Práctica 3: Respuesta en frecuencia de los sistemas discretos.

Resumen. En esta práctica se estudiará el concepto de respuesta en frecuencia de un sistema. Veremos cómo podemos utilizar ésta para determinar la salida en *el estado estacionario* de un sistema dada una cierta entrada. También estudiaremos la relación entre los polos y ceros de la transformada Z y la respuesta en frecuencia de un determinado sistema.

- En este primer apartado estudiaremos la relación que hay entre la posición de los polos y ceros de una transformada Z de un determinado sistema y su respuesta en frecuencia. Para ello consideraremos funciones de transferencia de la forma:

$$H_1(z) = 1 - 2 \cdot r \cdot \cos(w_0) \cdot z^{-1} + r^2 \cdot z^{-2}$$
$$H_2(z) = \frac{1}{H_1(z)}$$

  ¿Qué representa r y w_0 en el dominio de la transformada Z?. Determina la respuesta impulsional y la respuesta en frecuencia para diferentes de r (mayores, cercanos y menores que la unidad) y w_0. ¿Qué efectos tienen estos parámetros sobre la respuesta en frecuencia?.

- Un sistema digital muy empleado como filtro paso-bajo es lo que se conoce como promediador o "filtro peine" (cuando veas su respuesta en frecuencia comprenderás su nombre). La ecuación en diferencias de este filtro es:

$$y(n) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} x(n-k)$$

  Determina la respuesta impulsional y la respuesta en frecuencia del sistema para diferentes N. Calcula los polos y ceros de H(z), ¿qué tienen de especial?, ¿qué ocurre en los ceros de H(z)?.

- Un hecho que normalmente no se tiene muy en cuenta es la respuesta transitoria de un sistema. Cuando se estudia la respuesta en frecuencia de un sistema se supone que no tenemos ese "transitorio"; esto puede llevarnos a cometer errores en nuestro diseño. A modo de ejemplo consideremos la siguiente función de transferencia:

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 - \mu \cdot z^{-1}}$$

  siendo μ un parámetro. Esta función la utilizamos en la anterior práctica para eliminar las variaciones de la línea basal en un electrocardiograma. Determina la salida analíticamente, usando la respuesta en frecuencia, cuando tenemos como entrada la siguiente señal (lógicamente saldrá en función del parámetro μ) :

$$x(n) = \cos(2 \cdot \pi \cdot 0.1 \cdot n)$$

  considera los valores del parámetro próximos a 1 (nunca superiores.....¿por qué?). Observa la forma de onda de salida que obtienes, ¿qué ocurre?, inicialmente la sinusoide de salida tiene la amplitud que le correspondería según la respuesta en frecuencia?.

- Otro punto importante a tener en cuenta al estudiar la respuesta en frecuencia es el hecho de considerar que un sistema modifica *la amplitud y la fase.* Por inercia uno tiende a estudiar solamente el módulo de la frecuencia (que da información sobre el cambio de la amplitud). Esta forma de proceder tiene una razón de "uso". La mayoría de filtros digitales se orientan a aplicaciones de audio donde la fase de la señal no tiene excesiva importancia (nosotros oímos igual una señal y su versión retardada) recayendo en la amplitud la caracterización de las señales de audio. Sin embargo cuando la forma de la señal es importante (por ejemplo en transmisiones de datos binarios usaremos formas de onda cuadradas) el considerar la fase es fundamental. A modo de ejemplo consideremos la siguiente entrada:

$$x(n) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{10} \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot k \cdot n}{256}\right)$$

Si nos fijamos detenidamente en la expresión anterior vemos que x(n) es un conjunto de sinusoides cuya frecuencia digital oscila entre 0 (nivel de continua correspondiente al factor ½) y 10/256. Representa el espectro de la señal (usando ***abs*** y ***fft***). Ahora vamos a filtrar esta señal con el siguiente filtro:

$$\mathrm{H(z)} = -\mathrm{a} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{\mathrm{a}}\right) \mathrm{z}^{-1}}{1 - \mathrm{a} \cdot \mathrm{z}^{-1}}$$

considera a=0.9. Determina su respuesta en frecuencia (usando freqz). Filtra la señal anterior y dibuja en la misma gráfica la salida del filtro y la entrada, ¿qué ocurre?.

- A continuación se implementará una aplicación práctica en Ingeniería Biomédica, la eliminación del ruido de red en un electrocardiograma (ECG). Para ello utiliza el fichero **ecg.mat** que contiene un ECG contaminado por ruido de 50 Hz. Diseña un sistema digital para eliminar dicha interferencia mediante un análisis de polos/zeros de la Transformada Z (el ECG se ha adquirido con una frecuencia de muestreo de ECG de 1090 Hz). Implementa diferentes alternativas para eliminar este ruido.

- Si nos centramos en el terreno del audio digital dos de los efectos más extendidos son el eco y la reverberación. Los dos efectos se basan en sumar a la señal actual diferentes versiones retardadas y atenuadas de dicha señal. Así un primer efecto de eco muy sencillo será el definido por la siguiente ecuación en diferencias $y(n) = x(n) + a \cdot x(n - D)$ donde a es un factor menor que la unidad y D es el retardo considerado. Determina:
    1. Respuesta impulsional del sistema (considera diferentes valores de a y D).
    2. Diagrama de polos y ceros.
    3. Respuesta en frecuencia.

- Si se complica un poco más el efecto del eco podemos suponer infinitas réplicas cuya amplitud disminuye de forma geométrica esto es $y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cdot x(n - k \cdot D)$. Determina los apartados anteriores con este sistema.

- Con los efectos de reverberación se intentan modelar el efecto de diferentes ambientes. Un primer efecto de este estilo vendría definido por la siguiente ecuación en diferencias $y(n) = x(n-D) + \alpha \cdot y(n-D)$. Determina lo mismo que en los apartados anteriores. Un problema de este primer reverberador es que presenta diferentes ganancias según la frecuencia considerada. Una mejora a este sistema viene dado por la siguiente ecuación en diferencias $y(n) = \alpha \cdot x(n) + x(n-D) - \alpha \cdot y(n-D)$. Determina la respuesta impulsional, diagrama de polos y ceros y respuesta en frecuencia de este sistema; ¿qué presenta en especial este sistema en la respuesta en frecuencia en magnitud?.

- Usando puntos anteriores vamos a desarrollar una aplicación práctica en telefonía: la generación/detección de tonos, aplicación que también vimos en la anterior práctica. Fijémonos en la siguiente tabla:

FRECUENCIAS	1209 Hz	1336 Hz	1477 Hz
697 Hz	**1**	**2**	**3**
770 Hz	**4**	**5**	**6**
852 Hz	**7**	**8**	**9**
941 Hz	*****	**0**	**#**

Vemos que cada número o símbolo queda definido por la suma de dos sinusoides (la frecuencia de muestreo del sistema la tomaremos igual a 8 KHz). En primer lugar definiremos los tonos del teléfono; estos tendrán una duración de 0.5 segundos y entre tono y tono habrá un silencio de 0.1 segundos. Una vez que los tengamos generados habrá que detectarlos; para ello usaremos (por sencillez) una serie de filtros peine en paralelo. Diseña el banco de filtros necesarios para determinar un número.