



VNIVERSITAT
DE VALÈNCIA

Señales y Sistemas Lineales

Tema 2 · Muestreo y cuantización

Grado en Ingeniería Electrónica de Telecomunicación (GIET)

Curso 2026/2027

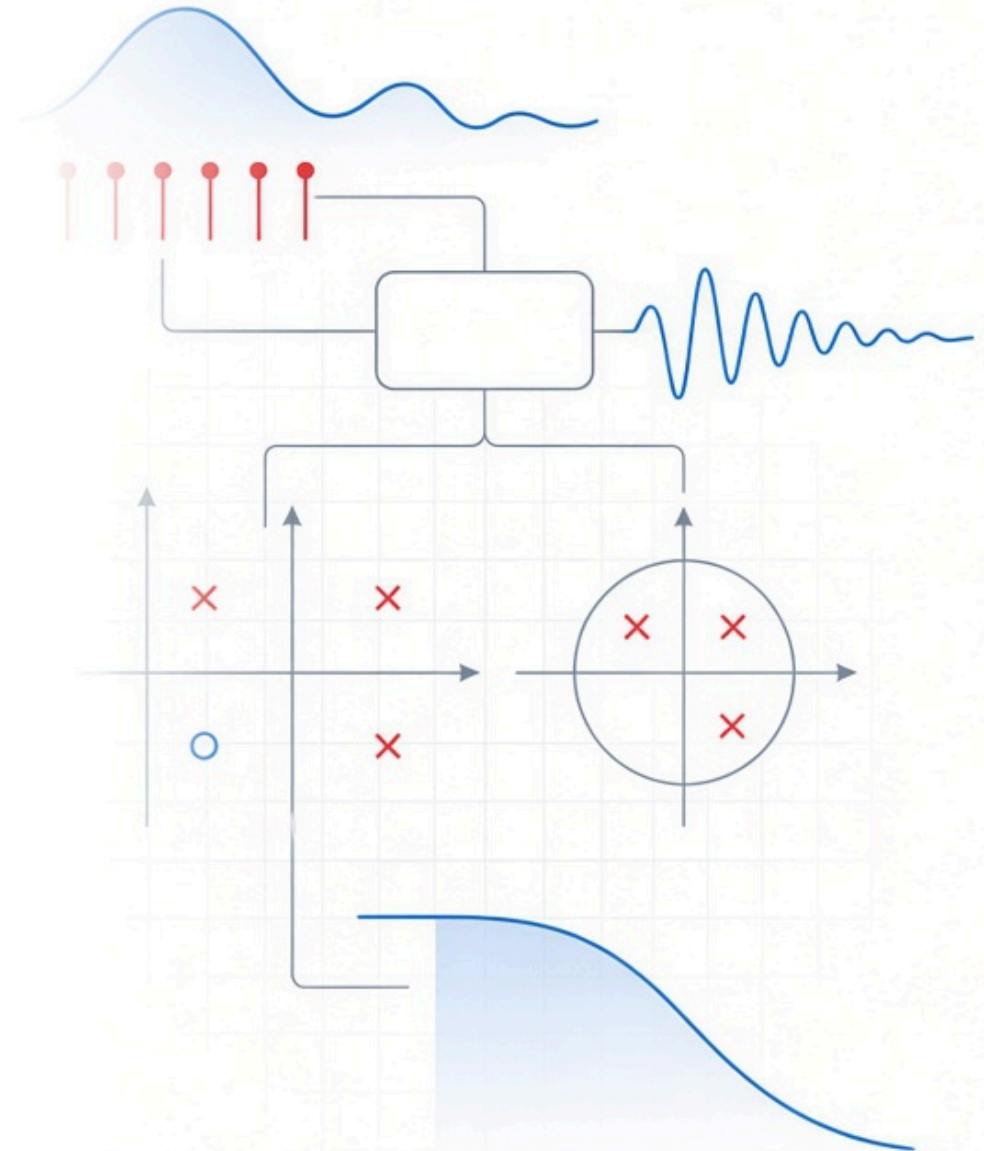
Ricardo Sanz Díaz

ricardo.sanz@uv.es

Departament d'Enginyeria Electrònica

Escola Tècnica Superior d'Enginyeria

Despatx 2.2.14



Contenidos

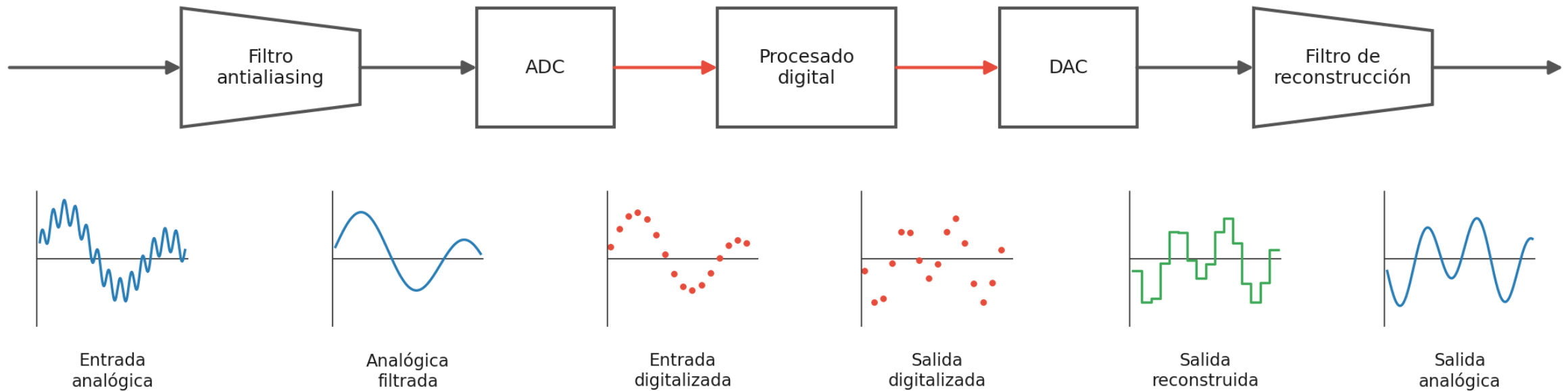
1. Muestreo
2. Reconstrucción
3. Cuantización
4. Bitrate

Prerrequisitos

- Tema 1: señales
- Periodicidad de las senoidales discretas (tema 1)
- Convolución (tema 1)

Visión global

Esta es la cadena completa de un sistema de procesamiento digital:



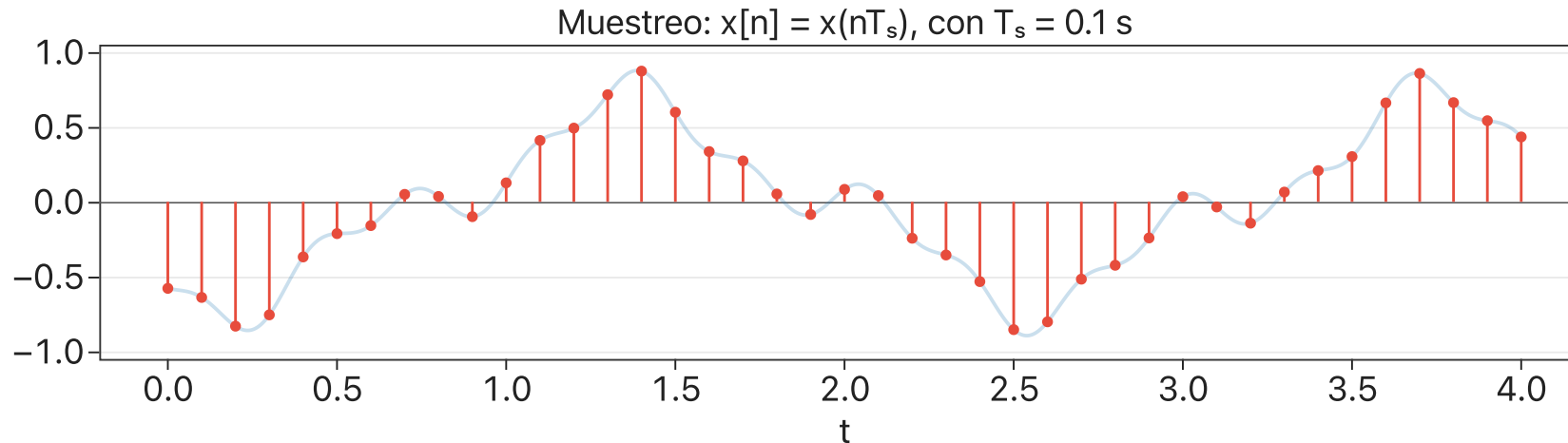
Muestreo

Recordatorio: muestreo

- **Muestreo (continuo -> discreto):** tomar valores solo en instantes determinados

T_s (s)

0.1



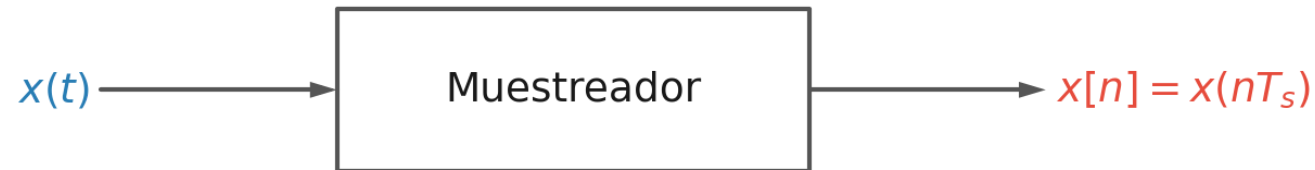
Periodo y frecuencia de muestreo

Llamamos periodo de muestreo (T_s , del inglés, *sampling*) al intervalo de tiempo transcurrido entre dos muestras consecutivas; y a su inversa, la frecuencia de muestreo ($f_s = 1/T_s$), medida en Hz.

Definición formal del muestreo

- **Muestrear** una señal continua $x(t)$ con periodo T_s es quedarse con sus valores en los instantes $t = nT_s$:

$$x[n] = x(t)|_{t=nT_s} = x(nT_s), \quad n \in \mathbb{Z}$$



- Llamamos **frecuencia de muestreo** a la inversa del periodo $f_s = 1/T_s$ (Hz)

Muestreo ideal

Este es un modelo ideal ya que toma el valor exacto en un instante sin duración. Un conversor real usa un circuito de **muestreo y retención** (*sample and hold*), que congela el valor mientras se convierte. Puedes ver el diseño completo de un circuito de muestreo y retención [aquí](#).

Muestreo de una senoidal

- Ya sabemos que una señal senoidal continua de frecuencia f (Hz) se puede expresar como

$$x(t) = A \cos(2\pi ft)$$

- Al muestrear dicha señal a una frecuencia de muestreo $f_s = 1/T_s$ (Hz), obtenemos la señal discreta

$$x[n] = x(t)|_{t=nT_s} = A \cos(2\pi f(nT_s)) = A \cos(2\pi \frac{f}{f_s} n) = A \cos(\pi \frac{f}{f_{nyq}} n)$$

- En el último paso se ha introducido la **frecuencia de Nyquist**, definida como

$$f_{nyq} = \frac{f_s}{2}$$

Frecuencia digital de una senoidal muestreada

Para calcular la frecuencia digital de una senoidal muestreada usaremos la relación $\Omega = \pi \cdot (f/f_{nyq})$

El fenómeno del aliasing (i)

- Por tanto, la frecuencia digital de una senoidal muestreada es

$$\Omega = \pi \frac{f}{f_{nyq}}$$

- Recuerda que **la frecuencia angular discreta solamente es distinguible** en el intervalo $[-\pi, \pi]$
- Cualquier frecuencia fuera de ese rango se “pliega” y da lugar a otra equivalente dentro del mismo, que denotamos como $\Omega' = \Omega - 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \Omega' \in [-\pi, \pi]$

Frecuencia digital equivalente

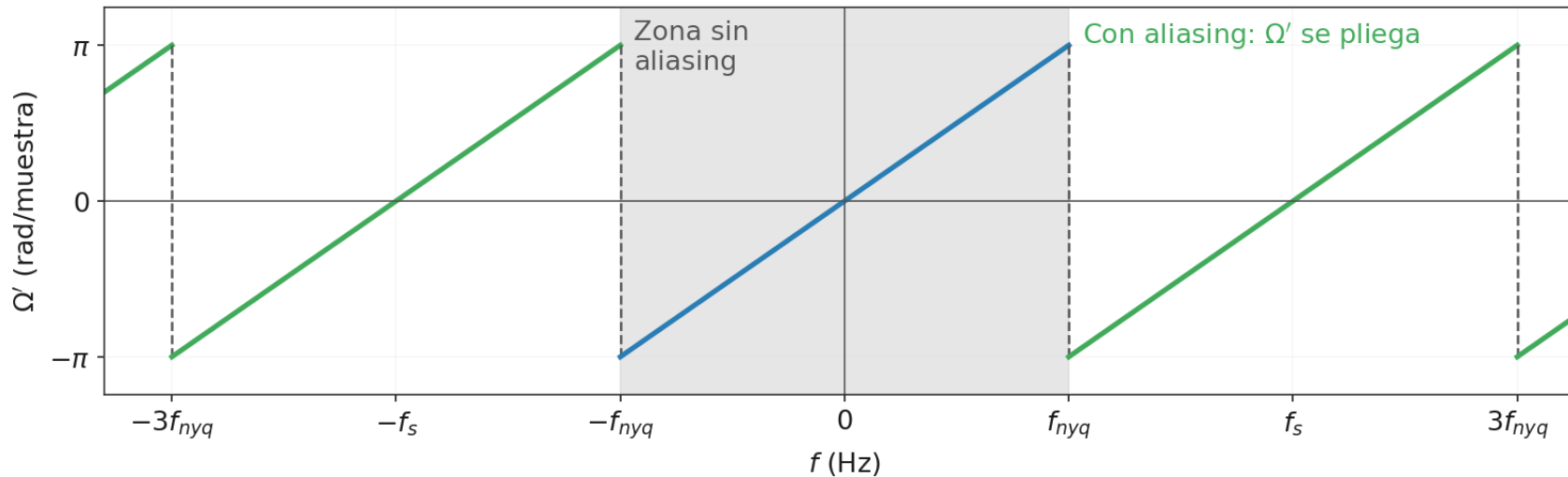
Recuerda que la frecuencia equivalente Ω' se obtiene restando múltiplos de 2π a la frecuencia digital Ω , tantas veces como sea necesario, hasta que quede dentro del rango $[-\pi, \pi]$.

- Por tanto, **si $f > f_{nyq}$, la frecuencia digital de la senoidal muestreada sale del rango, y se “pliega”** a otra frecuencia digital dentro del mismo, dando lugar a un **alias** de la frecuencia original.

El plegado de la frecuencia digital

Otra forma de verlo:

- La frecuencia digital equivalente Ω' frente a la frecuencia analógica f es un **diente de sierra**:



- Si $|f| < f_{nyq}$, la frecuencia digital no se pliega, y simplemente $\Omega' = \Omega = \pi(f/f_{nyq})$
- Fuera de ese rango, las frecuencias f y $f + kf_s$ ($k \in \mathbb{Z}$) dan **la misma** Ω'

El fenómeno del aliasing (ii)

- La señal reconstruida tendrá una frecuencia aparente (alias) f' asociada a la frecuencia digital equivalente Ω' :

$$f' = \frac{|\Omega'|}{\pi} f_{nyq}$$

- En tal caso, **no hay manera de distinguir** si una frecuencia alias es real o no

Aliasing

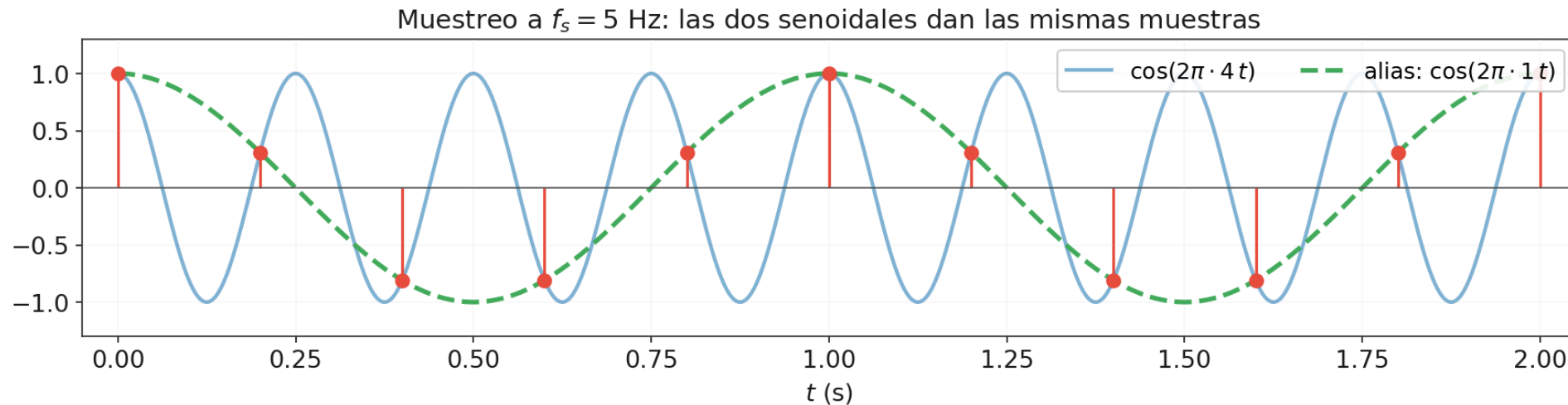
El *aliasing* **ocurre cuando se muestrea una señal de frecuencia f a una frecuencia de muestreo insuficiente** ($f_{nyq} = f_s/2 < f$), de manera que las frecuencias altas se “pliegan” y se confunden con las bajas.

Signo de la frecuencia alias

La frecuencia digital equivalente Ω' puede ser positiva o negativa, pero la frecuencia aparente f' siempre la expresamos como positiva. Por eso se toma el valor absoluto de Ω' al calcular f' .

Aliasing: en el dominio del tiempo

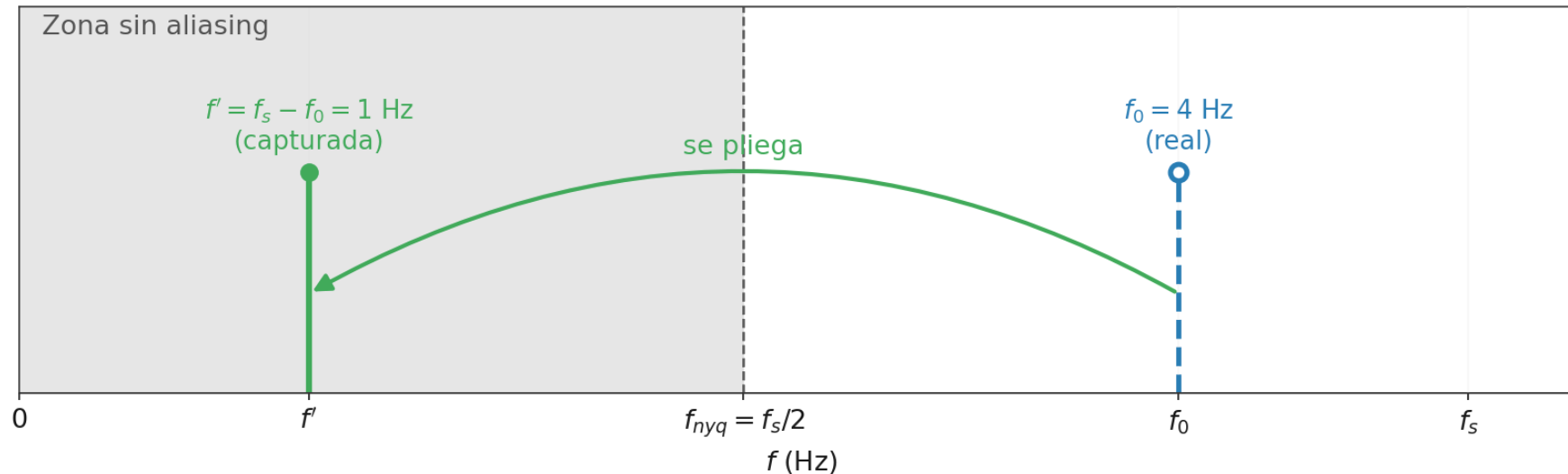
- **Ejemplo:** muestreo de componentes de 1 Hz y 4 Hz a la misma frecuencia de muestreo $f_s = 5$ Hz:



- En este caso, la frecuencia de Nyquist es $f_{nyq} = f_s/2 = 2.5$ Hz
 - **La señal de 1 Hz se ve como lo que es**, porque $f < f_{nyq}$
 - **La señal de 4 Hz se ve como una de 1 Hz**, porque $f > f_{nyq}$ y su frecuencia digital $\Omega = 8\pi/5$ se pliega a $\Omega' = 8\pi/5 - 2\pi = -2\pi/5$, lo cual corresponde a un alias de $f' = (|\Omega'|/\pi)f_{nyq} = 1$ Hz

Aliasing: en el dominio de la frecuencia

- Podemos representar el aliasing en el dominio de la frecuencia, con una raya por cada componente:



- La f_{nyq} **actúa como un espejo**: lo que cae más allá de f_{nyq} se refleja y aparece en $f' = f_s - f_0$
- Una vez muestreada, **es imposible saber si la componente f' es real o no**

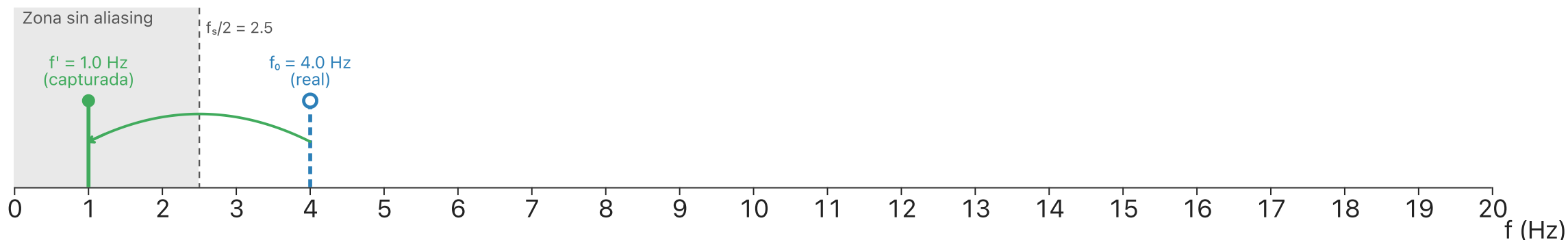
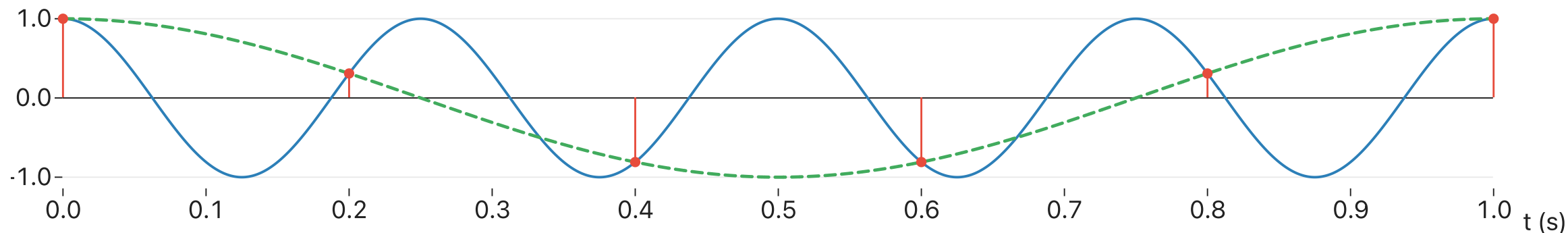
Interactivo: una señal y su alias

f_0 (Hz)

f_s (Hz)

Frecuencia aparente: **1.0 Hz** ⚠ aliasing

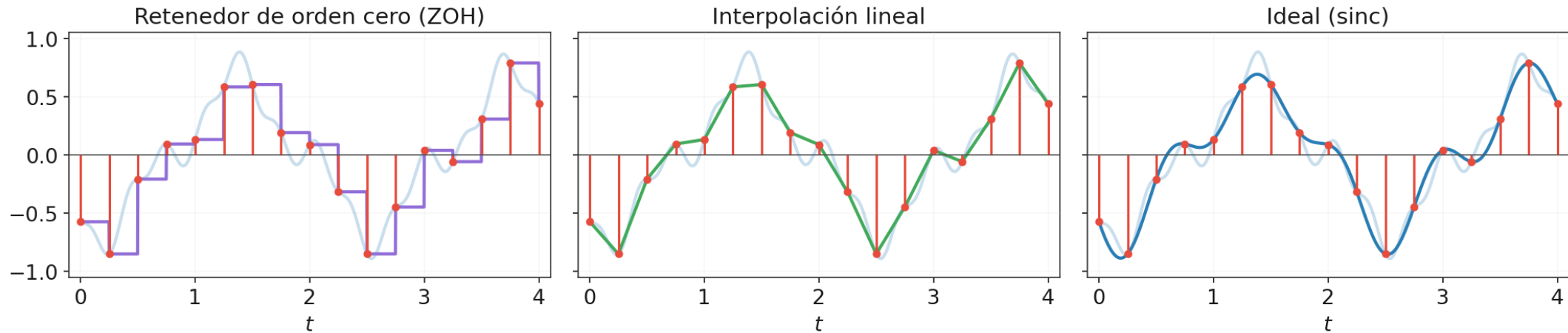
$$x(t) = \cos(2\pi \cdot 4.0 t) \quad x(t)|_{t=nT_s} \rightarrow x[n] = \cos\left(2\pi \frac{4.0}{5.0} n\right) = \cos\left(\frac{8\pi}{5} n\right)$$



Reconstrucción

Reconstructores

- **Reconstruir** consiste en recuperar la señal continua mediante **interpolación** a partir de sus muestras

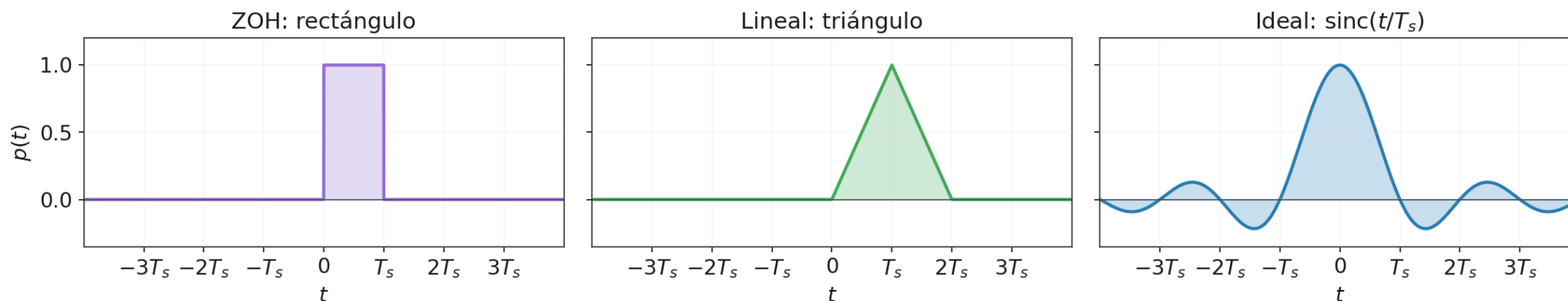


- **Retenedor de orden cero:** *zero-order hold* (ZOH), mantiene cada muestra hasta la siguiente
- **Retenedor de orden uno:** *first-order hold* (FOH), une muestras consecutivas con rectas
- **Ideal:** recupera la señal exacta (bajo ciertas condiciones)

Interpolar es convolucionar

- Los tres reestructores colocan un **pulso** $p(t)$ en cada muestra, escalado por su valor, y suman:

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] p(t - nT_s)$$

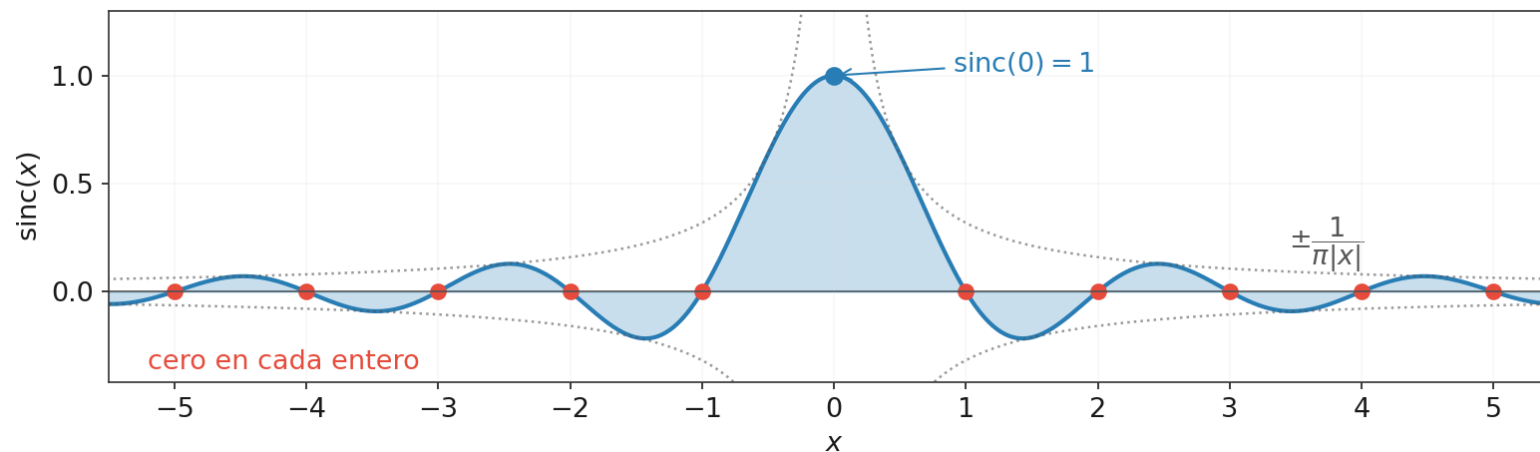


- Solo cambia la forma del pulso: **rectángulo** (ZOH), **triángulo** (lineal) o **sinc** (ideal).
- Fíjate que la fórmula de interpolación es muy similar a una convolución discreta

La función sinc

- El pulso del reconstructor ideal es la **sinc**, la senoidal dividida por su argumento:

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}, \quad \text{sinc}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = 1$$



- Vale 1 en el origen y 0 en todos los demás enteros
- Tiene simetría par y una envolvente que decae como $1/(\pi|x|)$

Teorema de Nyquist-Shannon

Teorema del muestreo

Si una señal $x(t)$ es limitada en banda (esto es, no contiene componentes de frecuencia por encima de B Hz) y se muestrea a una frecuencia f_s tal que $f_s > 2B$, entonces el reconstructor ideal

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \operatorname{sinc}\left(\frac{t - nT_s}{T_s}\right)$$

es capaz de recuperar **exactamente** $x(t)$ a partir de sus muestras $x[n]$.

Filtro antialiasing

La forma de **asegurar que una señal esté limitada en banda** es poner un **filtro antialiasing**: un filtro paso bajo que elimina toda componente frecuencial por encima de $f_s/2$.

No causalidad

El reconstructor ideal **no puede usarse en aplicaciones de tiempo real** porque es **no causal**, es decir, necesita conocer la señal en el pasado y en el futuro para calcular su valor en el presente.

Frecuencia de muestreo mínima

Ejemplo 2.1: Frecuencia de muestreo mínima

Sea $x(t) = 3 \cos(200\pi t) + \sin(500\pi t)$.

- a. ¿Cuál es la mínima frecuencia de muestreo que permite reconstruirla?
- b. Si se muestrea a $f_s = 300$ Hz, ¿qué frecuencias se obtendrían al reconstruir la señal?

▶  Solución a)

▶  Solución b)

Interactivo: comparación de reconstructores

Reconstructor

☒ ZOH ☐ Lineal ☒ Ideal

T_s (s)

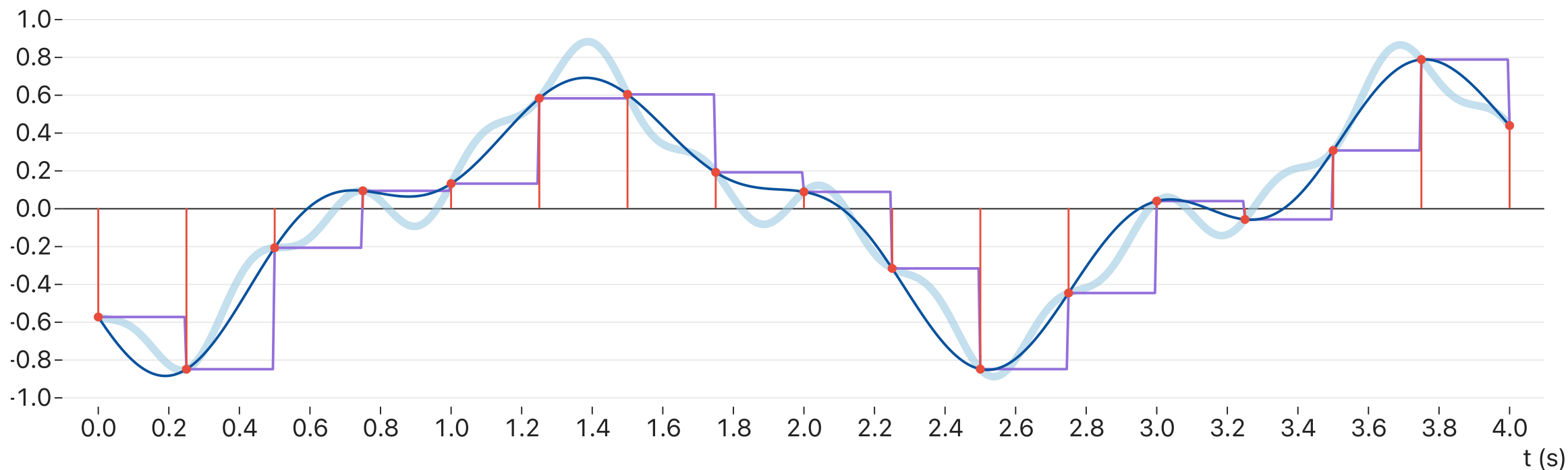
0.25



La señal llega a 3,08 Hz: Nyquist pide $T_s < 0,16$ s ⚠

Error eficaz: ZOH 0.248 · Ideal 0.100

Original ZOH Lineal Ideal

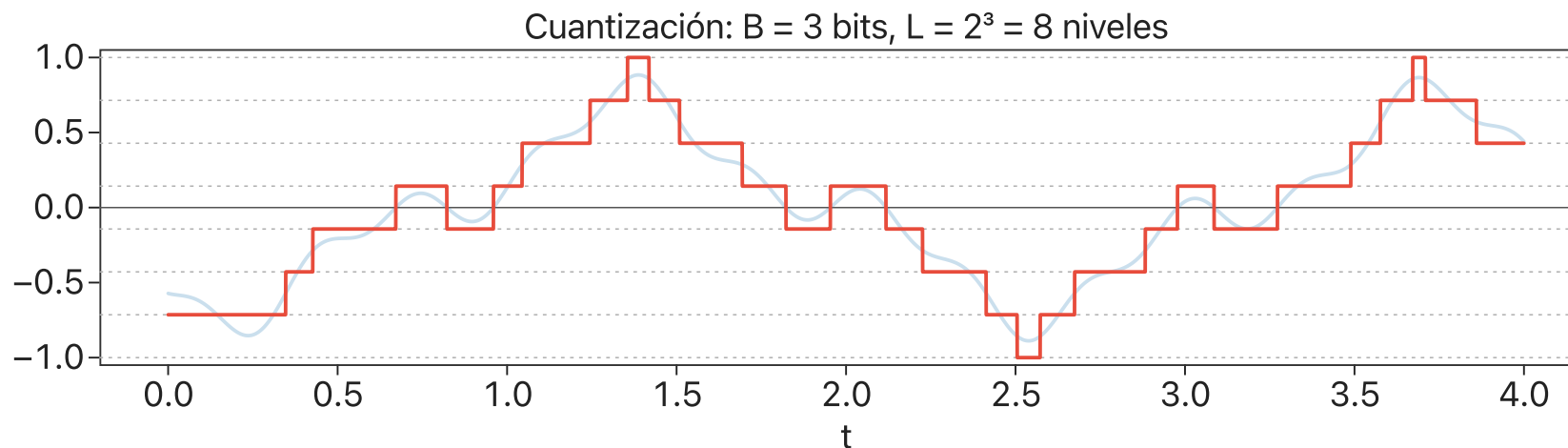


Cuantización

Recordatorio: cuantización

- **Cuantización (analógico -> digital):** restringir la amplitud a un conjunto finito de valores

B (bits)

Bits y niveles de cuantización

Los cuantizadores se definen por su número de bits B , que determina el número de niveles de cuantización: $L = 2^B$.

Característica del cuantizador

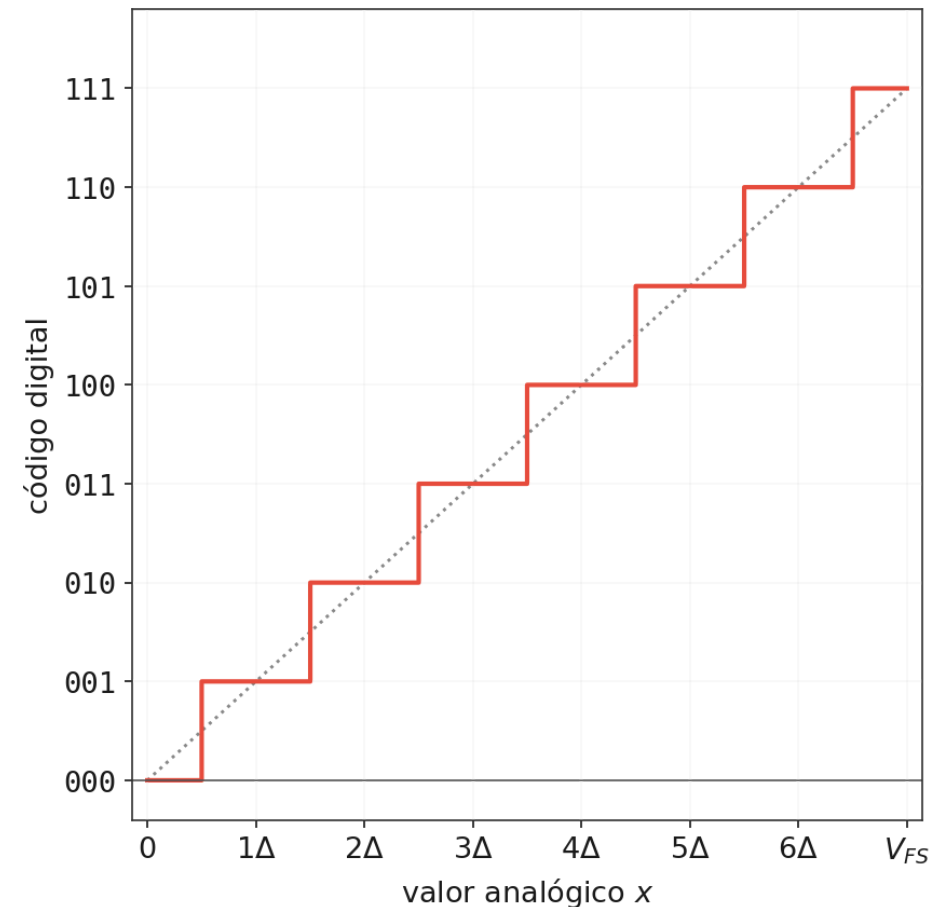
- **Entrada:** un valor analógico x dentro del **fondo de escala**, $[0, V_{FS}]$
 - El **fondo de escala** V_{FS} es el **rango de entrada** admisible
 - Si la entrada es **bipolar**, entonces $V_{FS} = V_{max} - V_{min}$
- **Salida:** uno de los códigos digitales posibles (**niveles**)
 - El **número de bits** B determina el **número de niveles**, $L = 2^B$
 - En este ejemplo, $B = 3$ y $L = 8$ niveles, del **000** al **111**
- La **resolución** (Δ) es el menor cambio de la entrada que se puede distinguir y se calcula como el fondo de escala dividido entre el número de escalones:

$$\Delta = \frac{V_{FS}}{2^B - 1}$$

- Los **niveles** de cuantización son **múltiplos de Δ** :

$$x_q = \{0, \Delta, 2\Delta, \dots, V_{FS}\}$$

- La diferencia entre la característica y la ideal (línea de puntos) es el **error de cuantización**



Error de cuantización (i)

Para asignar un valor de cuantización a una entrada hay varias opciones.

1) Redondeo: se toma el **nivel más cercano**:

- El error queda repartido a ambos lados:

$$-\frac{\Delta}{2} < e \leq \frac{\Delta}{2}$$

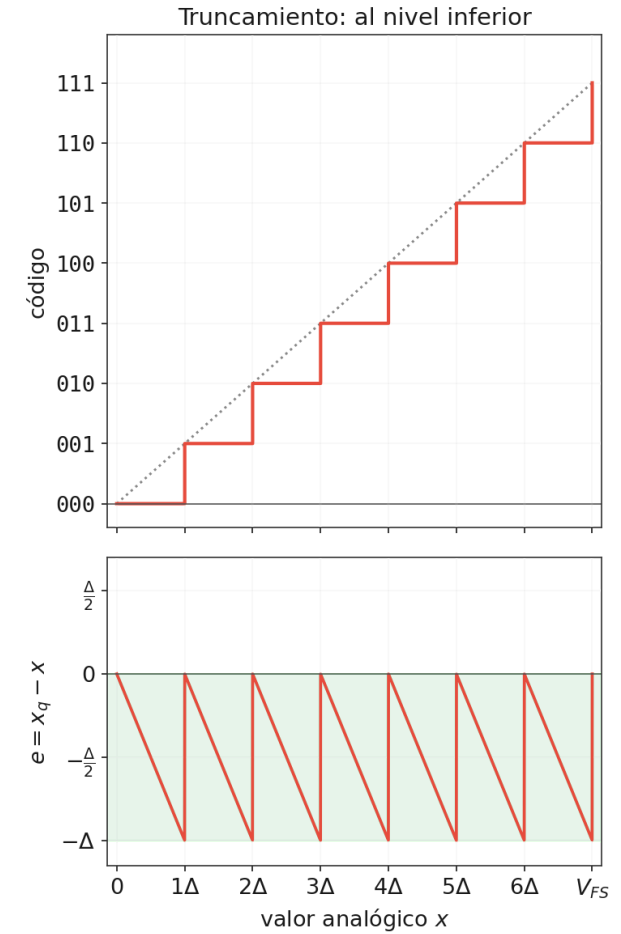
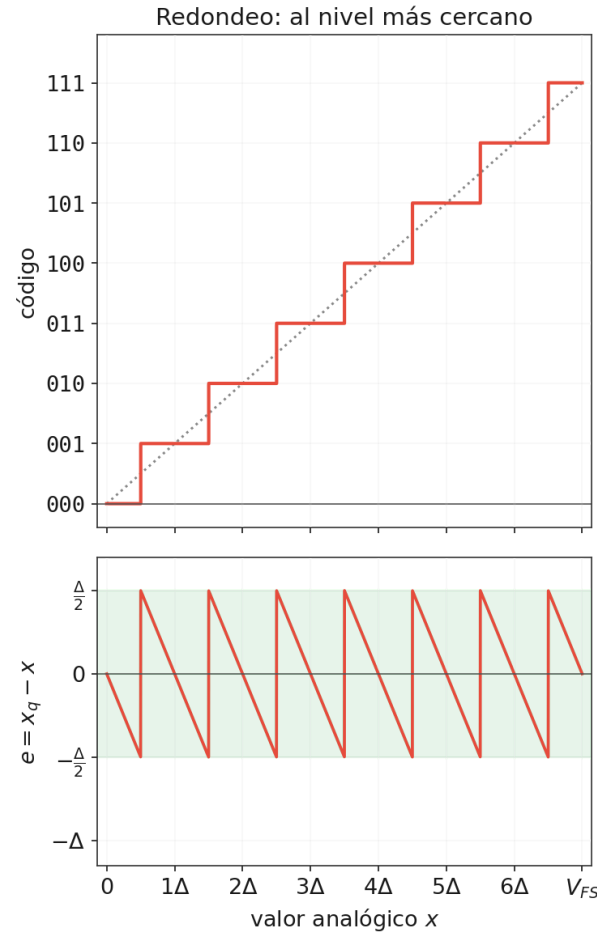
- El error máximo es $e_{max} = \Delta/2$
- No tiene sesgo:** su media es cero

2) Truncamiento: se toma el **nivel inferior**:

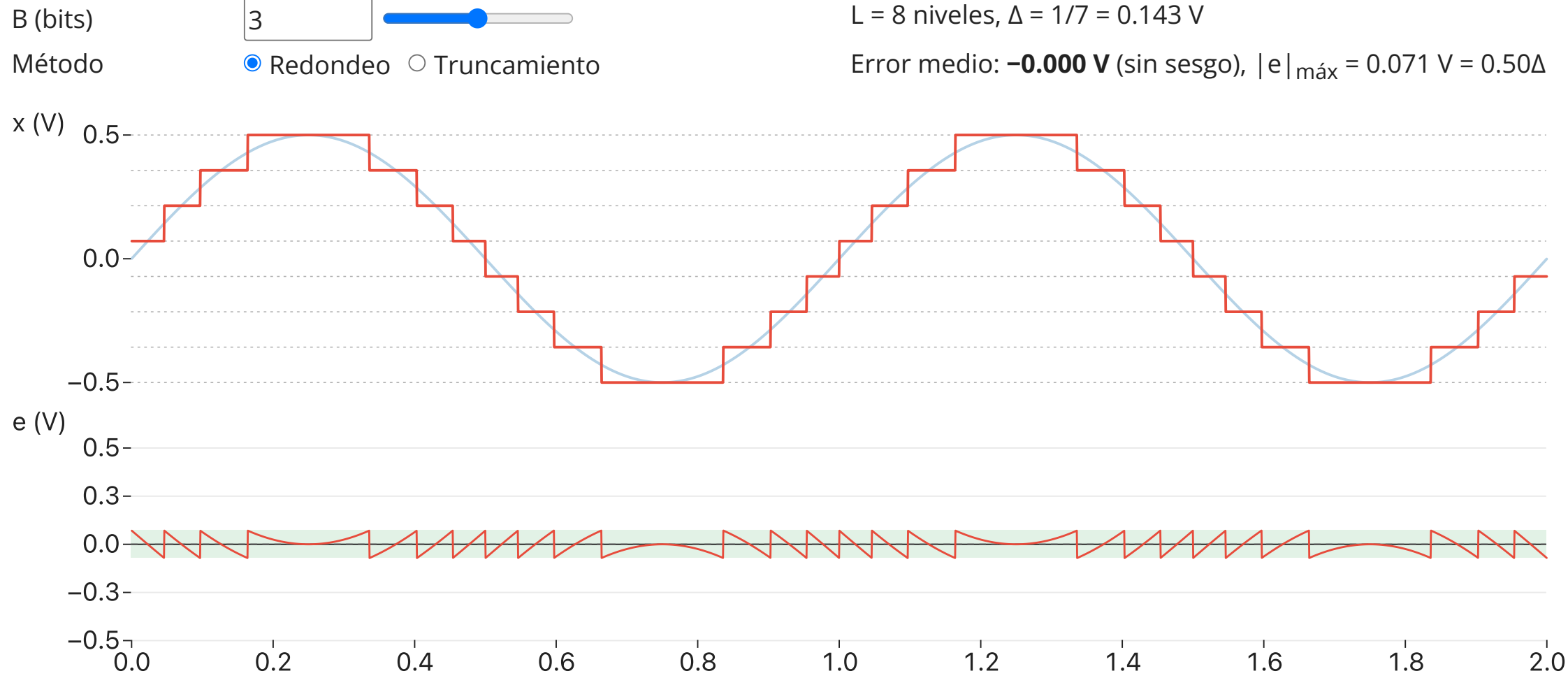
- El error queda siempre por debajo del cero:

$$-\Delta < e \leq 0$$

- El error máximo es $e_{max} = \Delta$
- Está sesgado:** su media es negativa

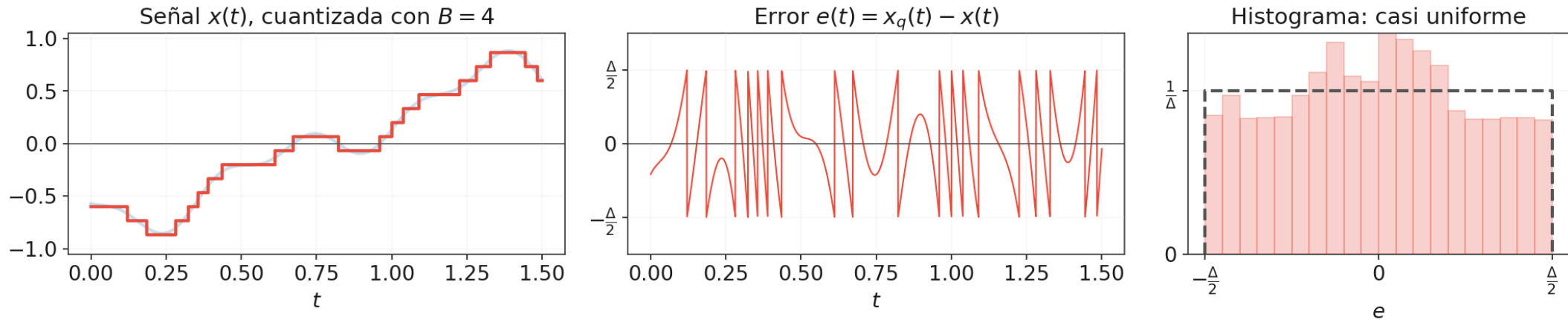


Error de cuantización (ii)



Ruido de cuantización

- Se puede comprobar que el **error de cuantización con redondeo** se comporta como un **ruido uniforme**:



- Se puede demostrar que su potencia es

$$P_q = \frac{1}{\Delta} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} e^2 de = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{V_{FS}^2}{12(2^B - 1)^2}$$

donde se ha usado la relación $\Delta = V_{FS}/(2^B - 1)$.

Relación señal a ruido de cuantización (SQNR)

Supongamos que tenemos una señal senoidal que ocupa todo el fondo de escala (o sea, amplitud $V_{FS}/2$), y que el error de cuantización es ruido blanco uniforme. Sabemos entonces que las respectivas potencias son:

$$P_s = \frac{V_{FS}^2}{8}, \quad P_q = \frac{V_{FS}^2}{12(2^B - 1)^2}$$

Si calculamos su cociente y lo expresamos en decibelios, obtenemos la regla de diseño para la **relación señal a ruido de cuantización (SQNR)**, que relaciona el número de bits con la calidad de la conversión:

$$\text{SQNR} = 10 \log_{10} \frac{P_s}{P_q} = 10 \log_{10} \frac{\frac{V_{FS}^2}{8}}{\frac{V_{FS}^2}{12(2^B - 1)^2}} = 10 \log_{10} \frac{3}{2} (2^B - 1)^2 \approx 6,02B + 1,76 \text{ dB}$$

Tasa binaria (bitrate)

- **Bitrate** (tasa binaria, R): bits por segundo que genera la conversión. Cada muestra necesita B bits y hay f_s muestras por segundo en cada canal:

$$R = f_s \cdot B \cdot N_{\text{canales}} \text{ (bit/s)}$$

Aplicación	f_s	B	Canales	R
Telefonía	8 kHz	8	1	64 kbit/s
CD de audio	44,1 kHz	16	2	1411,2 kbit/s
Audio de alta resolución	96 kHz	24	2	4608 kbit/s

Ejemplo 2.2: Tamaño de un minuto de CD

¿Cuánto ocupa un minuto de audio de CD sin comprimir, en megabytes?