TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER (II).

1. Usando DFT y DFT inversas solamente, calcula la convolución circular de las siguiente secuencias $x(n)=\{\,1(n=0),0,-1,0,0,...\}\Leftrightarrow y(n)=\{\,0(n=0),1,0,-1,0,0.....\}$. Para comprobar el resultado determina dicha convolución usando el cálculo directo.

2. Sabiendo que la DFT de orden N de una secuencia x(n) es X(k) determina las secuencias que dan lugar a las siguientes DFT (también de orden N):
   a) Y(k)=Real(X(k)).
   b) Y(k)=Imaginaria(X(k)).

   Solución: a) $y(n)=0.5\cdot[x(n)+x(N-n)]$; b) $y(n)=-0.5\cdot j\cdot[x(n)-x(N-n)]$

3. Se tiene la señal x(n) definida como $x(n)=\begin{cases}-1 & si \quad |n|<N/2\\ 1 & si \quad N/2\le|n|\le N-1\end{cases}$ 0 en otro caso. Comprueba:
   a) Los términos pares de su DFT de orden N son 0.
   b) El valor mínimo de |X(k)| se produce para k=N/2 y es igual a 2.

4. Determina la relación existente entre las DFT de orden N de las señales x(n) e y(n) y la DFT de orden 2N de $z(n)=\{x(0),y(0),x(1),y(1),.......x(N-1),y(N-1)\}$.

   Solución: $Z(k)=X(k)+e^{\frac{j\cdot\pi\cdot k}{N}}\cdot Y(k)$

5. Dada la secuencia $x(n)=\{\,1(n=0),1,1,1,0,0.....\}$;
   a) Determina la $X(e^{jw})$; a partir de dicha expresión determina $X(k)=X(e^{jw})\big|_{w=\frac{2\cdot\pi\cdot k}{N}}$ con k=0,1,2,3 y N=4.
   b) Calcula la DFT de orden 4 de x(n); ¿Qué tienen en común a) y b).
   c) Determina $Z(k)=X(e^{jw})\big|_{w=\frac{2\cdot\pi\cdot k}{N}}$ con N=2 y k=0,1. A partir de Z(k) determina la secuencia z(n) aplicando DFT inversas. Intenta relacionar z(n) con x(n).

   Solución:a) $X(e^{jw})=e^{-1.5\cdot j\cdot w}\cdot\dfrac{sen(2\cdot w)}{sen(0.5\cdot w)}$
   b) X(0)=4; X(1)=X(2)=X(3)=0. Son iguales.
   c) Z(0)=4; Z(1)=0; z(0)=z(1)=2; la relación se debe al solape temporal
   $$z(n)=\sum_{s=-\infty}^{\infty}x(n+s\cdot 2)$$

6. Dada una secuencia finita x(n) que es cero para n <0 y n>N-1 y cuya DFT de orden N es X(k) determina la relación que existe entre las secuencias y(n) y z(n) con x(n) conociendo que las DFT de orden 2N de estas dos señales son:
   a) $Y(k)=\{\,X(0),0,X(1),0,...X(N-1),0\}$.
   b) $Z(k)=\{\,X(0),a,X(1),a,....,X(N-1),a\}$

Solución:a) $y(n)=\frac{1}{2}\cdot x(n)$; pensad que $y(n+N)=\frac{1}{2}\cdot x(n+N)=\frac{1}{2}\cdot x(n)$

b) $y(n)=\frac{1}{2}\cdot x(n)+\frac{a\cdot\delta(n)}{2}$ (x(n) es periódica con periodo N).

7. Dadas dos secuencias finitas x(n) e y(n) que son cero para n <0 y n>N-1 y cuyas DFTs de orden N son X(k) e Y(k) demuestra que la secuencia producto z(n)=x(n)y(n) tiene como DFT de orden N la convolución circular de X(k) e Y(k) dividida por el factor N.

8. Determina las señales discretas temporales que dan lugar a las siguientes DFT de orden 4:
   a) $X(k)=e^{0.5\cdot j\cdot\pi\cdot k\cdot}$; $k=0,1,2,3$.
   b) $X(k)=0.5\cdot\left(1+(-1)^{k}\right)$; $k=0,1,2,3$

   Solución:a) $x(n)=\delta(n-3)$; b) $x(n)=0.25\cdot\left(1+(-1)^{n}\right)$; $n=0,1,2,3$;

9. Determina la convolución *lineal* de las secuencias x(n) e y(n) usando *solamente* DFT y DFDT inversas siendo $x(n)=\{1(n=0),-1\}$; $y(n)=\{1(n=0),0,-1\}$. Comprueba el resultado realizando el cálculo directamente.

10. Determina la DFT de orden N de la señal discreta $x(n)=sen(w_0\cdot n)\, 0\le n\le N\text{-}1$ en dos situaciones: a) $w_0=\frac{2\cdot\pi\cdot k_0}{N}$ con k_0 entero. b) $w_0\neq\frac{2\cdot\pi\cdot k_0}{N}$

    Solución:a) $X(k)=\begin{cases}N;\ k=k_0 y\ k=N-k_0\\ 0\ en\ otro\ caso.\end{cases}$;

    b) $X(k)=e^{\frac{-j\cdot2\cdot\pi\cdot\cdot k}{N}}\cdot\frac{sen(w_0\cdot(N-1))}{1+e^{\frac{-j\cdot4\cdot\pi\cdot\cdot k}{N}}-2\cdot e^{\frac{-j\cdot2\cdot\pi\cdot\cdot k}{N}}\cdot\cos(w_0)}$

11. Determina la DFT de orden N de la señal enventanada x_w(n)=x(n)·w(n) usando la ventana de Hamming, $w(n)=\frac{1}{2}\cdot\left[1+\cos\left(\frac{2\cdot\pi}{N}\cdot(n-0.5\cdot N)\right)\right]0\le n\le N\text{-}1$, en función de la DFT de orden N de la señal x(n).

    Solución:a) $X\_W(k)=0.5\cdot X(k)-0.25\cdot X(k-1)-0.25\cdot X(k+1)$;

12. Dada la secuencia x(n) de longitud N que cumple $x(n)=-x\left(n+\frac{N}{2}\right)$ con n=0,1,2...N/2-1, determina los coeficientes pares de su DFT de orden N.

    Solución:a) X(2k)=0.