

Transformada Z

Definición y uso en PDS.

Dada una secuencia discreta $x(n)$ se define su transformada Z como

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad \text{donde } z \text{ es una variable compleja.}$$

Representaciones más usuales

$$x(n) \xleftrightarrow{z} X(z)$$

$$X(z) = \mathcal{Z} \{ x[n] \}$$

$$x[n] = \mathcal{Z}^{-1} \{ X(z) \}$$

Juega el mismo papel en procesamiento digital de señales que la Transformada de Laplace en el análisis de sistemas continuos.

Usos más comunes.

Obtención de expresiones entrada-salida.

Simplificación de estructuras.

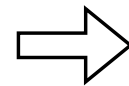
Implementación de estructuras.

Resolución de ecuaciones en diferencias

Puente entre el diseño analógico y digital
(transformación bilineal e impulso-invariante)

Región de Convergencia.

En la expresión de la transformada Z aparece un sumatorio cuyos límites son $\pm \infty$



Ese sumatorio puede converger (o no!!!) para determinados valores de la variable compleja z.

Definimos la **Región de Convergencia**, también conocida como **R.O.C**, de una transformada Z a la región del plano complejo donde la transformada Z converge

Ejemplo

$$x(n) = a^n \cdot u(n)$$



$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n \cdot u(n) \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (a \cdot z^{-1})^n$$

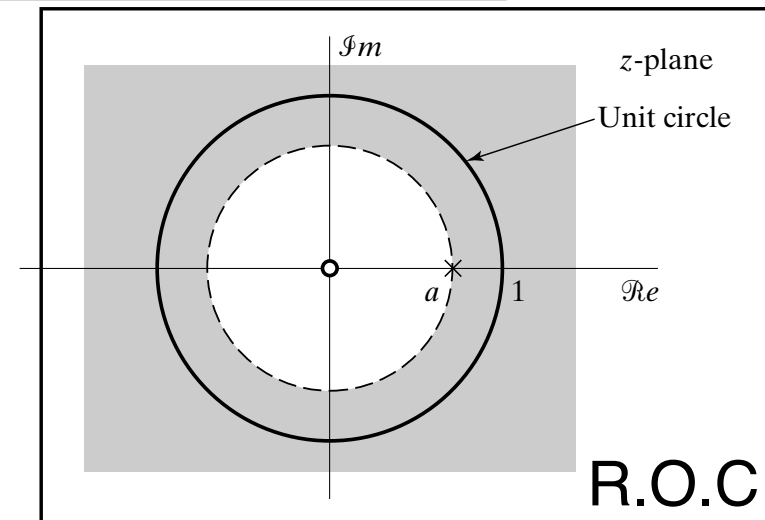
Hay que recordar que (**Condición de R.O.C**)

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r} \Leftrightarrow |r| < 1$$

$$X(z) = \frac{1}{1 - a \cdot z^{-1}}$$

Si y sólo si

$$|z| > |a|$$



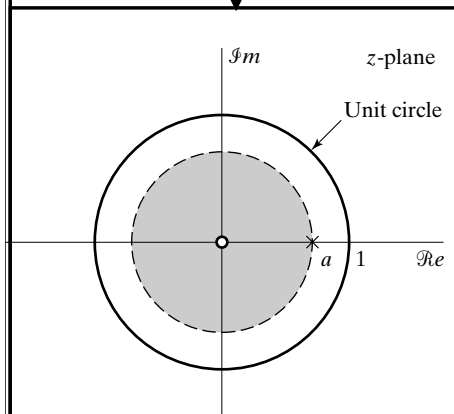
Región de Convergencia.

Hay que destacar que diferentes señales discretas pueden tener la misma transformada Z pero diferentes R.O.C.

$$x[n] = -a^n u[-n - 1]$$

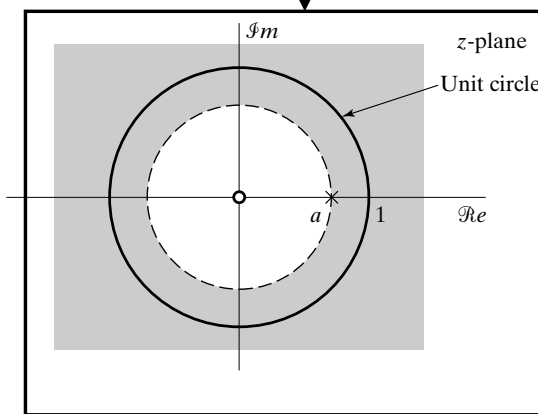
$$x[n] = a^n u[n]$$

$$X(z) = \frac{1}{1 - a \cdot z^{-1}}$$



R.O.C

$$|z| < a$$



R.O.C

$$|z| > a$$

Propiedades.

La R.O.C consiste en un anillo centrado en el origen.

La R.O.C no contiene ningún polo de la transformada Z.

Si $x(n)$ es finita la R.O.C es todo el plano complejo excepto, posiblemente $z=0$ y $z \rightarrow \infty$

Si $x(n)$ es causal, $x(n)=0 \forall n < 0$, la R.O.C es el exterior de una circunferencia cuyo radio se corresponde con el polo de la transformada Z mayor en valor absoluto. Si es estrictamente anticausal, $x(n)=0 \forall n > 0$, es el interior (un círculo) de la circunferencia con radio igual al polo de menor valor absoluto de la transformada Z. En otras situaciones se tiene un anillo.

Propiedades de la Transformada Z.

<i>Property</i>	<i>Time domain</i>	<i>z-domain</i>	<i>ROC</i>
<i>Linearity</i>	$ax_1[n] + bx_2[n]$	$aX_1(z) + bX_2(z)$	$\supseteq R_{x_1} \cap R_{x_2}$
<i>Time-shift</i>	$x[n - n_0]$	$z^{-n_0}X(z)$	$R_x^\dagger$
<i>Scaling in z</i>	$z_0^n x[n]$	$X(z/z_0)$	$ z_0 R_x$
<i>Differentiation in z</i>	$nx[n]$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$	$R_x^\dagger$
<i>Time-reversal</i>	$x[-n]$	$X(1/z)$	$1/R_x$
<i>Conjugation</i>	$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	R_x
<i>Symmetry (real)</i>	$\Im\{x[n]\} = 0$	$X(z) = X^*(z^*)$	
<i>Symmetry (imag)</i>	$\Re\{x[n]\} = 0$	$X(z) = -X^*(z^*)$	
<i>Convolution</i>	$x_1[n] * x_2[n]$	$X_1(z)X_2(z)$	$\supseteq R_{x_1} \cap R_{x_2}$
<i>Initial value</i>	$x[n] = 0, n < 0 \Rightarrow x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$		

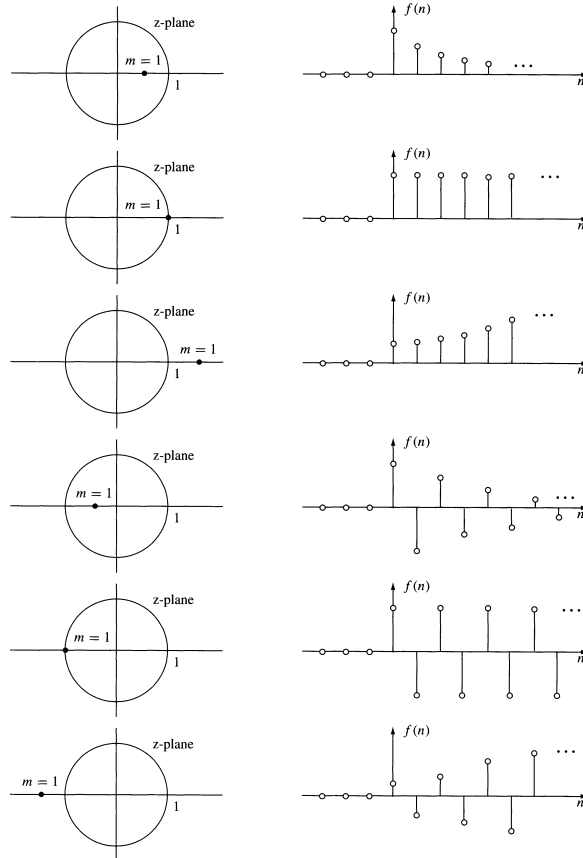
Aquí el superíndice † indica que $z=0$ ò $z=\infty$ pueden añadirse/eliminarse. $1/R_x$ hace referencia a los puntos en los que $1/z$ pertenece a R_x

Transformadas Z comunes.

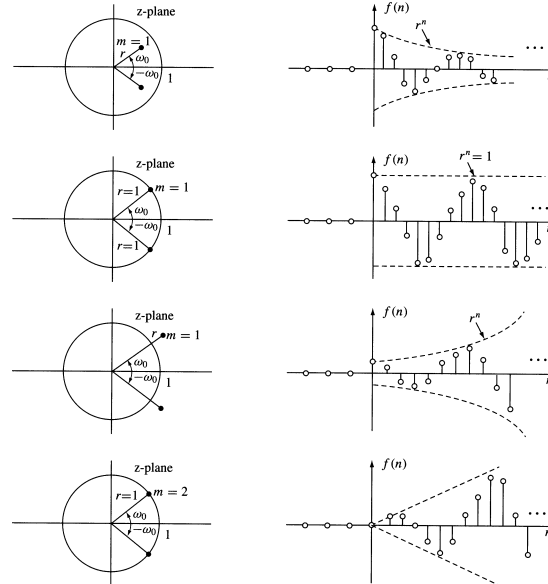
Sequence	Transform	ROC
1. $\delta[n]$	1	All z
2. $u[n]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z > 1$
3. $-u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z < 1$
4. $\delta[n - m]$	z^{-m}	All z except 0 (if $m > 0$) or ∞ (if $m < 0$)
5. $a^n u[n]$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z > a $
6. $-a^n u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z < a $
7. $na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z > a $
8. $-na^n u[-n - 1]$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z < a $
9. $[\cos \omega_0 n]u[n]$	$\frac{1 - [\cos \omega_0]z^{-1}}{1 - [2 \cos \omega_0]z^{-1} + z^{-2}}$	$ z > 1$
10. $[\sin \omega_0 n]u[n]$	$\frac{[\sin \omega_0]z^{-1}}{1 - [2 \cos \omega_0]z^{-1} + z^{-2}}$	$ z > 1$
11. $[r^n \cos \omega_0 n]u[n]$	$\frac{1 - [r \cos \omega_0]z^{-1}}{1 - [2r \cos \omega_0]z^{-1} + r^2 z^{-2}}$	$ z > r$
12. $[r^n \sin \omega_0 n]u[n]$	$\frac{[r \sin \omega_0]z^{-1}}{1 - [2r \cos \omega_0]z^{-1} + r^2 z^{-2}}$	$ z > r$
13. $\begin{cases} a^n, & 0 \leq n \leq N - 1, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$	$\frac{1 - a^N z^{-N}}{1 - az^{-1}}$	$ z > 0$

Polos de la Transformada Z-Tipo de señal.

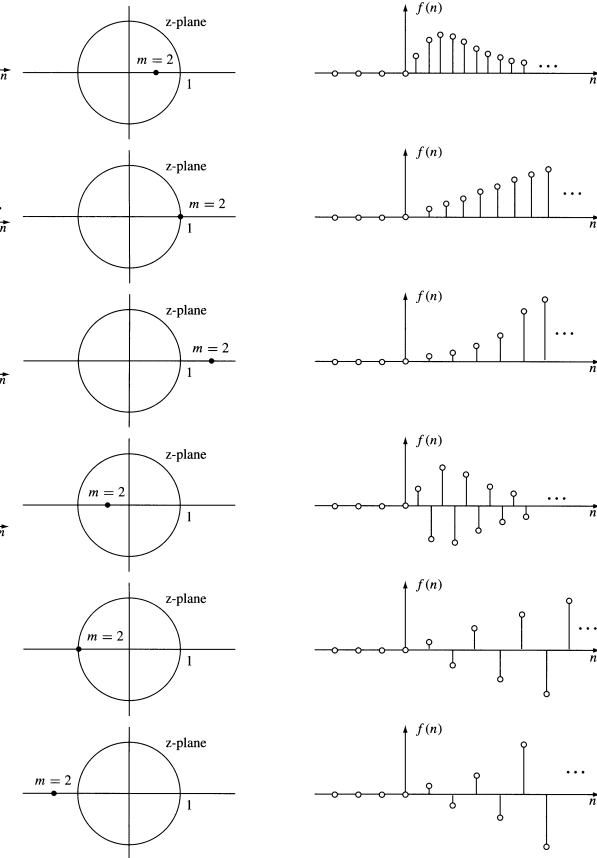
Single Real Poles—Causal Signals



Complex-Conjugate Poles—Causal Signals



Double Real Poles—Causal Signals



Existe una relación directa
entre los polos de la
transformada Z y el tipo de
señal que da lugar a dicha
transformada.

APLICACIÓN DIRECTA EN
EL DISEÑO DE SISTEMAS
DE CONTROL DIGITAL

Transformada Z unilateral.

Si la secuencia es **causal**; esto es $x(n) = 0 \forall n < 0$

$$X^+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

Se tiene entonces lo que se conoce como **Transformada Z unilateral**.

Hay que destacar que cuando se tenga este tipo de transformadas no hay que especificar la R.O.C ya que será siempre el exterior de un círculo; evidentemente ya que sólo se considera la parte causal de $x(n)$

Si se designa el par secuencia discreta-Transformada Z unilateral por

$$x(n) \xleftrightarrow{z^+} X^+(z)$$

Se tienen entonces las siguientes propiedades.

Retardo temporal.

$$x(n - k) \xleftrightarrow{z^+} z^{-k} \left[X^+(z) + \sum_{n=1}^k x(-n)z^n \right]$$

Adelanto temporal.

$$x(n + k) \xleftrightarrow{z^+} z^k \left[X^+(z) - \sum_{n=1}^k x(n)z^{-n} \right]$$

Transformada Z inversa. Métodos (I)

Se puede demostrar que

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) z^{n-1} dz$$

Aquí la integración es sobre un contorno dentro de la R.O.C de la Transformada Z y que contenga al origen.

Esta integración se puede calcular de forma más sencilla usando Teoría de Variable Compleja usando residuos; veamos este cálculo de forma mas práctica.

Expansión en fracciones

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{A_1}{z-p_1} + \frac{A_2}{z-p_2} + \dots + \frac{A_N}{z-p_N} \longleftrightarrow Z^{-1} \left\{ \frac{1}{1-p_k z^{-1}} \right\} = \begin{cases} (p_k)^n u(nT) & \text{if ROC: } |z| > |p_k| \\ -(p_k)^n u(-nT-T) & \text{if ROC: } |z| < |p_k| \end{cases}$$

Ejemplo

$$F(z) = z(z+3)/(z^2-3z+2)$$

con R.O.C $|z|>2$

$$F(z) = 5 \frac{z}{z-2} - 4 \frac{z}{z-1} \longrightarrow f(nT) = 5(2)^n - 4(1)^n \quad n \geq 0$$

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{z+3}{(z-2)(z-1)} = \frac{A_1}{z-2} + \frac{A_2}{z-1}$$

Si la R.O.C hubiese sido $1<|z|<2$ entonces

$$f(nT) = \begin{cases} -4(1)^n & n \geq 0 \\ -5(2)^n & n \leq -1 \end{cases}$$

Transformada Z inversa. Métodos (I)

Este método de descomposición en fracciones nos permite introducir de una manera sencilla lo que se conoce como respuesta natural y forzada de un sistema. Para ello consideraremos un sistema con entrada $x(n)$, su transformada Z es $X(z)$, respuesta impulsional del sistema $h(n)$, su correspondiente transformada es $H(z)$, y la salida $y(n)$ con $Y(z)$ como transformada.

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z) \Rightarrow \text{Descomponemos en fracciones.} \Rightarrow Y(z) = \sum_{H(z)} \frac{A_k}{z - p_{H(z)}} + \sum_{X(z)} \frac{B_k}{z - p_{X(z)}}$$

El primer término se corresponde con la respuesta propia y, como su nombre indica no depende de la entrada; depende de las características intrínsecas del sistema mientras que el segundo, que agrupa a los polos de $X(z)$, tendrá una relación directa con dicha señal de entrada.

Ejemplo

$$h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u(n) \Rightarrow H(z) = \frac{1}{1 - 0.5 \cdot z^{-1}}$$
$$x(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot u(n) \Rightarrow X(z) = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{3}\right) \cdot z^{-1}}$$

$$Y(z) = \frac{1}{1 - 0.5 \cdot z^{-1}} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{3}\right) \cdot z^{-1}} = \frac{A}{1 - 0.5 \cdot z^{-1}} + \frac{B}{1 - \left(\frac{1}{3}\right) \cdot z^{-1}}$$

$$Y(z) = \frac{3}{1 - 0.5 \cdot z^{-1}} - \frac{2}{1 - \left(\frac{1}{3}\right) \cdot z^{-1}}$$

$$y(n) = \left[3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n - 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n \right] \cdot u(n)$$

Transformada Z inversa. Métodos (II)

Expansión en potencias de Z.

La estrategia consiste en expandir la transformada Z en una serie de potencias de Z para, seguidamente igualar esta expansión a la definición de Transformada Z

Ejemplo

Se pide determinar la secuencia discreta que da lugar a la siguiente transformada Z.

$$H(z) = e^{-z^{-1}}$$

Esta función no es racional por lo que no se puede aplicar lo visto anteriormente

El teorema de Taylor nos asegura que podemos descomponer cualquier función $f(x)$ usando sus derivadas n -ésimas en el origen de la siguiente forma.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!} \cdot x^n$$

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot x^n$$

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot (z^{-n})$$

$$e^{-z^{-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot (z^{-1})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot (z^{-n})$$

$$x(n) = \frac{(-1)^n}{n!} \cdot u(n)$$

Transformada Z inversa. Métodos (III)

Otro método muy usado para determinar transformadas Z inversas se debe al uso de la propiedad de la derivada de la transformada Z

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z), \quad ROC = R$$

$$nx[n] \xleftrightarrow{Z} -z \frac{d}{dz} X(z), \quad ROC = R$$

Ejemplo

Determina la secuencia que da lugar a la siguiente Transformada Z

$$H(z) = \frac{1}{(1 - p \cdot z^{-1})^2}$$

Para ello nos basaremos en la propiedad de la derivada usando la siguiente transformada Z.

$$G(z) = \frac{1}{(1 - p \cdot z^{-1})} = \frac{z}{(z - p)}$$

$$-z \cdot \frac{dG(z)}{dz} = z^{-1} \cdot p \cdot \frac{1}{(1 - p \cdot z^{-1})^2}$$

Aplicando la propiedad de la derivada se tiene

$$z^{-1} \cdot p \cdot \frac{1}{(1 - p \cdot z^{-1})^2} \Leftrightarrow n \cdot g(n) = n \cdot p^n \cdot u(n)$$

$$z^{-1} \cdot \frac{1}{(1 - p \cdot z^{-1})^2} \Leftrightarrow n \cdot p^{n-1} \cdot u(n)$$

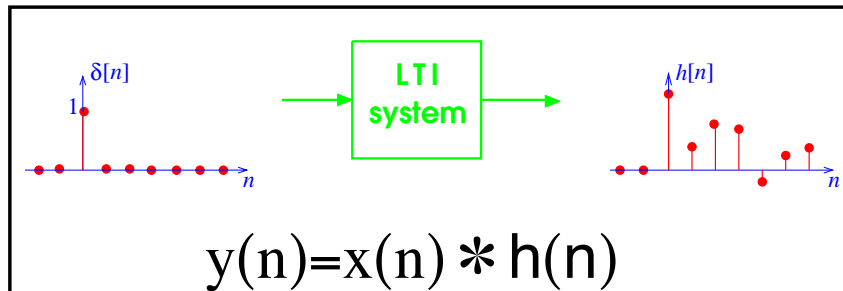
Aplicando la propiedad del retardo temporal se tiene

$$\frac{1}{(1 - p \cdot z^{-1})^2} \Leftrightarrow (n+1) \cdot p^n \cdot u(n+1)$$

Análisis de sistemas L.T.I usando la Transformada Z.

Por el momento no hemos aplicado al análisis de sistemas discretos la Transformada Z. La manera de enlazar el análisis de los sistemas discretos con la transformada Z va a venir dado por dos propiedades

$$x_1[n] * x_2[n] \xleftrightarrow{Z} X_1(z)X_2(z)$$



$$Y(z) = H(z) \cdot X(z)$$

La transformada Z de la respuesta impulsional va a ser el elemento que nos va a servir para analizar los sistemas L.T.I discretos.

Procesado Digital de Señales. 4º Ingeniería Electrónica.
Universitat de València. Profesor Emilio Soria.

$$x[n - n_0] \xleftrightarrow{Z} z^{-n_0} X(z)$$

Una forma usual de describir un sistema discreto es mediante una ecuación en diferencias.

$$y(n) = \sum_{k=1}^N a_k \cdot y(n-k) + \sum_{s=0}^P b_s \cdot x(n-s)$$

Aplicando la propiedad se tiene (condiciones iniciales=0)

$$Y(z) \cdot \left(1 - \sum_{k=1}^N a_k \cdot z^{-k} \right) = X(z) \cdot \sum_{s=0}^P b_s \cdot z^{-s}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{s=0}^P b_s \cdot z^{-s}}{\left(1 - \sum_{k=1}^N a_k \cdot z^{-k} \right)}$$

Análisis de sistemas L.T.I usando la Transformada Z.

Causalidad.

“Un sistema es causal si cumple que $h(n)=0 \forall n<0$ ”

La transformada Z de una señal estrictamente causal, vale 0 para $n<0$, es el exterior de una circunferencia.

Un sistema es causal si la R.O.C de la Transformada Z es el exterior de una circunferencia; incluyendo $z=\infty$

Estabilidad.

Un sistema discreto es estable BIBO si ante cualquier entrada acotada la salida permanece acotada. Se ha visto que $Y(z)=H(z) \cdot X(z)$. Si se factoriza esta expresión se tiene

$$Y(z) = \sum_k \frac{A_k}{(1 - p_k \cdot z^{-1})^n} + O(X(z))$$

De $X(z)$ no me preocupo (¿?) si me fijo en la parte de $H(z)$ y aplico Transformadas Z inversa (recordando que según los polos sean simples o no se tiene)

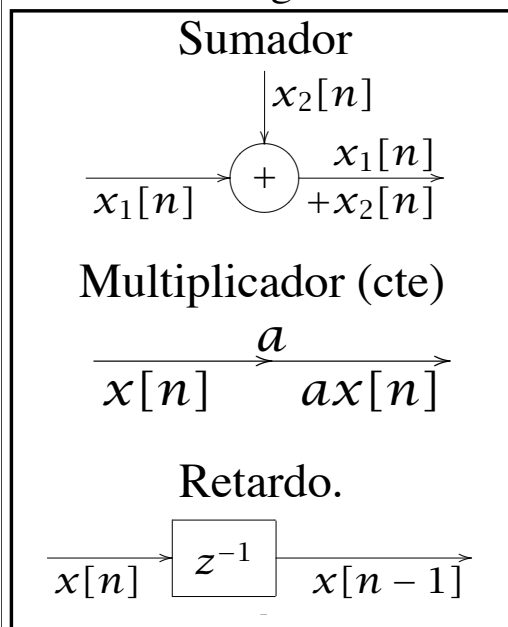
$$g(n) = p^n \cdot u(n)$$
$$g(n) = n^{s-1} \cdot p^n \cdot u(n)$$

Así pues si se busca una salida acotada la única forma es que $|p|<1$ (¿y si $|p|=1$ que pasaría?).

Un sistema es estable si la Transformada Z de la respuesta impulsional tiene todos los polos dentro de la circunferencia de radio unidad (cualquiera que sea su orden de multiplicidad).

Análisis de sistemas L.T.I usando la Transformada Z. Estructuras.

La transformada Z permite la implementación de los sistemas discretos de diferentes formas (estructuras). Los elementos básicos en estas estructuras son los siguientes



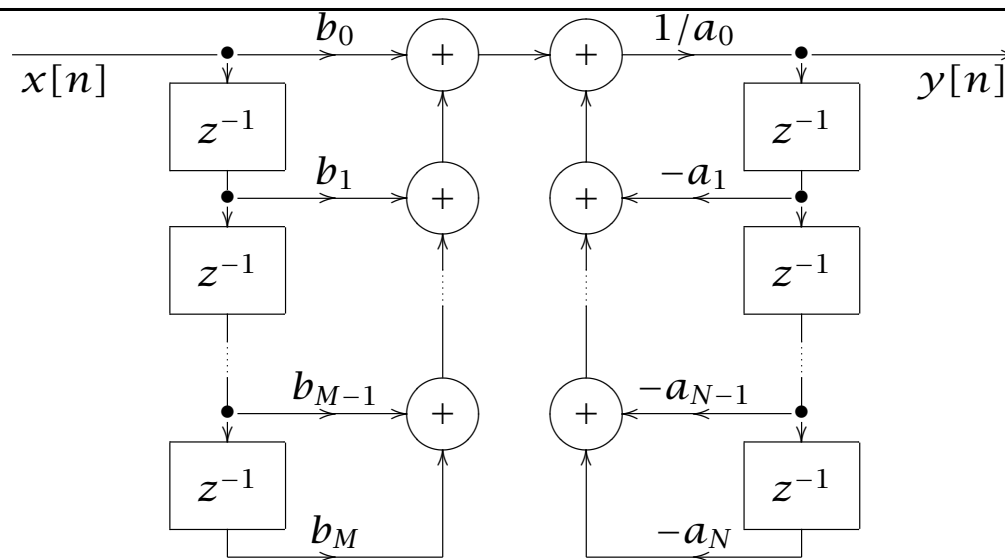
Procesado Digital de Señales. 4º Ingeniería Electrónica.
Universitat de València. Profesor Emilio Soria.

La primera en ser analizada es la que se conoce como **forma directa I**; aplicando la ecuación en diferencias se tiene

$$Y(z) = H(z)X(z) \quad H(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_Mz^{-M}}{a_0 + a_1z^{-1} + \dots + a_Nz^{-N}},$$

$$a_0y[n] + \dots + a_Ny[n - N] = b_0x[n] + \dots + b_Mx[n - M].$$

$$y[n] = \frac{1}{a_0}(b_0x[n] + \dots + b_Mx[n - M] - a_1y[n - 1] - \dots - a_Ny[n - N]).$$



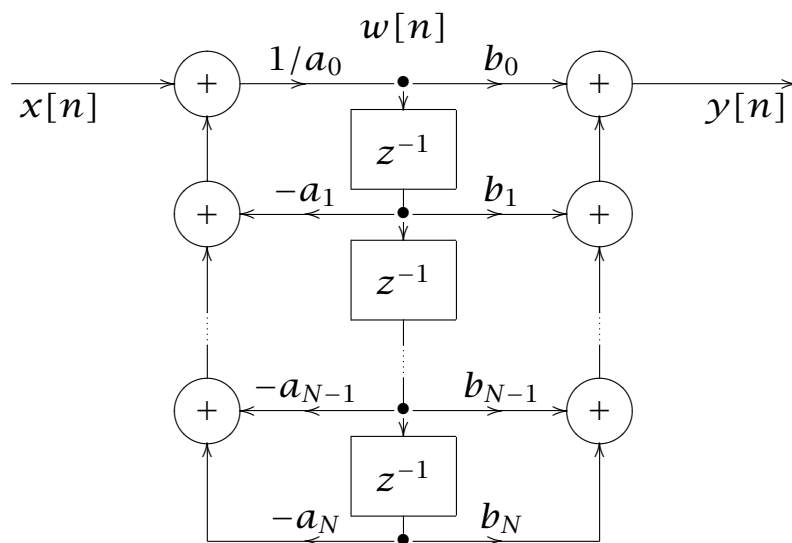
Análisis de sistemas L.T.I usando la Transformada Z. Estructuras.

La siguiente es la que se conoce como **forma directa II** o canónica

$$Y(z) = H(z)X(z) \quad H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}}$$

$$W(z) = \frac{X(z)}{a_0 + \dots + a_N z^{-N}} \longrightarrow w(n) = \frac{1}{a_0} \cdot (x(n) - a_1 \cdot w(n-1) + \dots - a_N \cdot w(n-N))$$

$$Y(z) = (b_0 + \dots + b_M z^{-M})W(z) \longrightarrow y(n) = b_0 \cdot w(n) + \dots + b_M \cdot w(n-M)$$



Esta estructura se basa en utilizar los retardos de la variable intermedia, $w(n)$ a la hora de calcular la salida del sistema $y(n)$. Este hecho se traduce en un ahorro en el número de retardos necesarios para la implementación del sistema discreto de tal forma que esta estructura es la que menos retardos necesita.

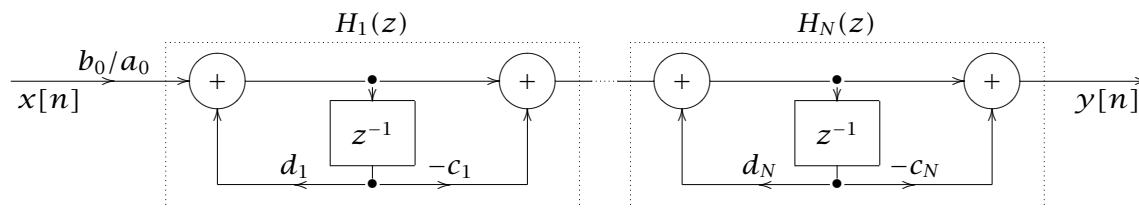
Análisis de sistemas L.T.I usando la Transformada Z. Estructuras.

Otra posible estructura es en **cascada**; si la función de transferencia $H(z)$ se puede factorizar de la siguiente forma

$$H(z) = \frac{b_0}{a_0} H_1(z) \cdots H_N(z)$$

$$H_k(z) = \frac{1 - c_k z^{-1}}{1 - d_k z^{-1}}$$

Aplicando una estructura canonica a cada bloque se tiene



$$\begin{aligned} w_k(n) &= x_k(n) + d_k \cdot w_k(n-1) \\ y_k(n) &= w_k(n) - c_k \cdot w_k(n-1) \end{aligned}$$

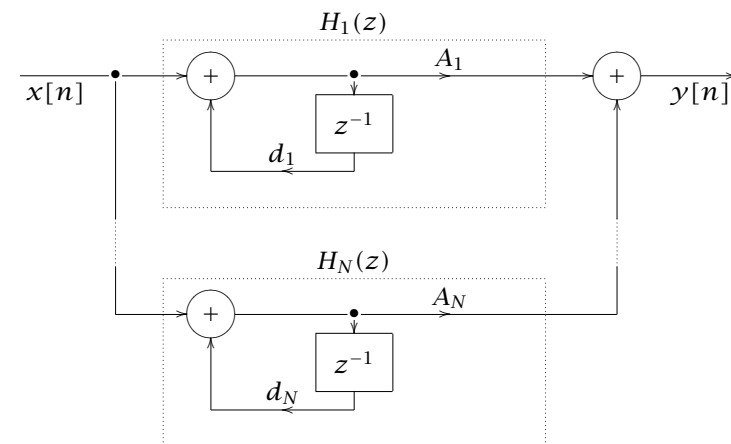
Estructura en **paralelo**; ahora $H(z)$ se puede factorizar de la siguiente forma

$$H(z) = H_1(z) + \cdots + H_N(z) \quad H_k(z) = \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}}$$

$$y_k(n) = A_k \cdot x_k(n) + d_k \cdot y_k(n-1)$$

En estas dos estructuras, en el caso de tener polos complejos se asocian por pares conjugados para dar estructuras de orden 2.

De forma “encubierta” estamos aplicando propiedades de la convolución (asociativa y distributiva para ser exactos).



Análisis de sistemas L.T.I usando la Transformada Z.

Se puede relacionar el “mundo digital” con el “mundo analógico” relacionando las Transformadas más utilizadas en esos dominios como son la Transformada Z y la Transformada de Laplace; existiendo dos formas de hacer este cambio. Estas transformaciones son las que se conocen como Transformación bilineal y Transformación impulso-invariante.

Impulso-invariante.

El bloque básico de análisis de sistemas lineales continuos usando transformadas de Laplace es el definido por (es análogo a lo que ocurre en procesamiento digital!!!!).

La transformada inversa de $H(p)$ viene dada por

$$h(t) = A \cdot e^{-b \cdot t} \quad t > 0$$

Si se muestrea

$$h(n \cdot T) = A \cdot e^{-b \cdot n \cdot T} \cdot u(n)$$

$$H(p) = \frac{A}{p + b}$$

$$H(z) = \frac{A}{1 - e^{-b \cdot T} \cdot z^{-1}}$$

Transformación bilineal.

Ahora el paso es comparar el operador “integrador” en el mundo analógico y en el digital; en el analógico $H(p)=1/p$ es un integrador; ¿qué sistema digital hace una operación semejante?. Para determinarlo de forma sencilla hay que plantearse el significado de la integral: área encerrada por una curva y el eje de abscisas

$$A(n) = A(n-1) + \frac{(x(n) + x(n-1))}{2} \cdot T$$

$$A(z) \cdot (1 - z^{-1}) = \frac{T \cdot X(z)}{2} \cdot (1 + z^{-1})$$

$$H(z) = \frac{T}{2} \left[\frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}} \right]$$

$$p = \frac{2}{T} \left[\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right]$$