



VNIVERSITAT
DE VALÈNCIA

Señales y Sistemas Lineales

Tema 1 · Señales (Parte II)

Grado en Ingeniería Electrónica de Telecomunicación (GIET)

Curso 2026/2027

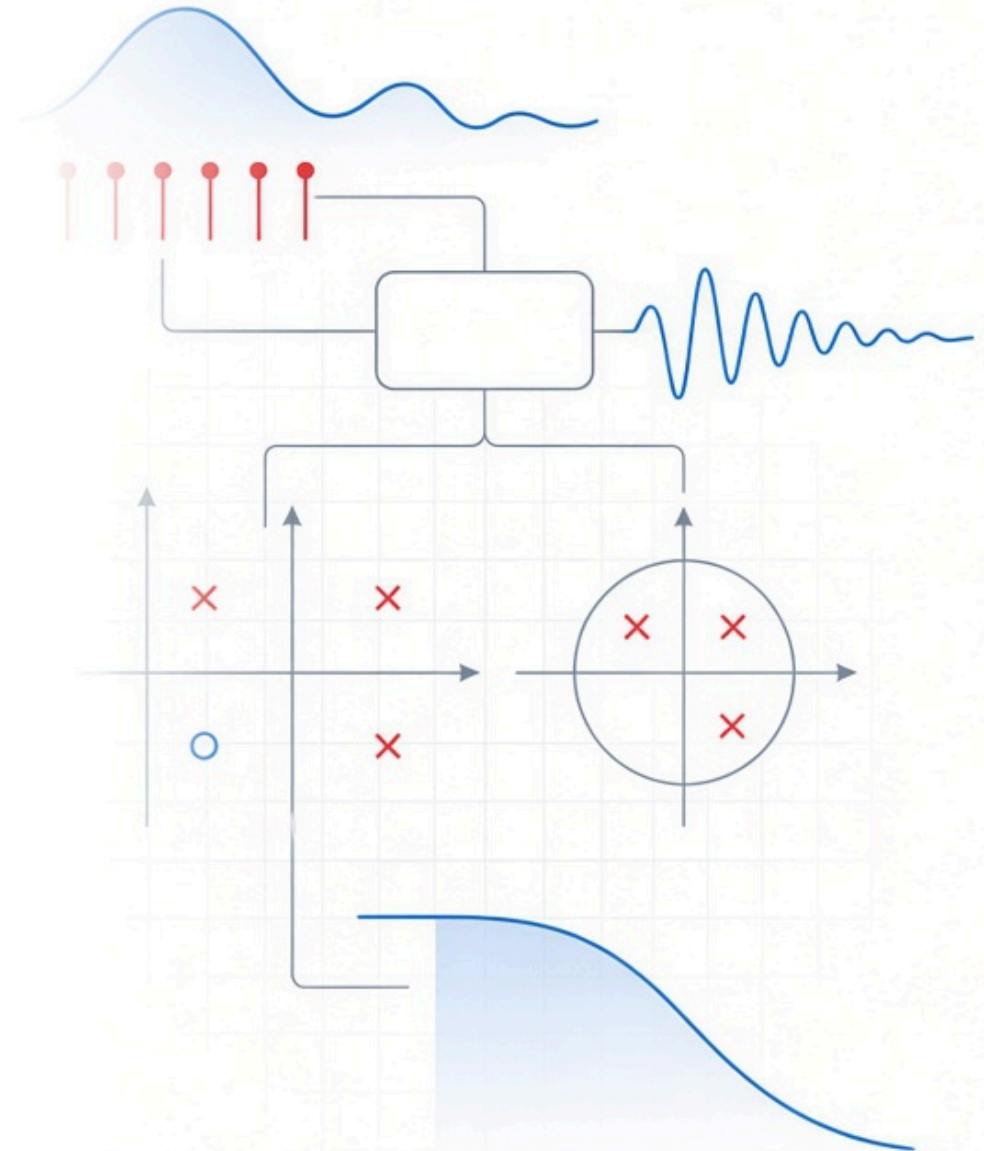
Ricardo Sanz Díaz

ricardo.sanz@uv.es

Departament d'Enginyeria Electrònica

Escola Tècnica Superior d'Enginyeria

Despatx 2.2.14



Contenidos

1. Correlación y convolución discreta
2. Métodos tabulares
3. Métodos analíticos en discreto
4. Autocorrelación
5. Métodos analíticos en continuo

Antes de empezar

De la **Parte I** conviene tener frescas:

- las señales elementales,
- las operaciones temporales,
- y la energía de una señal.

Correlación y convolución

Correlación cruzada

La correlación cruzada entre dos señales $x_1[n]$ y $x_2[n]$ se define como:

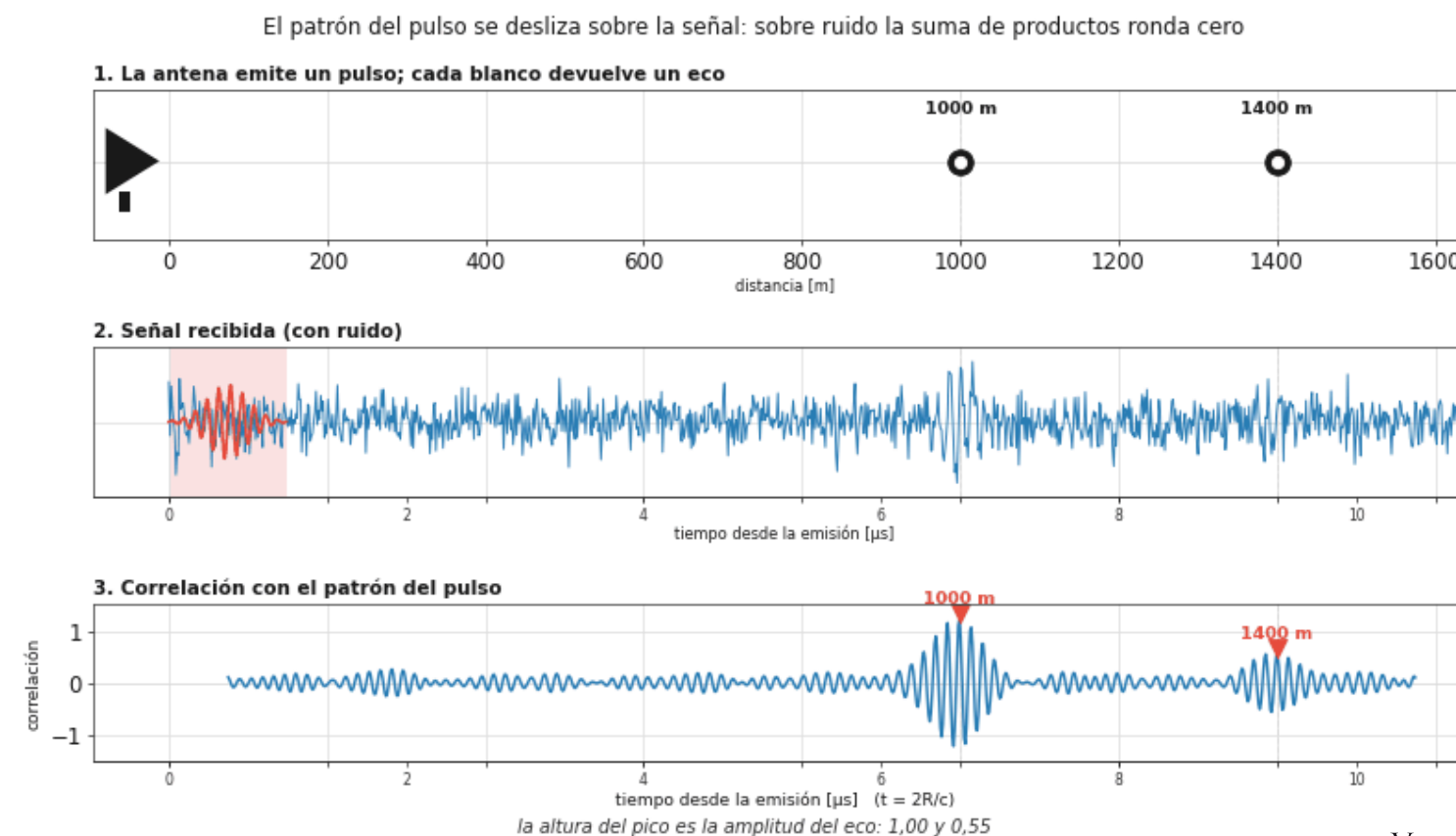
$$R_{x_1 x_2}[l] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n] x_2[n + l]$$

- Se multiplica una señal por la otra desplazada l muestras y se suman los resultados.
- El resultado es función del **desplazamiento** l .
- Permite detectar **similitudes** y **patrones repetitivos**.
- La correlación cruzada **no es conmutativa**:
- Longitud del resultado: $N_1 + N_2 - 1$.
- Inicio: $n_2 - n_1 - N_1 + 1$

$$R_{x_1 x_2}[l] \neq R_{x_2 x_1}[l]$$

Correlación: aplicación

La correlación cruzada **permite detectar la presencia de un patrón** en una señal ruidosa. Por ejemplo, un radar emite un pulso y recibe el eco reflejado por un objeto; la correlación entre ambos destapa el retardo y la amplitud del eco.



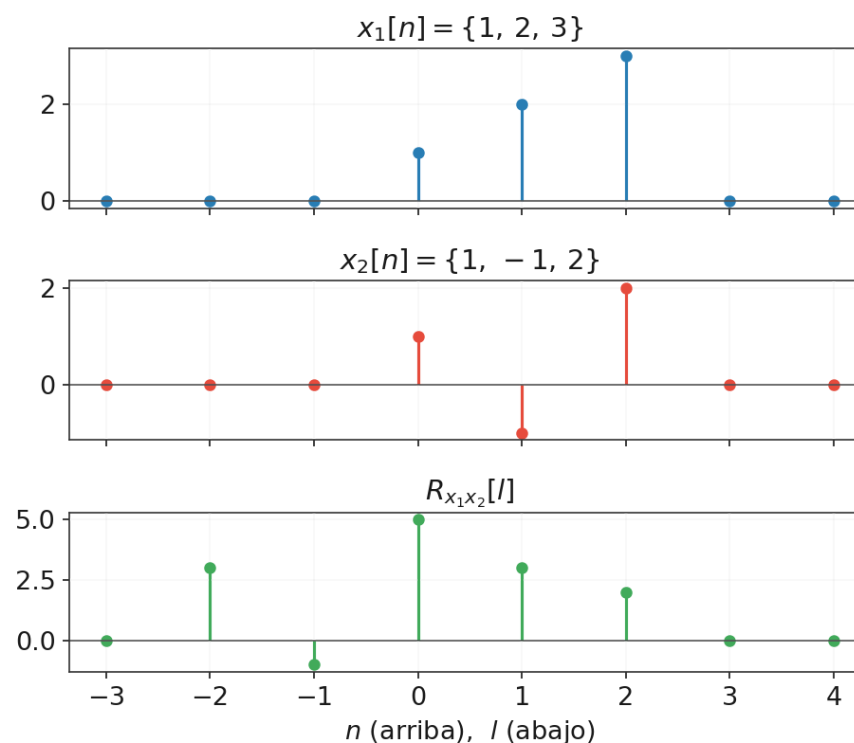
Correlación discreta: método tabular (i)

La misma tabla sirve para la correlación. Con **las mismas señales** de antes:

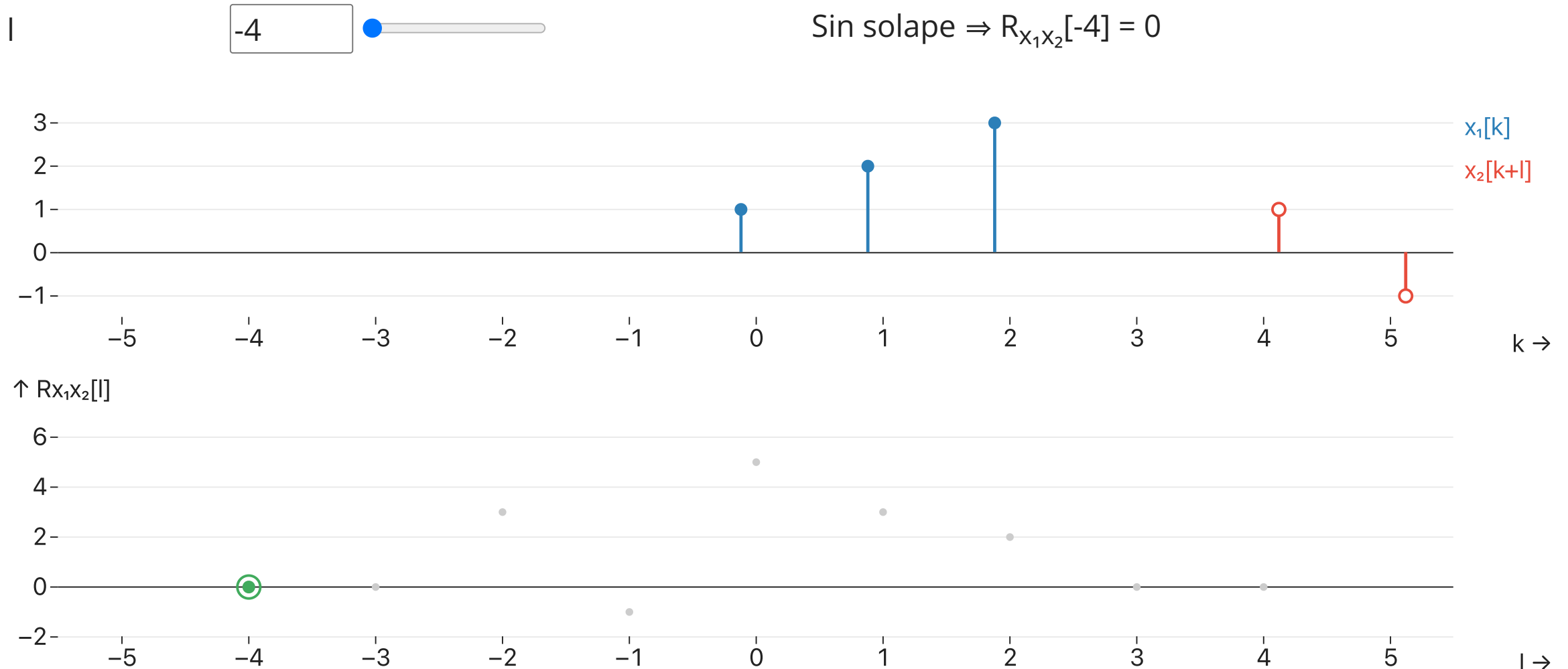
$$R_{x_1 x_2}[l] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n] x_2[n+l] \quad x_1[n] = \underset{\uparrow}{\{1, 2, 3\}} \quad x_2[n] = \underset{\uparrow}{\{1, -1, 2\}}$$

- cada fila es $x_1[n] x_2[n+l]$
- el patrón es de **arriba a abajo** y de **derecha a izquierda**
- después se suma por columnas
- el resultado **depende del desplazamiento l**

	$l = -2$	$l = -1$	$l = 0$	$l = 1$	$l = 2$
$x_1[0] = 1$			1(1)	-1(-1)	2(2)
$x_1[1] = 2$		2(1)	-2(-1)	4(2)	
$x_1[2] = 3$	3(1)	-3(-1)	6(2)		
$R_{x_1 x_2}[l]$	3	-1	5	3	2



Correlación discreta: método tabular (ii)



Ejemplo correlación tabular

Ejemplo 1.1: Correlación de dos secuencias finitas

Calcula $R_{x_1 x_2}[l] = \sum_n x_1[n] x_2[n + l]$ por el método tabular:

$$x_1[n] = \{ \underset{\uparrow}{1}, 2, -1 \}$$

$$x_2[n] = \{ 2, \underset{\uparrow}{1}, 0, 3 \}$$

►  Solución

Convolució

La convolució de dos senyals discretes $x_1[n]$ y $x_2[n]$ se define como:

$$y[n] = (x_1 * x_2)[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] x_2[n - k]$$

- Muy similar a la correlación, pero **una de las senyals está invertida** en el tiempo.
- Es fundamental, ya que permite **calcular la salida de un sistema**, por ejemplo, cualquier filtro digital.

Propiedad	Expresión
Conmutativa	$x_1 * x_2 = x_2 * x_1$
Asociativa	$(x_1 * x_2) * x_3 = x_1 * (x_2 * x_3)$
Distributiva	$x_1 * (x_2 + x_3) = x_1 * x_2 + x_1 * x_3$
Elemento neutro	$x * \delta = x$

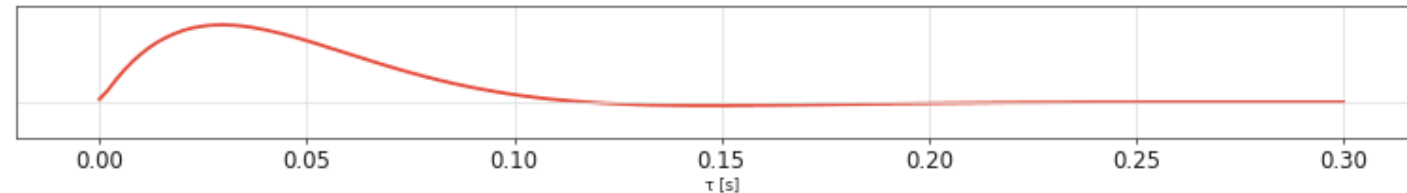
- Longitud del resultado: $N_1 + N_2 - 1$.
- Inicio: $n_1 + n_2$

Convolución: aplicación

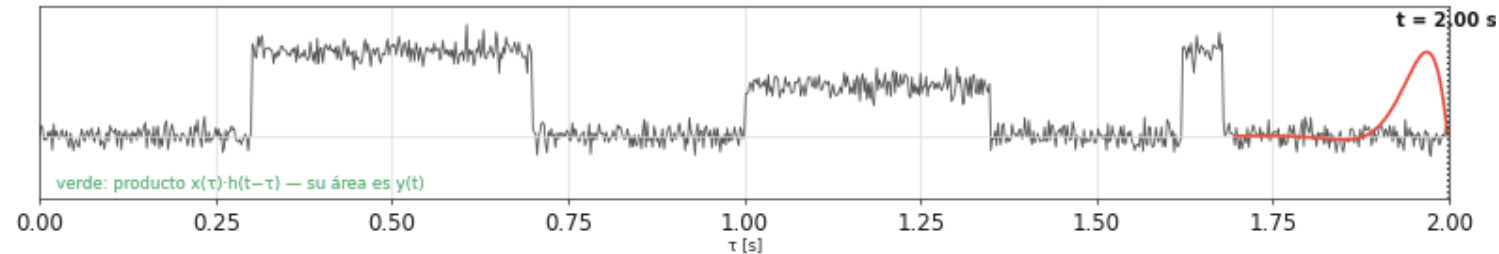
Aquí se ve como la **convolución** de una señal ruidosa **con la respuesta impulsional** de un filtro paso-bajo permite reducir el ruido:

En cada instante t se multiplica punto a punto y se suma: eso es un único valor de la salida

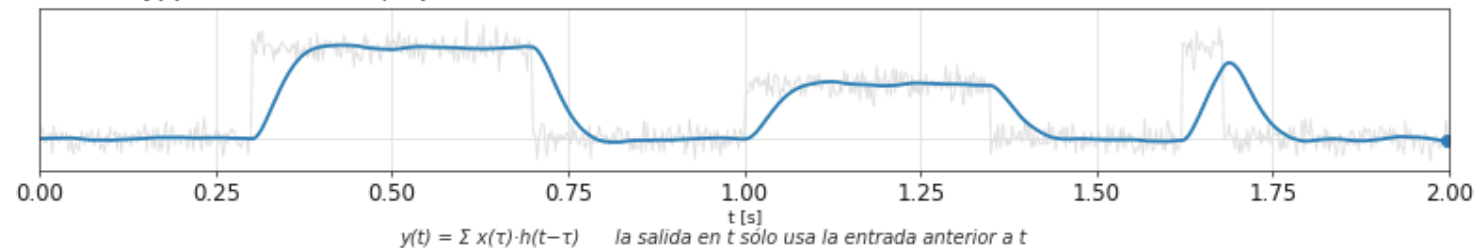
1. Respuesta impulsional $h(\tau)$ de un paso bajo de 2º orden ($f_0 = 6$ Hz, $\zeta = 0.71$)



2. Entrada $x(\tau)$ y la respuesta reflejada y desplazada $h(t-\tau)$



3. Salida $y(t)$: el mismo cálculo, repetido en cada instante



Convolución discreta: método tabular(i)

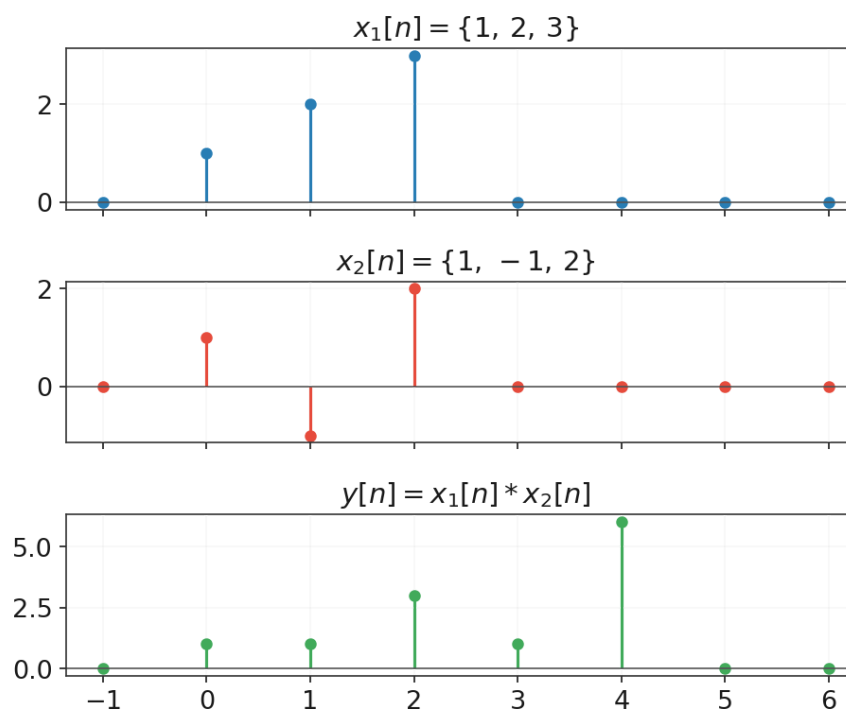
El método tabular es muy útil para señales de **duración finita**, por ejemplo:

$$y[n] = x_1[n] * x_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] x_2[n-k] \quad x_1[n] = \underset{\uparrow}{\{1, 2, 3\}} \quad x_2[n] = \underset{\uparrow}{\{1, -1, 2\}}$$

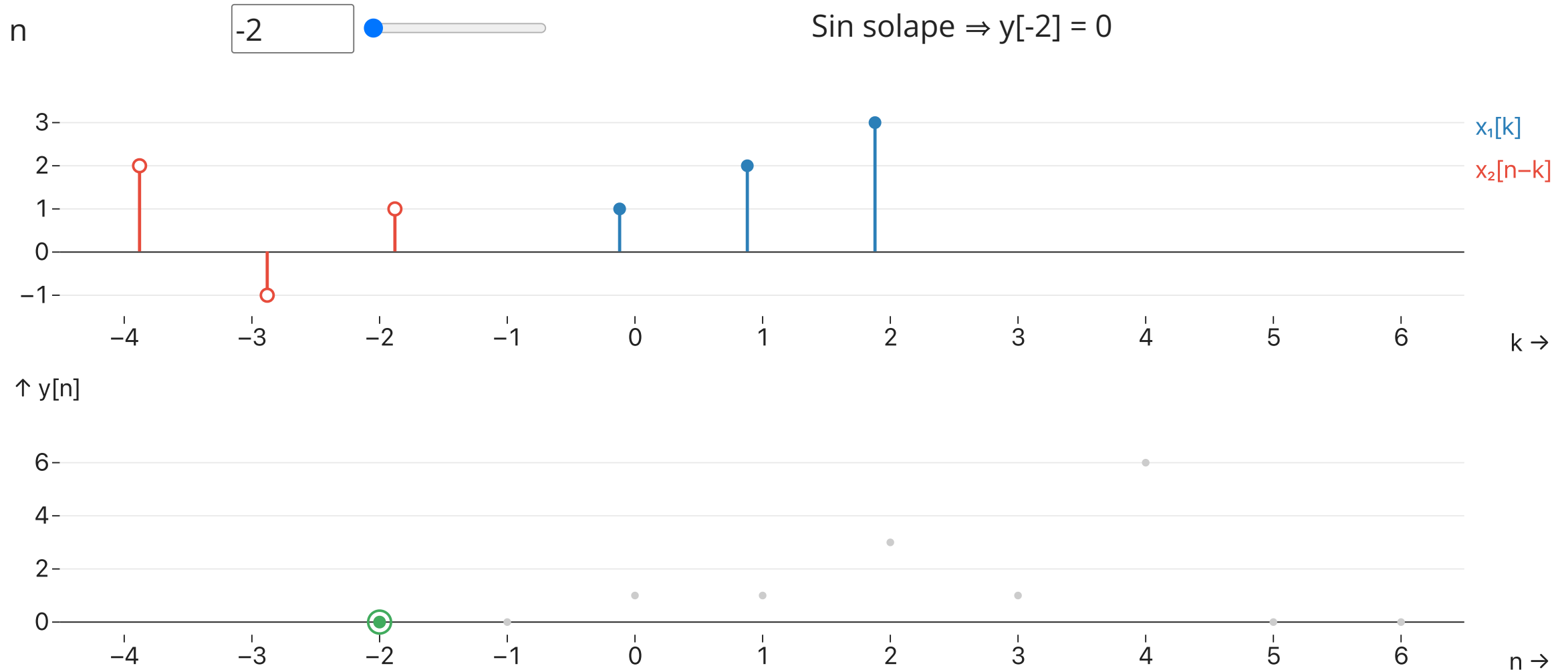
Se construye una tabla donde:

- cada fila es $x_1[k] x_2[n-k]$
- el patrón es de **arriba a abajo** y de **izquierda a derecha**
- después se suma por columnas
- el resultado **depende del índice temporal n**

	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
$x_1[0] = 1$	1(1)	-1(-1)	2(2)		
$x_1[1] = 2$		2(1)	-2(-1)	4(2)	
$x_1[2] = 3$			3(1)	-3(-1)	6(2)
$y[n]$	1	1	3	1	6



Convolución discreta: método tabular (ii)



Ejemplo convolución tabular

Ejemplo 1.2: Convolución de dos secuencias finitas

Calcula $y[n] = x_1[n] * x_2[n]$ por el método tabular:

$$x_1[n] = \{ \underset{\uparrow}{1}, 2, -1 \}$$

$$x_2[n] = \{ 2, \underset{\uparrow}{1}, 0, 3 \}$$

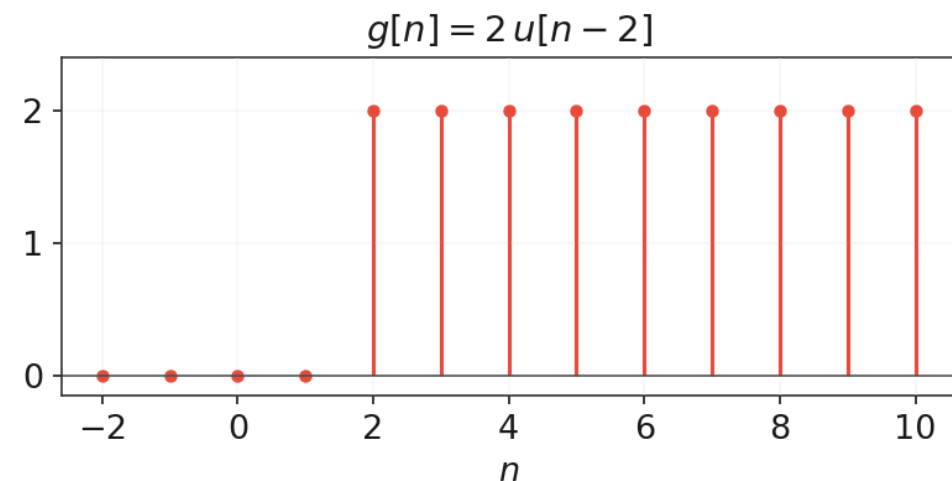
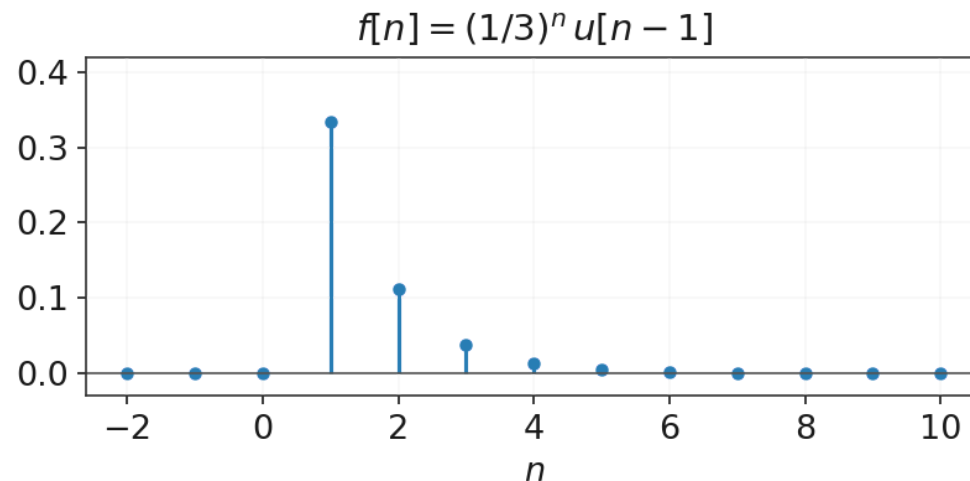
►  Solución

Convolución discreta: método analítico (i)

El método analítico debe usarse para señales de **duración infinita**, por ejemplo, si queremos calcular la convolución de:

$$f[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n-1]$$

$$g[n] = 2 u[n-2]$$



$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k] g[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)^k u[k-1]}_{\neq 0 \text{ si } k \geq 1} \cdot 2 \underbrace{u[n-k-2]}_{\neq 0 \text{ si } k \leq n-2}$$

Convolución discreta: método analítico (ii)

1) Cada escalón anula el sumatorio por un lado:

a) $u[k-1] \neq 0 \iff k \geq 1$

b) $u[n-k-2] \neq 0 \iff k \leq n-2$

2) Por tanto, el sumatorio puede **truncarse**:

$$n \geq 3 \iff \underbrace{1 \leq k \leq n-2}_{\text{ventana}} \implies y[n] = 2 \sum_{k=1}^{n-2} \left(\frac{1}{3}\right)^k$$

3) Aplicando el sumatorio de una serie geométrica:

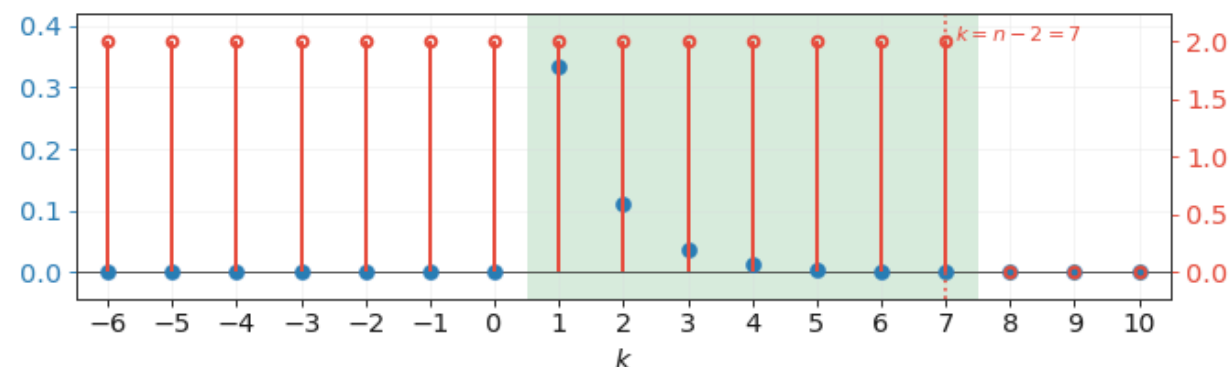
$$y[n] = 2 \sum_{k=1}^{n-2} \left(\frac{1}{3}\right)^k = 2 \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2+1}}{1 - \frac{1}{3}}$$

4) Resultado (solamente válido para $n \geq 3$):

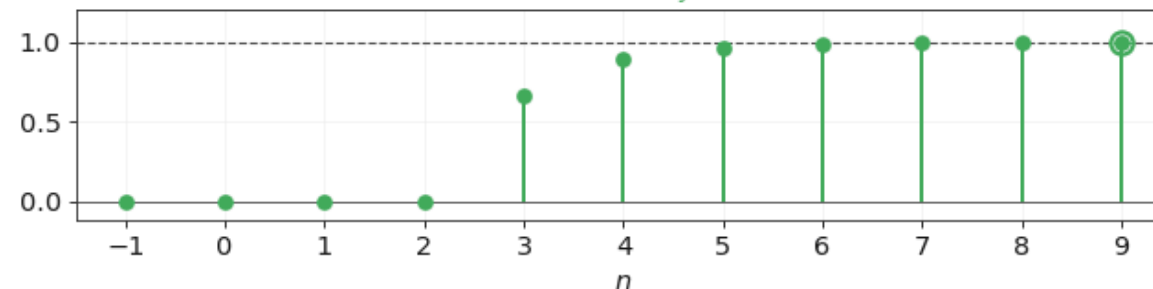
$$y[n] = \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\right) u[n-3]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k \underbrace{u[k-1]}_{\neq 0 \text{ si } k \geq 1} \cdot 2 \underbrace{u[n-k-2]}_{\neq 0 \text{ si } k \leq n-2}$$

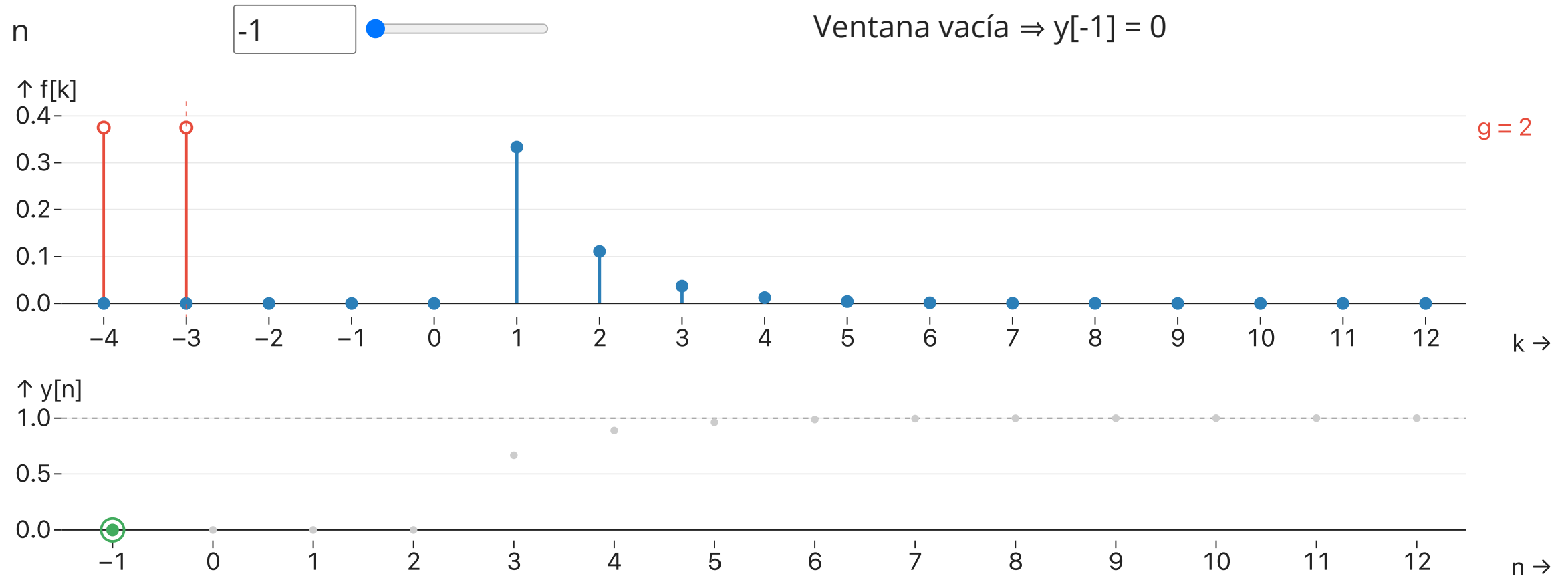
$f[k]$ fija y $g[9-k]$ reflejada ($n=9$)



Ventana $1 \leq k \leq 7 \Rightarrow y[9] = 1.000$



Convolució discreta: mètode analític (iii)



Ejemplo convolución discreta analítica

Ejemplo 1.3: Convolución analítica de dos señales infinitas

Calcula $y[n] = f[n] * g[n]$ para

$$f[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n-1] \quad g[n] = u[n-3]$$

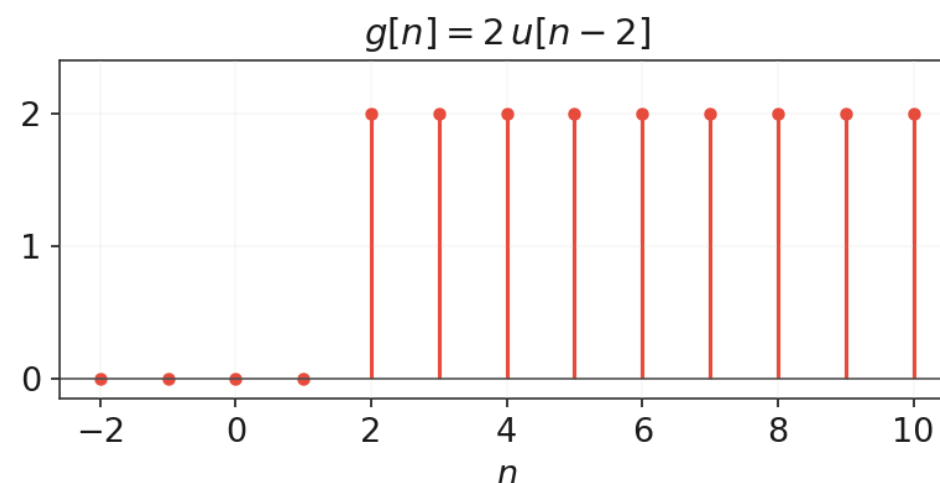
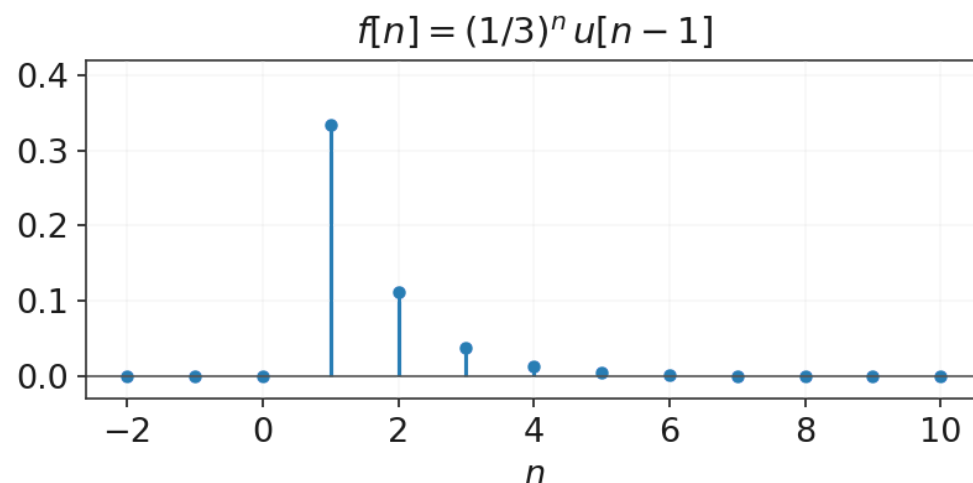
►  Solución

Correlación discreta: método analítico (i)

El método analítico sirve igual para la correlación. Por ejemplo, vamos a calcular la correlación usando las mismas señales que en el ejemplo de convolución:

$$f[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n-1]$$

$$g[n] = 2 u[n-2]$$



$$R_{fg}[l] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] g[n+l] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n-1]}_{\neq 0 \text{ si } n \geq 1} \cdot \underbrace{2 u[n+l-2]}_{\neq 0 \text{ si } n \geq 2-l}$$

Correlación discreta: método analítico (ii)

Tenemos que:

$$R_{fg}[l] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n \underbrace{u[n-1]}_{\neq 0 \text{ si } n \geq 1} \cdot 2 \underbrace{u[n+l-2]}_{\neq 0 \text{ si } n \geq 2-l}$$

1) Los escalones anulan el sumatorio por abajo:

- $u[n-1] \neq 0 \iff n \geq 1$
- $u[n+l-2] \neq 0 \iff n \geq 2-l$

2) Por tanto, el sumatorio puede **truncarse** por abajo:

$$\underbrace{n \geq \max(1, 2-l)}_{\text{ventana}}$$

a) Si $l \geq 1$, manda 1 y entonces:

$$R_{fg}[l] = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 2 \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^1}{1 - \frac{1}{3}} = 1$$

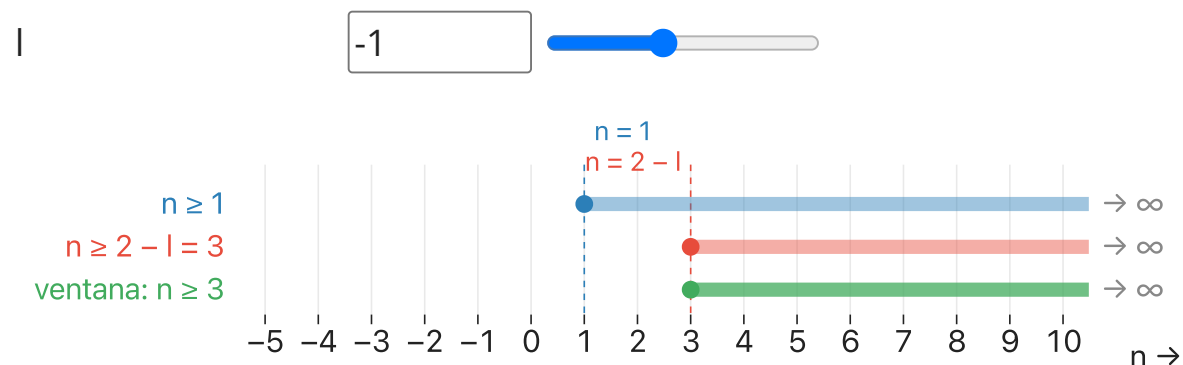
b) Si $l \leq 1$, manda $2-l$ y entonces:

$$R_{fg}[l] = 2 \sum_{n=2-l}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 2 \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{2-l}}{1 - \frac{1}{3}} = 3 \left(\frac{1}{3}\right)^{2-l} = 3^{(l-1)}$$

3) Podemos resumirlo como una función a trozos:

$$R_{fg}[l] = \begin{cases} 1 & l \geq 1 \\ 3^{l-1} & l \leq 1 \end{cases}$$

NOTA: Puede ser útil dibujar para saber qué condición es la más restrictiva en cada caso:

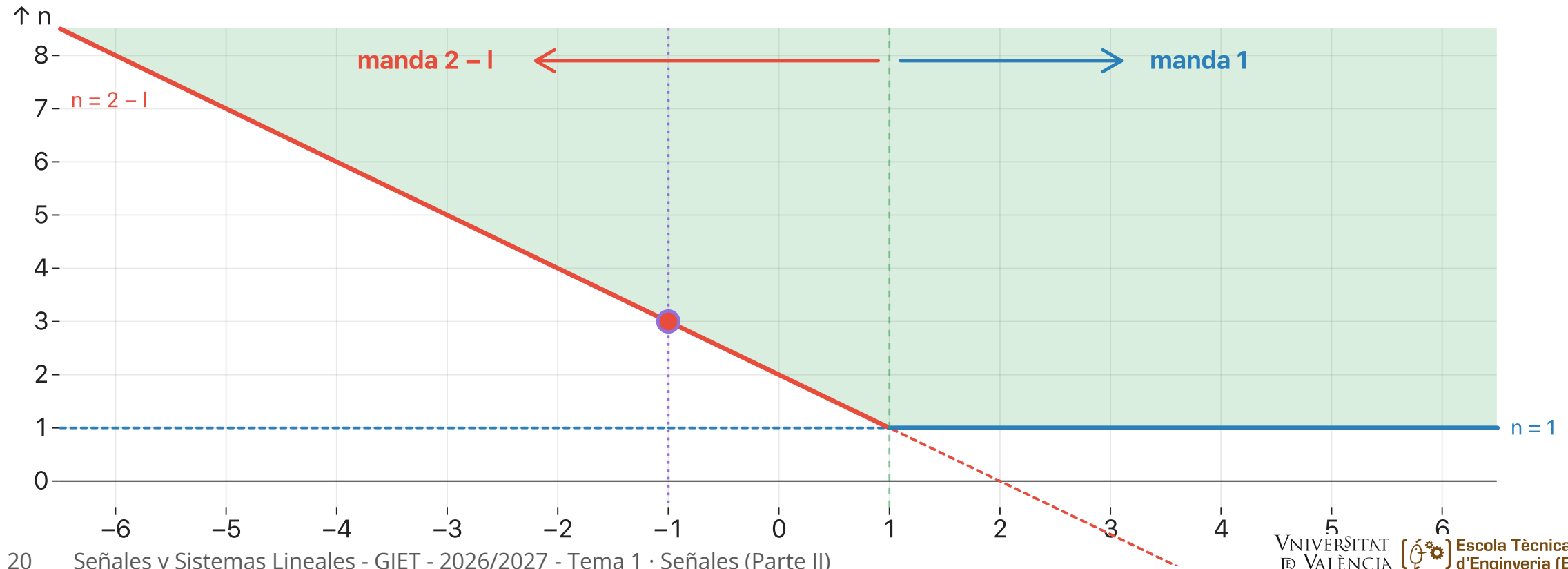


Correlación discreta: método analítico (iii)

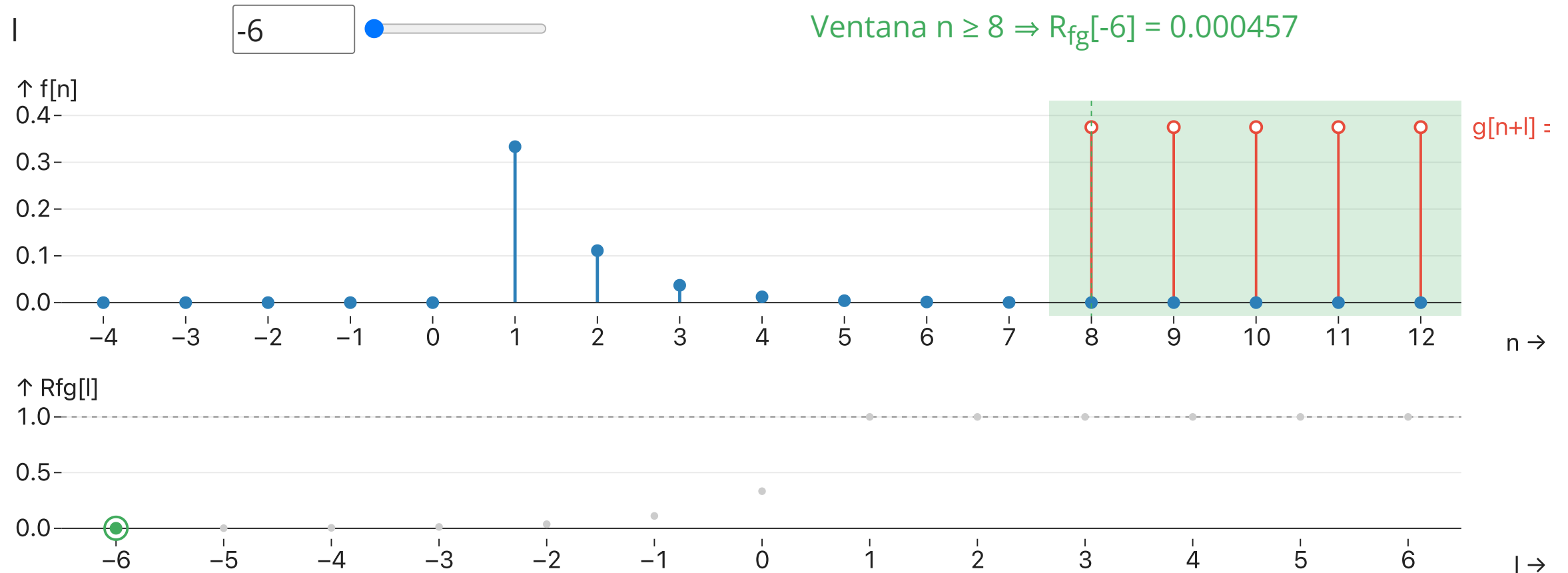
l



$$R_{fg}[l] = 2 \sum_{n=2-l}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$



Correlación discreta: método analítico (iii)



Ejemplo correlación discreta analítica

Ejemplo 1.4: Correlación analítica de dos señales infinitas

Calcula $R_{fg}[l]$ para

$$f[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n-1] \quad g[n] = u[n-3]$$

►  Solución

Autocorrelación

La autocorrelación es un caso particular de la correlación cruzada, donde se correlaciona una señal consigo misma (exactamente misma fórmula pero tomando $x_1 = x_2$):

$$R_{xx}[l] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] x[n+l]$$

- Compara la señal consigo misma, desplazada l muestras
- Por tanto, para **retardo cero**, autocorrelación **es máxima** y además **coincide con la energía** de la señal

$$R_{xx}[0] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] x[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = E_x$$

- En la práctica, **se suele normalizar** dividiendo entre $R_{xx}[0]$ para que el máximo valga 1
- Permite detectar **periodicidad** en señales

Ejemplo autocorrelación con deltas

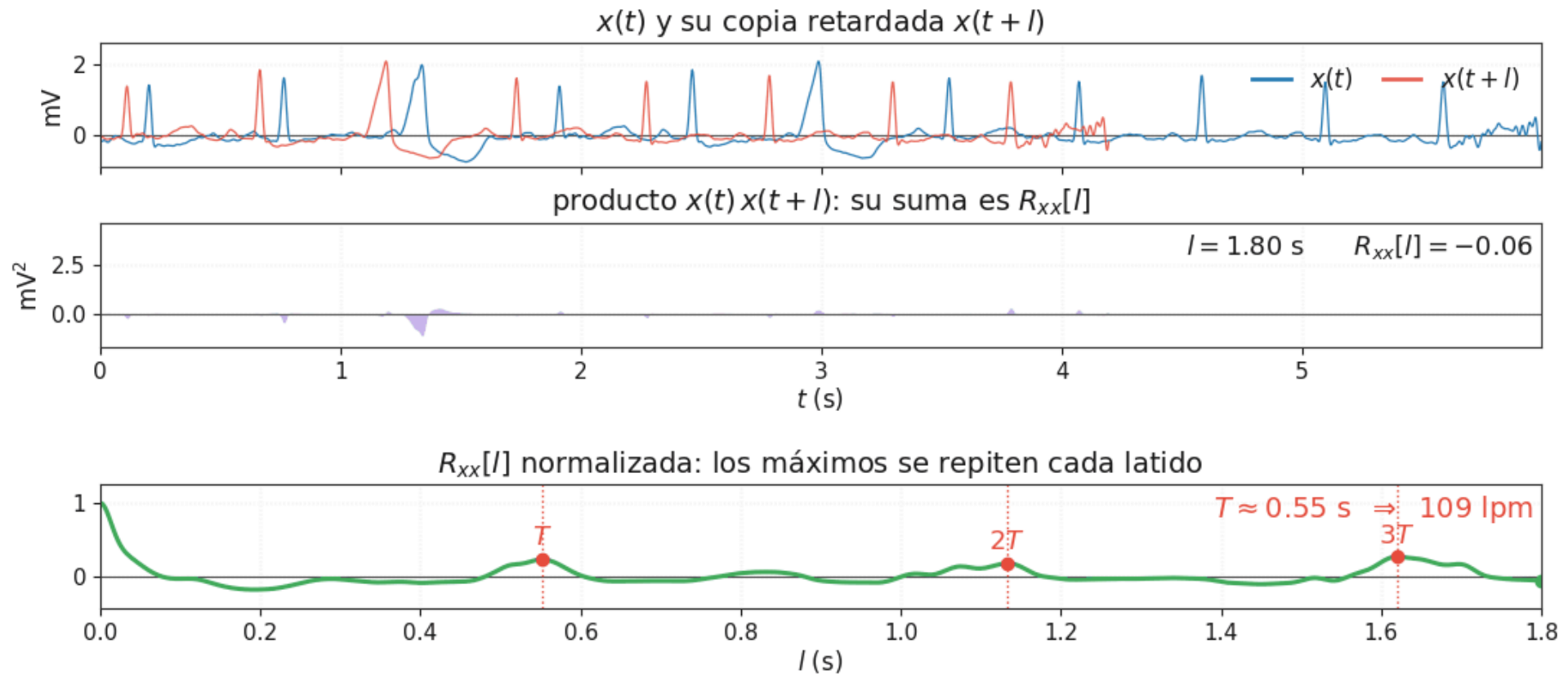
Ejemplo 1.5: Autocorrelación de una señal con eco

Un sonar emite un pulso $\delta[n]$ y recibe ese mismo pulso más un eco retrasado 5 muestras y atenuado por un factor 0,5. Dicha señal se modela como $x[n] = \delta[n] + 0,5 \delta[n - 5]$. Calcula su autocorrelación de forma analítica usando las propiedades de la delta de Kronecker.

Solución

Autocorrelación: aplicación

Un **ECG** real (MIT-BIH 208, $f_s = 360$ Hz): latido irregular y ruidoso; $R_{xx}[l]$ lo destapa.



Resumen: (auto)correlación y convolución (i)

Las definiciones de correlación y convolución para el caso continuo son análogas a las discretas, y se resumen en la siguiente tabla:

	Discreto	Continuo
Correlación	$R_{x_1 x_2}[l] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n] x_2[n + l]$	$R_{x_1 x_2}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) x_2(t + \tau) dt$
Autocorrelación	$R_{xx}[l] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] x[n + l]$	$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) x(t + \tau) dt$
Convolución	$(x_1 * x_2)[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] x_2[n - k]$	$(x_1 * x_2)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\theta) x_2(t - \theta) d\theta$

- La única diferencia es que en el caso continuo se usan **integrales** en lugar de sumatorios.

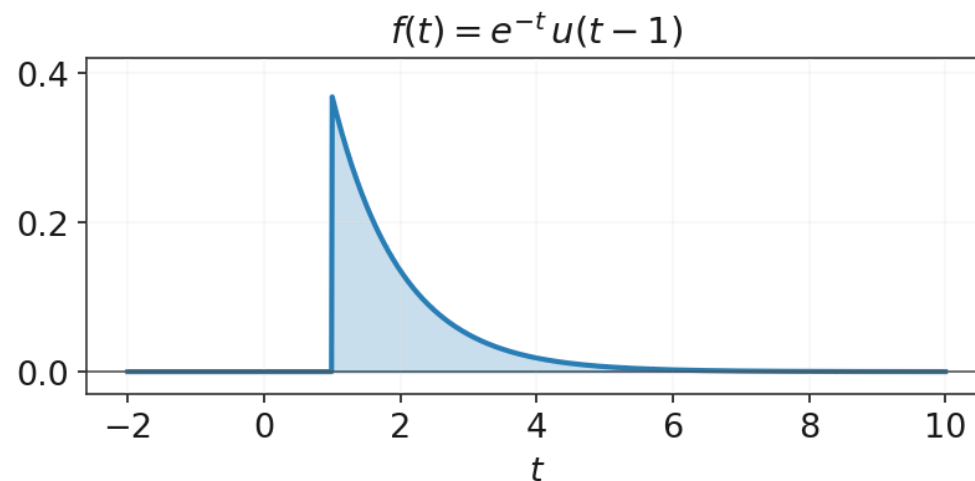
Resumen: (auto)correlación y convolución (ii)

- Los métodos tabulares:
 - se usan **solo en discreto** y para **secuencias finitas**
 - se basan en **desplazar y multiplicar** las señales, y luego sumar los productos en cada instante
 - ojo al construir las **tablas** porque **son diferentes para correlación y convolución**:
- Los métodos analíticos:
 - se usan **tanto en discreto como en continuo**, y para **secuencias infinitas**.
 - los **escalones** permiten **truncar** la integral o el sumatorio
 - Caso sencillo: tenemos una restricción por abajo y otra por arriba
 - Caso más complicado: tenemos dos restricciones en el mismo lado y hay que analizar cuál es más restrictiva
 - las **deltas** permiten **simplificar** la integral o el sumatorio
 - el producto de dos deltas solo sobrevive si sus argumentos son iguales

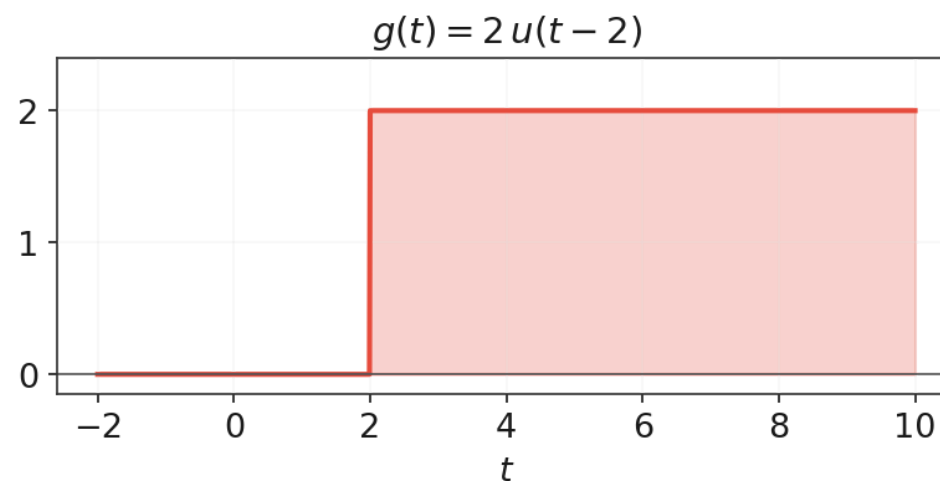
Métodos analíticos en continuo (i)

La metodología es la misma que en el caso discreto pero usando **integrales en lugar de sumatorios**, por ejemplo, para calcular la convolución de:

$$f(t) = e^{-t} u(t - 1)$$



$$g(t) = 2 u(t - 2)$$



$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta) g(t - \theta) d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\theta} \underbrace{u(\theta - 1)}_{\neq 0 \text{ si } \theta \geq 1} \cdot 2 \underbrace{u(t - \theta - 2)}_{\neq 0 \text{ si } \theta \leq t-2} d\theta$$

Métodos analíticos en continuo (ii)

Cada escalón anula la integral por un lado:

- $u(\theta - 1) \neq 0 \iff \theta \geq 1$
- $u(t - \theta - 2) \neq 0 \iff \theta \leq t - 2$

Por tanto, la integral puede **truncarse**:

$$t \geq 3 \iff \underbrace{1 \leq \theta \leq t - 2}_{\text{ventana}} \implies y(t) = 2 \int_1^{t-2} e^{-\theta} d\theta$$

Integrando la exponencial:

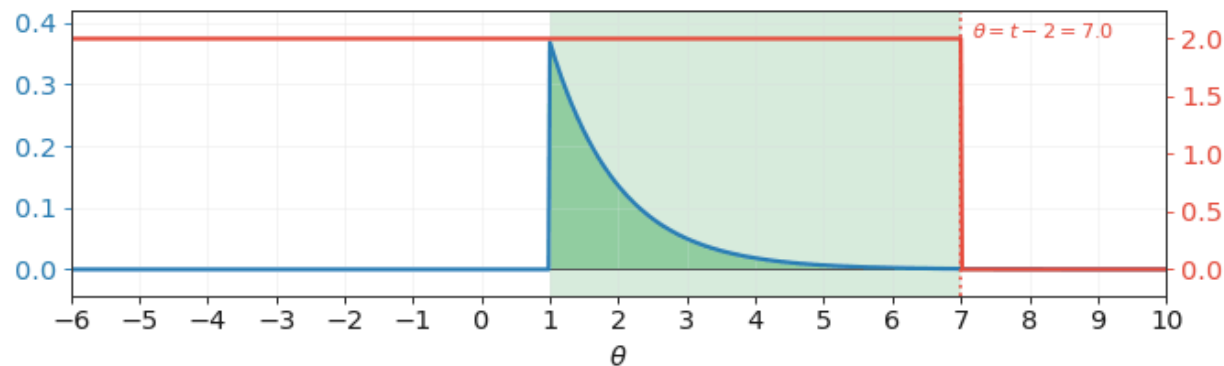
$$y(t) = 2 \int_1^{t-2} e^{-\theta} d\theta = 2 \left(e^{-1} - e^{-(t-2)} \right)$$

Resultado (solamente válido para $t \geq 3$):

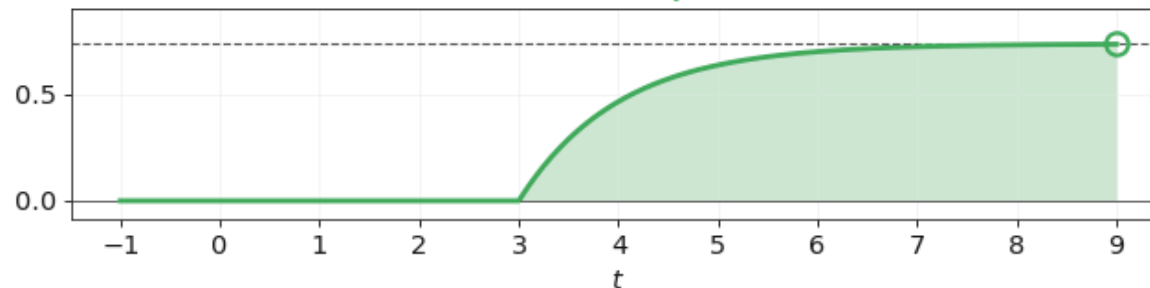
$$y(t) = 2 \left(e^{-1} - e^{-(t-2)} \right) u(t - 3)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\theta} \underbrace{u(\theta - 1)}_{\neq 0 \text{ si } \theta \geq 1} \cdot 2 \underbrace{u(t - \theta - 2)}_{\neq 0 \text{ si } \theta \leq t-2} d\theta$$

$f(\theta)$ fija y $g(9.0 - \theta)$ reflejada ($t = 9.0$)



Ventana $1 \leq \theta \leq 7.0 \Rightarrow y(9.0) = 0.734$



Ejemplo autocorrelación continua

Ejemplo 1.6: Autocorrelación de una exponencial causal

Calcula $R_{xx}(\tau)$ para

$$x(t) = e^{-t} u(t)$$

►  Solución

Ejemplo autocorrelación con un pulso (i)

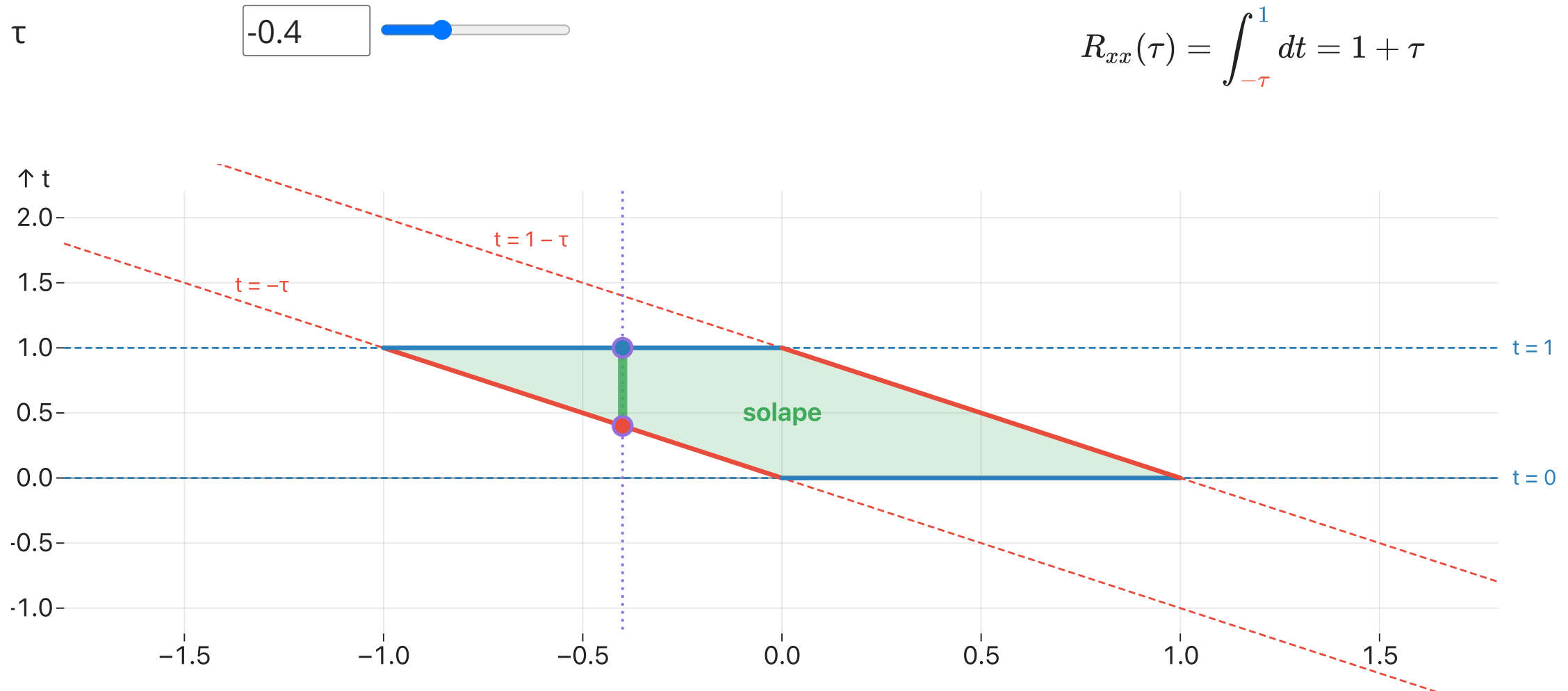
Ejemplo 1.7: Autocorrelación de un pulso rectangular

Calcula $R_{xx}(\tau)$ para el pulso unidad (no desarrolles el producto dentro de la integral):

$$x(t) = u(t) - u(t - 1)$$

►  Solución

Ejemplo autocorrelación con un pulso (ii)



Para terminar



Vaya a wooclap.com

Ingrese el código de evento en el banner superior

Código de evento

JLGAEGT



Esperando a los participantes...