Análisis temporal de señales y sistemas discretos.

OBJETIVOS DEL TEMA.

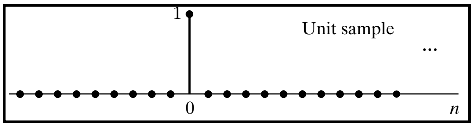
En este tema se analizarán las señales y sistemas discretos desde el punto de vista temporal; son conceptos BÁSICOS E IMPRESCINDIBLES a la hora de trabajar con dichos sistemas.

- Señales discretas. Tipos.
- Energía y potencia de una señal discreta
- Sistema lineal, invariante temporal.
- Respuesta impulsional.
- Convolución. Propiedades
- Estabilidad. Causalidad
- Correlación.

Señales discretas. Tipos principales

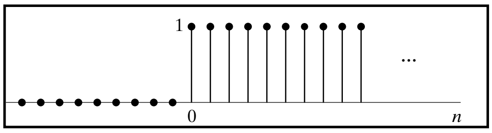
Impulso unitario

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & para\ n = 0 \\ 0, & para\ n \neq 0 \end{cases}$$



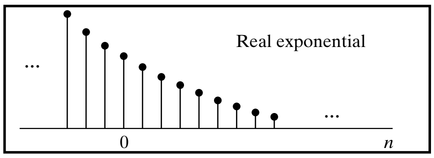
Escalón unitario.

$$u(n) = \begin{cases} 1, & para\ n \geq 0 \\ 0, & para\ n < 0 \end{cases}$$



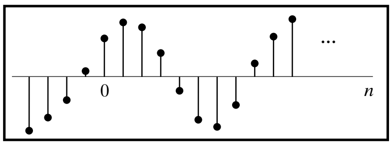
Exponencial real.

$$x(n) = A \cdot \alpha^n$$



Sinusoide

$$x(n) = A \cdot \cos(\omega \cdot n + \theta)$$



Exponencial compleja.

$$x(n) = A \cdot e^{j \cdot (w \cdot n + \rho)}$$

Además de estas señales discretas básicas se tienen sus versiones retardadas; a modo de ejemplo el impulso unitario retardado queda definido como

$$\delta(n - n_0) = \begin{cases} 1, & para\ n = n_0 \\ 0, & para\ n \neq n_0 \end{cases}$$

Una última definición es la de señal discreta periódica que cumple x(n+N)= x(n) ∀ n; aquí N es el periodo de la señal.

Señales discretas. Energía y potencia.

La **energía** de una señal discreta queda definida de la siguiente forma

$$E \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2$$

Si este valor es finito se dice que la señal es una **señal de energía**

La **potencia media** de una señal discreta queda definida de la siguiente forma

$$P \equiv \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x(n)|^2$$

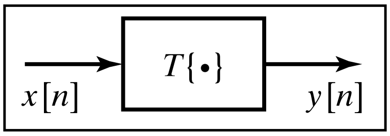
Si la potencia media es finita y diferente de cero la señal se denomina **señal de potencia**

A modo de ejemplo es inmediato comprobar que el escalón unidad es una señal de potencia (su energía es infinita) y el impulso unitario es una función energía (su potencia media es 0).

A modo de ejercicio intenta demostrar que la señal discreta compleja x(n)= A·e^{jwn} tiene energía infinita y potencia media igual a A y que la señal rampa x(n)=n·u(n) ni es señal de energía ni de potencia.

Sistemas discretos.

Se define un **sistema discreto** como aquel que transforma una señal discreta original x(n) a otra final y(n)



Un sistema discreto es **invariante temporal** si desplazamientos temporales de la entrada se traducen en los mismos desplazamientos temporales a la salida del sistema $\boxed{\{y_n\} = T\{x_n\} \quad \Longleftrightarrow \quad \{y_{n-d}\} = T\{x_{n-d}\}}$

Un sistema discreto es **lineal** si para cualquier par de constantes a y b se cumple la siguiente igualdad. $\boxed{T\{a \cdot x_n + b \cdot x'_n\} = a \cdot T\{x_n\} + b \cdot T\{x'_n\}}$

La propiedad de linealidad permite aplicar el principio de superposición en procesado digital de señales. Las dos propiedades, linealidad e invarianza temporal son claves para definir la convolución (SI NO SE DAN ESTAS DOS PROPIEDADES NO SE PUEDE DEFINIR LA CONVOLUCIÓN).

Respuesta impulsional. Convolución.

Tenemos un sistema discreto L.T.I (lineal e invariante temporal) y estamos interesados en determinar la salida de dicho sistema cuando se tiene una cierta señal a la entrada........

Aquí hay tres cuestiones clave, la primera consiste en que cualquier señal se puede poner como combinación lineal de una serie de impulsos unitarios $\boxed{\{x_n\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \cdot \{\delta_{n-k}\}}$

Si queremos determinar la salida de la señal discreta $\{x_n\}$ aplicaremos $\boxed{\{y_n\} = T\{x_n\}}$

Recordando la expresión anterior se tiene $\boxed{T\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \cdot \{\delta_{n-k}\}\right)}$ Aquí se aplica la 2ª "cuestión clave" el sistema es lineal

$\boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \cdot T\{\delta_{n-k}\}}$ Se tiene la actuación del sistema sobre la señal impulso unitario retardado. Definimos la **respuesta impulsional de un sistema discreto**, h_k , como la salida del sistema cuando la entrada es el impulso unitario esto es $h_k=T\{\delta_k\}$.

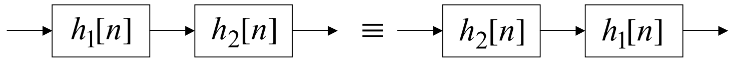
Finalmente como el sistema es invariante temporal se llega a $\boxed{\{y_n\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \cdot h_{n-k}}$

El anterior producto-suma se conoce como la **convolución** de x_k y h_k y se designa por

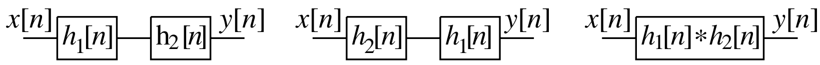
$$\boxed{\{x_n\} * \{h_n\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \cdot h_{n-k}}$$

Convolución. Propiedades

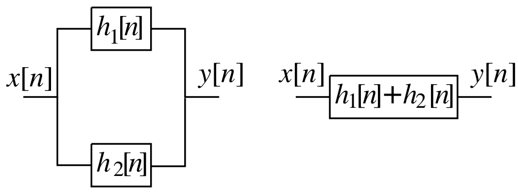
Conmutativa. $\boxed{h(n) * x(n) = x(n) * h(n)}$



Asociativa. $\boxed{h_2(n) * [h_1(n) * x(n)] = [h_2(n) * h_1(n)] * x(n)}$

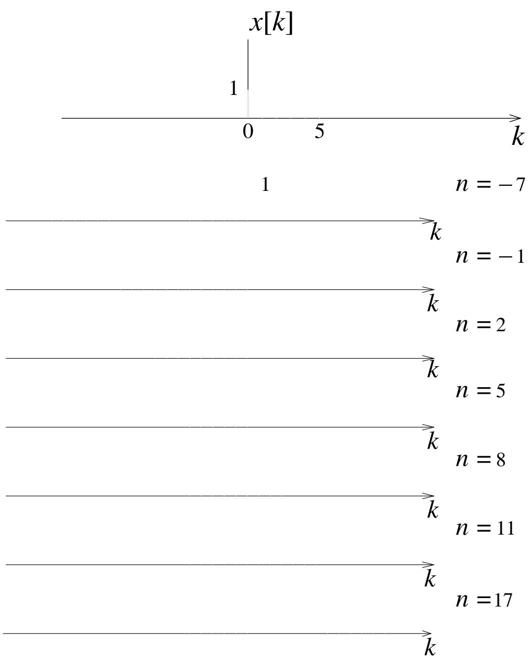


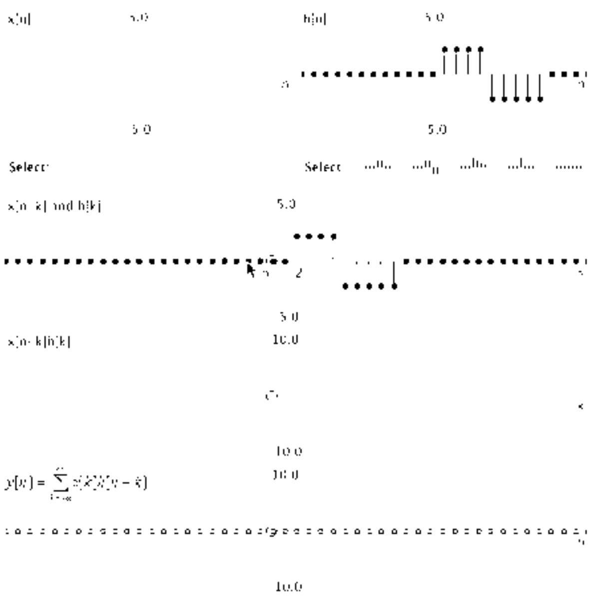
Distributiva. $\boxed{x(n)*[h_1(n)+h_2(n)] = x(n)*h_1(n)+x(n)*h_2(n)}$



Convolución. Ejemplos gráficos

$$y[n] = x[n] * x[n]$$





Estabilidad. Causalidad.

Una vez vista la forma de obtener las salidas de un sistema discreto es necesario definir el concepto de **estabilidad BIBO**; un sistema digital es estable BIBO si, ante cualquier entrada acotada, la salida del sistema permanece acotada.

Se puede demostrar que la definición anterior se transforma en la siguiente condición matemática $\boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty}$

Si nos fijamos en la respuesta impulsional del sistema discreto aparece lo que se conoce como sistema **F.I.R** *(Finite Impulse Response)* e **I.I.R** *(Infinite Impulse Response)*. Evidentemente (¿lo ves?) los sistemas FIR siempre son estables.

Otra definición importante es la de **causalidad**; un sistema discreto es causal cuando la salida en cualquier instante no depende de valores futuros de entradas o salidas.

Es inmediato comprobar que un sistema es causal si se cumple que $\boxed{h(n) = 0,\ \forall n < 0}$

Correlación. Autocorrelación.

Existen situaciones en las que estamos interesados en determinar como va cambiando una señal a lo largo del tiempo; nos preguntamos si existe cierto parecido en la forma de onda x(n) si consideramos diferentes intervalos temporales. Esta información es muy útil cuando se modelizan sistemas y existen periodicidades

Las operaciones de procesado digital que nos proporcionan esa información son la autocorrelación; cuando quiero determinar parecido dentro de una misma señal x(n); y la correlación cruzada cuando quiero determinar parecido entre formas de onda diferentes.

Se pueden distinguir entonces dos operaciones; la **autocorrelación** cuando se utiliza una señal y la **correlación cruzada** cuando se utilizan dos secuencias discretas.

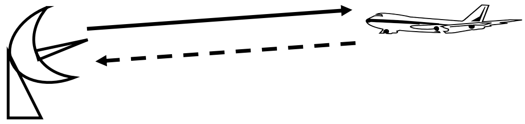
Se define la **autocorrelación** de una señal discreta x(n) a la secuencia definida por la siguiente expresión,

$$r_{xx}[\ell] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]x[n-\ell] = r_{xx}[-\ell] \Longrightarrow$$

La energía de la señal se corresponde con $r_{xx}(0)$

Correlación cruzada.

Problema clásico--Radar y Sonar.



Se define la correlación cruzada entre dos señales x(n) e y(n) como

$$r_{xy}(l)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)\cdot y(k-l)\quad l=0,\pm1,\pm2,....$$

Si se hace un cambio de índices en la expresión anterior es inmediato llegar a la siguiente igualdad.

$$r_{xy}(l)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n+l)\cdot y(n)\quad l=0,\pm1,\pm2,....$$

Además se comprueban las siguientes igualdades

$$\boxed{r_{xy}(l)=x(l)*y(-l)=r_{yx}(-l)}$$