TEMA 1

INTRODUCCIÓN AL PROCESADO DIGITAL DE SEÑALES.

Conversión A/D, D/A

Objetivos del tema.

Conocer las ventajas que nos ofrece PDS.
Saber cuando es más conveniente usar estos procedimientos digitales.
Saber qué conlleva el paso "mundo continuo-mundo digital" e inverso.
Conocer el Teorema de Muestreo y sus consecuencias.

Definición y algunas aplicaciones.

Por procesado digital de señales se entienden todas aquellas técnicas orientadas al tratamiento de secuencias discretas.

Voz Vocoders. Reconocedores de usuario. Rec. de voz (conversores texto)	Video Compresión. Estimación de movimientos. Caracterización (sist. expertos)	Internet Compresión señales. Codificación/Decod.
Imagen Filtrado. Reconocedores (hyperspectral). Cmpresión.	Medicina Señales unidimensionales (ECG). Imágenes (mamografía). Sistemas expertos.	Sensores Radar/Sonar. TAC. Optimización de procesos
Audio Efectos de audio. Búsqueda canciones "tarareo". MP3.	Comunicaciones TODO, SALVO LA TRANSMISION!!!!	y mucho más......

Qué nos ofrece el procesado digital de señales

Facilidad de implementación de sistemas
(amplificador analógico-amplificador digital)

Inmunidad a problemas físicos de los componentes
(derivas térmicas y valores “exactos”)

Facilidad de cambio de los sistemas.
(cambio en las especificaciones de un filtro)

Mayor facilidad y precisión en el almacenamiento y recuperación de las señales.

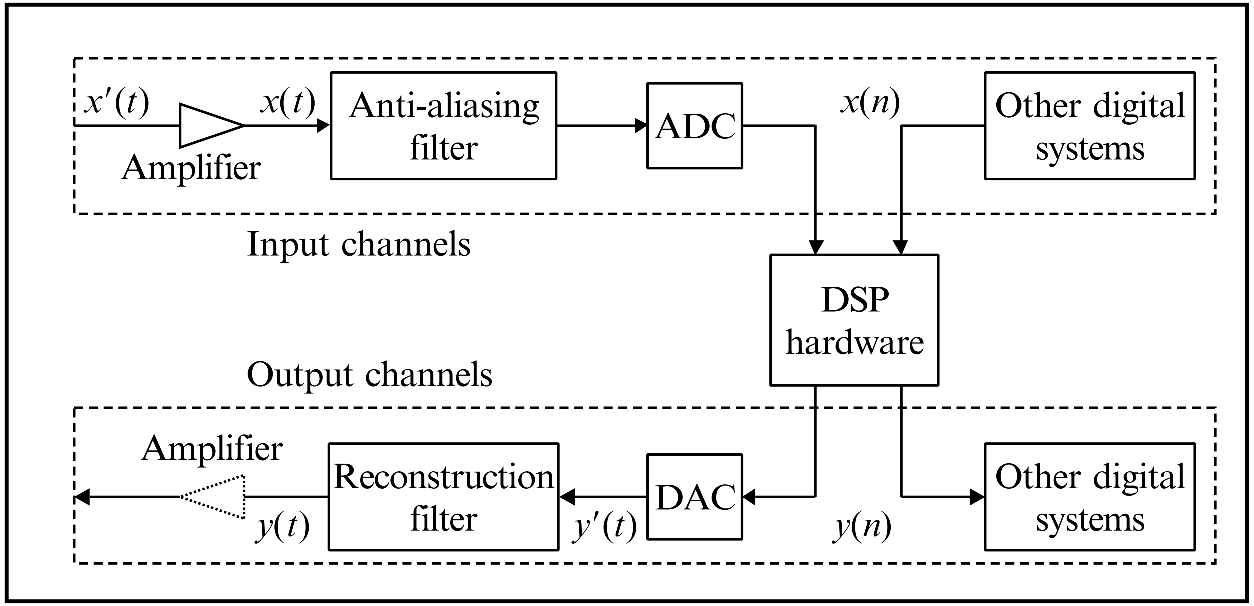
Única forma de realizar algoritmos de procesado
(algoritmos MPEG, MP3, vocoders, etc)

Pero tenemos problemas.........

El Teorema de muestreo es una losa......problemas para grandes frecuencias de muestreo (vídeo) que se traduce en problemas de diseño hardware.....problemas en los convertidores A/D, problemas de ruido........

Al realizar la conversión A/D y D/A aparecen errores y se tiene una pérdida de parte de información de la señal continúa original

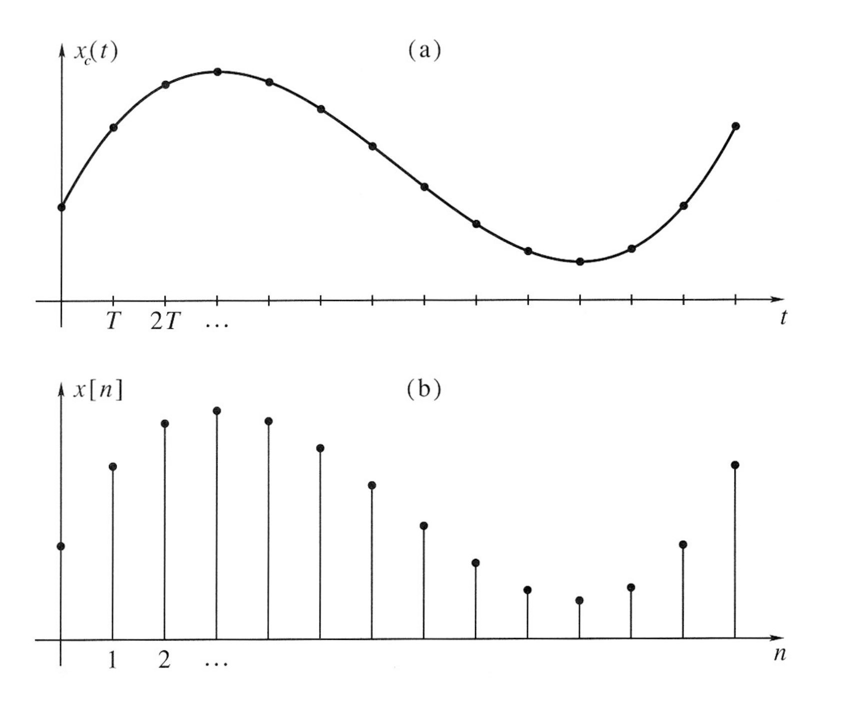
Esquema general de un sistema de PDS.

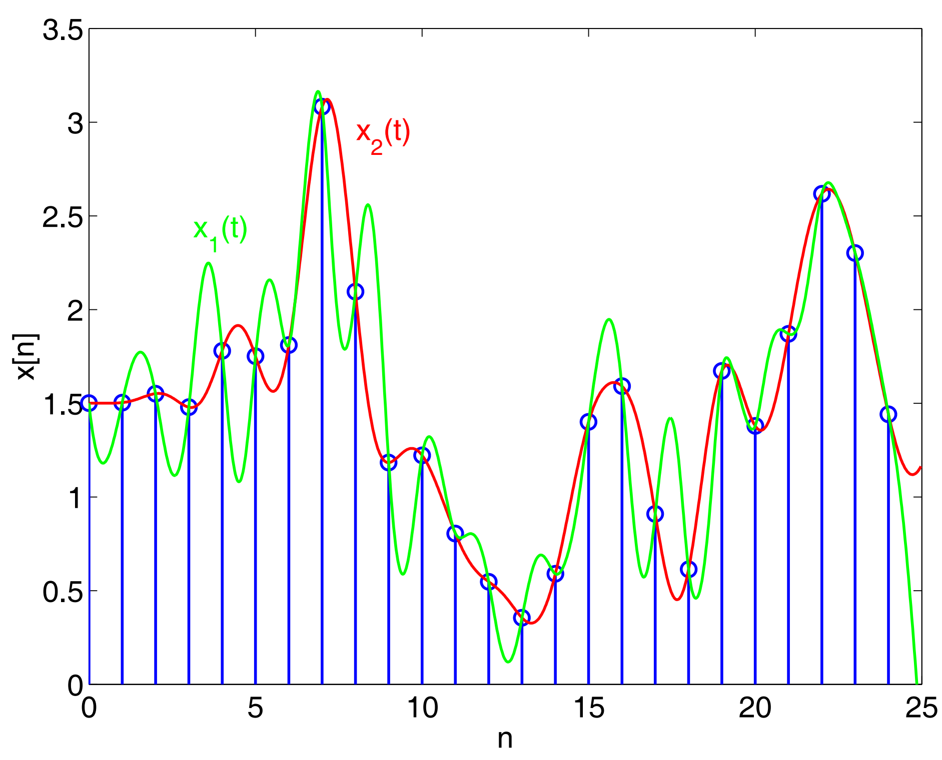


Importante: las aplicaciones, en general, no tienen todas las partes del esquema anterior; según la aplicación se puede tener todo o parte del esquema

CONVERSIÓN A/D. MUESTREO.

Proceso por el cual se obtienen una serie de muestras a partir de una señal continua. El tiempo de adquisición entre muestras se conoce como periodo de muestreo (su inversa es la frecuencia de muestreo); en la mayor parte de las aplicaciones este tiempo es constante.





Tenemos muestras discretas de una señal continua....podemos tener problemas de "ambigüedad" a la hora de determinar qué señal continua dio lugar a la señal discreta que se obtiene del muestreo

Conversión Analógico-Digital. Muestreo

Teorema De Muestreo De Nyquist. Si la frecuencia más alta contenida en una señal analógica $x_a(t)$ es $F_{max} = B$ y la señal se muestrea a una velocidad $F_s > 2 * F_{max} \equiv 2B$, entonces $x_a(t)$ se puede recuperar totalmente a partir de sus muestras mediante la siguiente función de interpolación:

$$g(t) = \frac{sin(2\pi Bt)}{2\pi Bt}.$$

Frecuencia de Nyquist
FN=2B

Así, $x_a(t)$ se puede expresar como:

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a\left(\frac{n}{F_s}\right) g\left(t - \frac{n}{F_s}\right)$$

donde $x_a(n/F_s) = x_a(nT) \equiv x(n)$ son las muestras de $x_a(t)$.

Caso límite: Cuando la señal se muestrea a la frecuencia (o tasa) mínima $F_s = 2B$, la fórmula de reconstrucción es:

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a\left(\frac{n}{2B}\right) \frac{sin(2\pi B(t - n/2B))}{2\pi B(t - n/2B)}$$

MUESTREO. UN EJEMPLO SENCILLO

$$y(t) = A \cdot \cos(w \cdot t)$$

$$y(n \cdot T) = A \cdot \cos\left[w \cdot (n \cdot T)\right] \Leftrightarrow y(n) = A \cdot \cos\left(\frac{w \cdot n}{f_m}\right)$$

$$y(n) = A \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{f_s \cdot n}{f_m}\right)$$

$$y(n) = A \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{f_s \cdot n}{f_m}\right) = A \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{f_s \cdot n}{f_m} \pm 2 \cdot k \cdot \pi\right)$$

$$y(n) = A \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{f_s \cdot n}{f_m} \pm \frac{2 \cdot k \cdot n \cdot f_m \cdot \pi}{f_m}\right)$$

$$y(n) = A \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{(f_s \pm k \cdot f_m) \cdot n}{f_m}\right)$$

A nivel digital las frecuencias f y f±k·f_m son indistinguibles

$$y(n) = A \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{f_s \cdot n}{f_m}\right)$$

$$y(n) = A \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{f_s}{f_m}\right) \cdot n\right)$$

$$F_{digital} = \frac{f_s}{f_m} \Leftrightarrow \Omega = 2 \cdot \pi \cdot F_{digital}$$

$$y(n) = A \cdot \cos(\Omega \cdot n)$$

$$y_1(n) = A \cdot \cos(\Omega \cdot n)$$

$$y_2(n) = A \cdot \cos((\Omega + 2 \cdot \pi) \cdot n)$$

$$y_1(n) = y_2(n)$$

Las frecuencias digitales no pueden crecer sin límite!!!

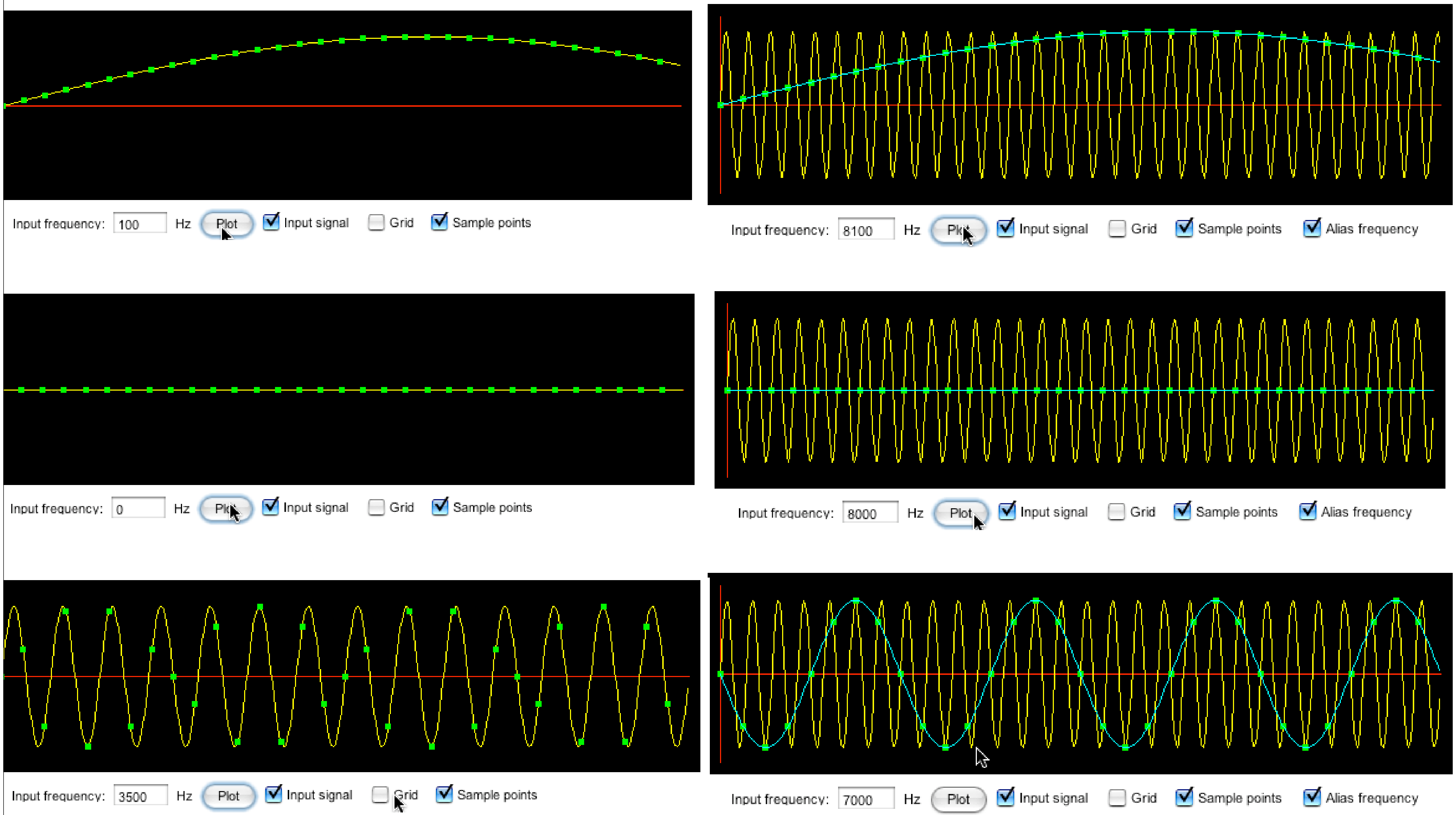
$$y_1(n) = A \cdot \cos(\Omega \cdot n)$$

$$y_2(n) = A \cdot \cos((2 \cdot \pi - \Omega) \cdot n) = A \cdot \cos(-(\Omega) \cdot n)$$

$$y_1(n) = y_2(n)$$

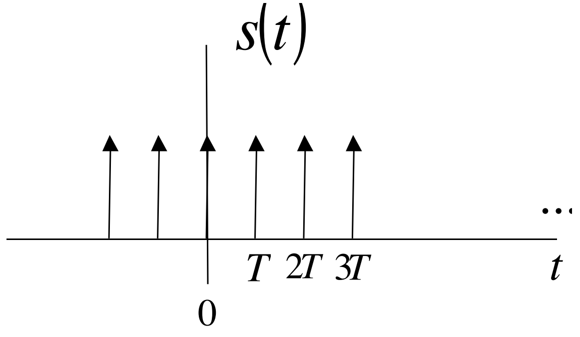
$0<\Omega<\pi \Leftrightarrow 0<F_{digital}<1/2$

MUESTREO. UN EJEMPLO SENCILLO



$$\boxed{F_{muestreo}=8000\text{ Hz.}}$$

MUESTREO. OTRA DEDUCCIÓN MÁS FORMAL.

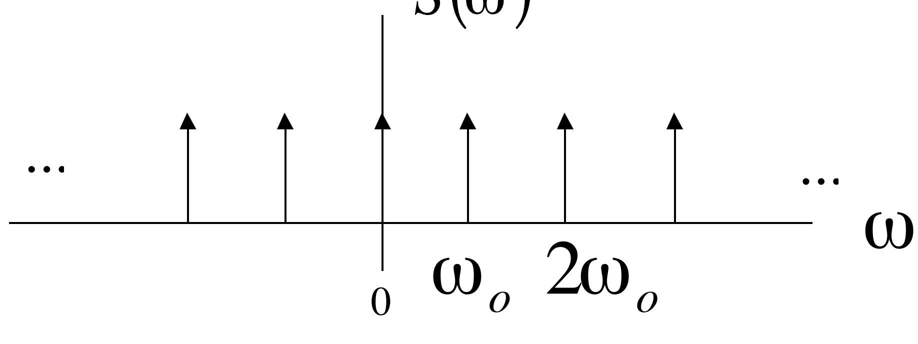


$$s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$$

$$s(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}S_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$S_k=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\delta(t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt=\frac{1}{T}$$

$$\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{jk\omega_0 t}\leftrightarrow \omega_0\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-k\omega_0\right)$$



MUESTREO.

$$x_s(t) = x(t)s(t) \quad \text{where} \quad s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

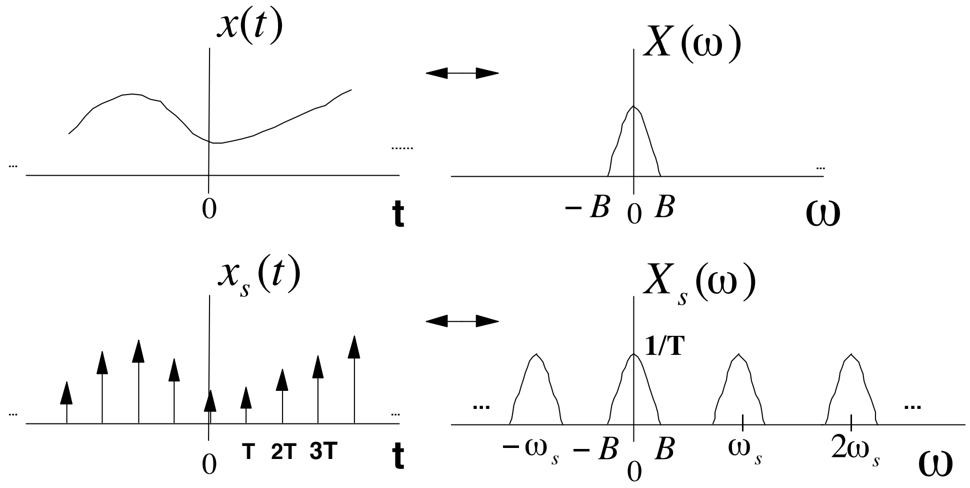
$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT)$$

and

$$X_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * S(\omega)$$

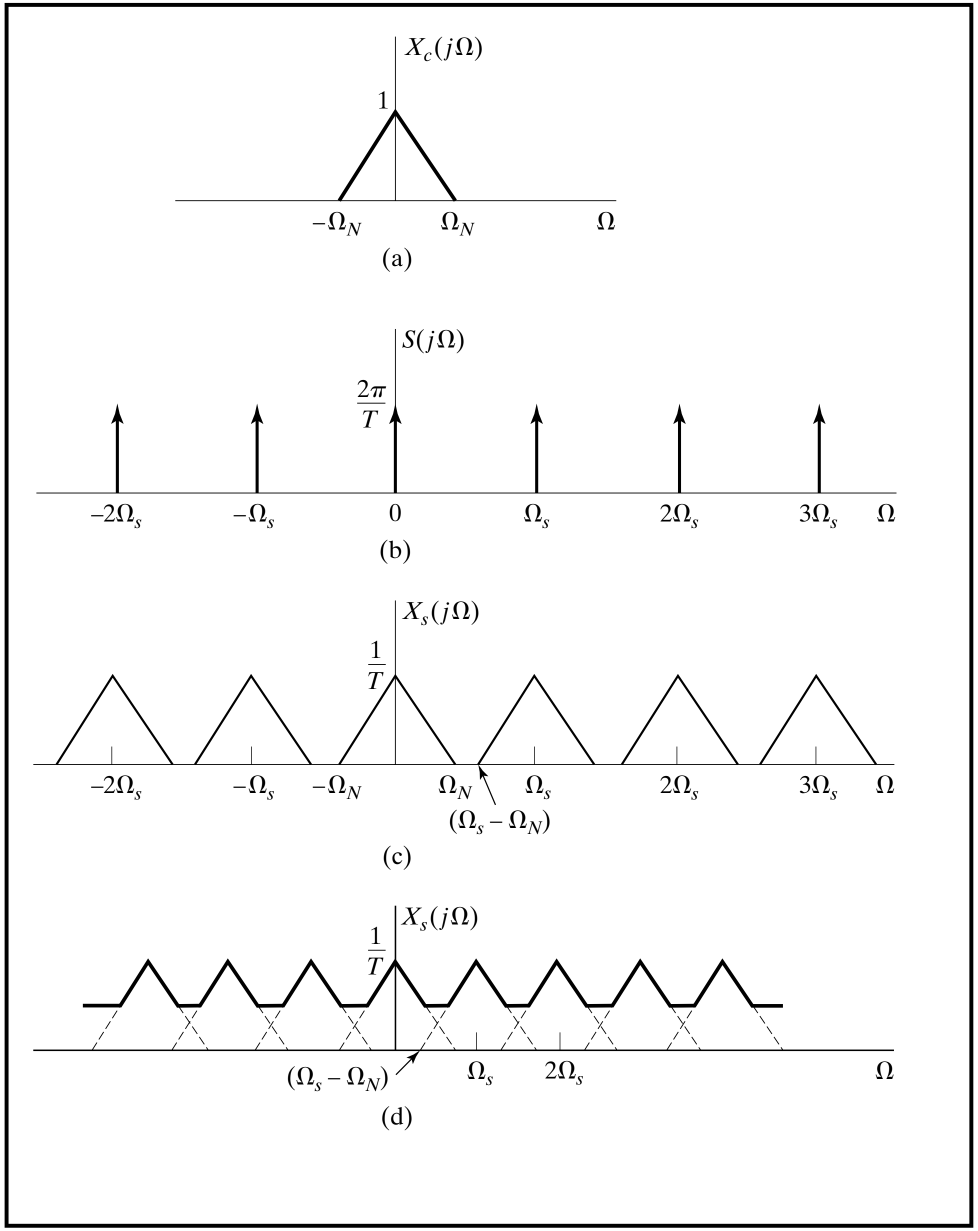
$$X_s(\omega) = \frac{1}{T} X(\omega) * \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_o) \right\}$$

$$\Rightarrow \quad X_s(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_o)$$

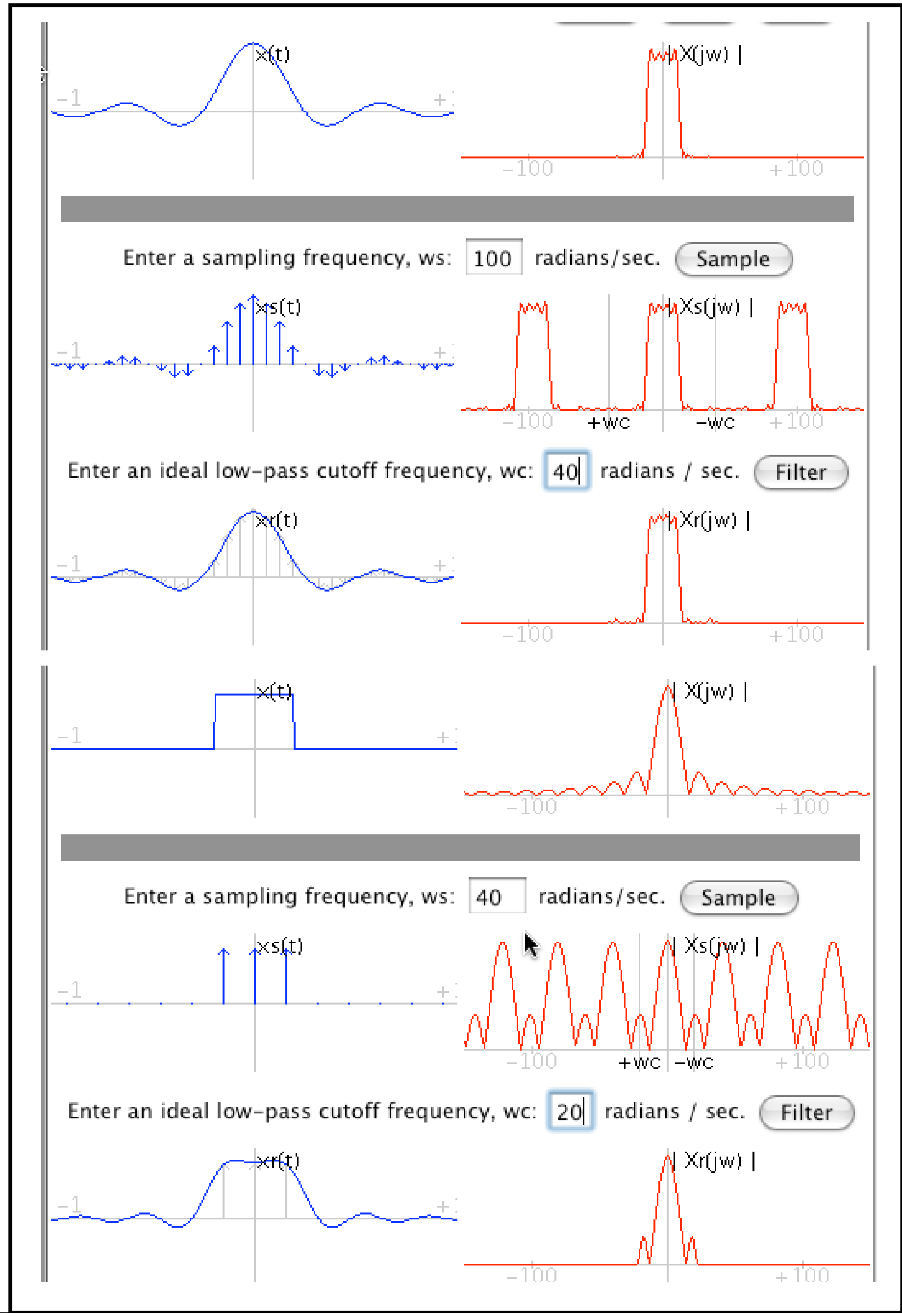


Importante: SEPARACIÓN ENTRE ESPECTROS....LA CLAVE DEL ALIASING ESTÁ AHÍ!!!!

MUESTREO.



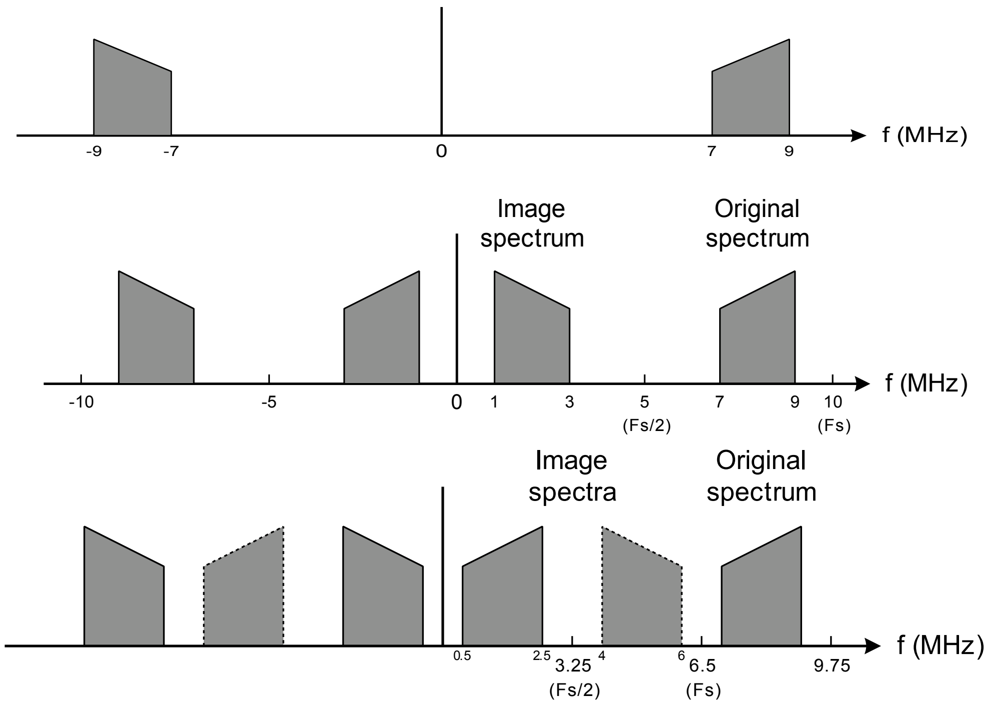
$X_c(j\Omega)$
1
$-\Omega_N$
Ω_N
Ω
(a)
$S(j\Omega)$
$\frac{2\pi}{T}$
$-2\Omega_s$
$-\Omega_s$
0
Ω_s
$2\Omega_s$
$3\Omega_s$
Ω
(b)
$X_s(j\Omega)$
$\frac{1}{T}$
$-2\Omega_s$
$-\Omega_s$
$-\Omega_N$
Ω_N
Ω_s
$2\Omega_s$
$3\Omega_s$
Ω
$(\Omega_s - \Omega_N)$
(c)
$X_s(j\Omega)$
$\frac{1}{T}$
$(\Omega_s - \Omega_N)$
Ω_s
$2\Omega_s$
Ω
(d)



x(t)
| X(jw) |
−100
+100
Enter a sampling frequency, ws: 100 radians/sec.
Sample
xs(t)
| Xs(jw) |
+wc
−wc
Enter an ideal low-pass cutoff frequency, wc: 40 radians / sec.
Filter
xr(t)
| Xr(jw) |
x(t)
| X(jw) |
Enter a sampling frequency, ws: 40 radians/sec.
Sample
xs(t)
| Xs(jw) |
+wc
−wc
Enter an ideal low-pass cutoff frequency, wc: 20 radians / sec.
Filter
xr(t)
| Xr(jw) |

MUESTREO DE SEÑALES PASA-BANDA.

Las señales vistas hasta ahora se conocen como señales en banda base; el espectro de la señales esta centrado en el origen. Seguidamente se analizarán señales en lo que esto no ocurre, estas señales se conocen como pasa-banda.



Si aplicamos el teorema de muestreo deberíamos muestrear a 18 MHz, como mínimo; pero si muestreamos a 10 MHz ....

Obtenemos el espectro "reflejado" entre 1 y 3 MHz. Si ahora muestreamos la señal original a 6.5 MHz .....

Se obtiene el espectro de la señal original entre 0.5 y 2.5 MHz!!!!. Mediante operaciones de filtrado y modulación podríamos obtener la señal original.

En general, si se tiene una señal con un ancho de banda B; con frecuencias límites f_H y f_L $B=f_H - f_L$ con $Q=f_H/B$ y n entero con $n \leq Q$ la frecuencia de muestreo f_s debe cumplir los siguientes limites.

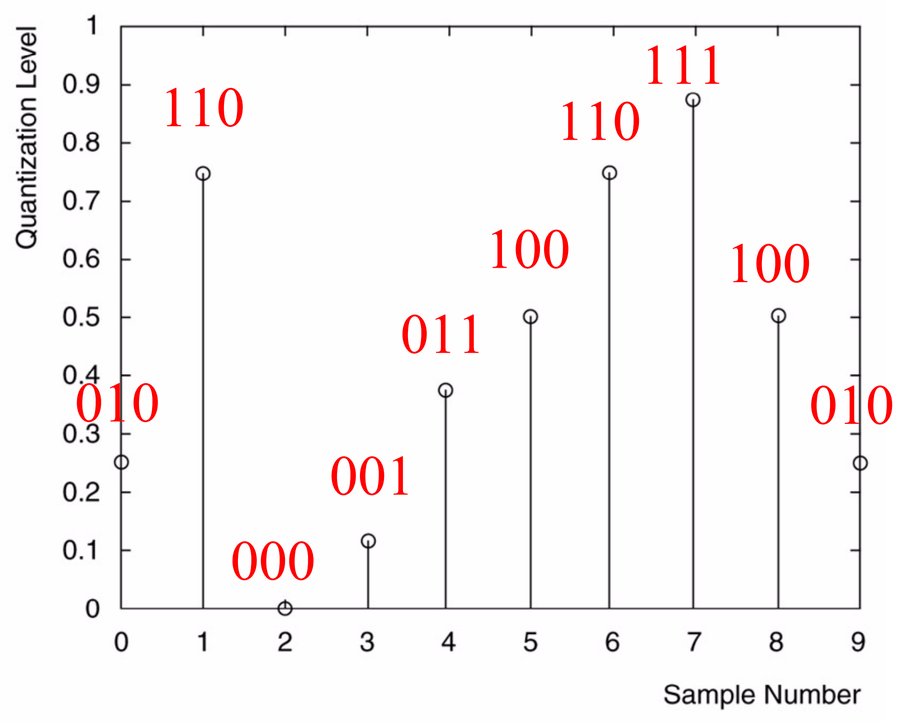
$$2B\left\{\frac{Q}{n}\right\} \leq f_s \leq 2B\left\{\frac{Q-1}{n-1}\right\}$$

CUANTIZACIÓN.

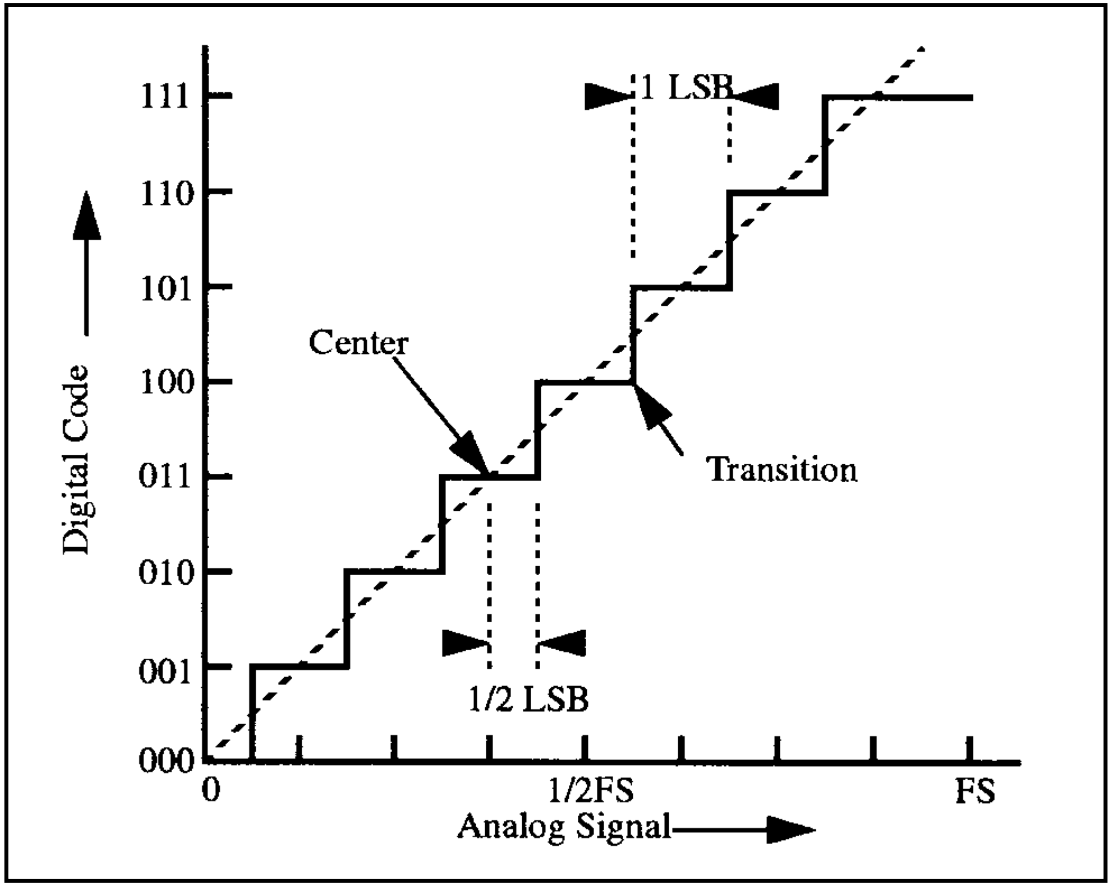
Despues de muestrear se hace necesario cuantizar la señal, estamos en un mundo discreto!!!!

Digital Code	Quantization Level (V)	Range of Analog Inputs Mapping to This Digital Code (V)
000	0.000	$0.000 \leq x < 0.0625$
001	0.125	$0.0625 \leq x < 0.1875$
010	0.250	$0.1875 \leq x < 0.3125$
011	0.375	$0.3125 \leq x < 0.4375$
100	0.500	$0.4375 \leq x < 0.5625$
101	0.625	$0.5625 \leq x < 0.6875$
110	0.750	$0.6875 \leq x < 0.8125$
111	0.875	$0.8125 \leq x \leq 1.000$

3-bit signal in the range 0 V to 1V



CUANTIZACIÓN.



Se puede cuantizar redondeando (hacemos corresponder el nivel más cercano) o por truncamiento (hacemos corresponder el nivel inferior)

Definiciones

Niveles de cuantización: son los niveles digitales

Rango dinámico (RD): Es la diferencia entre los valores máximo y mínimo de x(n); no confundir con el rango del cuantificador (R)!!!!!!. Cuando se sobrepasa el rango del conversor se tiene el ruido de sobrecarga.

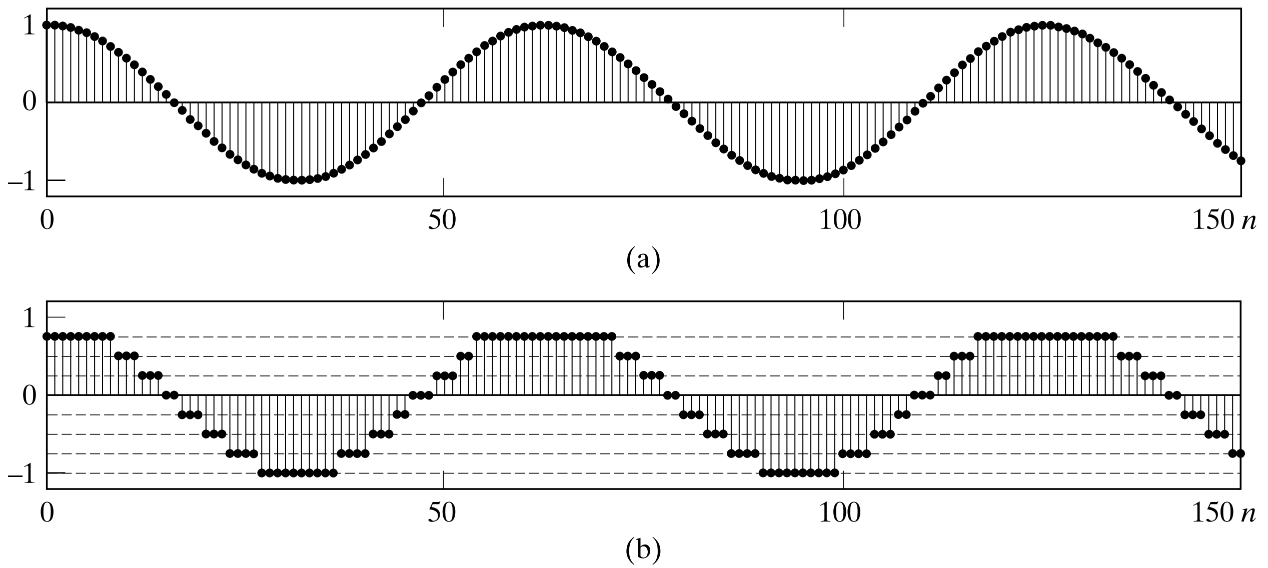
Resolución: tamaño del escalón entre niveles digitales (b es el número de bits)

$$\boxed{\Delta = \frac{R}{2^b - 1}}$$

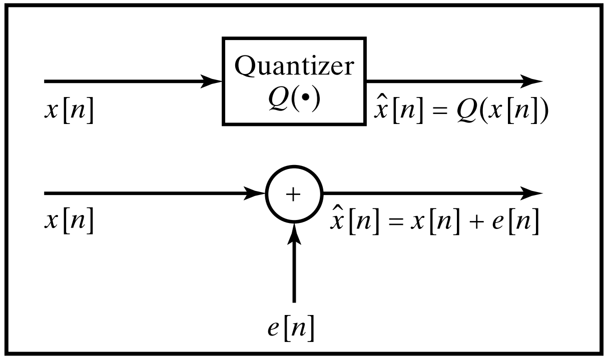
Rango de escala completa (FSR): Cuantificador para señales bipolares.

Escala completa (FS): Cuantificador para señales unipolares.

CUANTIZACIÓN.



Modelo para la cuantizacion



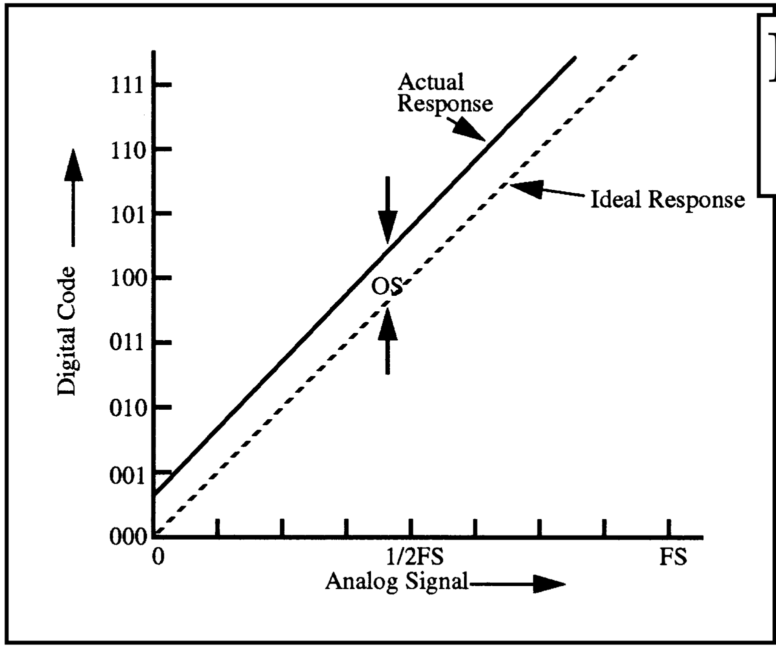
Al cuantizar se comete un error conocido, evidentemente, como error de cuantización, que es IRREVERSIBLE. Se introduce "ruido" a la señal conocido como ruido de cuantización.

$$SNRQ = 10 \cdot \log\left(\frac{P_{señal}}{P_{ruido}}\right) = 6.02 \cdot b + 1.25 \approx 6 \cdot b$$

b=número de bits del conversor

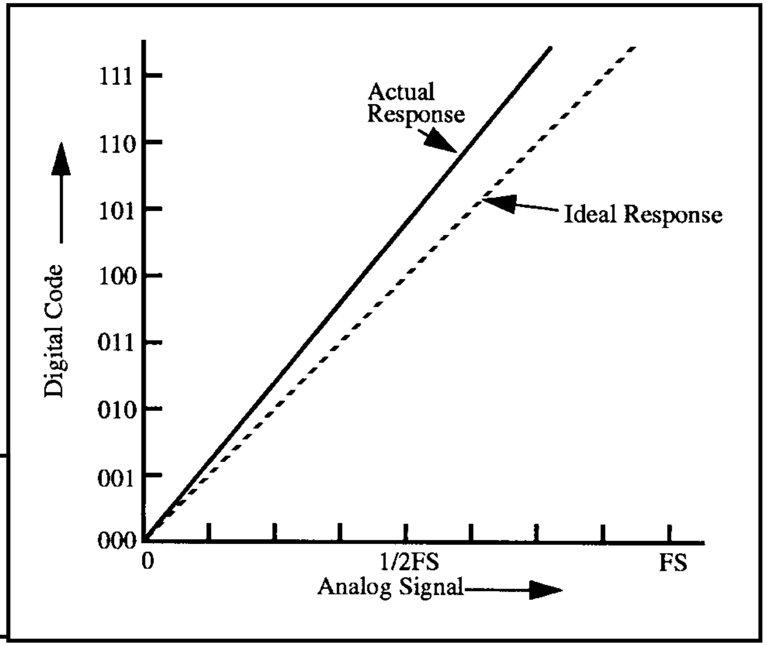
Regla de los 6 dB

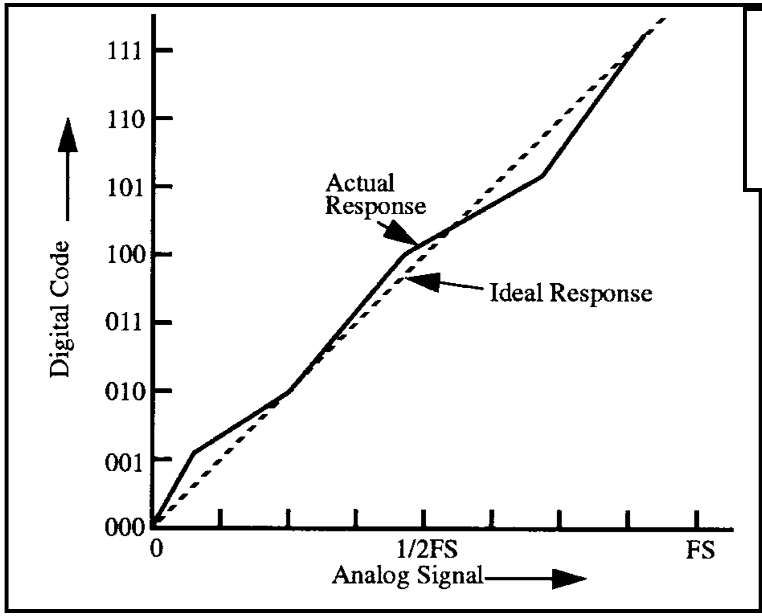
CUANTIZACIÓN. ERRORES



Error de offset

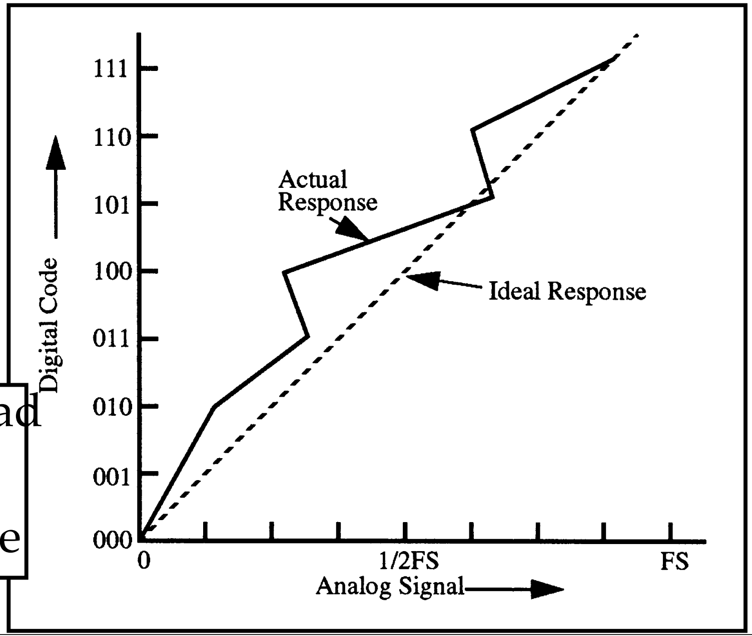
Error de ganancia



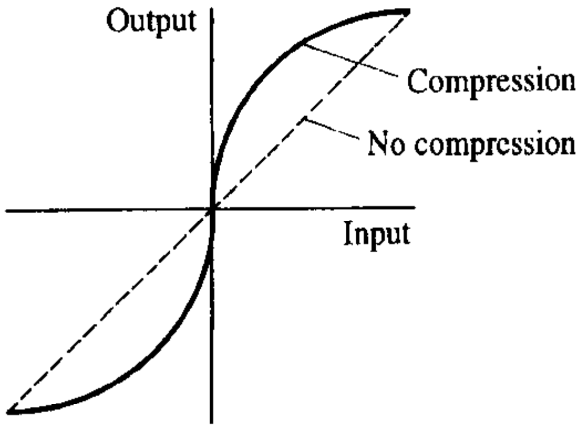


Error de no-linealidad

Error de no-linealidad
+
función no creciente

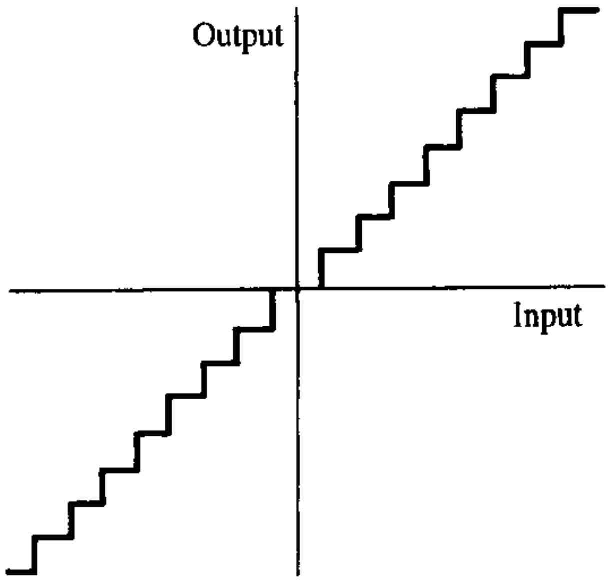


CUANTIZACIÓN NO UNIFORME.

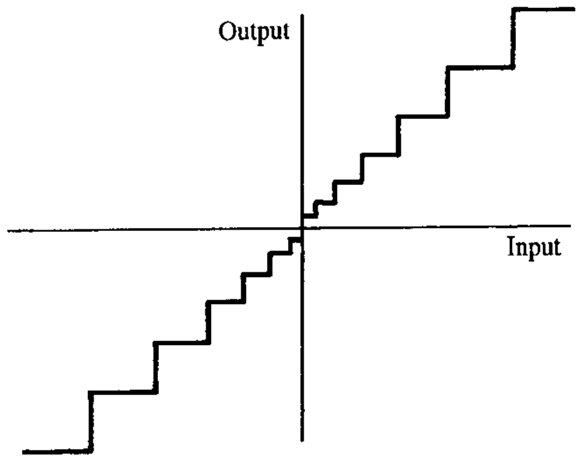


(a) Compression characteristic

+



En algunas aplicaciones conviene utilizar un cuantificador no uniforme en el que los escalones digitales no tienen una separación constante; de esta forma el error de cuantización máximo es diferente según el valor de la señal de entrada



(a) Non-linear quantisation

$$y = \frac{\ln(1+\mu|s|)}{\ln(1+\mu)}\,\mathrm{sgn}(s); \quad |s| \le 1,\ |y| \le 1$$

Mu-law u=255; EEUU y Japón.

$$y = \begin{cases} \dfrac{1+\ln(A|s|)}{1+\ln A}\,\mathrm{sgn}(s), & \frac{1}{A} \le |s| \le 1 \\ \dfrac{A|s|}{1+\ln A}\,\mathrm{sgn}(s), & 0 \le |s| \le \frac{1}{A} \end{cases}$$

A-law A=87.56; Europa.

CODIFICACIÓN.

Una vez que se tienen los diferentes niveles de cuantificación tenemos que codificar cada uno de esos niveles.

La codificación dependerá de la aplicación a desarrollar así como de los elementos hardware que se dispongan.

En algunas aplicaciones donde estos niveles son asignados a determinados símbolos la codificación se realiza siguiendo criterios más complejos (entropía).

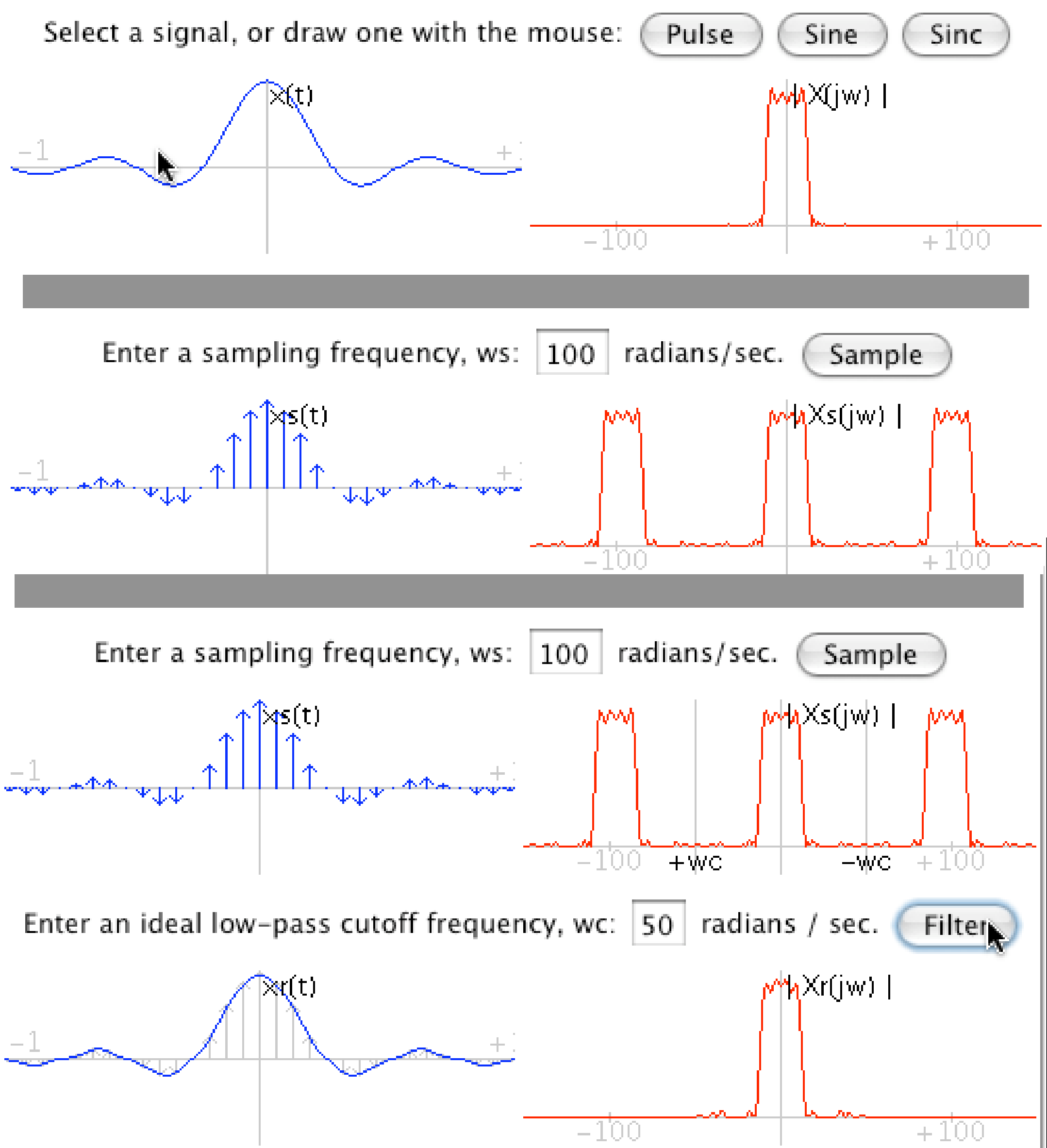
TABLE 3.1 Binary Representations of 4-Bit Signed Numbers

Decimal value	Sign magnitude	One's complement	Two's complement
+7	0111	0111	0111
+6	0110	0110	0110
+5	0101	0101	0101
+4	0100	0100	0100
+3	0011	0011	0011
+2	0010	0010	0010
+1	0001	0001	0001
+0	0000	0000	0000
−0	1000	1111	—
−1	1001	1110	1111
−2	1010	1101	1110
−3	1011	1100	1101
−4	1100	1011	1100
−5	1101	1010	1011
−6	1110	1001	1010
−7	1111	1000	1001
−8	—	—	1000

TABLE 3.3 Dynamic Range and Precision of a 16-Bit Number Using Different Formats

	Dynamic range	Dynamic range in dB	Precision
Unsigned integer	0 to 65,536	$20 \log_{10}(2^{16}) = 96$ dB	1
Signed integer	−32,768 to 32,767	$20 \log_{10}(2^{15}) = 90$ dB	1
Unsigned fractional	0 to 0.99998474	96 dB	2^{-16}
Signed fractional	−1 to 0.99996948	90 dB	2^{-15}

CONVERSIÓN D/A



Como se ha visto el proceso de muestreo genera infinitas copias del espectro de la señal analógica original.

El procedimiento inverso al muestreo, la reconstrucción de la señal analógica a partir de sus muestras, consistirá en la eliminación de todas esas copias espectrales digitales mediante el uso de un filtro paso-bajo ideal.

RECONSTRUCCIÓN.

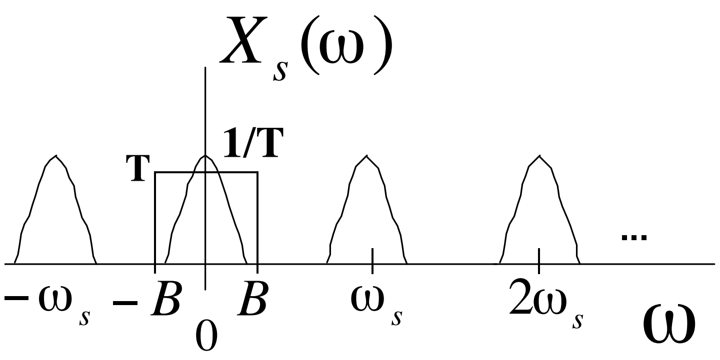
$$h(t) * x_s(t) \leftrightarrow H(\omega) X_s(\omega)$$

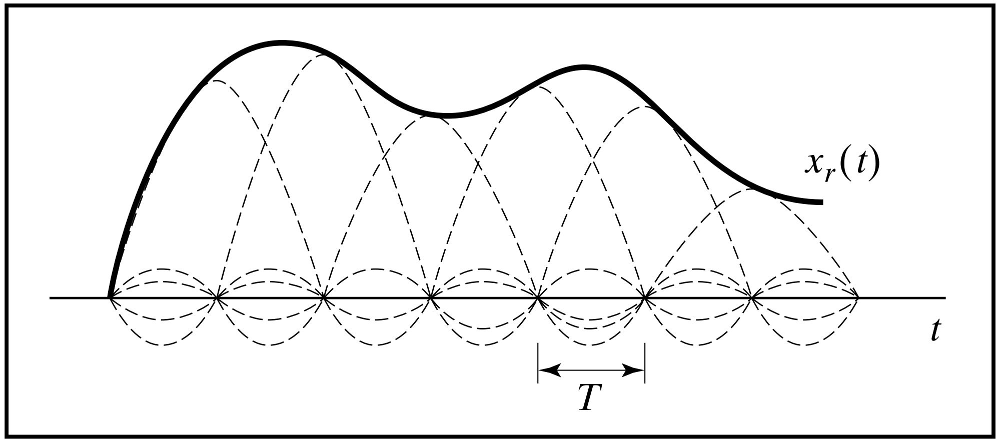
$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \text{sinc}(Bt)$$

$$x(t) = \text{sinc}(Bt) * \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT) \right\}$$

$$\Rightarrow x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\,\text{sinc}(B(t - nT))$$

Este reconstructor es ideal; no se puede implementar





RECONSTRUCCIÓN.

- **Mantenedor de Orden Cero:**

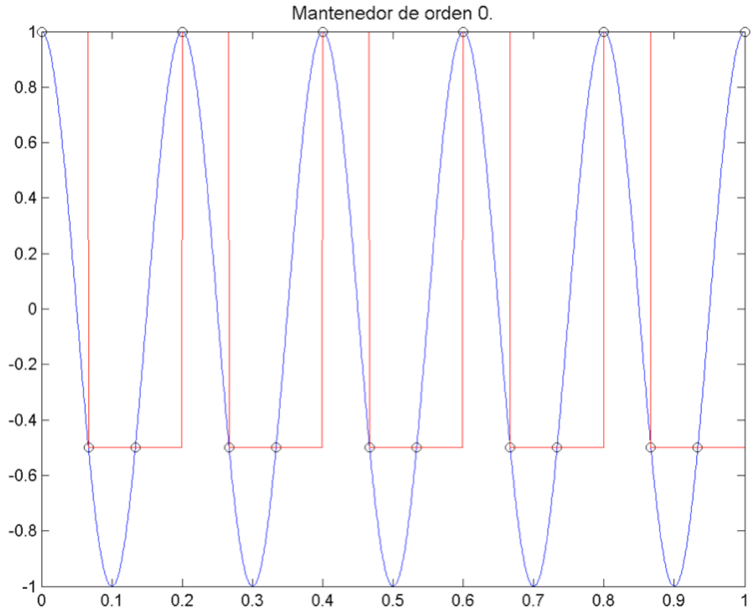
$$\hat{x}(t) = x(nT),\ nT \leq t \leq (n+1)T$$

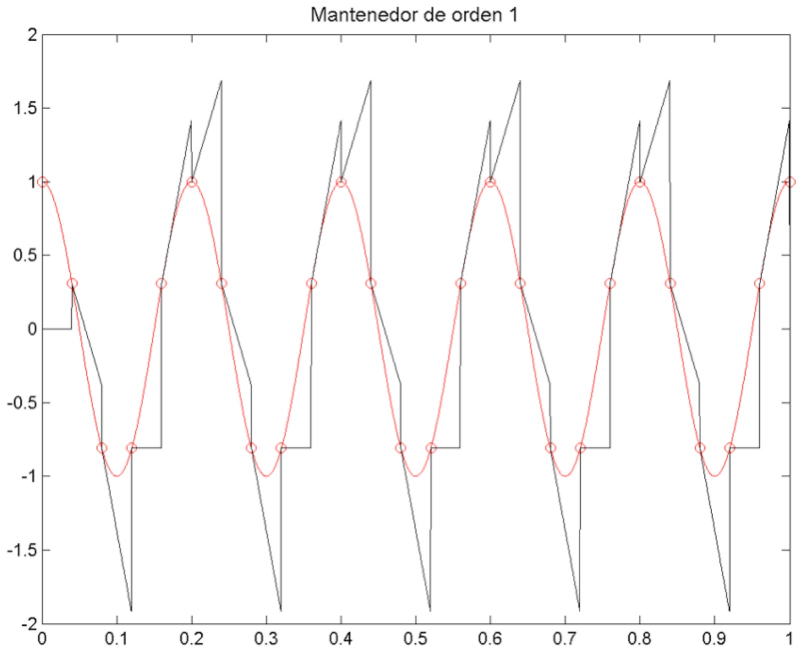
- **Mantenedor de Orden Uno:**

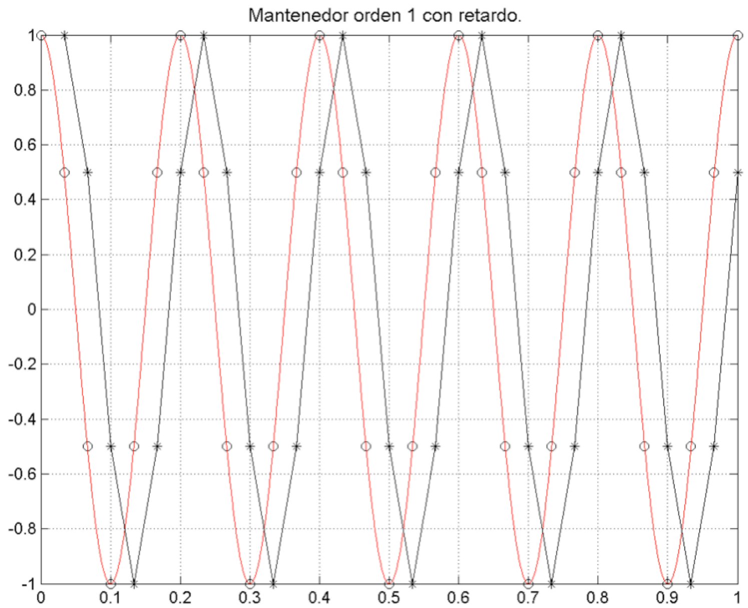
$$\hat{x}(t) = x(nT) + \frac{x(nT) - x((n-1)T)}{T}(t - nT),\ nT \leq t \leq (n+1)T$$

- **Interpolador lineal con retardo:**

$$\hat{x}(t) = x((n-1)T) + \frac{x(nT) - x((n-1)T)}{T}(t - nT),\ nT \leq t \leq (n+1)T$$







ALGUNOS COMENTARIOS

A la hora de muestrear una señal SIEMPRE hay que poner un filtro *anti-aliasing* ya que se puede conocer a la perfección el contenido espectral de la señal a muestrear pero no se conoce nada de las posibles interferencias (ruido). Por ejemplo una señal de 40 KHz no es audible, pero al muestrear a 44 KHz (muestreo en un CD) aparece una componente “alias” de 4 KHz que sí lo es.........

En el proceso de conversión A/D se modifica la señal original de forma IRREVERSIBLE, téngase en cuenta el proceso de cuantización, por lo que siempre habrá una pérdida de información en ese proceso.

Al final del proceso de conversión D/A se suele poner un filtro conocido como filtro de reconstrucción que se encarga de “suavizar” la señal obtenida con los diferentes mantenedores.