UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

Primer curso de Ingeniería Informática

PROBLEMAS DE ANÁLISIS MATEMÁTICO

Curso 2003/2004

Ejercicio 1 Calcular los límites de las sucesiones siguientes:

$i)\dfrac{5n^3-8n^2+3}{4n^3+2n+4}$ $\quad ii)\dfrac{4n^2-3n+4}{5n^4+2n^2-3}$

$iii)\dfrac{2n^5-8n^2+3}{14n^3+n+4}$ $\quad iv)\dfrac{4n^4-3n^3+4}{4n^4+3n^2-3}$

$v)\dfrac{5n^2-11n+3}{n^3+2n+4}$ $\quad vi)\dfrac{\sqrt{4n^2-3n+4}}{5n-3}$

$vii)\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n+1}}$ $\quad viii)\dfrac{2n+3}{n+\sqrt[3]{n}}$

$ix)\dfrac{\sqrt{n^2-3}}{\sqrt[3]{n^3+1}}$ $\quad x)\dfrac{\sqrt{n^3-n^2+n}}{n+1}$

$xi)\dfrac{(\sqrt{2n}+3)^3-n^3}{n^2-2\sqrt{n^5}}$ $\quad xii)\dfrac{\ln(n^4+4n^3+6n^2-3n+2)}{\ln(6n^3+4n^2-5n+7)}$

$xiii)\dfrac{\ln(2n^6+4n^5+16n^3+3n^2+n)}{\ln(n^3+14n^2+n+7)}$ $\quad xiv)\dfrac{\ln(2n^5+14n^3+16n^2+3n+1)}{\ln(16n^5+4n^2-3n+7)}$

$xv)\dfrac{\ln(n+2)}{\ln(n^3+5n+7)}$ $\quad xvi)\dfrac{\ln(2n^2+3n+1)}{\ln(16n+7)}$

$xvii)\dfrac{\sqrt{2^n}}{2\sqrt{3^n}}$ $\quad xviii)\dfrac{2^n+7}{3^n}$

$xix)\dfrac{5^n-3^n+1}{5^n+3^n+\frac{1}{n}}$ $\quad xx)\dfrac{\sqrt[3]{5}^n+1}{\sqrt{7}^n+7^n}$

$xxi)\sqrt{4n-1}-\sqrt{3n}$ $\quad xxii)\sqrt[3]{n^3+1}-n$

$xxiii)\sqrt{5n+3}-\sqrt{3n}$ $\quad xxiv)\sqrt[3]{n^3+n^2}-\sqrt[3]{n^3-n^2}$

$xxv)\dfrac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2+n}}{\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt[3]{n^3+n^2+1}}$ $\quad xxvi)(2+3n^4)^{\frac{1}{1+2\ln n}}$

$xxvii)(5n^3+4n-1)^{\frac{1}{\ln(n^2+7n-5)}}$ $\quad xxviii)\ \sqrt[n]{\log n}$

$xxix)(2n^2+3n)^{\frac{1}{n^2+1}}$ $\quad xxx)(2n^3+3n^2+1)^{\frac{2}{n^3-1}}$

$xxxi)\ \sqrt[n^2]{n^2+n+1}$ $\quad xxxii)\ \left(\dfrac{n^2+1}{n^2}\right)^{\frac{2n^3}{n+1}}$

$xxxiii)\left(\dfrac{n^2+3n-5}{n^2-4n+2}\right)^{\frac{n^2+5}{n+2}}$ $\quad$ $xxxiv)\left(\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^{n\ln n}$

$xxxv)\dfrac{1^p+2^p+3^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$ $\quad$ $xxii)\left(\dfrac{(2n)!}{n!}\right)^{1/n}$

$xxxvi)\dfrac{n^2+3n}{2+6+10+\cdots+(4n-2)}$ $\quad$ $xxxvii)\dfrac{1+4+7+\cdots+(3n-2)}{5+7+9+\cdots+(2n+3)}$

Ejercicio 2 Encontrar, si existe, una expresión para el término general de las siguientes sucesiones recurrentes. Decir en cada caso si la sucesión es convergente y si no lo es encontrar una subsucesión que lo sea.

$i)a_1=1, a_{n+1}=(-1)^n+a_n$ $\quad$ $ii)a_1=1, a_{n+1}=-a_n$

$iii)a_1=1, a_{n+1}=-\dfrac{a_n}{2}$ $\quad$ $iv)a_1=1, a_{n+1}=(-1)^n a_n$

$v)a_1=1, a_{n+1}=\dfrac{a_n}{n+1}$

Ejercicio 3 Estudiar si las sucesiones siguientes son convergentes y, en caso afirmativo, calcular su límite.

$i)a_1=\sqrt{2}, a_{n+1}=\sqrt{a_n+2}$ $\quad$ $ii)a_1=1, a_{n+1}=a_n+\dfrac{1+a_n}{1+2a_n}$

$iii)a_1>0, a_{n+1}=-\dfrac{a_n+1}{2a_n+\frac{1}{a_n}+1}$ $\quad$ $iv)a_1=1, a_{n+1}=\sqrt{a_n+1}$

$v)a_1=1, a_2=2, a_{n+2}=\dfrac{1}{3}(4a_{n+1}-a_n)$ $\quad$ $vi)a_1=2, a_{n+1}=2+\dfrac{1}{a_n}$

$vii)a_1=2, a_{n+1}=\dfrac{1}{2+a_n}$ $\quad$ $viii)a_1=0, a_2=1, a_{n+2}=\dfrac{1}{3}a_{n+1}+\dfrac{2}{3}a_n$

$ix)a_1=0, a_2=1, a_{n+2}=\dfrac{1}{5}a_{n+1}+\dfrac{4}{5}a_n$ $\quad$ $x)a_1=1, a_{n+1}=\dfrac{2}{7}a_n$

$xi)a_1=2, a_{n+1}=2-\dfrac{1}{a_n}$ $\quad$ $xii)1<a_1<5, a_{n+1}=\dfrac{5}{6-a_n}$

$xiii)a_1=3, a_{n+1}=4-\dfrac{4}{a_n}$ $\quad$ $xiv)1<a_1<4, a_{n+1}=\dfrac{4}{5-a_n}$

Ejercicio 4 Probar que $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Ejercicio 5 Demostrar que cualquier cantidad superior a tres euros se puede expresar mediante monedas de dos euros y billetes de cinco euros.

Ejercicio 6 Probar que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Ejercicio 7 Probar que $\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$.

Ejercicio 8 Probar que $2!4!\cdots(2n)! > ((n+1)!)^n, n = 2, 3, \ldots$.

Ejercicio 9 Estudiar el carácter de las series:

$i)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ $\qquad ii)\ \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{a}-1)^p \quad a>1,\ p \in \mathbb{R}^+$

$iii)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2+\cdots+n}$ $\qquad iv)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log 2 \cdots \log n}{n!}$

$v)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\log n}}{(\log n)^n}$ $\qquad vi)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$

$vii)\ \sum_{n=2}^{\infty} \cos^{2n}(\frac{n\pi}{2n+4})$ $\qquad viii)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}$

$ix)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{(n-1)!}}{(1+1)(1+\sqrt{2})\cdots(1+\sqrt{n})}$ $\qquad x)\ \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}}$

$xi)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n}}{n+100}$ $\qquad xii)\ \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{\sqrt{n}(n+1)} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}})$

$xiii)\ \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n^2]{2}-1)$ $\qquad xiv)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log n}}$ (Comparar con $\frac{1}{n^2}$)

$xv)\ \sum_{n=1}^{\infty} p^n n^q, \quad p,q \in \mathbb{R}$ $\qquad xvi)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)}$

$xvii)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\frac{3}{4} \cdots \frac{2n-3}{2n-2}\frac{2n-1}{2n}$ $\qquad xviii)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 4^n}{(2n)!}$

Ejercicio 10 Sumar las series siguientes:

Descomposición en fracciones simples.

$$i)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \qquad ii)\ \sum_{n=3}^{\infty} \frac{5n-6}{n^3-3n^2+2n}$$
$$iii)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+4}{n(n^2+3n+2)} \qquad iv)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^3-n}$$

Series telescópicas.

$$i)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}} \qquad ii)\ \frac{\log(\frac{n+2}{n+1})}{\sqrt{\log^2(n+1)\log(n+2)}+\sqrt{\log(n+1)\log^2(n+2)}}$$
$$iii)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} \qquad iv)\ \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n-1)}\right)$$

Series aritmético-geométricas.

$$i)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^n} \qquad ii)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{6^n} \qquad iii)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{2^n} \qquad iv)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-2}{3^n}$$

Series de Euler.

$$i)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(n+1)}{n!} \qquad ii)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)}{(n+1)!}2^n \qquad iii)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{n!} \qquad iv)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{(n+1)!}$$

Ejercicio 11 Sumar las series siguientes:

$$i)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4+n^2+1} \qquad ii)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{(1+2^n)(1+2^{n-1})}$$

$$iii)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log((1+\frac{1}{n})^n(1+n))}{n\log n \log(n+1)^{n+1}} \qquad iv)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n+2}{5^n}$$

$$v)\ \sum_{n=p}^{\infty} \frac{1}{\binom{n}{p}} \qquad vi)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{n!}$$

Ejercicio 12 Demostrar, utilizando la definición de límite, que $\lim_{x\to 2}(5x-1)=9$ y $\lim_{x\to 1}(3x-2)=1$.

Ejercicio 13 Calcular los límites siguientes:

$a)\ \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+1}{x^2+2}$ $\qquad b)\ \lim\limits_{x\to 1}(x-1)x^2\text{sen}(\dfrac{1}{1-x})$

$c)\ \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{2x^3+2x^2-10x+6}$ $\qquad d)\ \lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x^2}}$

$e)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x^2-1}{4x^2}\right)^{\frac{x^3}{x-1}}$ $\qquad f)\ \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^5-11x-10}{x^2-4}$

$g)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x}-3}{\frac{2}{x}+7}$ $\qquad h)\ \lim\limits_{x\to 1}(2-x^2)^{\frac{1}{x-1}}$

Ejercicio 14 Estudiar la continuidad de las funciones:

(a).- $f(x)=\begin{cases} 0 & x=0 \\ \dfrac{1+e^{\frac{1}{x}}}{1-e^{\frac{1}{x}}} & x\neq 0 \end{cases}$

(b).- $f(x)=|x|e^{-|x-1|}$.

(c).-$f(x)=\begin{cases} 2 & x=0 \\ \dfrac{x^2\text{sen}(\frac{1}{x})}{\text{sen}x} & x\neq 0 \end{cases}$

(d).-$f(x)=\begin{cases} 1 & x=0 \\ \dfrac{\sin x}{x} & x\neq 0 \end{cases}$

Ejercicio 15 Probar que el polinomio $x^7+x^4+x^3+x-1$ tiene una raíz real en $[0,1]$.

Ejercicio 16 Probar que el polinomio x^3+x-1 tiene una raíz real en $[-1,1]$.

Ejercicio 17 Probar que el polinomio x^4+x^3+x-1 tiene una raíz real en $[-2,1]$.

Ejercicio 18 Probar que el polinomio $x^11+2x^4+3x^3+x-1$ tiene una raíz real.

Ejercicio 19 Probar que todo polinomio de grado impar tiene una raíz real.

Ejercicio 20 Estudiar la derivabilidad de las funciones siguientes en los puntos dados:

a)

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2x - 1, & x \geq 1, \end{cases}$$

en $x = 0,\ x = 1/2,\ x = 1.$

b)

$$f(x) = \begin{cases} max\{x^2, 1/x\}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

en $x = 0,\ x = 1.$

Ejercicio 21 Calcular hasta qué orden es derivable la función

$$f(x) = \begin{cases} e^x - x - 1, & x \geq 0, \\ x^3, & x < 0. \end{cases}$$

Ejercicio 22 Demostrar que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 sen\ 1/x, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

es derivable en toda la recta real y calcular su derivada.

Ejercicio 23 Calcular las derivadas n-ésimas de las funciones

a) $f(x) = \log(kx)$. (Por qué da lo mismo que si fuera $\log x$?)

b) $f(x) = \sin(kx)$.

c) $f(x) = \cos(kx)$.

d) $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$. (Descomponer en suma de fracciones.)

e) $f(x) = \sin(4x)\cos(2x)$. (Expresar como suma)

f) $f(x) = e^x$.

Ejercicio 24 (*Funciones hiperbólicas*) Dado que

$$sh\ x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{(seno hiperbólico)},$$

$$ch\ x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{(coseno hiperbólico)},$$

demostrar:

a) $ch^2 x - sh^2 x = 1.$

b) $(sh\ x)' = ch\ x, \quad (ch\ x)' = sh\ x.$

Ejercicio 25 Calcular cuántas raices reales tiene la ecuación $4x^5 - 5x^4 + 2 = 0$.

Ejercicio 26 Calcular el número de raices reales del polinomio $p(x) = x^5 - 80x + 2$ y localizarlas en intervalos de amplitud 1.

Ejercicio 27 Estudiar si la ecuación $x = \cos x$ tiene solución única. En caso afirmativo obtener una aproximación de la solución con una cifra decimal exacta.

Ejercicio 28 ¿Tiene alguna raíz real el polinomio $p(x) = x^5 - x^2 + 1$? En caso afirmativo hallar una aproximación de dicha raíz con una cifra decimal exacta.

Ejercicio 29 Estudiar la variación (crecimiento, decrecimiento, extremos, concavidad, convexidad e inflexiones) de las funciones siguientes:

$$\begin{array}{lll} a) f(x) = x^3 + x + 1 & b) f(x) = (x-1)^3 x^2 & c) f(x) = x^2 \log x \\ d) f(x) = x^4 + x^2 + 1 & e) f(x) = xe^x & f) f(x) = -x^3 + 1 \end{array}$$

Ejercicio 30 Demostrar las desigualdades siguientes:

$$\begin{array}{ll} a) e^x \geq \dfrac{1}{1+x}, \quad x > 0 & b) \tan x \geq x, \quad 0 \leq x < \pi/2 \\ c) \sin x \leq x, \quad x \geq 0 & d) \log x \leq x, \quad x > 0 \\ e) x^4 + x^3 \geq -\dfrac{27}{256} & f) \sqrt{x} > \log x, \quad x > 0 \end{array}$$

Ejercicio 31 Calcular los límites siguientes:

$$\begin{array}{lll} a) \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 + x - e^x}{x^2} & b) \lim\limits_{x\to 0} (cos\ x)^{1/x^2} & c) \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x - sen\ x}{x + sen\ x} \\ d) \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x} & e) \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^{x-1} - 1}{\sin(2\pi x)} & f) \lim\limits_{x\to 2} \left(2 - \sin(\dfrac{\pi}{4}x)\right)^{\frac{1}{x-2}} \end{array}$$

Ejercicio 32 Escribir los desarrollos de McLaurin de las funciones

$$e^x,\ \log(1+x),\ \operatorname{sen} x,\ \cos x,\ sh\ x,\ ch\ x.$$

Ejercicio 33 Calcular aproximaciones cúbicas de los valores siguientes acotando el error cometido: $e^{0.4}$, $\cos 0.2 \quad (rad)$, $\sin 0.2 \quad (rad)$, $\log 2$.

Ejercicio 34 Calcular el valor de $\log 3$ con un error menor que dos centésimas.

Ejercicio 35 Usando el desarrollo de Taylor de la función $\log(1+x)$, demostrar que

$$\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Cuántos términos de esta serie son necesarios para obtener una aproximación de $\log 2$ con seis cifras decimales exactas?

Ejercicio 36 Calcular la fórmula de Taylor con resto de $f(x) = 4\log(x+1)$ alrededor de $x = 0$. ¿Cuántos términos se necesitan para calcular una aproximación de $4\log(1.05)$ con un error menor que 0.01? Dar una cota superior del error cometido.

Ejercicio 37 Calcular el polinomio de MacLaurin de segundo grado con resto de la función $F(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2}\,dt$.

Ejercicio 38 Calcular la fórmula de Mac Laurin con resto de la función $f(x) = \sin(2x)$. ¿Cuántos términos hacen falta para obtener una aproximación de $\sin 2$ con un error menor que dos centésimas?

Ejercicio 39 Calcular la fórmula de Mac Laurin con resto de $f(x) = \log(1+x)$. Obtener una aproximación de $\log(0.9)$ con dos cifras decimales exactas.

Ejercicio 40 Calcular la fórmula de taylor con resto de la función $f(x) = \log(x+1)$ alrededor de $x = 0$. ¿cuántos términos se necesitan para calcular una aproximación de $\log(1.05)$ con un error menor que 0.01?

Ejercicio 41 Para aproximar $2e^{0.02}$ se usa la aproximación $e^x \sim 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$. Dar una cota superior del error cometido.

Ejercicio 42 Calcular la fórmula de Mac Laurin con resto de $f(x) = \log\left((x+1)^2\right)$. Calcular cuántos términos del polinomio son necesarios para obtener una aproximación de $2\log(1.5)$ con un error menor que 0.002.

Ejercicio 43 Hallar en cada uno de los siguientes casos la derivada de la función F.

(a) $F(x) = \int_1^x x\frac{\text{sen } t}{t}\ dt$ $\qquad$ (b) $F(x) = \int_x^3 (u+2)^4\ du$

(c) $F(x) = \int_x^1 e^{-t^2}\ dt$ $\qquad$ (d) $F(x) = \int_1^{x^2} \frac{e^t}{t}\ dt$

(e) $F(x) = \int_1^x \Big(\int_0^y \frac{t}{\sqrt{1+t^2+t^4}}\ dt\Big)\ dy$ $\qquad$ (f) $F(x) = \cos\Big(\int_1^{x^2} \sqrt[3]{t^2+t+1}\ dt\Big)$

(g) $F(x) = \int_0^{\text{sen } x} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(2-t^2)}}$ $\qquad$ (h) $F(x) = \int_0^{\int_2^{x^2} \frac{\log t}{t-1}\ dt} \cos t^2\ dt.$

Ejercicio 44 Calcular el área limitada por las gráficas de las funciones f y g en el intervalo que se indica.

a) $f(x) = \cos x, \quad g(x) = \text{sen } x$ en $[0, \pi/4]$.

b) $f(x) = x^3, \quad g(x) = x\sqrt{x^2+2}$ en $[0,1]$.

c) $f(x) = e^x, \quad g(x) = e^{-x}$ en $[-1,1]$.

d) $f(x) = \frac{1}{2}\text{sen } 2x, \quad g(x) = \text{sen } x$ entre el origen y el menor punto de corte positivo.

e) $f(x) = xe^{x^2}, \quad g(x) = \log x$ en $[1,2]$.

Ejercicio 45 Calcular el área de un círculo de radio R y de una elipse desemiejes a y b.

Ejercicio 46 Calcular el área común a los círculos $x^2+y^2=9$ y $(x-3)^2+y^2=9$.

Ejercicio 47 Hallar el área limitada por un bucle de la lemniscata de Bernouilli de ecuación

$$\rho^2 = a^2\cos(2\omega).$$

Ejercicio 48 Hallar el area limitada por la cardioide de ecuación

$$\rho = a(1+\cos\omega).$$

Ejercicio 49 Hallar el area limitada por un lazo de la cicloide de ecuación

$$\begin{cases} x = a(t - \text{sen}\, t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$$

y la longitud del mismo lazo.

Ejercicio 50 Longitud de la primera espira de la espiral de Arquímedes $\rho = k\omega$.

Ejercicio 51 Hallar la longitud de un paso de la hélice

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a \operatorname{sen} t \\ z = kt \end{cases}$$

Ejercicio 52 Calcular la longitud de la curva $y = x^2$ en el intervalo $[0, \pi/4]$.

Ejercicio 53 Calcular las longitudes de las curvas siguientes en los intervalos que se indican:

a) $\gamma(t) = (t^2, t^3) \quad \text{si} \quad t \in [0, 2]$

b) $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t) \quad \text{si} \quad t \in [0, 2\pi]$

c) $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t) \quad \text{si} \quad t \in [0, \pi/2]$

d) $\gamma(t) = (a\cos^3 \frac{\pi t}{3}, a\sin^3 \frac{\pi t}{3}) \quad \text{si} \quad t \in [0, 1]$

e) $\gamma(t) = (e^t \sin t, e^t \cos t) \quad \text{si} \quad t \in [0, 2\pi]$.

Ejercicio 54 Volumen del cuerpo limitado por la superficie que genera un arco de cicloide al girar alrededor de su base.

Ejercicio 55 El recinto limitado por

$$\begin{cases} y = xe^x \\ x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

gira alrededor del eje de abcisas. Hallar el volumen del cuerpo generado.

Ejercicio 56 Las secciones transversales de un sólido por planos transversales al eje X son cuadrados con centro dicho eje. Si al cortar por el plano perpendicular en el punto de abcisa x se obtiene un cuadrado de lado $2x^2$, cuál será el volumen del sólido limitado por $x = 0$ y $x = a$?

Ejercicio 57 La base de un sólido es un triángulo de vértices $(0, 0), (0, 1), (1, 1)$ en el plano XY. Sus secciones por planos perpendiculares al eje X son cuadrados. Calcular el volumen del sólido.

Ejercicio 58 La base de un sólido es el círculo de centro $(0, 0)$ y radio 1 en el plano XY. Sus secciones por planos perpendiculares al eje X son cuadrados. Calcular el volumen del sólido.

Ejercicio 59 Calcular el volumen del sólido cuya base es el recinto limitado por el eje OX y la curva $y = 1 - x^2$, y cuyas secciones al cortarlo con planos verticales perpendiculares al eje OX son cuadrados.

Ejercicio 60 Calcular el volumen del sólido cuya base es el recinto limitado por la recta $y = 1$ y la curva $y = 2 - x^2$, y cuyas secciones al cortarlo con planos verticales perpendiculares al eje OX son cuadrados.

Ejercicio 61 Sea R la región limitada por la recta $y = 3 - x$ y el eje OX entre $x = 1$ y $x = 2$. Calcular el volumen del sólido que tiene por base R y cuyas secciones al cortar con planos perpendiculares al eje OX son cuadrados.

Ejercicio 62 Establecer por qué las integrales siguientes son impropias, estudiar si son convergentes o divergentes, y calcular las que sean convergentes.

$$
\begin{array}{lll}
i) \displaystyle\int_0^1 \log x dx & ii) \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x\log x} dx & iii) \displaystyle\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx \\
iv) \displaystyle\int_0^1 x\log x dx & v) \displaystyle\int_0^\infty e^{-x} dx & vi) \displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{e^x}} dx \\
vii) \displaystyle\int_2^\infty \frac{\log x}{x} dx & viii) \displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x(\log x)^2} dx & ix) \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
x) \displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-x} dx & xi) \displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^2} dx & xii) \displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{(x+4)\sqrt{x}} dx
\end{array}
$$

Ejercicio 63 *Calcular aproximaciones a los valores de las integrales siguientes usando el método de Simpson.*

$$
\begin{array}{lll}
a) \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{5+x^3}} & b) \displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\, dx & c) \displaystyle\int_0^2 \frac{\operatorname{sen} x^2}{e^x}\, dx \\
d) \displaystyle\int_1^2 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx & e) \displaystyle\int_0^1 x\sqrt{2+x^4}\, dx & f) \displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{\log(1+x^2)}
\end{array}
$$

Ejercicio 64 Hallar el dominio de definición de las siguientes funciones:

$$i) f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \qquad ii) f(x,y) = \log(xy)$$
$$iii) f(x,y) = \sqrt{x+3y} \qquad iv) f(x,y) \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Ejercicio 65 Hallar la gráfica y curvas de nivel de las siguientes funciones:

$$i) f(x,y) = 2x+3y \qquad ii) f(x,y) = x^2+y^2$$
$$iii) f(x,y) = 2xy \qquad iv) f(x,y) = 2x^2+3y^2$$

Ejercicio 66 Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

i) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(0,0)=0$.

ii) $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(0,0)=0$.

iii) $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(0,0)=0$.

iv) $f(x,y) = \log(x^2+y^2)$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(0,0)=0$.

v) $f(x,y) = \dfrac{\cos y - e^x}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(0,0)=0$.

Ejercicio 67 Calcular las parciales de las siguientes funciones en el origen:

i) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(0,0)=0$.

ii) $f(x,y) = \dfrac{x^4-y^4}{x^2+xy+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(0,0)=0$.

iii) $f(x,y) = \dfrac{x^5+y^2}{x^4+y^4}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(0,0)=0$.

iv) $f(x,y) = \dfrac{\sin(x^5+y^5)}{x^4+y^4}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(0,0)=0$.

v) $f(x,y) = \dfrac{\tan x^3 + \tan y^3}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(0,0)=0$.

Ejercicio 68 Calcular el vector gradiente de las siguientes funciones en el punto que se indica:

i) $f(x,y,z) = 2x \log y - z^2y^2$ en $(1,1,0)$.

ii) $f(x,y,z) = \dfrac{xz}{\sqrt{x^2+y^2}}$ en $(1,-1,1)$.

iii) $f(x,y) = x^2 + \log\sqrt{xy}$ en $(2,1)$.

iv) $f(x,y) = \log\dfrac{1}{xy}$ en $(5,\sqrt{2})$.

v) $f(x,y) = \log(x^2+2y+1) + \displaystyle\int_0^x \cos(t^2)\,dt$ en $(1,1)$.

Ejercicio 69 La temperatura de cada uno de los puntos de una placa cuadrada viene determinada por la función $T(x,y) = (x-1)^3(y-2)^2$. Se desea conocer cuáles son, en el punto $(0,0)$, las direcciones de mayor crecimiento y decrecimiento de la temperatura.

Ejercicio 70 Denotemos por $z = 2e^{-x^2} + e^{-3y^2}$ la altura de una montaña en la posición (x,y). ¿En qué dirección desde $(1,0)$ deberíamos comenzar a caminar para escalar lo más rápidamente posible?

Ejercicio 71 La temperatura de cada uno de los puntos de una placa metálica viene dada por la función $T(x,y) = e^x\cos y + e^y\cos x$. ¿En qué dirección aumenta la temperatura más rápidamente en el punto (x,y)? Si situamos un móvil en el origen, ¿qué dirección tendrá que seguir para asegurarse de que va por el camino más frío?

Ejercicio 72 Una nave espacial se encuentra en un punto del espacio de coordenadas $(1,0,\sqrt[3]{2})$. La temperatura exterior viene dada por la función

$$T(x,y,z) = \frac{\log(x^2y^2z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}.$$

¿Qué dirección ha de tomar la nave para alejarse del calor lo más rápidamente posible?

Ejercicio 73 Dada la función $f(x,y) = e^{x+y}\cos x$ estudiar en qué dirección aumenta el valor de $f(x,y)$ más rápidamente desde el punto $(0,\log 2)$.

Ejercicio 74 Dada la función $f(x,y) = (x+y)\cos(xy)$ estudiar en qué dirección aumenta el valor de $f(x,y)$ más rápidamente desde el punto $(1,\pi)$.

Ejercicio 75 Hallar el plano tangente a las gráficas de las funciones:

i) $f(x,y) = 2xy^2 + x^2y$ en el punto $(1,-1,1)$.

ii) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x^2y + 3xy^2$ en el punto $(1,1,2)$.

iii) $f(x,y) = x^2 + 2y^3 + 5x^2y^2$ en el punto $(2,1,2)$.

iv) $f(x,y) = y^3 + 3x^2y + 2xy^2$ en el punto $(-1,1,2)$.

v) $f(x,y) = x^3 + 3y^3 + 3x^2 + 3x$ en el punto $(1,-1,-2)$.

Ejercicio 76 Calcular los extremos relativos de las funciones:

$i) f(x,y) = xye^{x+2y}$ $\qquad ii) f(x,y) = y^2 + x^2y + x^4$

$iii) f(x,y) = xy^2(1-x-y)$ $\qquad iv) f(x,y) = (x-y^2)(x-y^3)$

$v) f(x,y) = 2x^2 + y + 3$ $\qquad vi) f(x,y) = 3x^3 + y^2 + 3xy$

$vii) f(x,y) = y^2e^{4x+1}$ $\qquad viii) f(x,y) = (x^2-1)y$

$ix) f(x,y) = e^{x+y}(x^2+2y)$

Ejercicio 77 Calcular los extremos absolutos de las siguientes funciones en los recintos indicados:

i) $f(x,y) = x^2 + y^2$ en $\{(x,y) : 4x^2 + 9y^2 = 1\}$.

ii) $f(x,y,z) = 2x^2 + yz$ en $\{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

iii) $f(x,y,z) = 3x^2 + y^2 + xz$ en $\{(x,y,z) : x^2 + y^2 \leq 1, 2x + z = 0\}$.

iv) $f(x,y) = 3x^2y + 2y^3$ en $\{(x,y) : 2x^2 + y^2 \leq 1, y + x \geq 0\}$.

v) $f(x,y) = 2x^2 + y^2$ en $\{(x,y) : 2x^2 + y \leq 0, 2y + x \geq 0\}$.

vi) $f(x,y) = 2x^2 + y^2$ en $\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.