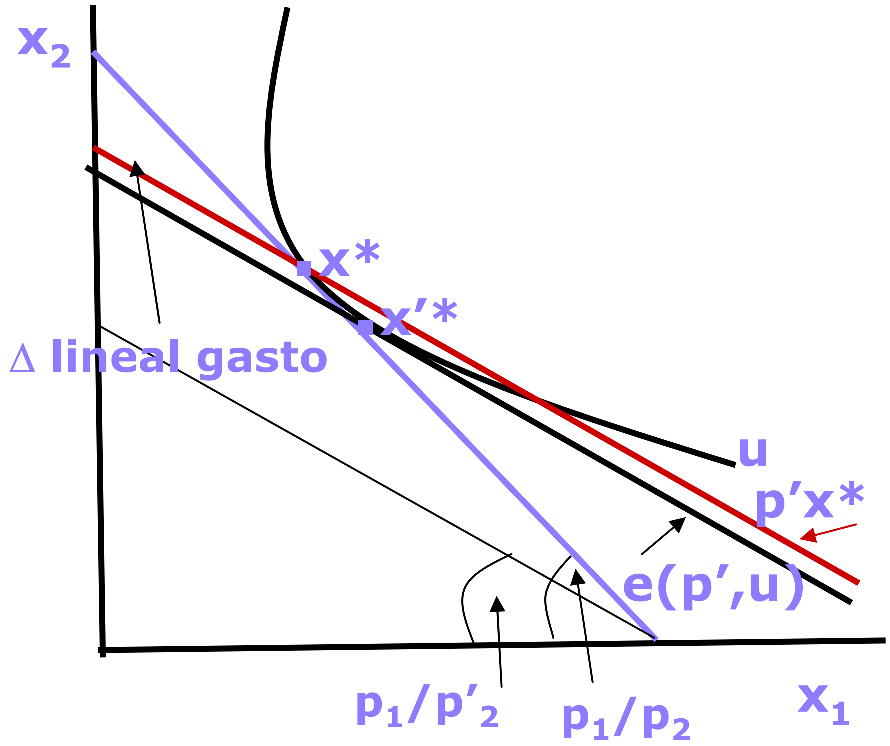
- La concavidad de e(p,u) en p para una u* dada es muy intuitiva.
- Supongamos que a precios p, x minimiza el gasto en el PMG. Si los precios cambian a p', pero no dejamos que el consumidor cambie su cesta de consumo, es decir, que siga consumiendo x, entonces el nivel de gasto será p'x que es lineal en p.
- Pero, si el consumidor puede ajustar su consumo (como en el PMG) su nivel de gasto no puede ser mayor que p'x.

La función de gasto: e(p,u)

Gráficamente: p_1 fijo y p_2 se incrementa a p'_2.

e(p,u) está por debajo de la función lineal px.





Algunas identidades importantes

Relación entre la función de gasto y la función indirecta de utilidad. Consideremos los problemas:

- *v(p,w)= Max u(x)*
  - sujeto a $px \leq w$
- e(p,u)=Min px
  - sujeto a $u(x) \geq u$

- **1) e(p, *v*(p,w))=w**. El gasto mínimo necesario para alcanzar la utilidad *v*(p,w) es w.
- **2) *v*(p,e(p,u))=u**. La utilidad máxima generada por la renta e(p,u) es u.

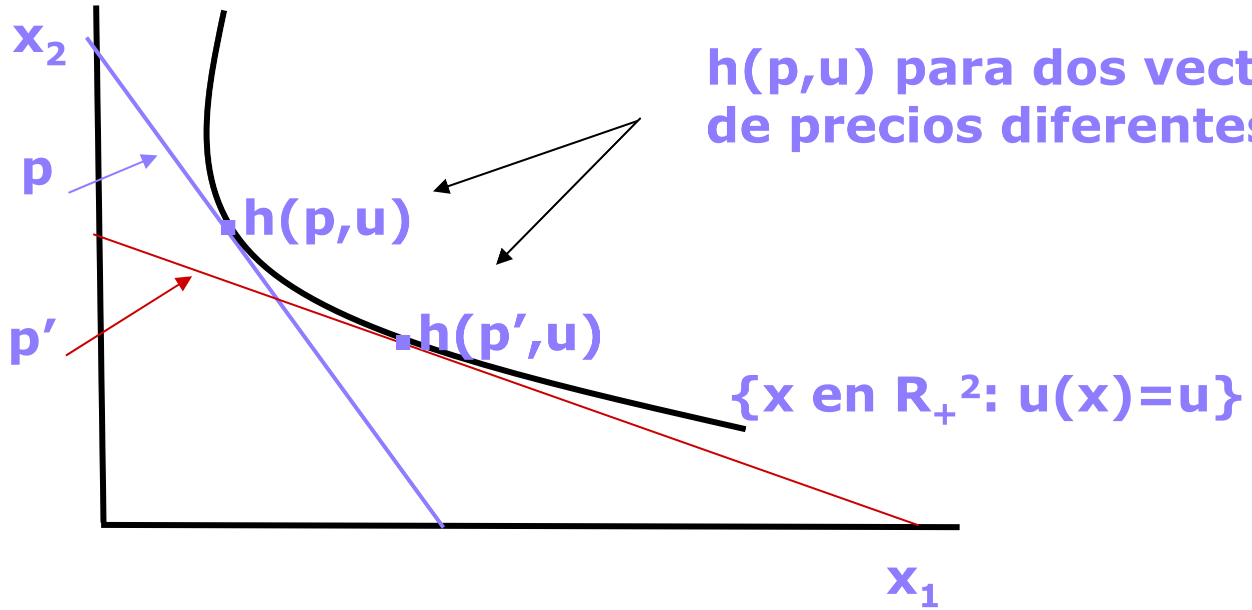
Las propiedades de e(p,u) pueden derivarse directamente de las de *v*(p,w), ya que 1) y 2) implican que, para un vector fijo de precios p, e(p,.) y *v*(p,.) son inversas una de la otra.

La función de demanda compensada o Hicksiana

- Al conjunto de vectores óptimos que resuelven el PMG:
- Min px

  sujeto a u(x)≥u } → **solución: h(p,u)**

Se le denota por h(p,u) y se le conoce por la función (o correspondencia) de demanda compensada o Hicksiana.



Propiedades de h(p,u)

- ***Proposición:*** La función de demanda compensada o Hicksiana es:
- 1) Homogénea de grado cero en p: $h(\alpha p,u)=h(p,u)$,para cualquier p,u y $\alpha>0$.
- 2) No utilidad en exceso: Para cualquier x en h(p,u), $u(x)=u$.
- 3) Convexidad/unicidad: Si las preferencias son convexas, entonces h(p,u) es un conjunto convexo; y si son estrictamente convexas, u(.) es estrictamente cuasi-cóncava y h(p,u) es una función.
- ***Demostración***: 1) La homogeneidad de grado cero en p se debe a que el vector óptimo que minimiza px sujeto a $u(x)\geq u$ es el mismo que minimiza αpx sujeto a $u(x)\geq u$, $\alpha>0$.
- 2) Se debe a la continuidad de u.
- 3) La demostración es la misma que para la función de demanda walrasiana.

Caracterización de h(p,u)

- Como en el PMU, cuando u(.) es diferenciable el consumo óptimo se puede caracterizar por las condiciones de primer orden (CPO) del problema de minimización:
- Min $px = p_1x_1+p_2x_2+\ldots+p_Lx_L$
  $\{x \geq 0\}$ sujeto a $u(x) \geq u$

Lagrangiano asociado:

$L(x, \lambda)=p_1x_1+p_2x_2+\ldots+p_Lx_L+ \lambda[u-u(x_1,...x_L)]$; Las CPO para $x^*_l \geq 0$:

$$\frac{\delta L}{\delta x_1} = p_1 - \lambda \frac{\delta u(x^*)}{\delta x_1} \geq 0, \quad x_1^* \frac{\delta L}{\delta x_1} = 0$$

$$\frac{\delta L}{\delta x_l} = p_l - \lambda \frac{\delta u(x^*)}{\delta x_l} \geq 0, \quad x_l^* \frac{\delta L}{\delta x_l} = 0, \quad l=2,...,L$$

$$\frac{\delta L}{\delta \lambda} = u - u(x^*) \leq 0, \quad \lambda \frac{\delta L}{\delta \lambda} = 0$$

Caracterización de h(p,u)

Supongamos una solución interior, y consideremos el bien k y el l

$$\frac{\partial L}{\partial x_k} = p_k - \lambda \frac{\partial u(x^*)}{\partial x_k} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_l} = p_l - \lambda \frac{\partial u(x^*)}{\partial x_l} = 0$$

que implica:
$$\frac{\dfrac{\partial u(x^*)}{\partial x_k}}{\dfrac{\partial u(x^*)}{\partial x_l}} = \frac{p_k}{p_l}$$

que son las mismas condiciones de primer orden para la maximización de la utilidad.

Relación entre la función de demanda compensada o Hicksiana y la Walrasiana

- ***1) h(p,u)=x(p,e(p,u)).*** La demanda hicksiana correspondiente al nivel de utilidad u es idéntica a la demanda walrasiana correspondiente al nivel de renta e(p,u).
- ***2. x(p,w)=h(p,v(p,u)).*** La demanda walrasiana correspondiente al nivel de renta w, es idéntica a la demanda hicksiana correspondiente al nivel de uitilidad *v*(p,u).

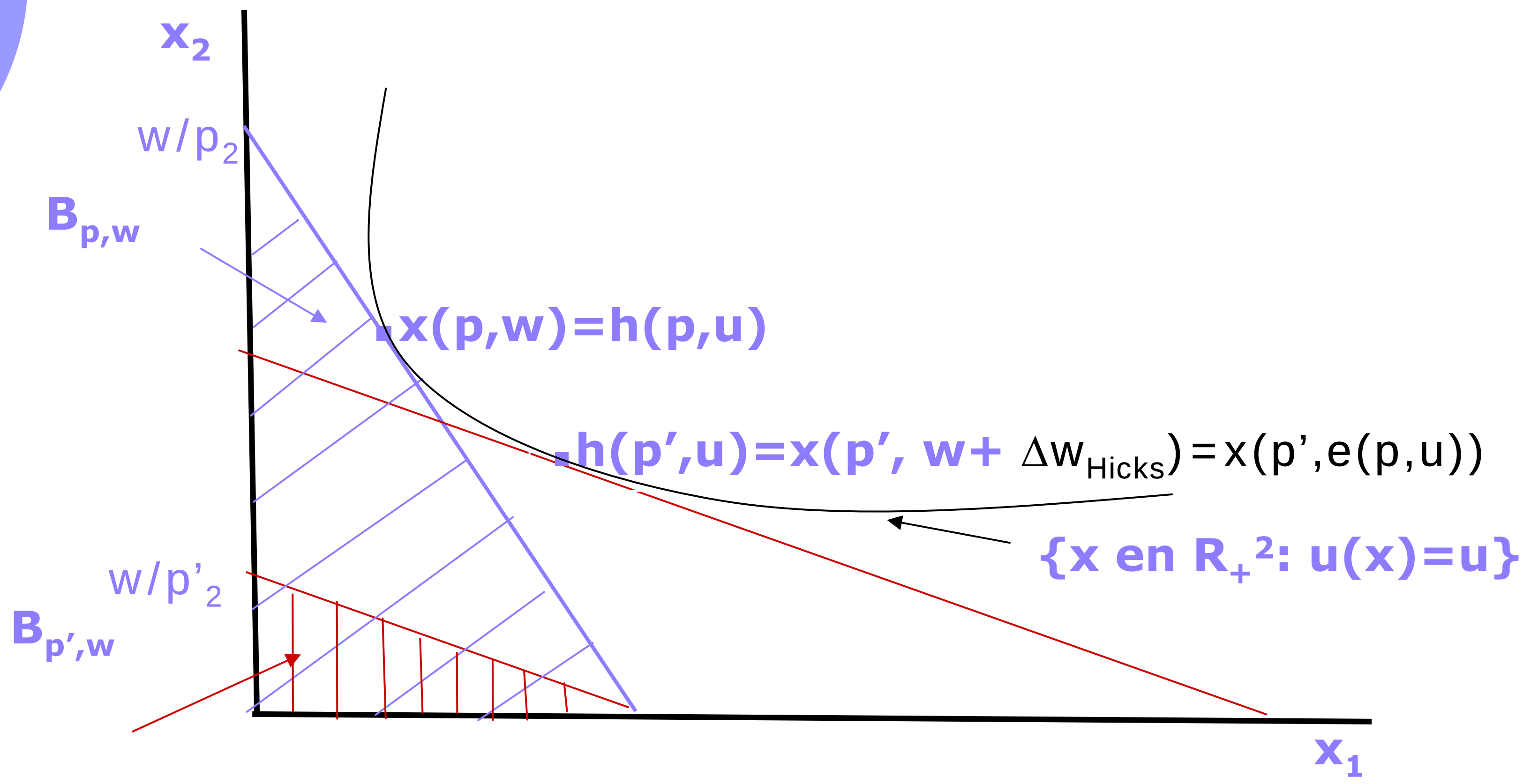
La relación primera explica el uso del término ***demanda compensada*** para describir a h(p,u). A medida que p varía a p', h(p,u) es precisamente el nivel de demanda que se daría si la renta del consumidor se ajustara simultáneamente para mantener su nivel de utilidad u: la compensación de Hicks.

La compensación de renta de Hicks es: Δw_{Hicks}=e(p',u) - w.

Por tanto h(p,u) mantiene el nivel de utilidad del conusmo constante a medida que cambian los precios, mientras que la demanda walrasiana mantiene constante la renta monetaria, pero permite que varie la utilidad.

Relación entre la función de demanda compensada o Hicksiana y la Walrasiana

Gráficamente 1) sería: Sea $p=(p_1,p_2)$ y $p'=(p_1,p'_2)$, con $p_2 < p'_2$



La Demanda Hicksiana y la Ley de la Demanda Compensada

- Una propiedad importante de la demanda Hicksiana es que satisface la Ley de la demanda compensada: la demanda y los precios varían en dirección opuesta, para cambios de precios que se acompañan de variaciones de renta Hicksianas.
- ***Proposición:*** La función hicksiana h(p,u) satisface la Ley de la demanda compensada: para todo p' y p''

$$(p''- p')[h(p'',u) - h(p',u)] \leq 0$$

Demostración: Para cualquier p>>0, la cesta de consumo h(p,u) es óptima en el PMG, y por tanto es el menor gasto a precios p, que cualquier otra cesta que consiga u. Por tanto

$p''h(p'',u) \leq p''h(p',u)$ y $p'h(p'',u) \geq p'h(p',u)$. Restando las desigualdades: $p''h(p'',u)- p'h(p'',u) \leq p''h(p',u)-p'h(p',u)$, por lo que: $(p''- p')[h(p'',u) - h(p',u)] \leq 0$.

Implicación: cambios en los precios propios son siempre no-positivos en la demanda compensada.

Ejemplo:

- $U(x_1,x_2)=x_1^{\alpha}x_2^{(1-\alpha)}$. Calcular las funciones de demanda hicksianas $h_1(p,u)$, $h_2(p,u)$ y la función de gasto $e(p,u)$.

Relación entre demandas, utilidad indirecta y función de gasto

- 1) Demanda Hicksiana y Función de Gasto:

  e(p,u)=ph(p,u)

- ***<u>Proposición</u>***: (Lema de Shephard o lema de Hotelling) Sea $h_l(p,w)$ la demanda hicksiana del consumidor por el bien l. Si la función de gasto es diferenciable en (p,u) y $p_l>0$, con l=1,2,..,L:

$$h_l = \frac{\partial e(p,u)}{\partial p_l}, \qquad l = 1,2,\ldots, L$$

- Es decir, dada la función de gasto, la demanda hicksiana se calcula simplemente por la primera derivada respecto a los precios.

Demostración de la Proposición anterior:

$$\frac{\partial e(p,u)}{\partial p_l} = \frac{\partial [ph(p,u)]}{\partial p_l} = \frac{\partial}{\partial p_l}[p_1 h_1(p,u) + p_2 h_2(p,u) + \ldots + p_L h_L(p,u)] =$$

$$= h_l(p,u) + p_1 \frac{\partial h_1(p,u)}{\partial p_l} + \ldots + p_l \frac{\partial h_l(p,u)}{\partial p_l} + \ldots + p_L \frac{\partial h_L(p,u)}{\partial p_l} =$$

$$= h_l(p,u) + \sum_{k=1}^{L} p_k \frac{\partial h_k(p,u)}{\partial p_l} = \text{por L primeras CPO} = h_l(p,u) + \sum_{k=1}^{L} \lambda \frac{\partial u(x^*)}{\partial x_k} \frac{\partial h_k(p,u)}{\partial p_l} =$$

$$= h_l(p,u) + \lambda \sum_{k=1}^{L} \frac{\partial u(x^*)}{\partial x_k} \frac{\partial h_k(p,u)}{\partial p_l}$$

De la condición L + 1 de las CPO: $u(x^*_1,..,x^*_L) = u \rightarrow u(h_1(p,u),..,h_L(p,u)) = u$

derivando con respecto a cualquier precio p_l :

$$\frac{\partial u(x^*)}{\partial h_1} \frac{\partial h_1(p,u)}{\partial p_l} + \ldots + \frac{\partial u(x^*)}{\partial h_L} \frac{\partial h_L(p,u)}{\partial p_l} = \frac{\partial u}{\partial p_l} = 0 \rightarrow \sum_{k=1}^{L} \frac{\partial u(x^*)}{\partial x_k} \frac{\partial h_k(p,u)}{\partial p_l} = 0$$

Luego $\dfrac{\partial e(p,u)}{\partial p_l} = h_l(p,u)$

Principales derivadas respecto de los precios de la función de demanda Hicksiana que se derivan de las propiedades de e(p,u)

- Sea $D_p h(p,u)$ la matrix LxL de primeras derivadas de h(p,u).
- ***Proposición:*** Supongamos que h(p,u) es continuamente diferenciable en (p,u):

1) $D_p h(p,u) = D^2_p e(p,u)$, es decir

$$\frac{\partial h_k(p,u)}{\partial p_l} = \frac{\partial^2 e(p,u)}{\partial p_l \partial p_k}, \quad \text{para todo } l \text{ y para todo } k$$

2) $D_p h(p,u)$ es una matrix semi-definida negativa

3) $D_p h(p,u)$ es una matriz simétrica

$$\frac{\partial h_k(p,u)}{\partial p_l} = \frac{\partial^2 e(p,u)}{\partial p_k \partial p_l} = \frac{\partial^2 e(p,u)}{\partial p_l \partial p_k} = \frac{\partial h_l(p,u)}{\partial p_k}$$

4) $D_p h(p,u)p = 0$ (Formula de Euler)

Principales derivadas respecto de los precios de la función de demanda Hicksiana que se derivan de las propiedades de e(p,u)

- ***Demostración***: 1) se cumple por el Lema de Shephard.

  2) y 3) se cumplen por 1) y porque e(p,u) es una función cóncava, dos veces diferenciable. Esto implica que su matriz Hessiana de segundas derivadas es simétrica y semi-definida negativa.

  4) Como h(αp,u) -h(p,u)=0, para toda α>0, diferenciando con respecto a α y evaluando la derivada en α=1 (formula de Euler), se tiene que

$$\sum_{k=1}^{L} \frac{\partial h_l(p,u)}{\partial p_k} p_k = 0, \text{ para todo } l = 1,2,.., L$$

  por lo que : D_ph(p,u)p=0

Implicaciones de la Proposición

- 1) La semi-definición negativa de $D_p h(p,u)$ es el análogo diferencial de la Ley de la Demanda Compensada. Su versión diferencial es $dp dh(p,u) \leq 0$.

  Como $dh(p,u)=D_p h(p,u)dp$, entonces $dp D_p h(p,u)dp \leq 0$, para todo dp, que implica que $D_p h(p,u)$ es semi-definida negativa y

$$\frac{\partial h_l(p,u)}{\partial p_l} \leq 0, \text{ para todo l}$$

  los efectos-precio propios compensados son siempre no-positivos.

Implicaciones de la Proposición

2) Definimos a dos bienes k y l como sustitutos (netos) en (p,u) si $\dfrac{\partial h_l(p,u)}{\partial p_k} \geq 0$,

y como complementarios (netos) si: $\dfrac{\partial h_l(p,u)}{\partial p_k} \leq 0$

(Si esta relación se da para las demandas walrasianas, los bienes se denominan sustitutos y complementarios brutos)

3) Como $\dfrac{\partial h_l(p,u)}{\partial p_l} \leq 0$ la propiedad 4) (formula de Euler)

implica que debe existir un bien k tal que $\dfrac{\partial h_l(p,u)}{\partial p_k} \geq 0$
cada bien debe tener al menos un sustituto.

Funciones de demanda Hicksianas y Walrasianas: Ecuación de Slutsky

- Aunque la función de demanda hicksiana no es directamente observable (ya que tiene el nivel de utilidad del consumidor como argumento), la matriz $D_p h(p,u)$ puede calcularse a partir de las funciones de demanda walrasianas x(p,w), que son observables.

- Este importante resultado se conoce como ***la ecuación de Slutsky*** y significa que las propiedades de la Proposición anterior se transladan a restricciones sobre las funciones de demanda walrasianas x(p,w).

La ecuación de Slutsky

- ***Proposición*** (La ecuación de Slutsky)
  Supongamos que u(x) es una función de utilidad continua, monótona y estrictamente cuasi-cóncava. Entonces, para todo par (p,w) y u=*v*(p,w):

$$\frac{\partial h_l(p,u)}{\partial p_k} = \frac{\partial x_l(p,w)}{\partial p_k} + \frac{\partial x_l(p,w)}{\partial w} x_k(p,w), \text{ para todo l y k}$$

  o, en notación matricial:

  $D_p h(p,u) = D_p x(p,w) + D_w x(p,w)\ x(p,w)^T$

La ecuación de Slutsky

- *Demostración*: Considérese un consumidor que se enfrenta a al par (p_0,w_0) y alcanza el nivel de utilidad u_0. Nótese que $w_0=e(p_0,u_0)$. Por dualidad $h_l(p,u)=x_l(p,e(p,u))$. Derivando esta expresión respecto a p_k y evaluando la derivada en (p_0,u_0):

$$\frac{\partial h_l(p,u)}{\partial p_k} = \frac{\partial x_l(p_o,e(p_0,u_0))}{\partial p_k} + \frac{\partial x_l(p_o,e(p_0,u_0))}{\partial w}\frac{e(p_0,u_0)}{\partial p_k} =$$

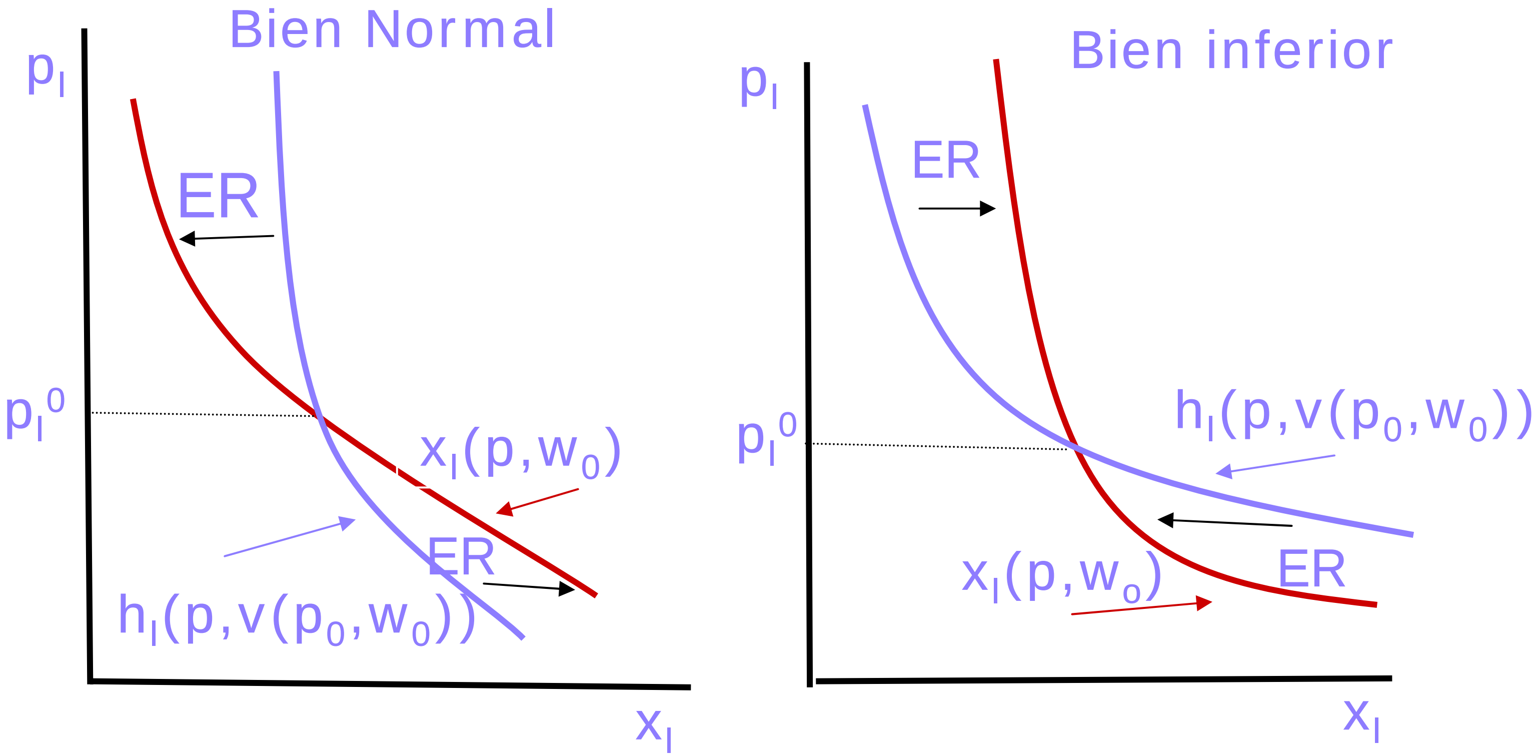
$$= \frac{\partial x_l(p_o,e(p_0,u_0))}{\partial p_k} + \frac{\partial x_l(p_o,e(p_0,u_0))}{\partial w} h_k(p_0,u_0),$$

y como $w_0 = e(p_0,u_0)$ y $h_k(p_0,u_0) = x_k(p_o,e(p_0,u_0)) = x_k(p_o,w_0)$

$$\frac{\partial h_l(p_0,u_0)}{\partial p_k} = \frac{\partial x_l(p_o,w_0)}{\partial p_k} + \frac{\partial x_l(p_o,w_0)}{\partial w} x_k(p_o,w_0)$$

La ecuación de Slutsky: relaciona las pendientes de las curvas de demanda Hicksians y Walrasiana

- Gráficamente:



La matriz de Slutsky

- La ecuación de Slutsky implica que la matriz de derivadas $D_p h(p,u)$ de la demanda Hicksiana es igual a la matriz

$$S(p,w) = \begin{bmatrix} s_{11}(p,w), & \ldots, & s_{1L}(p,w) \\ \ldots & \ldots, & \ldots \\ s_{L1}(p,w), & \ldots, & s_{LL}(p,w) \end{bmatrix},$$

$$\text{con} \quad s_{lk} = \frac{\partial x_l(p,w)}{\partial p_k} + \frac{\partial x_l(p,w)}{\partial w} x_k(p,w)$$

La matriz de Slutsky

- A la matriz S(p,w) se le denomina ***la matriz de efectos sustitución de Slutsky***. Esta matriz se puede calcular a través de las funciones de demanda observables x(p,w).

  Como $S(p,w)=D_p h(p,u)$,

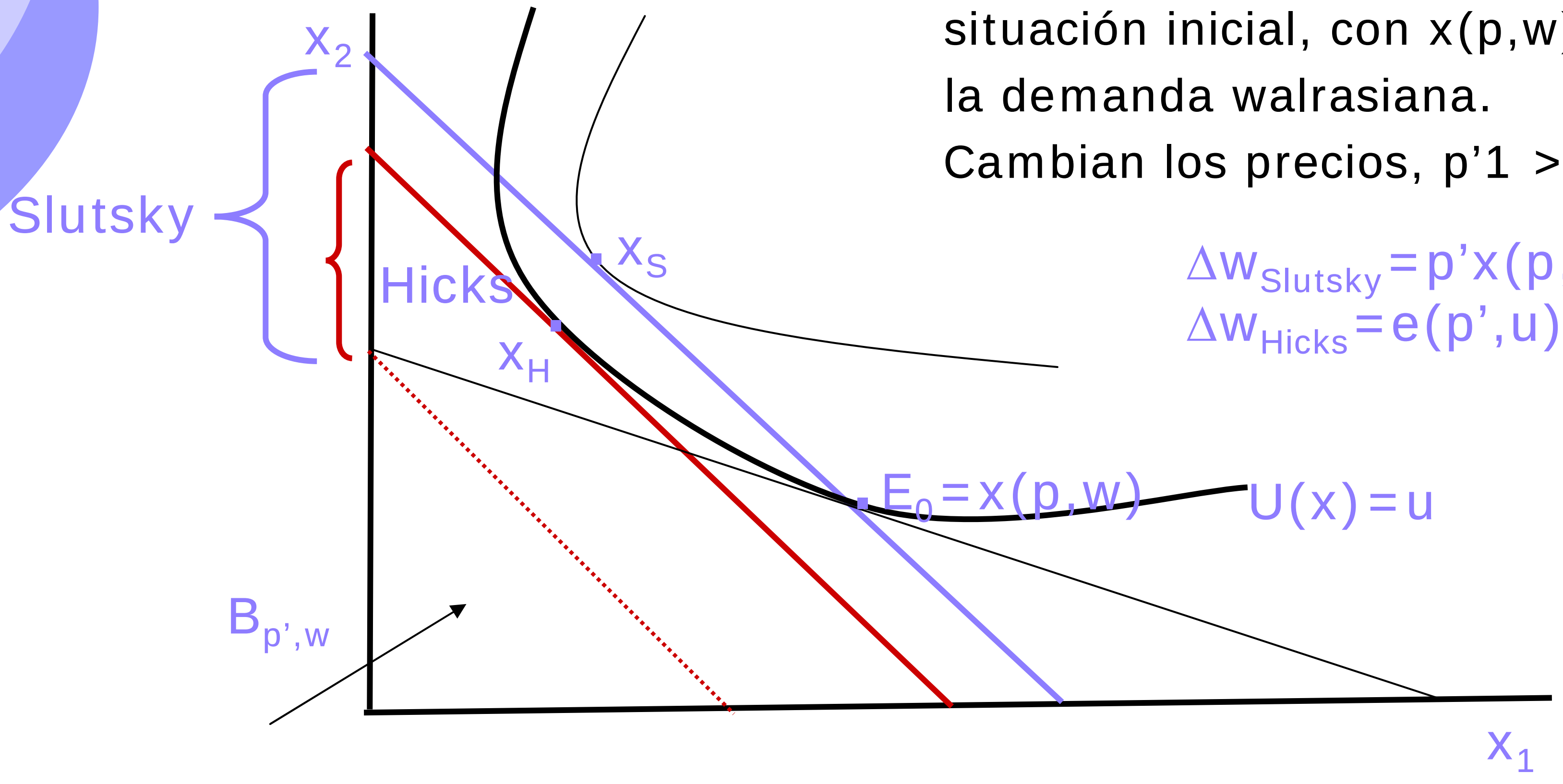
  <u>Propiedades de S(p,w):</u>

- 1) Es semi-definida negativa (ya que e(p,u) es cóncava)
- 2) Simétrica, (ya que $\partial^2 e/\partial p_k \partial p_l = \partial^2 e/\partial p_l \partial p_k$)
- 3) S(p,w)p=0 (por formula de Euler).

Comparación con S(p,w) del Tema 2

- S(p,w) del Tema 2=la compensación de renta era la de Slutsky.

Supongamos u(.) y (p,w) situación inicial, con x(p,w) la demanda walrasiana. Cambian los precios, p'1 >p1



$\Delta w_{Slutsky}=p'x(p,w)-w$

$\Delta w_{Hicks}=e(p',u)-w$

Compensaciones de renta de Hicks y Slutsky.

- En general, para cambios discretos en precios:

  $\Delta w_{Hicks} \leq \Delta w_{Slutsky}$

  Sin embargo, las compensaciones de Hicks y Slutsky son idénticas si el cambio en los precios es un diferencial:

$\Delta w_{Slutsky}$=p'x(p,w)-w= p'x(p,w)-px(p,w)= dp x(p,w)

Δw_{Hicks}=e(p',u)-w = e(p',u)-e(p,u)=dp ∂e(p,u)/ ∂p=dp h(p,u)

=dp x(p,w).

Si x(p,w) satisface el AD (más homogeneidad de grado cero, más Ley de Walras) $\longrightarrow$ S(p,w) es semi-definida negativa, con S(p,w)p=0, pero **no es simétrica** (sólo si L=2)

Por tanto, el enfoque de las preferencias es más restrictivo que el anterior y de hecho no es posible encontrar preferencias que racionalicen la demanda si S(p,w) no es simétrica.

Demanda Walrasiana y Función indirecta de utilidad.

- h(p,u) es la derivada de e(p,u). Sin embargo, el análogo para x(p,w) no se cumple.
- La demanda walrasiana, siendo un concepto ordinal no puede ser la derivada de la función indirecta de utilidad, ya que no es invariante a transformaciones crecientes de la utilidad.
- ***<u>Proposición</u>*** (Identidad de Roy)

$$x_l(p,w) = -\frac{\dfrac{\partial v(p,w)}{\partial p_l}}{\dfrac{\partial v(p,w)}{\partial w}}$$

Demanda Walrasiana y Función indirecta de utilidad.

- <u>*Demostración:*</u> *v(p,w)=u(x(p,w)*

$$\frac{\partial v(p,w)}{\partial p_l}=\frac{\partial u(x(p,w))}{\partial x_1}\frac{\partial x_1(p,w))}{\partial p_l}+....+\frac{\partial u(x(p,w))}{\partial x_L}\frac{\partial x_L(p,w))}{\partial p_l}=$$

$$=\sum_{k=1}^{L}\frac{\partial u(x(p,w))}{\partial x_k}\frac{\partial x_k(p,w))}{\partial p_l}=\sum_{k=1}^{L}\lambda p_k\frac{\partial x_k(p,w))}{\partial p_l}$$

Por las L primeras CPO del problema de maximización. Por tanto:

$$\frac{\partial v(p,w)}{\partial p_l}=\lambda\sum_{k=1}^{L}p_k\frac{\partial x_k(p,w))}{\partial p_l}.$$

Derivando la condición L + 1 de las CPO, respecto p_l, se obtiene que

$$\sum_{k=1}^{L}p_k\frac{\partial x_k(p,w))}{\partial p_l}=-x_l\text{, y como }\lambda=\frac{\partial v(p,w)}{\partial w}\text{, el resultado es inmediato.}$$

Integrabilidad

- Si una función de demanda continuamente diferenciable x(p,w) se genera por preferencias racionales, se sabe que x(p,w) es homogénea de grado, satisface la Ley de Walras y su matriz de efectos sustitución S(p,w) es simétrica y semi-definida negativa.
- Ahora se plantea la pregunta al revés ¿ Si observamos una función de demanda x(p,w) que satisface estas tres propiedades, se pueden encontrar preferencias que la generen?
- Como se mostrará a continuación la respuesta es si: las propiedades de la demanda anteriores son suficientes para garantizar la existencia de preferencias que generen dicha demanda.

- A este problema se le conoce como el ***problema de la integrabilidad*** y tiene una larga tradición en Economía.

Integrabilidad

- Razones teóricas y prácticas de porque este problema y su resultado son de interés.

- A ***nivel teórico*** el resultado nos dice dos cosas:

  1) No solo las propiedades de homogeneidad de grado cero, Ley de Walras y S(p,w) simétrica y semi-definida negativa son consecuencias de un enfoque de la demanda basado en las preferencias, sino que son ***todas*** sus consecuencias.

  2) El resultado completa el estudio de la relación entre el enfoque basado en las preferencias y la teoría de la demanda basada en las estructuras de elección y el Axioma Débil. Sabemos que esta ultima genera demandas con S(p,w) semi-definidas negativas pero **no** simétricas. Por esto, cuando S(p,w) no es simétrica, la demanda basada en el Axioma Débil, no puede racionalizarse porunaspreferencias.

Integrabilidad

- A ***nivel práctico***:

  1) Para analizar ***problemas de bienestar***, se necesitan saber las preferencias del consumidor (o al menos su función de gasto). El resultado nos dice ***como*** y ***cuando*** se puede ***recobrar*** esta información de las observaciones del comportamiento de la demanda del consumidor.

  2) Cuando se llevan a cabo ***análisis empíricos*** de la demanda, a veces se desean estimar funciones de demanda de una forma relativamente sencilla. Si se quieren considerar funciones de demanda que se puedan derivar de una relación de preferencias subyacente, hay dos formas de hacerlo:

  a) Una es especificar funciones de utilidad, hasta que se encuentre una estadísticamente tratable.

  b) El resultado de esta sección permite seguir un camino más sencillo: especificar una función de demanda tratable y comprobar si satisface las condiciones necesarias y suficientes. De hecho, no se necesita derivar la función de utilidad subyacente.

Integrabilidad

- El problema de recuperar las preferencias $\succsim$ a partir de x(p,w), se puede dividir en dos partes:

  1) Recuperar una función de gasto e(p,w) a partir de x(p,w),

  2) Recuperar las preferencias $\succsim$ a partir de e(p,w).

$$x(p,w) \longrightarrow e(p,w) \longrightarrow \succsim$$

Analizamos primero el segundo paso.

Recuperación de las preferencias a partir de e(p,u)

- ***Recuperación de las preferencias a partir de la función de gasto***:

  Supongamos que e(p,u) es la función de gasto del consumidor. e(p,u) es estrictamente creciente en u, continua, nodecreciente, homogénea de grado 1 y cóncava en p. Además, como suponemos que la demanda es una función, e(p,u) es diferenciable.

  Dada e(p,u), ¿se puede recuperar la relación de preferencias que la genera?

  Esto requiere encontrar, para cada nivel de utilidad u, un conjunto V_u en R^L "al menos tan bueno como" u, tal que e(p,u) sea el gasto mínimo requerido para que el consumidor pueda comprar una cesta en V_u a los precios p>>0.

Recuperación de las preferencias a partir de e(p,u)

- Formalmente, se quiere identificar un conjunto V_u tal que para todo p>>0, se tenga: e(p,u)=Min px, s. a. x en V_u.

  Proposición: Supongamos que e(p,u) satisface que es estrictamente creciente en u y continua, creciente, homogénea de grado cero, cóncava y diferenciable en p. Entonces, para cada nivel de utilidad u, e(p,u) es la función de gasto asociada al conjunto "al menos tan bueno como":

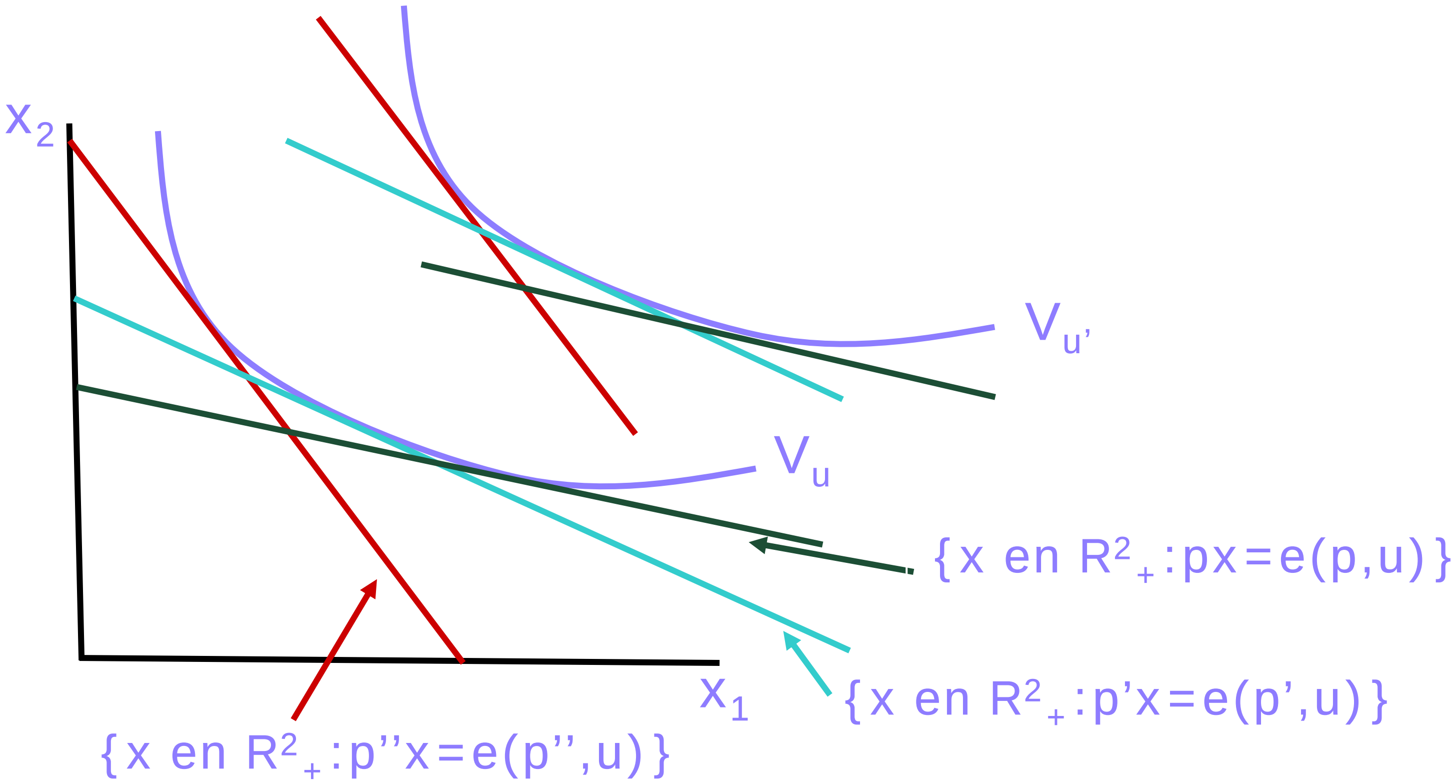
  $$V_u=\{x \text{ en } R^L_+: px \geq e(p,u), \text{ para todo } p>>0\}$$

  Es decir, e(p,u)=Min {px: x en V_u}.

  Dada la Proposición anterior, se pueden construir el conjunto V_u para cada nivel u. Como e(p,u) es estrictamente creciente en u, entonces si u'>u, $V_{u'}$ >V_u. Además cada V_u es cerrado, convexo y acotado por debajo.

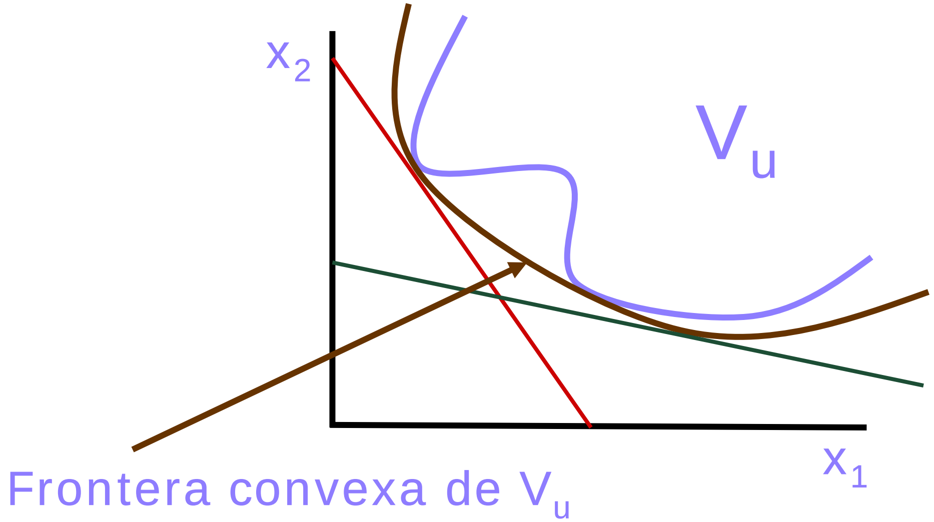
Construcción de los conjuntos V_u.

- Los conjuntos V_u definen una relación de preferencias $\succsim$ que tienen a e(p,u) como su función de gasto.



Los conjuntos V_u y convexidad

- Si la e(p,u) es diferenciable, cualquier relación de preferencias que genera e(p,u) debe ser convexa (envoltura convexa de hiperplanos).
- Pero e(p,u) puede no ser diferenciable. La construcción, como antes, también daría lugar a preferencias convexas. Sin embargo, hay también preferencias no convexas que la podrían generar.



Aquí V_u no es convexo.
La frontera convexa de V_u:
$\{x \text{ en } R^2_+ : px \geq e(p,u)\}$, y también genera e(p,u).

Recuperación de la función de gasto e(p,u) a partir de la función de demanda x(p,w)

- Ahora se tiene que recuperar e(p,u) a partir del comportamiento observable del consumidor que se resume en su función de demanda x(p,u).
- Suponemos que x(p,u) satisface la Ley de Walras, homogeneidad de grado cero y que es una función (no una correspondencia).
- Considérese el caso de dos bienes: L=2, y normalicemos $p_2=1$. Elijamos un par precio-renta (arbitrario) $(p^0_1, 1, w^0)$ y asignémosle una utilidad de u^0 a la cesta $x(p^0_1, 1, w^0)$.
- Hemos de recuperar el valor de la función de gasto:

  $e(p^0_1, 1, u^0)$, para todo $p_1>0$.

  Como la función de demanda compensada es la derivada de la función de gasto con respecto a los precios, ***recuperar*** e(.) es equivalente a ***integrar*** : a resolver una ecuación diferencial en la que p_1 es la variable independiente y e(.) es la dependiente.

Recuperación de la función de gasto e(p,u) a partir de la función de demanda x(p,w)

- Sea $e(p_1)= e(p^0{}_1,1, u^0)$, y $x_1(p,w)= x(p_1,1, w)$. Se necesita resolver la ecuación diferencial:

  $$\frac{de(p_1)}{dp_1} = x_1(p_1, e(p_1)) \qquad (*)$$

  con la condición inicial $e(p^0{}_1)=w^0$.

  Si $e(p_1)$ resuelve la ecuación anterior (*), para $e(p^0{}_1)=w^0$, entonces $e(p_1)$ es la función de gasto asociada al nivel de utilidad u^0.

  Nótese que si la matriz de sustitución es semi-definida negativa, entonces $e(p_1)$ tendrá las propiedades de una función de gasto (con el precio del bien 2 normalizado a 1):

1) Por ser la solución de una ecuación diferencial será, por construcción, continua en p_1.
2) Como $x_1(p,w) \geq 0$, la ecuación (*) implica que $e(p_1)$ es nodecreciente en p_1.

Recuperación de la función de gasto e(p,u) a partir de la función de demanda x(p,w)

3) Diferenciando (*), se tiene que:

$$\frac{d^2 e(p_1)}{dp_1^2} = \frac{dx_1(p_1,1,e(p_1))}{dp_1} + \frac{dx_1(p_1,1,e(p_1))}{dw}\frac{de(p_1)}{dp_1} =$$

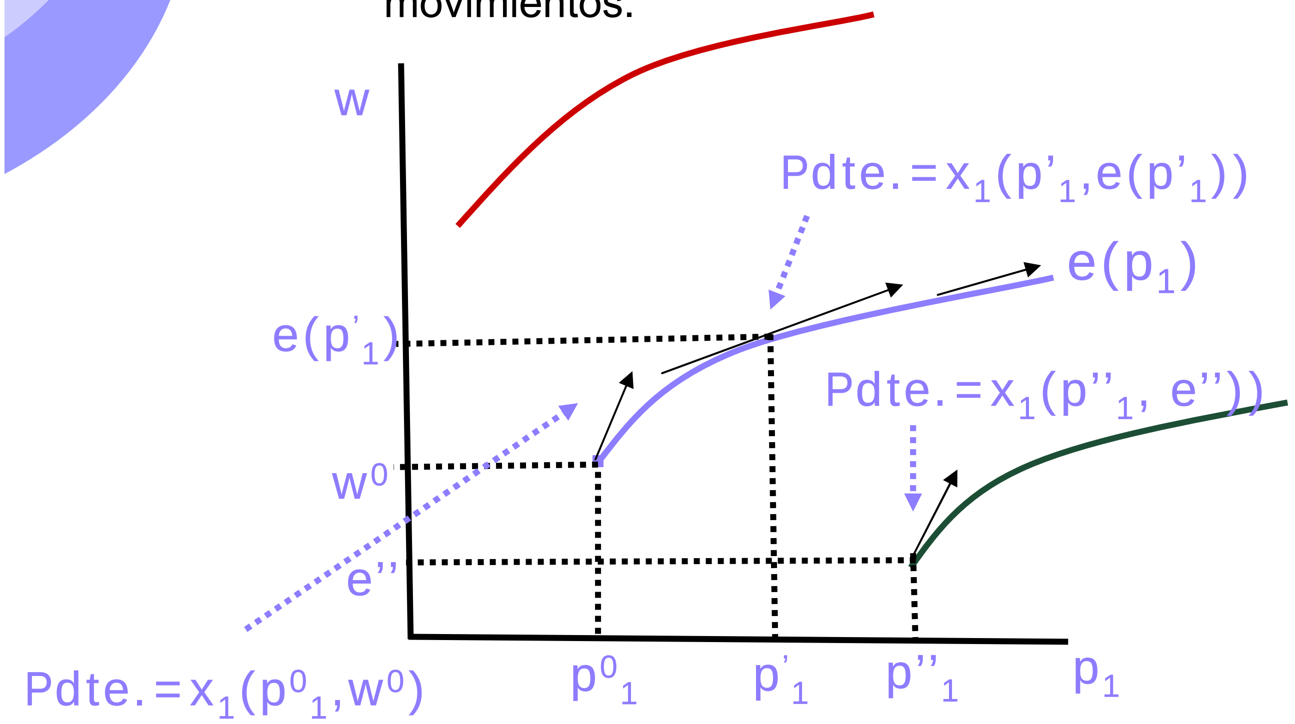
$$= \frac{dx_1(p_1,1,e(p_1))}{dp_1} + \frac{dx_1(p_1,1,e(p_1))}{dw} x_1(p_1,1,e(p_1)) = s_{11}(p_1,1,e(p_1)) \leq 0$$

por lo que la solución es cóncava en p_1.

Resolver (*) es un problema de ecuaciones diferenciales ordinarias. Unas pocas condiciones de regularidad garantizan que (*) tiene solución para condiciones iniciales (p^0,w^0).

Recuperación de la función de gasto e(p,u) a partir de la función de demanda x(p,w)

- La siguiente figura ilustra la esencia del problema: para cada precio p_1 y nivel de gasto e(.), se tiene una dirección de movimiento con pendiente $x_1(p,e(.))$. Para las condiciones iniciales (p^0_1, w^0_1), el grafo de $e(p_1)$ es la curva que empieza en (p^0_1, w^0_1) y sigue las direcciones prescritas en los movimientos.



Recuperación de la función de gasto e(p,u) a partir de la función de demanda x(p,w)

- Para el caso general, de L bienes, el problema es más complicado. La ecuación diferencial (*), se reemplaza por el sistema de ecuaciones diferenciales parciales:

$$\frac{\partial e(p)}{\partial p_1} = x_1(p, e(p))$$

$$\frac{\partial e(p)}{\partial p_2} = x_2(p, e(p)) \qquad (**)$$

$$\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial e(p)}{\partial p_L} = x_L(p, e(p))$$

para las condiciones iniciales p^0 y $e(p^0)=w^0$.

La existencia de una solución no se garantiza automáticamente cuando L>2.

Teorema de Frobenius.

- Un sistema de ecuaciones diferenciales parciales (EDP) es un sistema de la forma:

$$\frac{\delta f(p)}{\delta p_i} = g_i(f(p), p), \quad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (EDP)$$

$$f(q) = 0 \qquad \text{(condición de contorno)}$$

- Una solución de un sistema de EDP es una función *f(p)* que satisface idénticamente las ecuaciones en p.
- Una condición necesaria para que un conjunto de EDP tenga una solución procede de la simetría de las derivadas parciales cruzadas: Teorema de Frobenius

$$\frac{\delta g_i}{\delta f}\frac{\delta f}{\delta p_j} + \frac{\delta g_i}{\delta p_j} = \frac{\delta^2 f}{\delta p_i \partial p_j} = \frac{\delta^2 f}{\delta p_j \partial p_i} = \frac{\delta g_j}{\delta f}\frac{\delta f}{\delta p_i} + \frac{\delta g_j}{\delta p_i}$$

Condición de integrabilidad

- Por tanto:

$$\frac{\delta g_i}{\delta f}\frac{\delta f}{\delta p_j}+\frac{\delta g_i}{\delta p_j}=\frac{\delta g_j}{\delta f}\frac{\delta f}{\delta p_i}+\frac{\delta g_j}{\delta p_i}$$

es una condición necesaria para que este conjunto de EDP tenga una ***solución local***. Esta condición se conoce con el nombre de ***condición de integrabilidad*** (las condiciones para una solución global son mucho más complejas).

Aplicando este resultado a nuestro problema, se tiene que el sistema EDP (**) tendrá una solución local si:

$$\frac{\delta x_i(p,e(p))}{\delta p_j}=\frac{\delta h_i}{\delta p_j}=\frac{\delta^2 e(p)}{\delta p_i \partial p_j}=\frac{\delta^2 e(p)}{\delta p_j \partial p_i}=\frac{\delta h_j}{\delta p_i}=\frac{\delta x_j(p,e(p))}{\delta p_i}$$

Condición de integrabilidad

- La anterior condición es equivalente a la simetria de la matriz de Slutsky de x(p,w), S(p,w).
- Por tanto, la simetría de la matriz de efectos sustitución S(p,w) es una condición necesaria y suficiente para recuperar la función de gasto. Además, si una solución e(p, u) existe, como S(p,w) es negativa semi-definida, la solución e(p,u) poseerá las propiedades de una función de gasto.
- Para una función de demanda diferenciable que satisface la Ley de Walras, homogeneidad de grado cero y el Axioma Débil, sólo si L=2, su matriz de sustitución es simétrica y semi-definida negativa y, por tanto, solo en este caso existen preferencias que la racionalizan.