



VNIVERSITAT  
DE VALÈNCIA

# Señales y Sistemas Lineales

## Tema 4 · Ecuaciones diferenciales y en diferencias

Grado en Ingeniería Electrónica de Telecomunicación (GIET)

Curso 2026/2027

---

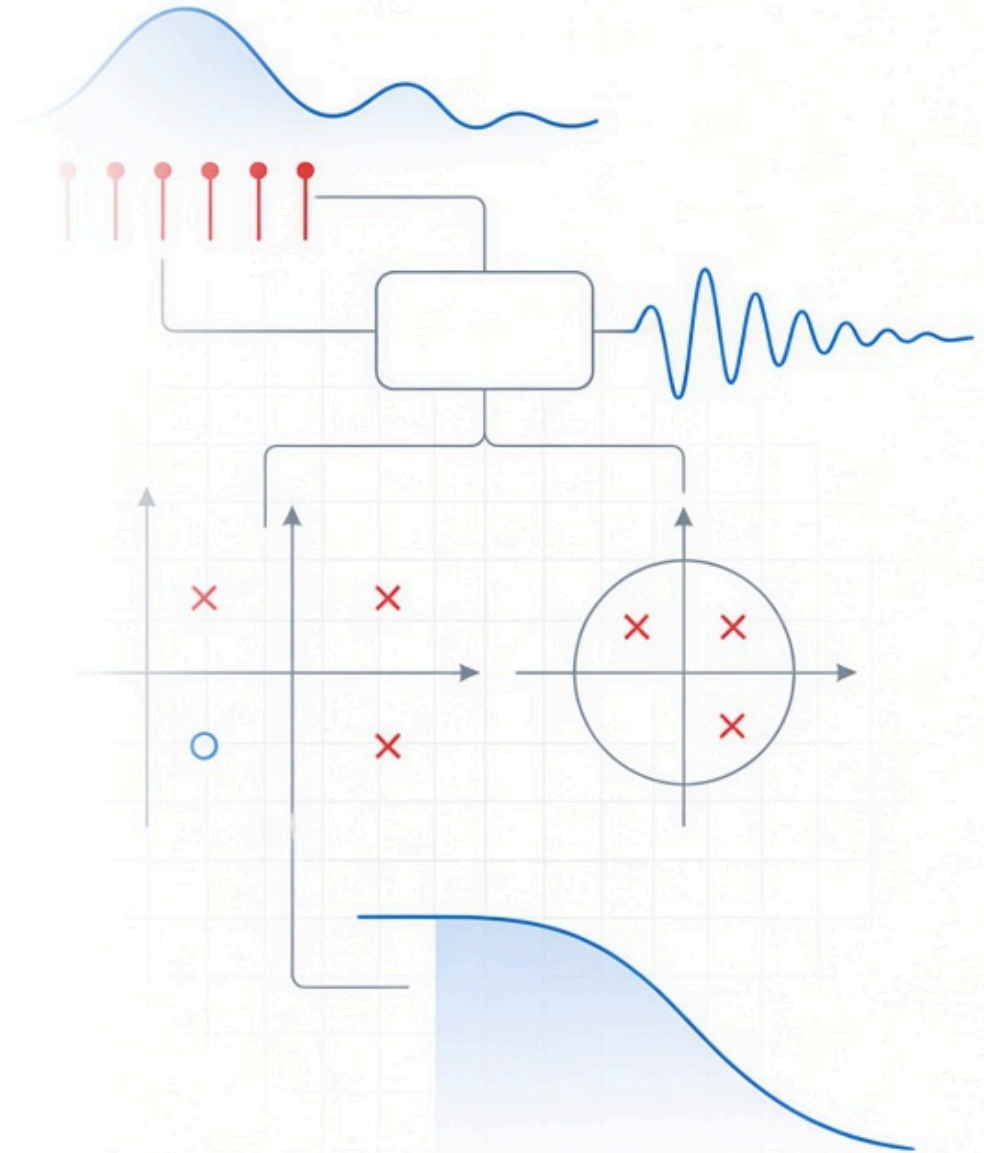
Ricardo Sanz Díaz

ricardo.sanz@uv.es

Departament d'Enginyeria Electrònica

Escola Tècnica Superior d'Enginyeria

Despatx 2.2.14



# Contenidos

---

1. Modelado
2. Ecuaciones diferenciales
3. Ecuaciones en diferencias
4. Transitorio, permanente y estabilidad

## Prerrequisitos

- Temas 1 y 3
- Matemáticas I, II y III
- Circuitos Electrónicos

# Modelado

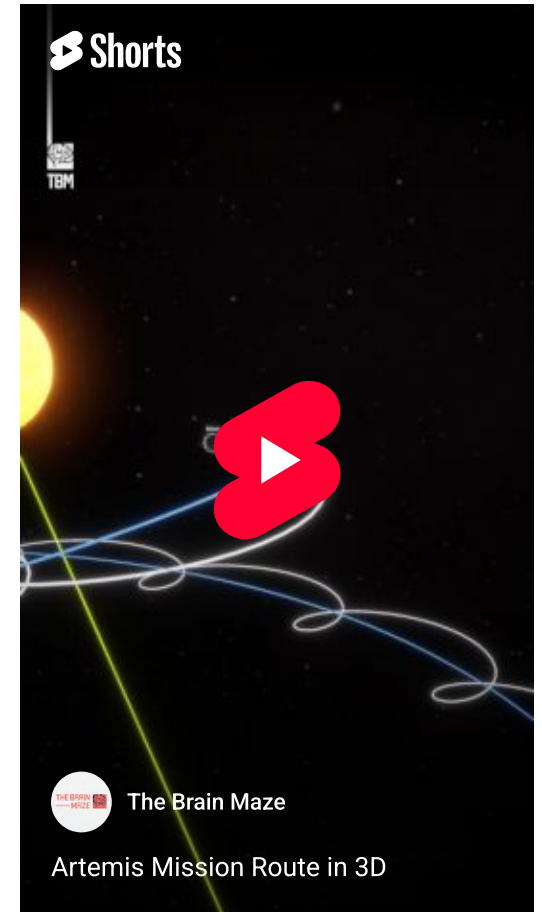
# De la física a la ecuación (i)

El uso de **ecuaciones diferenciales** en la ingeniería es fundamental.

- Gobiernan el **comportamiento de los sistemas físicos**, como circuitos eléctricos, sistemas mecánicos y sistemas de control.
- Permiten **predecir** la evolución de sistemas **a lo largo del tiempo**, lo que es crucial para el diseño y análisis de sistemas.

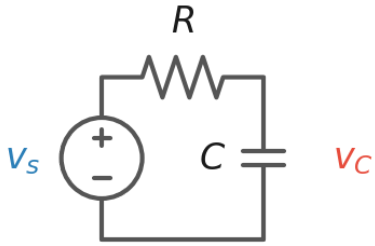
Pongamos de ejemplo la misión espacial **Artemis**:

- ¿Cómo calculamos la **trayectoria** de la nave espacial?
- ¿Cómo decidimos cuándo encender los **motores** y con qué **intensidad**?
- Necesitamos una **ecuación diferencial** que relacione su posición (**salida**) con la fuerza de los motores (**entrada**).



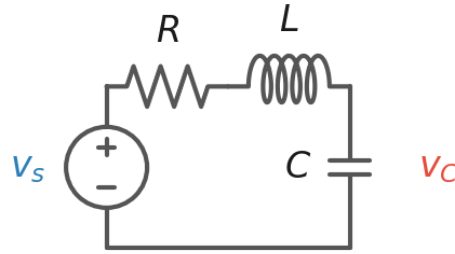
# De la física a la ecuación (ii)

Las leyes de cada dominio dan directamente la ecuación del sistema:



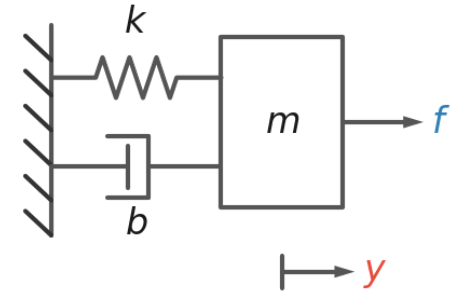
**RC** (primer orden)

$$RC \dot{v}_C + v_C = v_s$$



**RLC serie** (segundo orden)

$$LC \ddot{v}_C + RC \dot{v}_C + v_C = v_s$$



**Masa-muelle** (segundo orden)

$$m \ddot{y} + b \dot{y} + k y = f$$

- Las EDOs son el resultado de aplicar **leyes físicas** (Kirchhoff, Newton, etc.) a un sistema
- **Fíjate que** todas son ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes
- El término de la derecha es la **entrada** que “fuerza” al sistema (tensión, fuerza, etc.)

# Resolución de ecuaciones diferenciales (i)

Una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes se define mediante su ecuación y las condiciones iniciales:

$$\begin{cases} a_n \frac{d^n y}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = \varphi(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \\ y''(t_0) = y_2 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

- El **orden** de la ecuación es  $n$ , se corresponde con la derivada más alta
- Se necesitan  $n$  **condiciones iniciales** para determinar la solución única
- Como son **lineales** y además tienen **coeficientes constantes**, eso implica que los sistemas modelados **son LTI**

- Su solución se expresa como la suma de dos partes:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

- La **solución homogénea**  $y_h(t)$  representa la respuesta del sistema en **ausencia de entradas externas**
  - Su estructura depende de la **ecuación característica**
  - Sus constantes **dependen de las condiciones iniciales**
- La **solución particular**  $y_p(t)$  representa la respuesta del sistema **para una entrada externa dada**
  - Su estructura depende de la **estructura de la entrada**
  - Es **independiente de las condiciones iniciales**
- En sistemas estables:
  - El término  $y_h(t)$  se **desvanece** con el tiempo (**transitorio**)
  - El término  $y_p(t)$  **sobrevive** con el tiempo (**permanente**)

# Resolución de ecuaciones diferenciales (ii)

- **Primer paso:** obtener la solución homogénea,  $y_h(t)$ , que satisface la ecuación sin entradas externas:

$$a_n \frac{d^n y_h}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dy_h}{dt} + a_0 y_h = 0$$

## Resolución de la homogénea

1. Calcular el **polinomio característico**:  
 $a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0 = 0$ .
2. Encontrar sus raíces  $s_1, s_2, \dots, s_n$ .
3. Construir la solución  $y_h(t)$  según las raíces:

| Tipo de raíz                                    | Forma del modo                                           |
|-------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| Real simple                                     | $K e^{s_k t}$                                            |
| Real multiplicidad $m$                          | $(K_1 + K_2 t + \dots + K_m t^{m-1}) e^{s_k t}$          |
| Compleja conjugada ( $s = \sigma \pm j\omega$ ) | $e^{\sigma t} (K_1 \cos(\omega t) + K_2 \sin(\omega t))$ |

- **Segundo paso:** obtener la solución particular,  $y_p(t)$ , que satisface la ecuación con la entrada externa:

$$a_n \frac{d^n y_p}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dy_p}{dt} + a_0 y_p = \varphi(t)$$

## Resolución de la particular

1. Construir la solución  $y_p(t)$  según el **tipo de entrada**:

| Entrada $\varphi(t)$ | Forma de $y_p(t)$                         |
|----------------------|-------------------------------------------|
| Constante            | $C$                                       |
| Lineal               | $C_1 t + C_2$                             |
| Exponencial          | $C e^{at}$                                |
| Seno/Coseno          | $C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$ |

2. Sustituir  $y_p(t)$  en la ecuación diferencial y calcular las constantes  $C_j$

- **Tercer paso:** aplicar las condiciones iniciales para obtener la solución final

## Resolución completa

1. Construir la solución final  
 $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$
2. Aplicar las **condiciones iniciales** para determinar las constantes  $K_j$ .

# Mapa de raíces: el plano s

Raíces

○ Reales simples ○ Real doble ● Complejas conjugadas

$\sigma = \text{Re}\{s\}$

-0.40



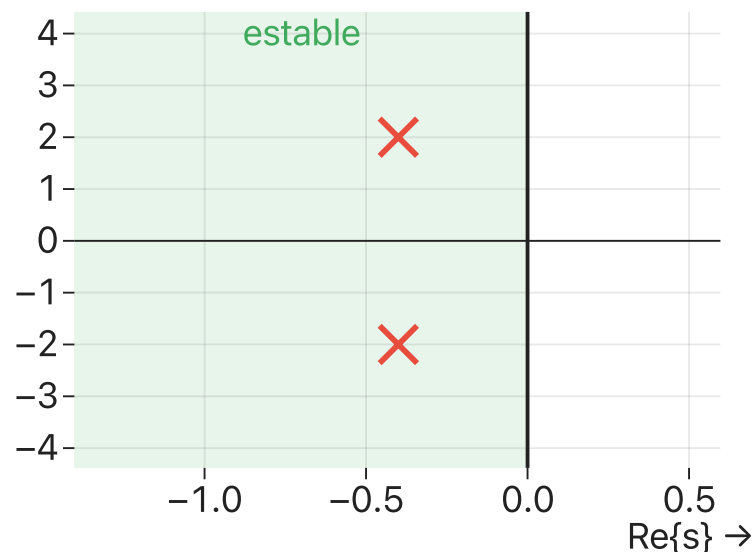
$\omega_d = \text{Im}\{s\}$

2.00

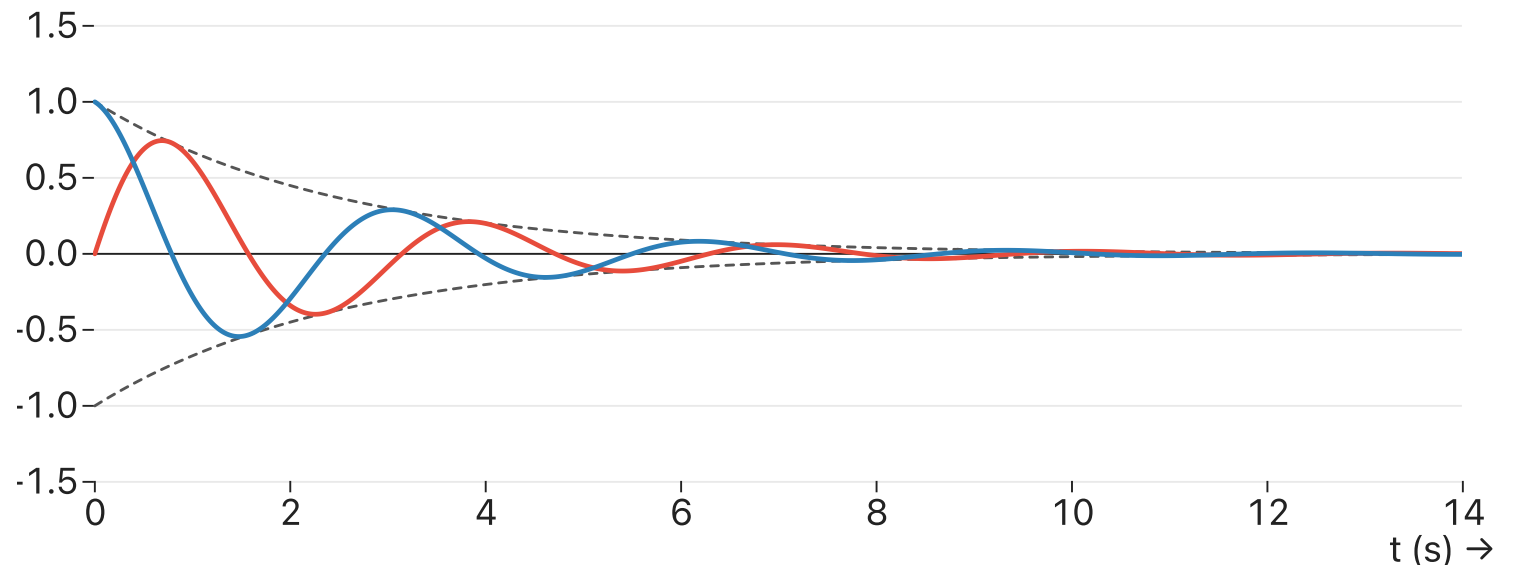


$$y_h(t) = K_1 e^{\sigma t} \cos(\omega_d t) + K_2 e^{\sigma t} \sin(\omega_d t)$$

↑  $\text{Im}\{s\}$



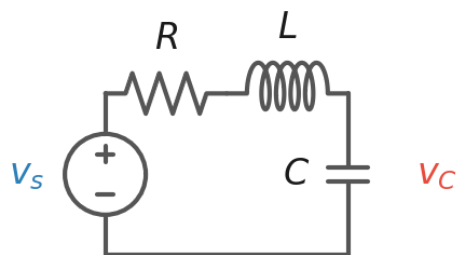
↑ modos



# Ejemplo circuito RLC: obtención de la EDO

## Ejemplo 4.1: Circuito RLC serie

Un circuito RLC serie con  $R = 3 \Omega$ ,  $L = 1 \text{ H}$  y  $C = 0,5 \text{ F}$ . La entrada es la tensión de la fuente  $v_s(t)$ , y la salida la tensión en bornes del condensador,  $v_C(t)$ . El circuito está **en reposo**, es decir, el condensador está descargado y no circula corriente.



Calcula la tensión en el condensador  $v_C(t)$  si se enciende una fuente de alimentación en  $t = 0$  configurada como:

- a) Tensión continua  $v_s(t) = 10 u(t) \text{ V}$
- b) Tensión  $v_s(t) = 10 \cos(t)u(t) \text{ V}$

**1) Ley de tensiones de Kirchhoff:** la fuente se reparte entre los tres elementos.

$$v_s(t) = v_R(t) + v_L(t) + v_C(t)$$

**2) Ley de cada elemento,** con la misma corriente  $i(t)$  en los tres (están en serie):

$$v_R(t) = R i(t) \quad v_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad i(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt}$$

**3) Se elimina la corriente,** sustituyendo  $i(t)$  en  $v_R(t)$  y  $v_L(t)$ :

$$v_R(t) = RC \frac{dv_C(t)}{dt} \quad v_L(t) = LC \frac{d^2 v_C(t)}{dt^2}$$

**4) Se llevan a la ley de Kirchhoff,** y queda una ecuación solo en  $v_C(t)$  y  $v_s(t)$ :

$$LC \frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + RC \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) = v_s(t)$$

**5) Con los valores del circuito,** y con  $\varphi(t) = v_s(t)$  e  $y(t) = v_C(t)$ :

$$0,5 y'' + 1,5 y' + y = \varphi(t)$$

# Ejemplo circuito RLC: condiciones iniciales

Ya sabemos que la ecuación diferencial es:

$$0,5 y'' + 1,5 y' + y = \varphi(t)$$

**1)** Es una EDO de **segundo orden**, así que **necesitamos dos CCII**:  $y(0)$  e  $y'(0)$ .

**2)** Recuerda, como  $y(t) = v_C(t)$ , eso implica que debemos conocer  $v_c(0)$  y  $v'_c(0)$

**3) El condensador está descargado** y por tanto, directamente:

$$v_C(0) = 0 \implies y(0) = 0$$

**4) No circula corriente**, es decir,  $i(0) = 0$ , pero la corriente del circuito es la misma del condensador, y por tanto, a partir de su ecuación  $i(t) = C v'_C(t)$ , se deduce que:

$$v'_c(0) = y'(0) = \frac{i(0)}{C} = 0$$

• Por tanto, **tenemos que resolver la EDO**:

$$0,5 y'' + 1,5 y' + y = \varphi(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

# Ejemplo circuito RLC: entrada escalón

## Primer paso: solución homogénea

1. Polinomio característico y raíces:

$$0,5 s^2 + 1,5 s + 1 = 0 \implies s_1 = -1, \quad s_2 = -2$$

2. Raíces reales simples, y cada una aporta un modo  $K e^{s_k t}$ :

$$y_h(t) = K_1 e^{-t} + K_2 e^{-2t}$$

## Segundo paso: solución particular

1. La entrada es constante, así que  $y_p(t) = C$ .

2. Sustituir  $y_p$  en la ecuación y calcular  $C$ :

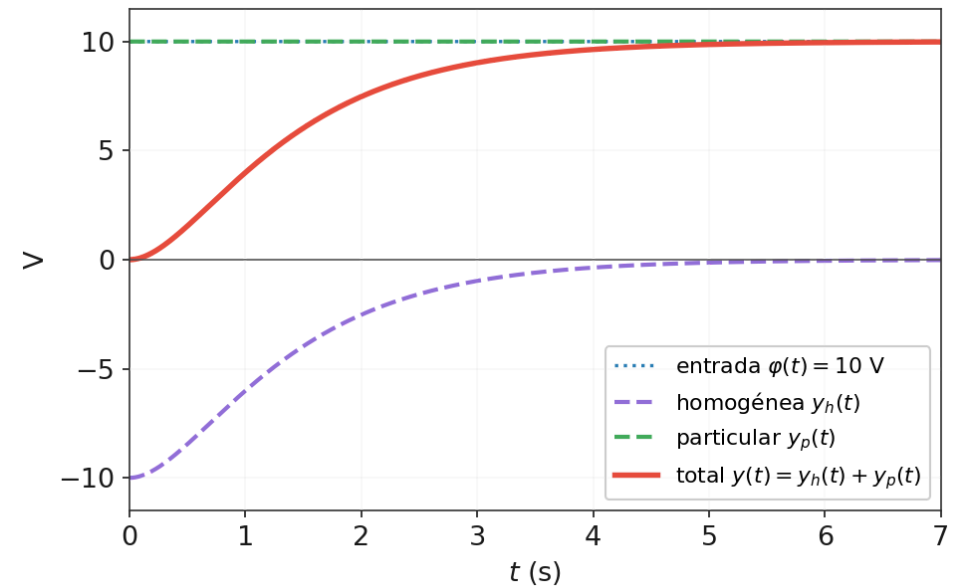
$$0,5 \cdot 0 + 1,5 \cdot 0 + C = 10 \implies y_p(t) = 10$$

## Tercer paso: solución completa

1. Calcular la solución completa:  $y(t) = K_1 e^{-t} + K_2 e^{-2t} + 10$

2. Usar las CCII para obtener  $K_1$  y  $K_2$ :

$$\left. \begin{aligned} y(0) &= K_1 + K_2 + 10 = 0 \\ y'(0) &= -K_1 - 2K_2 = 0 \end{aligned} \right\} \implies K_1 = -20, \quad K_2 = 10$$



$$y(t) = \underbrace{-20 e^{-t} + 10 e^{-2t}}_{y_h(t)} + \underbrace{10}_{y_p(t)} \text{ V}, \quad t \geq 0$$

- La homogénea **se desvanece** (el campo magnético de la bobina se disipa, el condensador se carga y la resistencia disipa energía)
- La particular **sobrevive** (condensador cargado a 10 V)

# Ejemplo circuito RLC: entrada senoidal

## Primer paso: solución homogénea (¡es la misma!)

$$y_h(t) = K_1 e^{-t} + K_2 e^{-2t}$$

## Segundo paso: solución particular

1. La entrada es senoidal, así que  $y_p(t) = C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t)$ .
2. Sustituir  $y_p$  en la ecuación (con sus derivadas  $y_p'$  e  $y_p''$ ) y agrupar cosenos y senos:

$$0.5y_p'' + 1.5y_p' + y_p = x \implies C_1 = 2, C_2 = 6$$

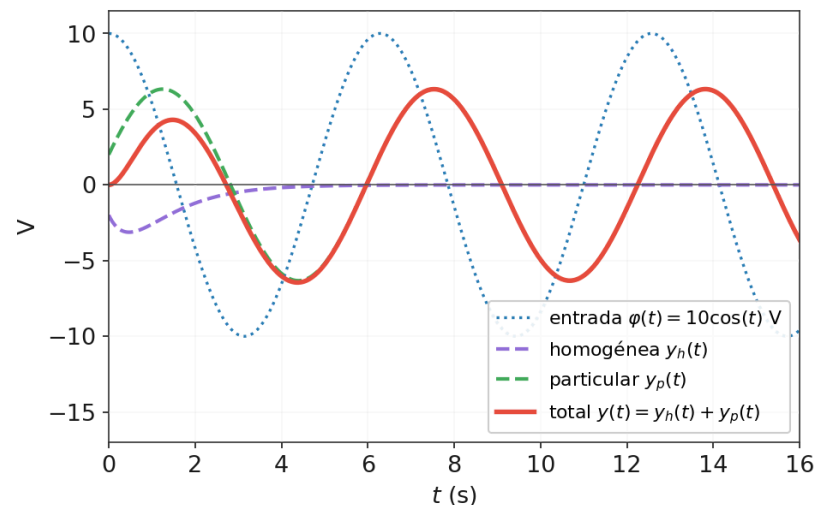
## Tercer paso: solución completa

1. Calcular la solución completa:

$$y(t) = K_1 e^{-t} + K_2 e^{-2t} + 2 \cos(t) + 6 \sin(t)$$

2. Usar las CCII para obtener  $K_1$  y  $K_2$ :

$$\left. \begin{aligned} y(0) &= K_1 + K_2 + 2 = 0 \\ y'(0) &= -K_1 - 2K_2 + 6 = 0 \end{aligned} \right\} \implies K_1 = -10, \quad K_2 = 8$$



$$y(t) = \underbrace{-10e^{-t} + 8e^{-2t}}_{y_h(t)} + \underbrace{2\cos(t) + 6\sin(t)}_{y_p(t)} \text{ V}, \quad t \geq 0$$



### Suma de senos y cosenos

Recuerda que  $a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\omega t - \phi)$  con  $\phi = -\arctan(b/a)$ . Por ejemplo, en este caso, con  $a = 2$  y  $b = 6$ :  
 $y_p(t) = 2 \cos(t) + 6 \sin(t) = 2\sqrt{10} \cos(t - \arctan 3)$ .

# Ejemplo circuito RLC: fasores

La **respuesta permanente** del circuito RLC ya sabes calcularla mediante **fasores**:

- La entrada  $\varphi(t) = 10 \cos(t)$  tiene fasor  $\hat{V}_s = 10 \text{ V}$
- Aplicando el **divisor de tensión** tenemos que:

$$\begin{aligned}\hat{V}_C(j\omega) &= \frac{Z_C}{Z_R + Z_L + Z_C} \hat{V}_s(j\omega) = \frac{1/(j\omega C)}{R + j\omega L + 1/(j\omega C)} \hat{V}_s(j\omega) \\ &= \frac{1}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC} \hat{V}_s(j\omega) = \frac{1}{1 - 0,5\omega^2 + j1,5\omega} \hat{V}_s(j\omega)\end{aligned}$$

- Particularizando para la **frecuencia** de la fuente,  $\omega = 1 \text{ rad/s}$ , y con  $\hat{V}_s = 10 \text{ V}$ :

$$\hat{V}_C = \frac{10}{0,5 + j1,5} = \frac{10(0,5 - j1,5)}{0,5^2 + 1,5^2} = 2 - j6 \quad \begin{cases} |\hat{V}_C| = 2\sqrt{10} \text{ V} \\ \angle \hat{V}_C = -\arctan(3) \end{cases}$$

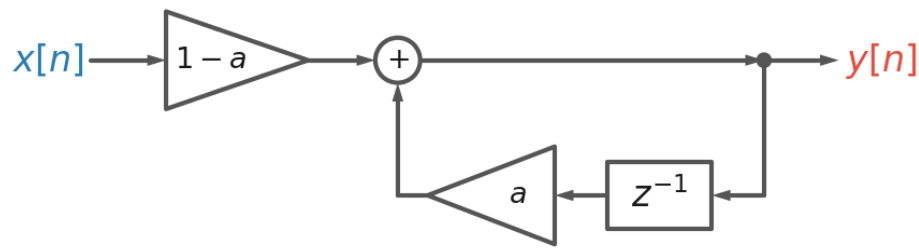
- Así que en el tiempo  $v_C(t) = 2\sqrt{10} \cos(t - \arctan(3)) \text{ V}$ , que coincide con la **respuesta particular** obtenida anteriormente

# Ecuaciones en diferencias

# Filtros digitales

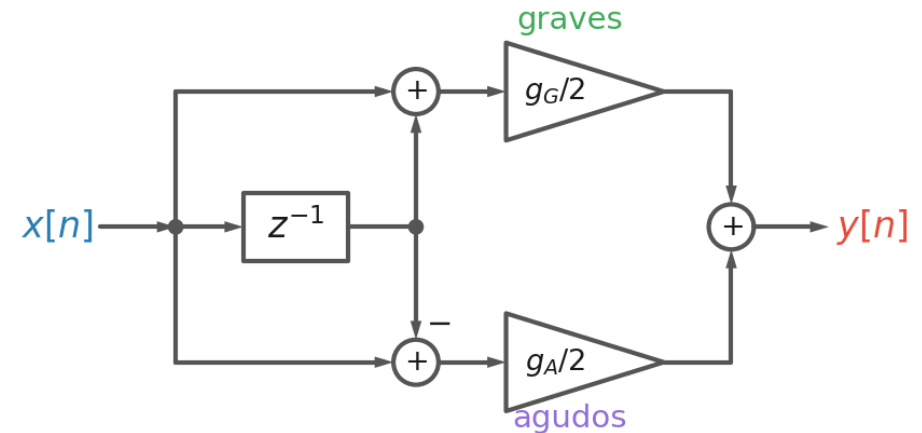
Una de las principales aplicaciones de las ecuaciones en diferencias es el **procesamiento digital de señales**

- Es habitual usar el **operador retardo**  $z^{-1}$  (relacionado con la **transformada Z**)



**Filtro paso bajo (IIR)**

$$y[n] = (1 - a) x[n] + a y[n - 1]$$



**Ecualizador de graves y agudos (FIR)**

$$y[n] = g_G \frac{x[n] + x[n - 1]}{2} + g_A \frac{x[n] - x[n - 1]}{2}$$

# Resolución de ecuaciones en diferencias (i)

Una ecuación en diferencias lineal con coeficientes constantes se define mediante su ecuación y las condiciones iniciales:

$$\begin{cases} a_0 y[n] + a_1 y[n-1] + \dots + a_N y[n-N] = \varphi[n] \\ y[-1] = y_1 \\ y[-2] = y_2 \\ \vdots \\ y[-N] = y_N \end{cases}$$

- El **orden** de la ecuación es  $N$ , se corresponde con el retardo más grande de la salida
- Se necesitan  $N$  **condiciones iniciales** para determinar la solución única
- Como son **lineales** y además tienen **coeficientes constantes**, eso implica que los sistemas modelados **son LTI**

- Su solución se expresa como la suma de dos partes:

$$y[n] = y_h[n] + y_p[n]$$

- La **solución homogénea**  $y_h[n]$  representa la respuesta del sistema en **ausencia de entradas externas**
  - Su estructura depende de la **ecuación característica**
  - Sus constantes **dependen de las condiciones iniciales**
- La **solución particular**  $y_p[n]$  representa la respuesta del sistema **para una entrada externa dada**
  - Su estructura depende de la **estructura de la entrada**
  - Es **independiente de las condiciones iniciales**
- En sistemas estables:
  - El término  $y_h[n]$  se **desvanece** con el tiempo (**transitorio**)
  - El término  $y_p[n]$  **sobrevive** con el tiempo (**permanente**)

# Resolución de ecuaciones en diferencias (ii)

- **Primer paso:** obtener la solución homogénea,  $y_h[n]$ , que satisface la ecuación sin entradas externas:

$$a_0 y_h[n] + a_1 y_h[n-1] + \dots + a_N y_h[n-N] = 0$$

## Resolución de la homogénea

1. Calcular el **polinomio característico**:  
 $a_0 z^N + a_1 z^{N-1} + \dots + a_N = 0$ .
2. Encontrar sus raíces  $z_1, z_2, \dots, z_N$ .
3. Construir la solución  $y_h[n]$  según las raíces:

| Tipo de raíz                                     | Forma del modo                                      |
|--------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| Real simple                                      | $K z_k^n$                                           |
| Real multiplicidad $m$                           | $(K_1 + K_2 n + \dots + K_m n^{m-1}) z_k^n$         |
| Compleja conjugada ( $z = r e^{\pm j\Omega_0}$ ) | $r^n (K_1 \cos(\Omega_0 n) + K_2 \sin(\Omega_0 n))$ |

- **Segundo paso:** obtener la solución particular,  $y_p[n]$ , que satisface la ecuación con la entrada externa:

$$a_0 y_p[n] + a_1 y_p[n-1] + \dots + a_N y_p[n-N] = \varphi[n]$$

## Resolución de la particular

1. Construir la solución  $y_p[n]$  según el **tipo de entrada**:

| Entrada $\varphi[n]$ | Forma de $y_p[n]$                         |
|----------------------|-------------------------------------------|
| Constante            | $C$                                       |
| Lineal               | $C_1 n + C_2$                             |
| Exponencial          | $C a^n$                                   |
| Seno/Coseno          | $C_1 \cos(\Omega n) + C_2 \sin(\Omega n)$ |

2. Sustituir  $y_p[n]$  en la ecuación en diferencias y calcular las constantes  $C_j$

- **Tercer paso:** aplicar las condiciones iniciales para obtener la solución final

## Resolución completa

1. Construir la solución final  
 $y[n] = y_h[n] + y_p[n]$
2. Aplicar las **condiciones iniciales** para determinar las constantes  $K_j$ .

# Mapa de raíces: el plano z

Raíces

○ Reales simples ○ Real doble ● Complejas conjugadas

$r = |z|$

0.85



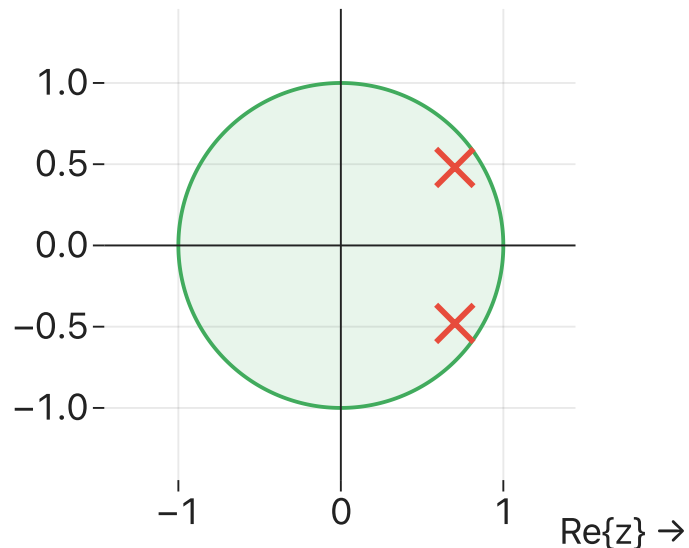
$\Omega = \arg\{z\}$

0.60

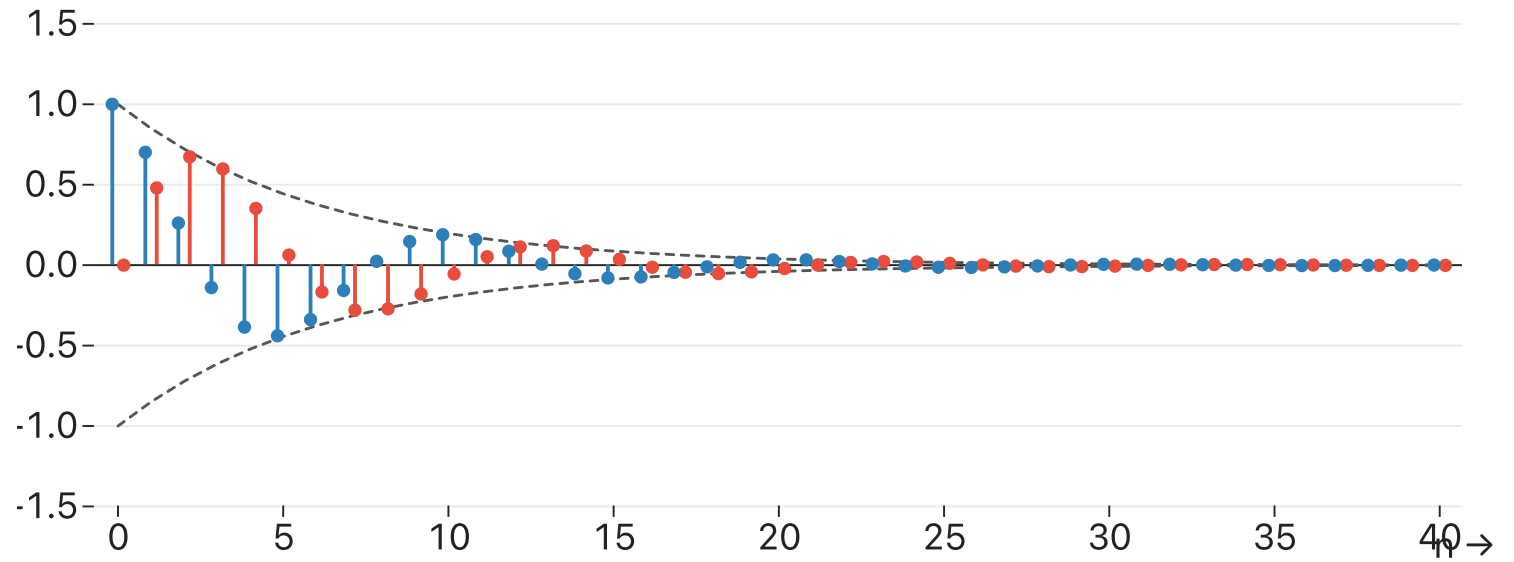


$$y_h[n] = K_1 r^n \cos(\Omega n) + K_2 r^n \sin(\Omega n)$$

↑ Im{z}



↑ modos



# Solución por recurrencia

Algo distintivo de las ecuaciones en diferencias es que se pueden resolver **por recurrencia**. Esto permite ver el patrón de la solución y deducir su fórmula general.

Por ejemplo, podemos calcular la **respuesta impulsional** del filtro paso bajo IIR

$$y[n] = 0,2 x[n] + 0,8 y[n - 1]$$

- La salida ante  $x[n] = \delta[n]$  partiendo del reposo,  $y[-1] = 0$  es:

$$y[0] = 0,2 \cdot 1 + 0,8 \cdot 0 = 0,2$$

$$y[1] = 0,2 \cdot 0 + 0,8 y[0] = 0,8 \cdot 0,2$$

$$y[2] = 0,2 \cdot 0 + 0,8 y[1] = 0,8^2 \cdot 0,2$$

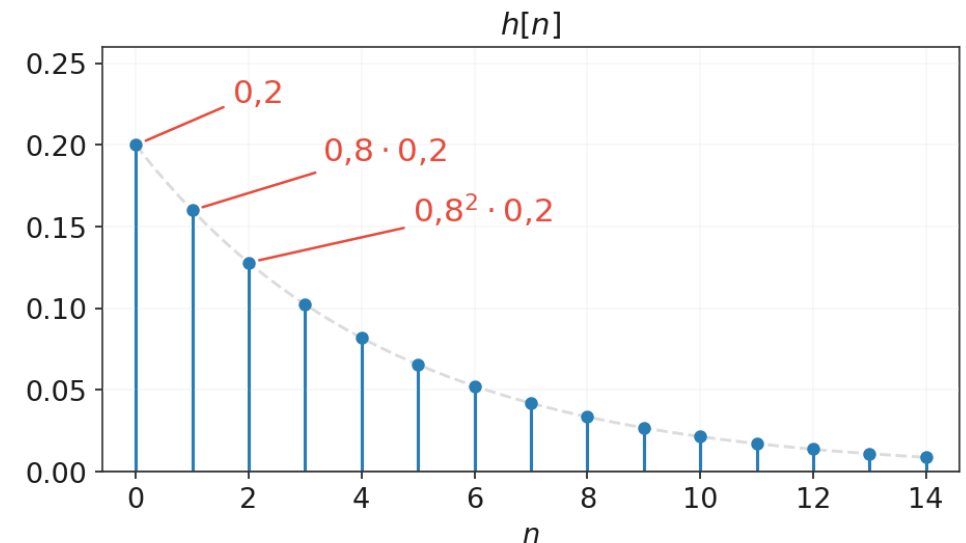
$$y[3] = 0,2 \cdot 0 + 0,8 y[2] = 0,8^3 \cdot 0,2$$

...

$$y[n] = 0,8^n \cdot 0,2$$

- Por tanto:

$$h[n] = 0,2 \cdot 0,8^n u[n]$$



# Ejemplo primer orden

## Ejemplo 4.2: Cuenta de ahorro con interés

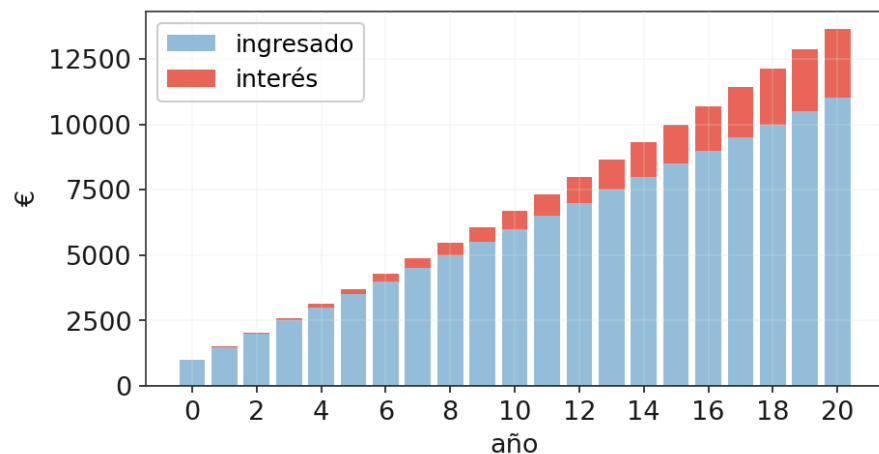
Una cuenta da un 2 % anual. La cuenta se abre con 1000 € y cada año se ingresan 500 € más.

- a) Escribe la ecuación en diferencias que describe la evolución del saldo.
- b) ¿Se puede resolver por recurrencia?
- c) Resuelve la ecuación por el método habitual (homogénea y particular). ¿Cuál es el saldo a los 20 años?

► 💡 Solución a)

► 💡 Solución b)

► 💡 Solución c)



# Ejemplo polos conjugados

## Ejemplo 4.3: Control digital de velocidad de un motor DC

Se tiene un controlador digital de velocidad en un motor DC. La velocidad  $y[n]$  (rpm) se lee mediante un encoder cada 5 ms. El bucle de control diseñado da lugar a la ecuación en diferencias

$$y[n] = y[n-1] - 0,5 y[n-2] + 0,5 x[n-2]$$

donde  $x[n]$  (rpm) es la velocidad deseada. La referencia deseada aparece con un retraso de dos muestras, debido al tiempo de procesamiento de la señal del encoder y del algoritmo de control.

El motor está inicialmente parado,  $y[-1] = y[-2] = 0$ , y en  $n = 0$  se pide una velocidad deseada de 150 rpm. Resuelve la ecuación:

- a)** Calcula la respuesta homogénea.
- b)** Calcula la respuesta particular.
- c)** Calcula la respuesta completa. ¿Se alcanza la velocidad deseada? ¿Cuál es la velocidad a los 50 ms de haber establecido la velocidad deseada?

▶  Solución a)

▶  Solución b)

▶  Solución c)

▶  Evolución de la velocidad

# Continuo y discreto (i)

Tabla comparativa de ambos casos:

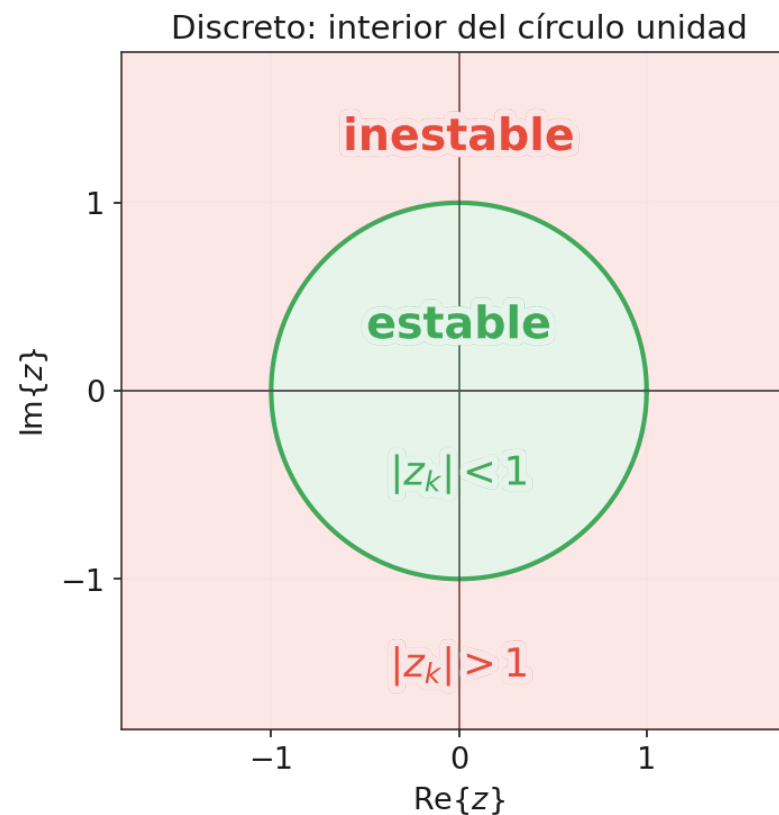
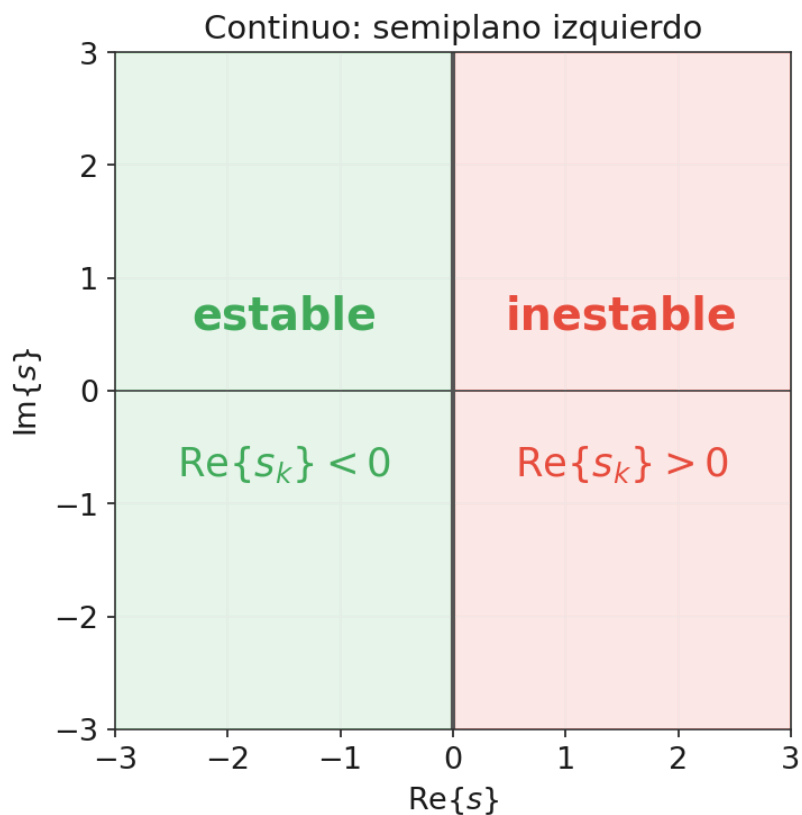
|                         | Continuo               | Discreto               |
|-------------------------|------------------------|------------------------|
| Operación básica        | derivar                | retrasar               |
| Operador (temporal)     | $\frac{dy(t)}{dt}$     | $y[n - 1]$             |
| Operador (transformada) | $s$                    | $z^{-1}$               |
| Ecuación característica | $\sum a_k s^k = 0$     | $\sum a_k z^{N-k} = 0$ |
| Estable si              | $\text{Re}\{s_k\} < 0$ | $ z_k  < 1$            |

## Transformadas

Veremos más adelante que  $s$  es la variable de la **transformada de Laplace** y  $z$  es la variable de la **transformada Z**. Por eso, las transformadas son tan útiles para resolver ecuaciones diferenciales.

# Continuo y discreto (ii)

La condición de estabilidad dibuja zonas diferentes en el plano complejo en cada caso:



# Para terminar

---



Vaya a [wooclap.com](https://wooclap.com)

Ingrese el código de evento en el banner superior

Código de evento

**YYIDBMB**



**Esperando a los participantes...**