UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

Primer curs d'Enginyeria Informàtica

PROBLEMES D'ANÀLISI MATEMÀTICA

CURS 2003/2004

Sucesiones

Ejercicio 1 Calculeu els límits de les successions següents:

$i)\ \dfrac{5n^3-8n^2+3}{4n^3+2n+4}$ $\qquad ii)\ \dfrac{4n^2-3n+4}{5n^4+2n^2-3}$

$iii)\ \dfrac{2n^5-8n^2+3}{14n^3+n+4}$ $\qquad iv)\ \dfrac{4n^4-3n^3+4}{4n^4+3n^2-3}$

$v)\ \dfrac{5n^2-11n+3}{n^3+2n+4}$ $\qquad vi)\ \dfrac{\sqrt{4n^2-3n+4}}{5n-3}$

$vii)\ \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n+1}}$ $\qquad viii)\ \dfrac{2n+3}{n+\sqrt[3]{n}}$

$ix)\ \dfrac{\sqrt{n^2-3}}{\sqrt[3]{n^3+1}}$ $\qquad x)\ \dfrac{\sqrt{n^3-n^2+n}}{n+1}$

$xi)\ \dfrac{(\sqrt{2n}+3)^3-n^3}{n^2-2\sqrt{n^5}}$ $\qquad xii)\ \dfrac{\ln(n^4+4n^3+6n^2-3n+2)}{\ln(6n^3+4n^2-5n+7)}$

$xiii)\ \dfrac{\ln(2n^6+4n^5+16n^3+3n^2+n)}{\ln(n^3+14n^2+n+7)}$ $\qquad xiv)\ \dfrac{\ln(2n^5+14n^3+16n^2+3n+1)}{\ln(16n^5+4n^2-3n+7)}$

$xv)\ \dfrac{\ln(n+2)}{\ln(n^3+5n+7)}$ $\qquad xvi)\ \dfrac{\ln(2n^2+3n+1)}{\ln(16n+7)}$

$xvii)\ \dfrac{\sqrt{2^n}}{2\sqrt{3^n}}$ $\qquad xviii)\ \dfrac{2^n+7}{3^n}$

$xix)\ \dfrac{5^n-3^n+1}{5^n+3^n+\frac{1}{n}}$ $\qquad xx)\ \dfrac{\sqrt[3]{5}^n+1}{\sqrt{7}^n+7^n}$

$xxi)\ \sqrt{4n-1}-\sqrt{3n}$ $\qquad xxii)\ \sqrt[3]{n^3+1}-n$

$xxiii)\ \sqrt{5n+3}-\sqrt{3n}$ $\qquad xxiv)\ \sqrt[3]{n^3+n^2}-\sqrt[3]{n^3-n^2}$

$xxv)\ \dfrac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2+n}}{\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt[3]{n^3+n^2+1}}$ $\qquad xxvi)\ (2+3n^4)^{\frac{1}{1+2\ln n}}$

$xxvii)\ (5n^3+4n-1)^{\frac{1}{\ln(n^2+7n-5)}}$ $\qquad xxviii)\ \sqrt[n]{\log n}$

$xxix)\ (2n^2+3n)^{\frac{1}{n^2+1}}$ $\qquad xxx)\ (2n^3+3n^2+1)^{\frac{2}{n^3-1}}$

$xxxi)\ \sqrt[n^2]{n^2+n+1}$ $\qquad xxxii)\ \left(\dfrac{n^2+1}{n^2}\right)^{\frac{2n^3}{n+1}}$

$xxxiii)\left(\dfrac{n^2+3n-5}{n^2-4n+2}\right)^{\frac{n^2+5}{n+2}}$ $\quad$ $xxxiv)\left(\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^{n\ln n}$

$xxxv)\dfrac{1^p+2^p+3^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$ $\quad$ $xxii)\left(\dfrac{(2n)!}{n!}\right)^{1/n}$

$xxxvi)\dfrac{n^2+3n}{2+6+10+\cdots+(4n-2)}$ $\quad$ $xxxvii)\dfrac{1+4+7+\cdots+(3n-2)}{5+7+9+\cdots+(2n+3)}$

Ejercicio 2 Trobeu, si existeix, una fòrmula per al terme general de les següents successions recurrents. Dir en cada cas si la successió és convergent i si no ho és trobeu una subsuccessió que ho siga.

$i) a_1 = 1, a_{n+1} = (-1)^n + a_n$ $\quad$ $ii) a_1 = 1, a_{n+1} = -a_n$

$iii) a_1 = 1, a_{n+1} = -\dfrac{a_n}{2}$ $\quad$ $iv) a_1 = 1, a_{n+1} = (-1)^n a_n$

$v) a_1 = 1, a_{n+1} = \dfrac{a_n}{n+1}$

Ejercicio 3 Estudieu si les successions següents són convergents i, en cas afirmatiu, calculeu el seu límit.

$i) a_1 = \sqrt{2}, a_{n+1} = \sqrt{a_n+2}$ $\quad$ $ii) a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + \dfrac{1+a_n}{1+2a_n}$

$iii) a_1 > 0, a_{n+1} = -\dfrac{a_n+1}{2a_n+\frac{1}{a_n}+1}$ $\quad$ $iv) a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{a_n+1}$

$v) a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+2} = \dfrac{1}{3}(4a_{n+1}-a_n)$ $\quad$ $vi) a_1 = 2, a_{n+1} = 2 + \dfrac{1}{a_n}$

$vii) a_1 = 2, a_{n+1} = \dfrac{1}{2+a_n}$ $\quad$ $viii) a_1 = 0, a_2 = 1, a_{n+2} = \dfrac{1}{3}a_{n+1} + \dfrac{2}{3}a_n$

$ix) a_1 = 0, a_2 = 1, a_{n+2} = \dfrac{1}{5}a_{n+1} + \dfrac{4}{5}a_n$ $\quad$ $x) a_1 = 1, a_{n+1} = \dfrac{2}{7}a_n$

$xi) a_1 = 2, a_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{a_n}$ $\quad$ $xii) 1 < a_1 < 5, a_{n+1} = \dfrac{5}{6-a_n}$

$xiii) a_1 = 3, a_{n+1} = 4 - \dfrac{4}{a_n}$ $\quad$ $xiv) 1 < a_1 < 4, a_{n+1} = \dfrac{4}{5-a_n}$

Ejercicio 4 Proveu que $1+2+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Ejercicio 5 Demostreu que qualsevol quantitat superior a tres euros es pot expresar amb monedes de dos euros i billets de cinc euros.

Ejercicio 6 Proveu que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Ejercicio 7 Proveu que $\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$.

Ejercicio 8 Proveu que $2!4!\cdots(2n)! > ((n+1)!)^n, n = 2, 3, \ldots$.

Ejercicio 9 Estudieu el caràcter de les sèries:

$i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$

$ii) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{a}-1)^p \quad a>1,\ p \in \mathbb{R}^+$

$iii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2+\cdots+n}$

$iv) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log 2 \cdots \log n}{n!}$

$v) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\log n}}{(\log n)^n}$

$vi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$

$vii) \sum_{n=2}^{\infty} \cos^{2n}(\frac{n\pi}{2n+4})$

$viii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}$

$ix) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{(n-1)!}}{(1+1)(1+\sqrt{2})\cdots(1+\sqrt{n})}$

$x) \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}}$

$xi) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n}}{n+100}$

$xii) \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{\sqrt{n}(n+1)} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}})$

$xiii) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n^2]{2}-1)$

$xiv) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log n}}$ (Comparar con $\frac{1}{n^2}$)

$xv) \sum_{n=1}^{\infty} p^n n^q, \quad p,q \in \mathbb{R}$

$xvi) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)}$

$xvii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\frac{3}{4} \cdots \frac{2n-3}{2n-2}\frac{2n-1}{2n}$

$xviii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 4^n}{(2n)!}$

Ejercicio 10 Sumeu les sèries següents:

Descomposició en fraccions simples.

$i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \quad ii) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{5n-6}{n^3-3n^2+2n}$

$iii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+4}{n(n^2+3n+2)} \quad iv) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^3-n}$

Sèries telescòpiques.

$i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}$

$ii) \frac{\log(\frac{n+2}{n+1})}{\sqrt{\log^2(n+1)\log(n+2)}+\sqrt{\log(n+1)\log^2(n+2)}}$

$iii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$

$iv) \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n-1)}\right)$

Sèries aritmètic-geomètriques.

$$i)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^n} \qquad ii)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{6^n} \qquad iii)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{2^n} \qquad iv)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-2}{3^n}$$

Sèries d'Euler.

$$i)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(n+1)}{n!} \qquad ii)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)}{(n+1)!}2^n \qquad iii)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{n!} \qquad iv)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{(n+1)!}$$

Ejercicio 11 Sumeu les sèries següents:

$$i)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4+n^2+1} \qquad ii)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{(1+2^n)(1+2^{n-1})}$$

$$iii)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log((1+\frac{1}{n})^n(1+n))}{n\log n \log(n+1)^{n+1}} \qquad iv)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n+2}{5^n}$$

$$v)\ \sum_{n=p}^{\infty} \frac{1}{\binom{n}{p}} \qquad vi)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{n!}$$

Continuidad

Ejercicio 12 Demostreu, utilitzant la definició de límit, que $\lim_{x\to 2}(5x-1)=9$ i $\lim_{x\to 1}(3x-2)=1$.

Ejercicio 13 Calculeu els límits següents:

$a)\ \lim_{x\to 1}\dfrac{x^2+1}{x^2+2}$ $\qquad b)\ \lim_{x\to 1}(x-1)x^2\text{sen}(\dfrac{1}{1-x})$

$c)\ \lim_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{2x^3+2x^2-10x+6}$ $\qquad d)\ \lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x^2}}$

$e)\ \lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x^2-1}{4x^2}\right)^{\frac{x^3}{x-1}}$ $\qquad f)\ \lim_{x\to 2}\dfrac{x^5-11x-10}{x^2-4}$

$g)\ \lim_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x}-3}{\frac{2}{x}+7}$ $\qquad h)\ \lim_{x\to 1}(2-x^2)^{\frac{1}{x-1}}$

Ejercicio 14 Estudieu la continuïtat de les funcions:

(a).- $f(x)=\begin{cases} 0 & x=0 \\ \dfrac{1+e^{\frac{1}{x}}}{1-e^{\frac{1}{x}}} & x\neq 0 \end{cases}$

(b).- $f(x)=|x|e^{-|x-1|}$.

(c).-$f(x)=\begin{cases} 2 & x=0 \\ \dfrac{x^2\text{sen}(\frac{1}{x})}{\text{sen}x} & x\neq 0 \end{cases}$

(d).-$f(x)=\begin{cases} 1 & x=0 \\ \dfrac{\sin x}{x} & x\neq 0 \end{cases}$

Ejercicio 15 Proveu que el polinomi $x^7+x^4+x^3+x-1$ en té una arrel real en $[0,1]$.

Ejercicio 16 Proveu que el polinomi x^3+x-1 en té una arrel real en $[-1,1]$.

Ejercicio 17 Proveu que el polinomi x^4+x^3+x-1 en té una arrel real en $[-2,1]$.

Ejercicio 18 Proveu que el polinomi $x^11+2x^4+3x^3+x-1$ en té una arrel real.

Ejercicio 19 Proveu que tot polinomi de grau imparell en té al menys una arrel real.

Ejercicio 20 Estudieu la derivabilitat de les funcions següents en els punts donats:

a)

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2x-1, & x \geq 1, \end{cases}$$

en $x = 0,\ x = 1/2,\ x = 1.$

b)

$$f(x) = \begin{cases} max\{x^2, 1/x\}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

en $x = 0,\ x = 1.$

Ejercicio 21 Calculeu fins a quin ordre és derivable la funció

$$f(x) = \begin{cases} e^x - x - 1, & x \geq 0, \\ x^3, & x < 0. \end{cases}$$

Ejercicio 22 Demostreu que la funció

$$f(x) = \begin{cases} x^2 sen\ 1/x, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

és derivable en tota la recta real i calculeu la seua derivada.

Ejercicio 23 Calculeu les derivades n-èsimes de les funcions

a) $f(x) = \log(kx)$. (Per què en dòna el mateix que si fòra $\log x$?)
b) $f(x) = \sin(kx)$.
c) $f(x) = \cos(kx)$.
d) $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$. (Descomposseu en suma de fraccions.)
e) $f(x) = \sin(4x)\cos(2x)$. (Escriviu com a suma)
f) $f(x) = e^x$.

Ejercicio 24 (*Funciones hiperbólicas*) Sent

$$sh\ x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{(sinus hiperbòlic)},$$

$$ch\ x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{(cosinus hiperbòlic)},$$

proveu:

a) $ch^2 x - sh^2 x = 1.$
b) $(sh\ x)' = ch\ x, \quad (ch\ x)' = sh\ x.$

Ejercicio 25 Calculeu el nombre d'arrels reals de l'equació $4x^5 - 5x^4 + 2 = 0$.

Ejercicio 26 Calculeu el nombre d'arrels reals del polinomi $p(x) = x^5 - 80x + 2$ i localitzar-les en intervals d'amplitud 1.

Ejercicio 27 Estudieu si l'equació $x = \cos x$ en té solució real única. En cas afirmatiu obtindre una aproximació de la solució amb una xifra decimal exacta.

Ejercicio 28 En té alguna arrel real el polinomi $p(x) = x^5 - x^2 + 1$? En cas afirmatiu trobeu una aproximació de l'arrel amb una xifra decimal exacta.

Ejercicio 29 Estudieu la variació (creixement, decreixement, extrems, concavitat, convexitat i inflexions) de les funcions següents:

$$a) f(x) = x^3 + x + 1 \quad b) f(x) = (x-1)^3 x^2 \quad c) f(x) = x^2 \log x$$
$$d) f(x) = x^4 + x^2 + 1 \quad e) f(x) = xe^x \quad f) f(x) = -x^3 + 1$$

Ejercicio 30 Proveu les desigualtats següents:

$$a) e^x \geq \frac{1}{1+x}, \quad x > 0 \qquad b) \tan x \geq x, \quad 0 \leq x < \pi/2$$
$$c) \sin x \leq x, \quad x \geq 0 \qquad d) \log x \leq x, \quad x > 0$$
$$e) x^4 + x^3 \geq -\frac{27}{256} \qquad f) \sqrt{x} > \log x, \quad x > 0$$

Ejercicio 31 Calculeu els límits següents:

$$a) \lim_{x\to 0} \frac{1+x-e^x}{x^2} \qquad b) \lim_{x\to 0} (cos\ x)^{1/x^2} \qquad c) \lim_{x\to\infty} \frac{x - sen\ x}{x + sen\ x}$$
$$d) \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} \qquad e) \lim_{x\to 1} \frac{e^{x-1}-1}{\sin(2\pi x)} \qquad f) \lim_{x\to 2} \left(2 - \sin(\frac{\pi}{4}x)\right)^{\frac{1}{x-2}}$$

Ejercicio 32 Escriviu els desenvolupaments de McLaurin de les funcions

$$e^x,\ \log(1+x),\ \operatorname{sen} x,\ \cos x,\ sh\ x,\ ch\ x.$$

Ejercicio 33 Calculeu aproximacions cúbiques dels valors següents afitant els errors: $e^{0.4}$, $\cos 0.2 \ (rad)$, $\sin 0.2 \ (rad)$, $\log 2$.

Ejercicio 34 Calculeu el valor de $\log 3$ amb un error menor de dues centèsimes.

Ejercicio 35 Utilitzant el desenvolupament en sèrie de Taylor de la funció $\log(1+x)$, demostreu que

$$\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Calculeu el nombre de termes necessaris per a obtindre una aproximació de $\log 2$ amb sis xifres decimals exactes?

Ejercicio 36 Calculeu la fòrmula de Taylor amb residu de $f(x) = 4\log(x+1)$ al voltant de $x = 0$. Calculeu el nombre de termes necessaris per a calcular una aproximació de $4\log(1.05)$ amb un error menor que 0.01. Doneu una fita superior de l'error.

Ejercicio 37 Calculeu el polinomi de MacLaurin de segon grau amb error de la funció $F(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2}\,dt$.

Ejercicio 38 Calculeu la fòrmula de Mac Laurin amb error de la funció $f(x) = \sin(2x)$. Calculeu el nombre de termes que fan falta per a obtindre una aproximació de $\sin 2$ amb un error menor que dues centèsimes.

Ejercicio 39 Calculeu la fòrmula de Mac Laurin amb residu de $f(x) = \log(1+x)$. Obteniu una aproximació de $\log(0.9)$ amb dues xifres decimals exactes.

Ejercicio 40 Calculeu la fòrmula de Taylor amb residu de la funció $f(x) = \log(x+1)$ al voltant de $x = 0$. Calculeu el nombre de termes necessaris per a calcular una aproximació de $\log(1.05)$ amb un error menor que 0.01.

Ejercicio 41 Per a aproximar $2e^{0.02}$ s'utilitza l'aproximació $e^x \sim 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$. Doneu una fita superior de l'error.

Ejercicio 42 Calculeu la fòrmula de Mac Laurin amb residu de $f(x) = \log\left((x+1)^2\right)$. Calculeu el nombre de termes necessaris per a obtindre una aproximació de $2\log(1.5)$ amb un error menor que 0.002.

Ejercicio 43 Trobeu en cadascú dels següents casos la derivada de la funció F.

$$(a)\quad F(x)=\int_1^x x\frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt \qquad (b)\quad F(x)=\int_x^3 (u+2)^4\,du$$

$$(c)\quad F(x)=\int_x^1 e^{-t^2}\,dt \qquad (d)\quad F(x)=\int_1^{x^2}\frac{e^t}{t}\,dt$$

$$(e)\quad F(x)=\int_1^x\Big(\int_0^y \frac{t}{\sqrt{1+t^2+t^4}}\,dt\Big)\,dy \qquad (f)\quad F(x)=\cos\Big(\int_1^{x^2}\sqrt[3]{t^2+t+1}\,dt\Big)$$

$$(g)\quad F(x)=\int_0^{\operatorname{sen} x}\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(2-t^2)}} \qquad (h)\quad F(x)=\int_0^{\int_2^{x^2}\frac{\log t}{t-1}\,dt}\cos t^2\,dt.$$

Ejercicio 44 Calculeu l'àrea limitada per les gràfiques de les funcions f i g en el interval que s'indica.

a) $f(x)=\cos x,\quad g(x)=\operatorname{sen} x$ en $[0,\pi/4]$.

b) $f(x)=x^3,\quad g(x)=x\sqrt{x^2+2}$ en $[0,1]$.

c) $f(x)=e^x,\quad g(x)=e^{-x}$ en $[-1,1]$.

d) $f(x)=\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x,\quad g(x)=\operatorname{sen} x$ entre $x=0$ i el menor punt de tall positiu.

e) $f(x)=xe^{x^2},\quad g(x)=\log x$ en $[1,2]$.

Ejercicio 45 Calculeu l'àrea d'un cercle de radi R i d'una elipse de semieixos a i b.

Ejercicio 46 Calculeu l'àrea comú als cercles $x^2+y^2=9$ i $(x-3)^2+y^2=9$.

Ejercicio 47 Trobeu l'àrea limitada per un bucle de la lemniscata de Bernouilli d'equació

$$\rho^2=a^2\cos(2\omega).$$

Ejercicio 48 Trobeu l'àrea limitada per la cardioide d'equació

$$\rho=a(1+\cos\omega).$$

Ejercicio 49 Trobeu l'àrea limitada per un llaç de la cicloide d'equació

$$\begin{cases} x=a(t-\operatorname{sen} t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$$

i la longitud del mateix llaç.

Ejercicio 50 Longitud de la primera espira de l'espiral d'Arquímedes $\rho=k\omega$.

Ejercicio 51 Calculeu la longitud d'un pas de l'hèlix

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\,\mathrm{sen}\,t \\ z = kt \end{cases}$$

Ejercicio 52 Calculeu la longitud de la corba $y = x^2$ en el interval $[0, \pi/4]$.

Ejercicio 53 Calculeu les longituds de les corbes següents en els intervals que s'indiquen:

a) $\gamma(t) = (t^2, t^3) \quad \text{si} \quad t \in [0, 2]$

b) $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t) \quad \text{si} \quad t \in [0, 2\pi]$

c) $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t) \quad \text{si} \quad t \in [0, \pi/2]$

d) $\gamma(t) = (a\cos^3 \frac{\pi t}{3}, a\sin^3 \frac{\pi t}{3}) \quad \text{si} \quad t \in [0, 1]$

e) $\gamma(t) = (e^t \sin t, e^t \cos t) \quad \text{si} \quad t \in [0, 2\pi]$.

Ejercicio 54 Volum del cos generat per un arc de cicloide al girar al voltant de la seua base.

Ejercicio 55 El recinte limitat per

$$\begin{cases} y = xe^x \\ x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

gira al voltant de l'eix d'abcises. Calculeu el volum del cos generat.

Ejercicio 56 Les seccions transversals d'un sòlid per plans transversals a l'eix X són quadrats amb centre aquest eix. Si al tallar pel pla perpendicular en el punto d'abcisa x s'obté un quadrat de costat $2x^2$, quin será el volum del sòlid limitat per $x = 0$ i $x = a$?

Ejercicio 57 La base d'un sòlid és un triangle de vèrtex $(0,0), (0,1), (1,1)$ en el pla XY. Les seues seccions per plans perpendiculars a l'eix X són quadrats. Calculeu el volum del sòlid.

Ejercicio 58 La base d'un sòlid és el cercle de centre $(0,0)$ i radi 1 en el pla XY. Les seues seccions per plans perpendiculars a l'eix X són quadrats. Calculeu el volum del sòlid.

Ejercicio 59 Calculeu el volumen del sòlid la base del qual és el recinte limitat per l'eix OX i la corba $y = 1 - x^2$, i les seccions del qual al tallar-lo amb plans verticals perpendiculars a l'eix OX són quadrats.

Ejercicio 60 Calculeu el volum d'un sòlid la base del qual és el recinte limitat per la recta $y = 1$ i la corba $y = 2 - x^2$, i les seccions del qual al tallar-lo amb plans verticals perpendiculars a l'eix OX són quadrats.

Ejercicio 61 Siga R la regió limitada per la recta $y = 3 - x$ i l'eix OX entre $x = 1$ i $x = 2$. Calculeu el volum del sòlid que té per base R i les seccions del qual al tallar-lo amb plans verticals perpendiculars a l'eix OX són quadrats.

Ejercicio 62 Establir per què les integrals següents són impròpies, estudiar si són convergents o divergents, i calculeu les que siguen convergents.

$$i)\int_0^1 \log x dx \qquad ii)\int_1^2 \frac{1}{x\log x}dx \qquad iii)\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx$$

$$iv)\int_0^1 x\log x dx \qquad v)\int_0^\infty e^{-x}dx \qquad vi)\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{e^x}}dx$$

$$vii)\int_2^\infty \frac{\log x}{x}dx \qquad viii)\int_2^\infty \frac{1}{x(\log x)^2}dx \qquad ix)\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$x)\int_{-\infty}^\infty e^{-x}dx \qquad xi)\int_0^\infty \frac{1}{x^2}dx \qquad xii)\int_0^\infty \frac{1}{(x+4)\sqrt{x}}dx$$

Ejercicio 63 Calculeu aproximacions als valors de les integrals següents utilitzant el mètode de Simpson.

$$a)\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{5+x^3}} \qquad b)\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \qquad c)\int_0^2 \frac{\operatorname{sen} x^2}{e^x}\,dx$$

$$d)\int_1^2 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx \qquad e)\int_0^1 x\sqrt{2+x^4}\,dx \qquad f)\int_1^2 \frac{dx}{\log(1+x^2)}$$

Ejercicio 64 Trobeu el domini de definició de les següents funcions:

$$i) f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \qquad ii) f(x,y) = \log(xy)$$
$$iii) f(x,y) = \sqrt{x+3y} \qquad iv) f(x,y)\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Ejercicio 65 Trobeu la gràfica i corbes de nivell de les següents funcions:

$$i) f(x,y) = 2x+3y \qquad ii) f(x,y) = x^2+y^2$$
$$iii) f(x,y) = 2xy \qquad iv) f(x,y) = 2x^2+3y^2$$

Ejercicio 66 Estudieu la continuïtat de les següents funcions:

i) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ i $f(0,0) = 0$.

ii) $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ i $f(0,0) = 0$.

iii) $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ i $f(0,0) = 0$.

iv) $f(x,y) = \log(x^2+y^2)$ si $(x,y) \neq (0,0)$ i $f(0,0) = 0$.

v) $f(x,y) = \dfrac{\cos y - e^x}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ i $f(0,0) = 0$.

Ejercicio 67 Calculeu les parcials de les següents funcions en $(0,0)$:

i) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ i $f(0,0) = 0$.

ii) $f(x,y) = \dfrac{x^4-y^4}{x^2+xy+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ i $f(0,0) = 0$.

iii) $f(x,y) = \dfrac{x^5+y^2}{x^4+y^4}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ i $f(0,0) = 0$.

iv) $f(x,y) = \dfrac{\sin(x^5+y^5)}{x^4+y^4}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ i $f(0,0) = 0$.

v) $f(x,y) = \dfrac{\tan x^3 + \tan y^3}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ i $f(0,0) = 0$.

Ejercicio 68 Calculeu el vector gradient de les següents funcions en el punt que s'indica:

i) $f(x,y,z) = 2x\log y - z^2y^2$ en $(1,1,0)$.

ii) $f(x,y,z) = \dfrac{xz}{\sqrt{x^2+y^2}}$ en $(1,-1,1)$.

iii) $f(x,y) = x^2 + \log\sqrt{xy}$ en $(2,1)$.

iv) $f(x,y) = \log\dfrac{1}{xy}$ en $(5,\sqrt{2})$.

v) $f(x,y) = \log(x^2+2y+1) + \int_0^x \cos(t^2)dt$ en $(1,1)$.

Ejercicio 69 La temperatura de cadascú dels punts d'una placa quadrada vé determinada per la funció $T(x,y) = (x-1)^3(y-2)^2$. Es desitja conèixer quins són, en el punt $(0,0)$, les direccions de major creixement i decreixement de la temperatura.

Ejercicio 70 Denotem per $z = 2e^{-x^2} + e^{-3y^2}$ l'altura d'una muntanya en la posició (x,y). En quina direcció dès de $(1,0)$ hauriem de començar a caminar per a escalar el més ràpidament posible?

Ejercicio 71 La temperatura dels punts d'una placa metàlica vé donada per la funció $T(x,y) = e^x\cos y + e^y\cos x$. En quina direcció aumenta la temperatura més ràpidament en el punto (x,y)? Si situem un mòvil en $(0,0)$, quina direcció haurà de prendre per a assegurar-se'n de que va pel camí més fred?

Ejercicio 72 Una nau espacial es troba en un punt de l'espai de coordenades $(1,0,\sqrt[3]{2})$. La temperatura exterior vé donada per la funció

$$T(x,y,z) = \frac{\log(x^2y^2z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}.$$

Quina direcció ha de prendre la nau per allunyar-se de la calor el més ràpidament possible?

Ejercicio 73 Donada la funció $f(x,y) = e^{x+y}\cos x$ estudieu en quina direcció aumenta el valor de $f(x,y)$ més ràpidament dès del punt $(0,\log 2)$.

Ejercicio 74 Donada la funció $f(x,y) = (x+y)\cos(xy)$ estudieu en quina direcció aumenta el valor de $f(x,y)$ més ràpidament dès del punt $(1,\pi)$.

Ejercicio 75 Trobeu el pla tangent a les gràfiques de les funcions:

i) $f(x,y) = 2xy^2 + x^2y$ en el punt $(1,-1,1)$.

ii) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x^2y + 3xy^2$ en el punt $(1,1,2)$.

iii) $f(x,y) = x^2 + 2y^3 + 5x^2y^2$ en el punt $(2,1,2)$.

iv) $f(x,y) = y^3 + 3x^2y + 2xy^2$ en el punt $(-1,1,2)$.

v) $f(x,y) = x^3 + 3y^3 + 3x^2 + 3x$ en el punt $(1,-1,-2)$.

Ejercicio 76 Calculeu els extrems relatius de les funcions:

$i) f(x,y) = xye^{x+2y}$	$ii) f(x,y) = y^2 + x^2y + x^4$
$iii) f(x,y) = xy^2(1-x-y)$	$iv) f(x,y) = (x-y^2)(x-y^3)$
$v) f(x,y) = 2x^2 + y + 3$	$vi) f(x,y) = 3x^3 + y^2 + 3xy$
$vii) f(x,y) = y^2e^{4x+1}$	$viii) f(x,y) = (x^2-1)y$
$ix) f(x,y) = e^{x+y}(x^2+2y)$	

Ejercicio 77 Calculeu els extrems absoluts de les següents funcions en els recintes indicats:

i) $f(x,y) = x^2 + y^2$ en $\{(x,y) : 4x^2 + 9y^2 = 1\}$.

ii) $f(x,y,z) = 2x^2 + yz$ en $\{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

iii) $f(x,y,z) = 3x^2 + y^2 + xz$ en $\{(x,y,z) : x^2 + y^2 \leq 1, 2x + z = 0\}$.

iv) $f(x,y) = 3x^2y + 2y^3$ en $\{(x,y) : 2x^2 + y^2 \leq 1, y + x \geq 0\}$.

v) $f(x,y) = 2x^2 + y^2$ en $\{(x,y) : 2x^2 + y \leq 0, 2y + x \geq 0\}$.

vi) $f(x,y) = 2x^2 + y^2$ en $\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.