# Tema 2
# Crecimiento Económico

# Introducción

- Explicación de las diferencias existentes entre países en la renta per capita.
  - ¿Cómo podemos explicar estas diferencias tan importantes?
  - ¿Cuáles son los determinantes del crecimiento a largo plazo?
  - ¿Existe una tendencia de acercamiento de rentas entre países?
- Renovado interés y rejuvenecimiento de las teorías del crecimiento a partir de mediados de los años ochenta:
  - Crecimiento endógeno
  - Modelos de los ciclos reales
  - Bases de datos

# Introducción

- Objetivos:

1. Hechos estilizados del crecimiento económico.
2. Modelo básico de crecimiento: Solow (1956)
3. Causas del progreso técnico.

# Hechos estilizados del crecimiento económico

- Kaldor (1961) enunció seis hechos estilizados básicos que toda teoría del crecimiento debería tratar de explicar:
  1. El volumen agregado de producción y la productividad del trabajo han crecido continuamente.
  2. La relación capital por trabajador muestra un crecimiento continuado.
  3. La tasa de beneficio del capital ha sido estable a largo plazo.
  4. La relación capital-producto permanece estable a largo plazo.
  5. La participación de las rentas del trabajo (salarios) y del capital (beneficios) estables a largo plazo.
  6. Diferencias sustanciales en las tasas de crecimiento del output y de la productividad del trabajo entre los países.
- Los seis hechos anteriores no son todos independientes:
  - Si $(Y/L)$ crece (Hecho 1) e $(Y/K)$ es constante (Hecho 4), entonces $(K/L)$ debe estar creciendo (Hecho 2).
  - Si $(Y/K)$ es constante (Hecho 4) y $(rK/Y)$ es constante (Hecho 5), entonces $r$ debe de ser constante (Hecho 3).
- Basta concentrarse en los hechos 1, 4, 5 y 6.

# Hechos estilizados del crecimiento económico

- Nuevos hechos estilizados formulados por Romer (1989):
  1. En muestras amplias de países las tasas de crecimiento no están correlacionadas con sus niveles iniciales de renta per capita.
  2. Correlación positiva entre crecimiento del comercio y del output.
  3. Correlación negativa entre el crecimiento de la población y del output.
  4. El crecimiento de los factores de producción no es suficiente para explicar el crecimiento del output.
  5. La mano de obra cualificada y no cualificada tiende a emigrar hacia los países de rentas altas.

# Hecho 1: Crecimiento del output y de la productividad

- El reto más importante de la teoría del crecimiento es explicar las tendencias observadas en el siguiente Gráfico 2.1 y en el Cuadro 1.

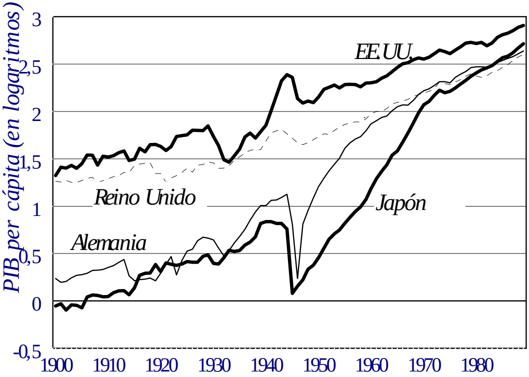



Gráfico 2.1: Logaritmo del PIB per cápita, en miles de dólares de 1985. Fuente: Maddison (1991).

**Cuadro 1**

PIB per capita. 1879-1992

| País | 1870 | 1992 | Ratio |
|---|---|---|---|
| Austria | 1875 | 17160 | 9.2 |
| Bélgica | 2640 | 17165 | 6.5 |
| Canadá | 1620 | 18159 | 11.2 |
| Dinamarca | 1927 | 18293 | 9.5 |
| España | 1376 | 12498 | 9.1 |
| Francia | 1858 | 17959 | 9.7 |
| Alemania | 1913 | 19361 | 10.1 |
| Italia | 1467 | 16229 | 11.1 |
| Holanda | 2640 | 16898 | 6.4 |
| Suecia | 1664 | 16927 | 10.2 |
| Reino Unido | 3263 | 15738 | 4.8 |
| Estados Unidos | 2457 | 21558 | 8.8 |

Dólares Internacionales de 1990. Maddison (1995)

- Evidencia: Gráfico 2.2: siete países industrializados entre 1870 y 1979:

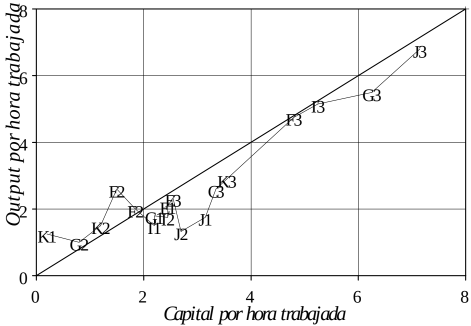



Gráfico 2.2: Output y capital por hora: tasas de crecimiento. Fuente: Maddison (1982)

- Como

$$\overset{\bullet}{K} = iY - \delta K$$

si $K/Y$ constante

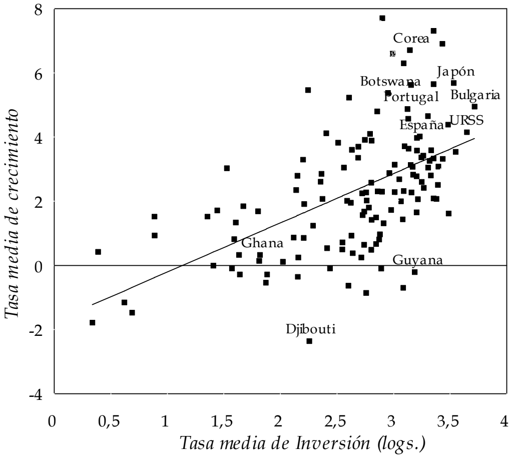
$$\frac{\overset{\bullet}{\left(\frac{K}{Y}\right)}}{\left(\frac{K}{Y}\right)} = \frac{\overset{\bullet}{K}}{K} - \frac{\overset{\bullet}{Y}}{Y} = 0$$

$$\frac{\overset{\bullet}{\left(\frac{K}{Y}\right)}}{\left(\frac{K}{Y}\right)} = i\frac{Y}{K} - \delta - \gamma_Y$$

$$\frac{K}{Y} = \frac{i}{\delta + \gamma_Y}$$

$\Rightarrow$ Correlación positiva entre la tasa de inversión y la tasa de crecimiento del output: Gráfico 2.3.

# Hecho 4: implicación



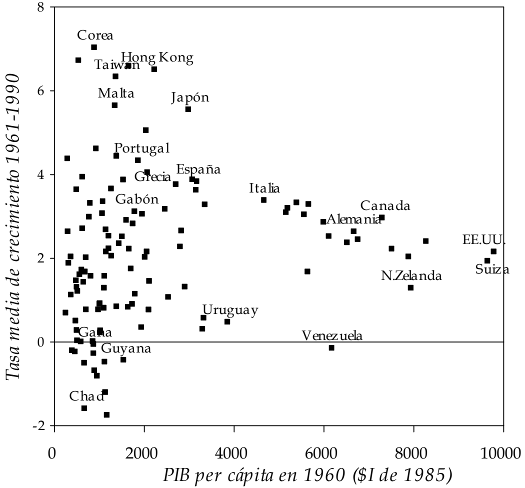
# Hechos 5, 6 y 7

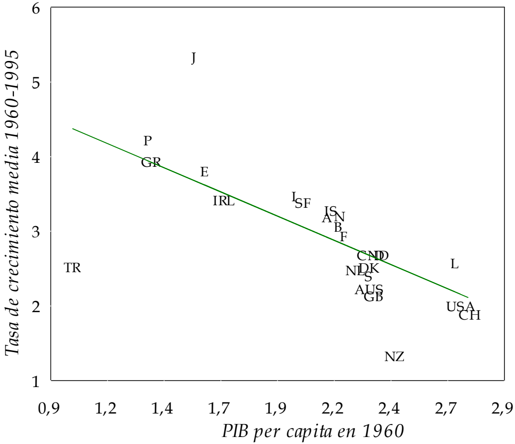
- Participación constante de las rentas del trabajo

$$\frac{wL}{Y} = \alpha$$

$$\frac{rK}{Y} = 1 - \alpha$$

- Hechos 6 y 7: Diferencias sustanciales en las tasas de crecimiento de la producción y de la productividad del trabajo entre los países no correlacionadas con el nivel inicial de renta per capita.
- Evidencia:
  1. Mundo: Gráfico 2.4.
  2. OCDE: Gráfico 2.5.


Corea
Taiwan
Hong Kong
Malta
Japón
Portugal
Grecia
España
Gabón
Italia
Canada
Alemania
EE.UU.
Suiza
N.Zelanda
Uruguay
Venezuela
Gana
Guyana
Chad
Tasa media de crecimiento 1961-1990
PIB per cápita en 1960 ($I de 1985)
8
6
4
2
0
-2
0
2000
4000
6000
8000
10000


6
5
4
3
2
1
Tasa de crecimiento media 1960-1995
J
P
GR
E
IRL
I
SF
IS
A
N
B
F
CND
D
DK
NL
S
AUS
GB
L
USA
CH
NZ
TR
0,9
1,2
1,4
1,7
1,9
2,2
2,4
2,7
2,9
PIB per capita en 1960

# Hecho 10: El residuo de Solow

- Diferenciando $Y = F(K, L)$ respecto al tiempo y dividiendo por $Y$

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{F_k \dot{K}}{Y} + \frac{F_L \dot{L}}{Y}.$$

- Los factores se retribuyen según su productividad marginal

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{r\dot{K}}{Y} + \frac{w\dot{L}}{Y} \frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{rK}{Y} \frac{\dot{K}}{K} + \frac{wL}{Y} \frac{\dot{L}}{L}.$$

- Datos reales de las economías:

$$\frac{\dot{Y}}{Y} > \frac{rK}{Y} \frac{\dot{K}}{K} + \frac{wL}{Y} \frac{\dot{L}}{L}$$

- Solución: residuo (nuevo factor) en la función de producción:

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{A}}{A} + \frac{rK}{Y} \frac{\dot{K}}{K} + \frac{wL}{Y} \frac{\dot{L}}{L}$$

# El modelo de Solow: supuestos

- Único bien $Y$ que se consume, $C$, o se ahorra, $S$.
- El ahorro $S$ coincide con la inversión $I$, dando lugar a un incremento del capital $K$
- El ahorro supone una fracción ($s =$tasa de ahorro) constante de la renta:

$$S = sY$$

- La fuerza de trabajo crece a una tasa constante y exógena $n$:

$$\frac{\dot{L}}{L} = n.$$

- El capital se deprecia a la tasa $\delta$

$$I \equiv \dot{K} + \delta K.$$

- Función de producción Cobb-Douglas con progreso técnico neutral en sentido de Harrod:

$$Y = K^{\alpha}(AL)^{1-\alpha}$$

- Progreso técnico exógeno

- Propiedades de buen comportamiento:
  - $f'(k) = \alpha k^{\alpha-1} > 0$
  - $f''(k) = \alpha(\alpha-1)k^{\alpha-2} < 0$
  - $\lim_{k\to\infty} f'(k) = 0$
  - $\lim_{k\to 0} f'(k) = \infty$
  - $f(0) = (0)^{\alpha} = 0$
  - $f(\infty) = (\infty)^{\alpha} = \infty.$
- Los mercados de factores funcionan competitivamente, de manera que se vacían y dan lugar a precios de equilibrio:

$$F_L(K,L) = (1-\alpha)\frac{Y}{L} = \frac{w}{p}$$

$$F_K(K,L) = \alpha\frac{Y}{K} = r$$

# El modelo de Solow

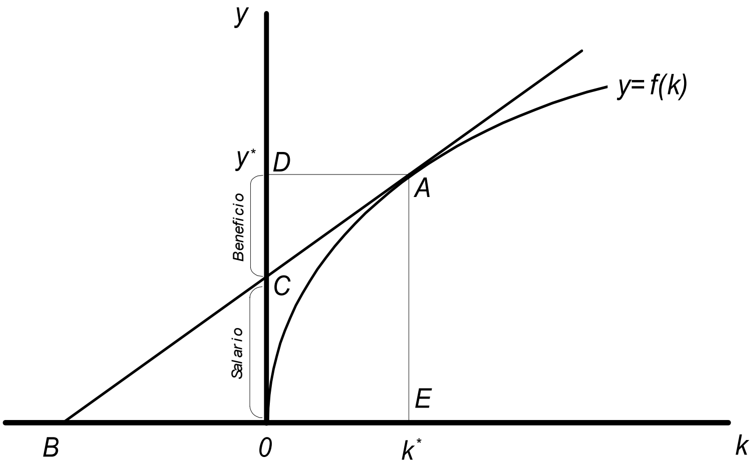



Gráfico 2.6: Función de producción y distribución.

# El modelo de Solow: ecuación fundamental

- Diferenciamos con respecto al tiempo la función de producción

$$\dot{y} = f'(k)\dot{k} = \alpha k^{\alpha-1}\dot{k}$$

y el stock de capital en unidades de trabajo eficiente

$$\frac{dk}{dt} = \dot{k} = \left[\frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{L}}{L} - \frac{\dot{A}}{A}\right]\frac{K}{AL} = \left[\frac{I}{K} - n - g - \delta\right]k$$

- Como

$$I \equiv S = sY$$

- Ecuación fundamental del crecimiento en el modelo neoclásico

$$\dot{k} = \frac{sY}{AL} - (n+g+\delta)k = sk^{\alpha} - (n+g+\delta)k$$

- Cuando $\dot{k} = 0$

$$sk^{\alpha} = (n+g+\delta)k$$

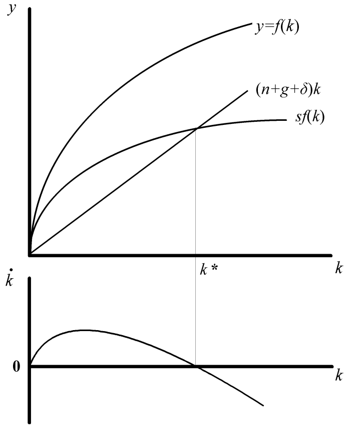



Gráfico 2.7: Representación de la ecuación fundamental de crecimiento del modelo de Solow.

# El modelo de Solow: solución

- De todas las soluciones de la ecuación fundamental del crecimiento estamos interesados en aquellas en las que $K/Y$ es constante:

$$\gamma_Y = \frac{\dot{Y}}{Y} \quad \gamma_K = \frac{\dot{K}}{K} \quad \gamma = \frac{\dot{k}}{k} = \left(\frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{L}}{L} - \frac{\dot{A}}{A}\right) = \gamma_K - (n+g)$$

$$\frac{\dot{k}}{k} = \gamma = s\frac{k^\alpha}{k} - (n+g+\delta)$$

$$\frac{k^\alpha}{k} = \frac{(n+g+\delta)+\gamma}{s} \tag{1}$$

  La productividad media del capital es igual a una constante que viene determinada por los parámetros $n$, $g$, $\delta$, $s$ y $\gamma$.

- Como la productividad media disminuye conforme aumenta $k$, entonces $\gamma = 0$.

**Proposición 1:** *a lo largo de la senda de crecimiento sostenido y, por consiguiente, en el estado estacionario* $k$ *es constante, es decir,* $\dot{k} = 0$.

$$\left.\frac{\dot{k}}{k}\right|_{k=k^*} = \left(\frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{L}}{L} - \frac{\dot{A}}{A}\right)_{k=k^*} = 0$$

$$\gamma_K = n + g$$

$$\frac{\dot{y}}{y} = \alpha k^{\alpha-1}\frac{k}{y}\frac{\dot{k}}{k} \Longrightarrow \frac{\dot{Y}}{Y} - \frac{\dot{L}}{L} - \frac{\dot{A}}{A} = \alpha k^{\alpha-1}\frac{k}{y}\left(\frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{L}}{L} - \frac{\dot{A}}{A}\right)$$

$$\Longrightarrow \gamma_Y - (n+g) = \alpha k^{\alpha-1}\frac{k}{y}(\gamma_K - n - g) = 0$$

$$\gamma_Y = \gamma_K = n + g$$

# El modelo de Solow: crecimiento equilibrado

- **Proposición 2:** *en el modelo neoclásico con progreso técnico todas las variables endógenas* $(Y, K)$ *crecen en el estado estacionario a una tasa igual a la de la oferta de trabajo más la tasa de progreso técnico:*

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{K}}{K} = n + g$$

- **Proposición 3**: *El output per capita de la economía crece en el estado estacionario a la tasa* $g$.
- **Proposición 4:** *la senda de crecimiento en el modelo neoclásico asegura el pleno empleo del capital y del trabajo. El ajuste del precio relativo de ambos factores asegura el equilibrio entre oferta y demanda.*

- **Proposición 5:** *Para cualquier valor inicial de la relación capital-trabajo eficiente de una economía* ($k_0$), *ésta converge hacia su nivel de estado estacionario.*

$$\begin{aligned} si \quad k_0 \quad &< \quad k^* \Longrightarrow k \text{ crece hasta } k^* \\ si \quad k_0 \quad &> \quad k^* \Longrightarrow k \text{ disminuye hasta } k^* \end{aligned}$$

- Demostración de la convergencia al estado estacionario mediante una aproximación de Taylor de primer orden de $\overset{\bullet}{k}$ en torno a $k^*$:

$$\overset{\bullet}{k} \simeq \left.\overset{\bullet}{k}\right|_{k=k^*} + \left.\frac{\partial \overset{\bullet}{k}}{\partial k}\right|_{k=k^*} (k - k^*)$$

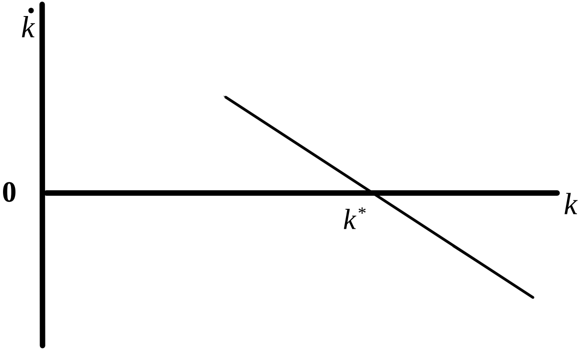
# El modelo de Solow

- Como $\dot{k} = 0$

$$\dot{k} \simeq \left[s\alpha k^{\alpha-1} - (n+g+\delta)\right]_{k=k^*}(k-k^*) = \phi(k-k^*)$$

y $0 < \alpha < 1$

$$\phi \equiv s\alpha(k^*)^{\alpha-1} - (n+g+\delta) < 0$$



# El modelo de Solow: estado estacionario

- Estado estacionario:

$$k^* = \left(\frac{s}{n+g+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \qquad y^* = \left(\frac{s}{n+g+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

- **Proposición 6:** *En el estado estacionario, para una tecnología* $(\alpha)$ *y una tasa de progreso técnico* $(g)$ *dadas, la renta per capita de un país es mayor cuanto más elevada sea su tasa de ahorro y menor la tasa de crecimiento de la población.*

$$\frac{\partial k^*}{\partial s}, \frac{\partial y^*}{\partial s} > 0 \qquad \frac{\partial k^*}{\partial n}, \frac{\partial y^*}{\partial n} < 0$$

- **Proposición 7:** *La tasa de crecimiento sostenido o de estado estacionario de la renta per capita es independiente de la tasa de ahorro de un país y de la tasa de crecimiento de la población.*

$$\frac{\partial \gamma_k}{\partial s} = \frac{\partial \gamma_k}{\partial n} = \frac{\partial \gamma_y}{\partial s} = \frac{\partial \gamma_y}{\partial n} = 0$$

- Gráfico 2.9: impacto sobre $k^*$ de un incremento en $s$.
- Gráfico 2.10: efecto de un aumento de $n$.

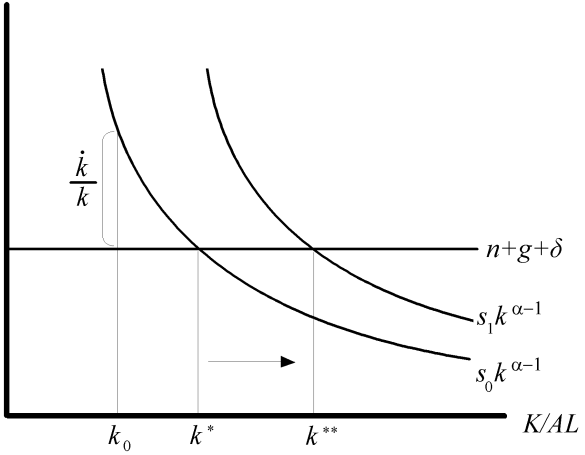



Gráfico 2.9: Dinámica al estado estacionario en el modelo neoclásico.

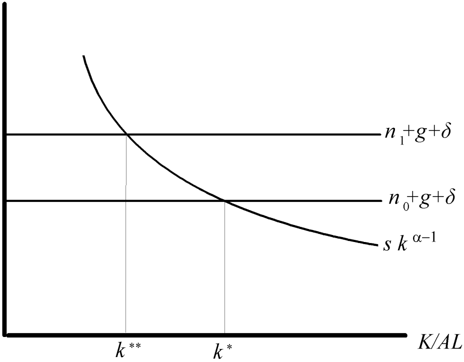



Gráfico 2.10: Cambio del estado estacionario debido a un aumento de $n$.

**Proposición 8:** *Convergencia absoluta. Si dos países tienden hacia el mismo estado estacionario, el más pobre crece más rápidamente hasta alcanzar dicho estado estacionario.*

$$k_a^* = \left(\frac{s_a}{n_a + g + \delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \left(\frac{s_b}{n_b + g + \delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = k_b^*.$$

Si $k_a^0 < k_b^0 \Longrightarrow y_a^0 < y_b^0$, como $s_a = s_b$ y $n_a = n_b$, entonces:

$$\left.\frac{\overset{\bullet}{k}}{k}\right|_{k_a^0} = s_a(k_a^0)^{\alpha-1} - (n_a + g + \delta) > \left.\frac{\overset{\bullet}{k}}{k}\right|_{k_b^0} = s_b(k_b^0)^{\alpha-1} - (n_b + g + \delta)$$

Gráfico 2.11: el país $A$ crece más rápidamente.

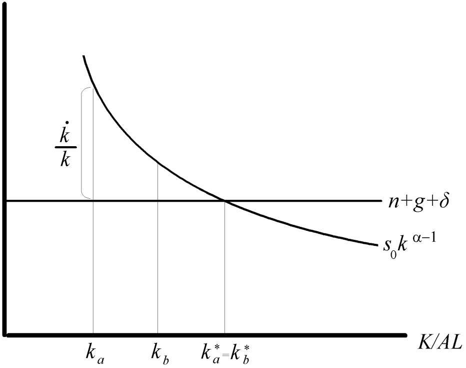



Gráfico 2.11: Convergencia absoluta.

**Proposición 9:** *Convergencia relativa o condicional. Cada país converge a su estado estacionario a tasas de crecimiento decrecientes.* Supóngase que

$$s_a < s_b \qquad y \qquad n_a > n_b$$

Gráfico 2.12: es posible que el país más pobre crezca menos que el país más rico si éste último se encuentra más alejado de su estado estacionario.

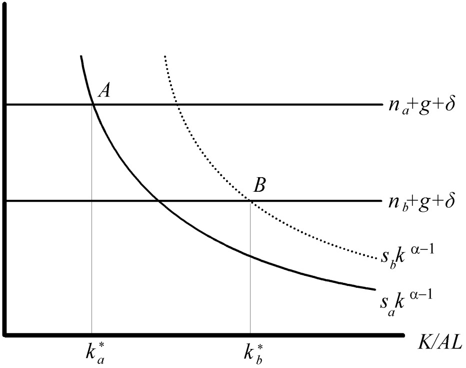



Gráfico 2.12: Convergencia relativa.

# El modelo de Solow: contrastación empírica

- La literatura empírica sobre convergencia confirma la presencia de convergencia relativa y no de convergencia absoluta.
- Contraste de convergencia absoluta:

$$\ln \widetilde{y}_{iT} - \ln \widetilde{y}_{it} = a + b \ln \widetilde{y}_{it} + u_{it}$$

  Mankiw, Romer y Weil (1992):

  1. 98 países no productores de petróleo, $\widetilde{y}$ es el PIB por persona en edad de trabajar, $t$ =1960 y $T$ =1985 $\Rightarrow b = 0.094$ y no significativo
  2. 22 países de la OCDE, $\widehat{b} = -0.34$ y significativo.

- Explicación: en la muestra más grande de países existen estados estacionarios distintos.
- Contraste de convergencia relativa:

$$\ln \widetilde{y}_{iT} - \ln \widetilde{y}_{it} = a + b \ln \widetilde{y}_{t} + cx_{it} + u_{it}$$

  Mankiw, Romer y Weil: $\widehat{b} = -0.14$ y significativo en la muestra de 98 países.

- La tasa de crecimiento exógena es una simplificación para tratar modelos sencillos, pero es un supuesto poco realista.
- El crecimiento económico se ve afectado por múltiples decisiones de los agentes económicos, en especial, por la cantidad de recursos que la sociedad destina a la generación y desarrollo de innovaciones.
- Si la tasa de crecimiento de $A$ no es exógena, qué es lo que está detrás de $A$? Los modelos de crecimiento endógeno.
- Diferencia entre el *efecto tasa*

$$\left.\frac{\overset{\bullet}{\tilde{y}}}{\tilde{y}}\right|_{ee} = g \qquad \frac{\partial g}{\partial s} = 0.$$

y el *efecto nivel*:

$$\left.\frac{\overset{\bullet}{\tilde{y}}}{\tilde{y}}\right|_{ee} = g(s), \qquad \frac{\partial g}{\partial s} > 0.$$

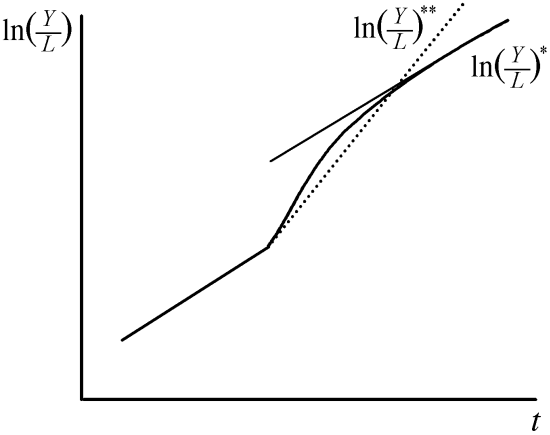



Gráfico 2.13: Distinción entre el efecto tasa y el efecto nivel de un aumento de la tasa de ahorro.

- Supongamos que $Y = K^{\alpha}(A'L)^{1-\alpha}$ y
$$A' = A(K/L)^{1/(1-\alpha)}$$
entonces
$$Y = AK, \qquad \tilde{y} \equiv \frac{Y}{L} = A\frac{K}{L}$$
la tasa de crecimiento de la renta per capita es proporcional a la tasa de ahorro:
$$\frac{\dot{\tilde{y}}}{\tilde{y}} = s\frac{Y}{K} - \delta - n = sA - \delta - n$$
- Justificación de la presencia de rendimientos constantes a escala en el capital:
  1. Rebelo (1991): el trabajo no debe medirse en términos del número de personas sino por su calidad.
  2. Romer (1986): rendimientos constantes a escala a nivel de la empresa, pero crecientes a nivel agregado por la presencia de externalidades.
  3. Existencia de “learning by doing”.

# El capital humano

- En las alternativas anteriores el progreso técnico aparece como un resultado casi accidental.
- En muchas ocasiones se requiere una asignación explícita de recursos para acumular conocimientos útiles.
- Capital humano $(H)$: cuando un individuo decide dedicar una parte de su tiempo a la acumulación de conocimientos lo hace, normalmente, incurriendo en diversos costes, entre los que se encuentra el coste de oportunidad de no dedicar ese tiempo a la producción de bienes y servicios.
- Uzawa (1965) o Lucas (1988, 1993): $A$ pasa a ser una función del nivel de capital humano disponible $(H)$ y del tiempo dedicado a aumentar dicho stock de conocimientos $(u)$:

$$A = A(H, u)$$

- Mayor acumulación de capital humano (mayor $u$) $\Rightarrow$ mayores tasas de crecimiento.

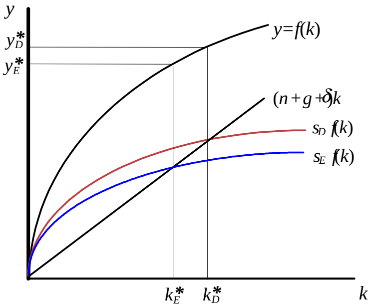
- Las sociedades que más crecen son aquellas que realizan un esfuerzo considerable en la innovación y desarrollo de nuevos productos o en mejoras de calidad de los ya existentes.
- Romer (1990), Grossman y Helpman (1991) o Jones (1995): la aplicación de más y mejores recursos a las actividades de I+D permite aumentar la tasa a la que tiene lugar el progreso técnico y la productividad del trabajo a nivel agregado.
- Las actividades de I+D son procesos costosos con incertidumbre, pero permiten obtener beneficios debidos a la diferenciación de sus productos y al poder de mercado que adquieren en relación a sus competidores.
- En estos modelos:

$$g = g(A, K_i, L_i)$$

en donde $K_i$ y $L_i$ son respectivamente el stock de capital y el trabajo empleados en las actividades de I+D.

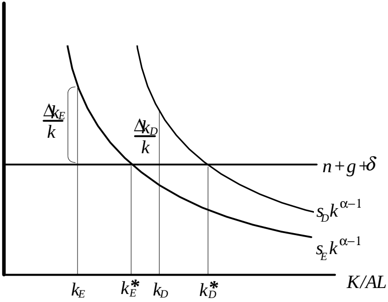
- Alemania tiene una tasa de ahorro $s_D$ mayor que la de España, $s_E$.
- Como puede apreciarse en el estado estacionario tanto el capital como el output en unidades eficientes son mayores en Alemania que en España:

$$y_D^* = \left(\frac{s_D}{n+g+d}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} > y_E^* = \left(\frac{s_E}{n+g+d}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

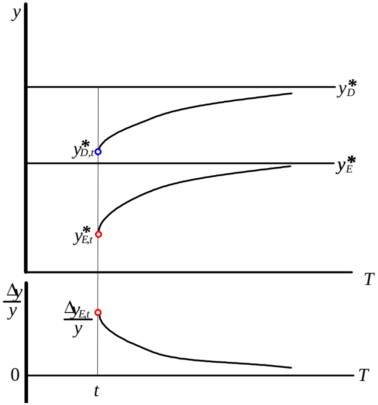


# Ejercicio 2, pag. 69, apartado 3

- Cada país convergerá a una tasa de crecimiento que depende de la distancia a su estado estacionario.
- Puesto que Alemania y España tienen estado estacionarios distintos, aplica la convergencia relativa pero no la convergencia absoluta.

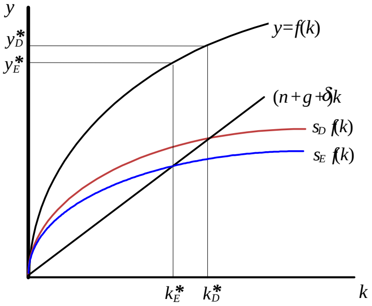


- España irá convergiendo en el tiempo a su renta en unidades eficientes de estado estacionario $(y_E^*)$
- La tasa de crecimiento (panel inferior) es positiva, pero converge a cero conforme se acerca a su estado estacionario



- La renta per cápita es el principal determinante del bienestar.
- En el modelo de Solow, el nivel de renta per cápita depende de la renta en unidades eficientes, que a su vez depende de la tasa de ahorro:

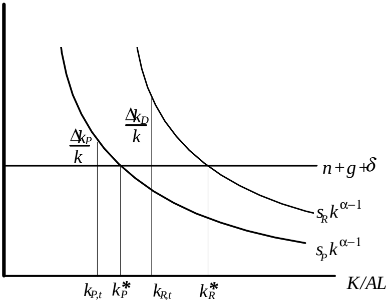
$$\frac{Y_t}{L_t} = A_t \left( \frac{s}{n+g+d} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$



# Ejercicio 4, pág. 70

- Kaldor (1961) enunció seis hechos estilizados básicos entre los cuales:
    1. El volumen agregado de producción $(Y)$ y la productividad del trabajo $(Y/L)$ han crecido tendencialmente.
    4. La relación capital-producto $(Y/K)$ permanece estable a largo plazo.
- Si $(Y/L)$ crece (Hecho 1) e $(Y/K)$ es constante (Hecho 4), entonces $(K/L)$ también crece tendencialmente.
- Si $(Y/K)$ es constante (Hecho 4) y $(rK/Y)$ es constante (Hecho 5), entonces $r$ debe de ser constante (Hecho 3). En las economías avanzadas la relación $Y/K$ es aproximadamente $3$, mientras que la participación de las rentas de capital sobre el PIB $(rK/Y)$ es $1/3$.

- El hecho de que en las últimas décadas algunos países pobres hayan crecido más lentamente que los ricos no significa que el modelo de Solow no sea válido, sino que no se cumple la hipótesis de convergencia absoluta.
- En este caso el concepto adecuado es el de convergencia relativa.
- Explicar gráfico adjunto.



- Para que se cumpla la hipótesis de convergencia absoluta entre dos economías $(i, j)$ deben de tener el mismo estado estacionario:

$$y_i^* = \left(\frac{s_i}{n_i + g + d}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = y_j^* = \left(\frac{s_j}{n_j + g + d}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

- La tasa de ahorro $(s)$ y de crecimiento de la población $(n)$ pueden deferir entre países pero es necesario que se compensen entre sí.
- Explicar gráfico adjunto.