Transformada Discreta de Fourier.

Hasta ahora se ha visto......

Importancia de la respuesta en frecuencia de un sistema

↓

Tenemos otra forma de caracterizar los sistemas L.T.I

Herramienta muy potente para determinar salidas cuando las entradas son sinusoides o combinación de éstas.

Permite realizar aplicaciones que en el dominio temporal son difíciles de comprender (por ejemplo filtrado)

Transformada de Fourier de una señal discreta

↓

Tenemos una forma de expresar la señal como una suma **infinita** de sinusoides

Utilizando esta descomposición de la señal junto con la respuesta en frecuencia tenemos una forma sencilla de determinar la salida de un sistema en el estacionario.

PROBLEMA: TENEMOS UN SUMATORIO CON LÍMITES $\pm\infty$

Desarrollo en serie de Fourier discreto (DFS)

Supongamos una señal discreta x(n) periódica (periodo N); esto es x(n+N)=x(n). Sabemos que a nivel temporal esta señal se puede expresar, en el primer periodo y usando deltas desplazadas, como:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N} x(k)\cdot\delta(n-k)$$

Podemos plantear otra representación alternativa usando exponenciales complejas que, como ya hemos visto, son la base en el dominio frecuencial, esto es

$$x(n) = \alpha\cdot\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\cdot e^{\frac{j\cdot 2\cdot\pi\cdot k\cdot n}{N}}$$

Evidentemente el objetivo ahora es determinar X(k) y α; para ello algunas operaciones.....

$$x(n)\cdot e^{\frac{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot s\cdot n}{N}} = \alpha\cdot\left(\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\cdot e^{\frac{j\cdot 2\cdot\pi\cdot k\cdot n}{N}}\right)\cdot e^{\frac{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot s\cdot n}{N}}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\cdot e^{\frac{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot s\cdot n}{N}} = \alpha\cdot\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1} X(k)\cdot e^{\frac{j\cdot 2\cdot\pi\cdot(k-s)\cdot n}{N}}$$

Aplicando la ortogonalidad de las exponenciales complejas, esto es,

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{\frac{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot(k-s)\cdot n}{N}} = \begin{cases} 0 & k\neq s \\ N & k=s \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\cdot e^{\frac{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot s\cdot n}{N}} = \alpha\cdot N\cdot X(s)$$

tomando α=1/N

Ecuación de análisis

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\cdot e^{\frac{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot k\cdot n}{N}}$$

Ecuación de síntesis

$$x(n) = \frac{1}{N}\cdot\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\cdot e^{\frac{j\cdot 2\cdot\pi\cdot k\cdot n}{N}}$$

Ejemplo de DFS.

Consideramos la siguiente señal periódica aquí N=10

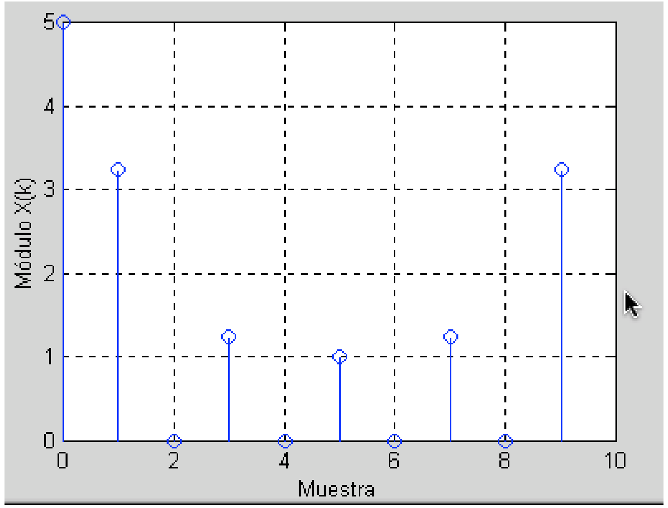
$$x(n) = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le 4 \\ 0 & 5 \le n \le 9 \end{cases}$$

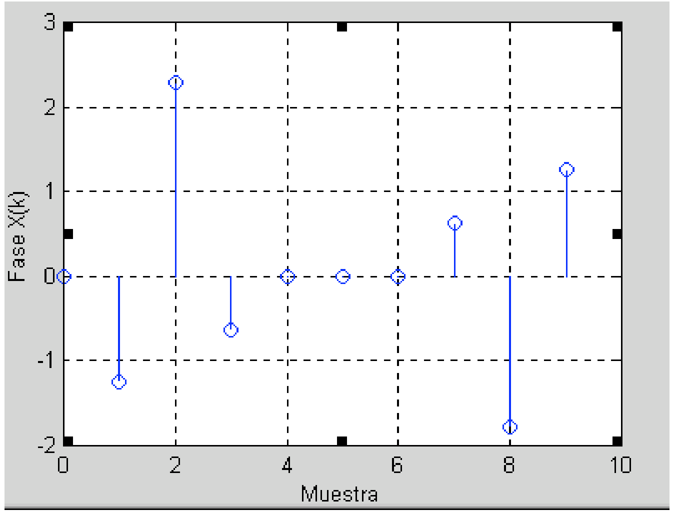
Aplicando la definición de DFS se tiene

$$X(k) = \sum_{n=0}^{9} x(n) \cdot e^{\frac{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot n}{10}} = \sum_{n=0}^{4} e^{\frac{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot n}{10}} = \frac{1 - e^{\frac{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot 5}{10}}}{1 - e^{\frac{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k}{10}}}$$

Agrupando exponenciales (como siempre!!!).

$$X(k) = \frac{e^{\frac{-j \cdot \pi \cdot k}{2}}}{e^{\frac{-j \cdot \pi \cdot k}{10}}} \cdot \frac{e^{\frac{j \cdot \pi \cdot k}{2}} - e^{\frac{-j \cdot \pi \cdot k}{2}}}{e^{\frac{j \cdot \pi \cdot k}{10}} - e^{\frac{-j \cdot \pi \cdot k}{10}}} = e^{-j \cdot \pi \cdot 0.4 \cdot k} \cdot \frac{sen\left(\frac{\pi \cdot k}{2}\right)}{sen\left(\frac{\pi \cdot k}{10}\right)}$$



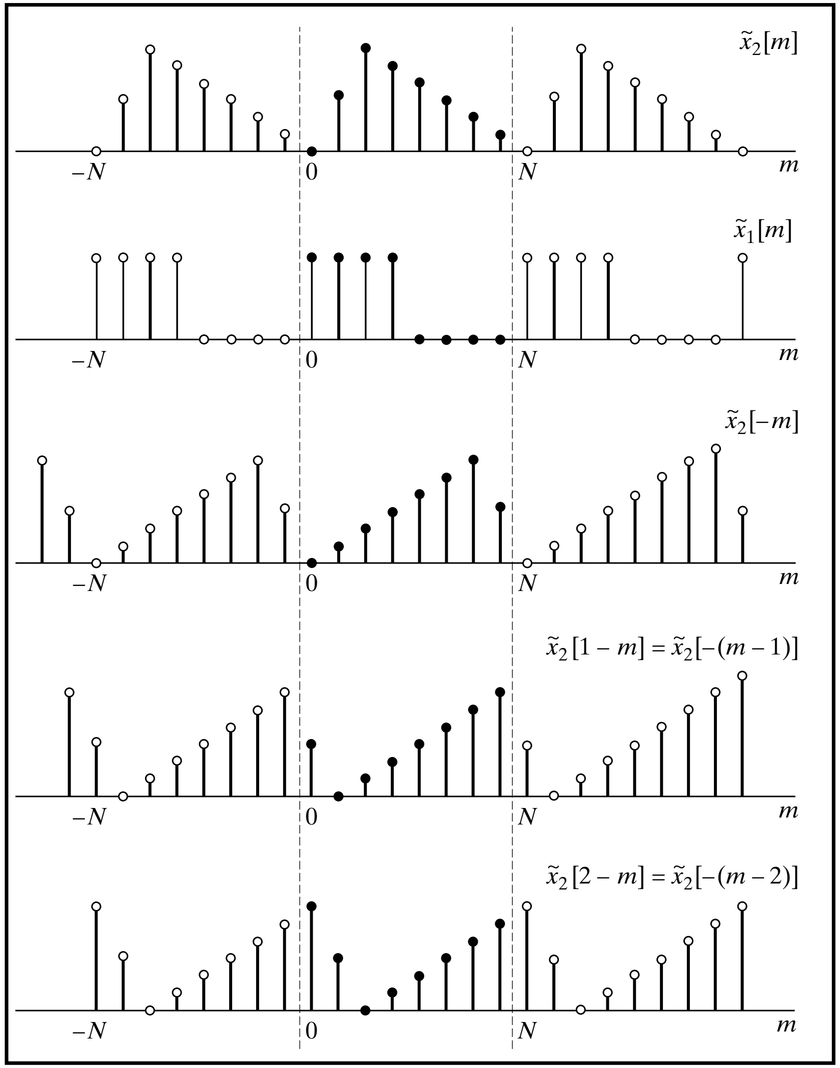


Propiedades del DFS.

$a\cdot s[n] + b\cdot u[n]$	$a\cdot S(k)+b\cdot U(k)$
$s[n]\cdot u[n]$	$\frac{1}{N}\cdot\sum_{h=0}^{N-1} S(h)U(k-h)$
$\sum_{m=0}^{N-1} s[m]\cdot u[n-m]$	$S(k)\cdot U(k)$
$s[n-m]$	$e^{-j\frac{2\pi\, k\cdot m}{T}}\cdot S(k)$
$e^{+j\frac{2\pi\, h\, t}{T}}\cdot s[n]$	$S(k-h)$

Linealidad
Producto
Convolución periódica
Desplazamiento temporal
Desplazamiento frecuencial.

Ejemplo de convolucion periódica



Muestreo de la Transformada de Fourier de una secuencia discreta (I)

Sabemos que la Transformada de Fourier de una secuencia discreta viene definida por la siguiente expresión:

$$X\left(e^{jw}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\cdot e^{-j\cdot w\cdot n}$$

Muestreamos (EN EL DOMINIO FRECUENCIAL) considerando N muestras; recordemos que X(jw) es periódica con periodo

$$U(k) = X\left(e^{\frac{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot k}{N}}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\cdot e^{\frac{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot k\cdot n}{N}}$$

U(k) es periódica (periodo N) se puede corresponder a los coeficientes de un DFS. Estoy interesado en la señal temporal que se obtiene de esos coeficientes

$$u(n) = \frac{1}{N}\cdot\sum_{k=0}^{N-1} U(k)\cdot e^{\frac{j\cdot 2\cdot\pi\cdot k\cdot n}{N}}$$

$$u(n) = \frac{1}{N}\cdot\sum_{k=0}^{N-1}\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\, e^{\frac{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot k\cdot m}{N}}\right] e^{\frac{j\cdot 2\cdot\pi\cdot k\cdot n}{N}}$$

$$u(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\cdot\left[\frac{1}{N}\cdot\sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{j\cdot 2\cdot\pi\cdot k\cdot(n-m)}{N}}\right]$$

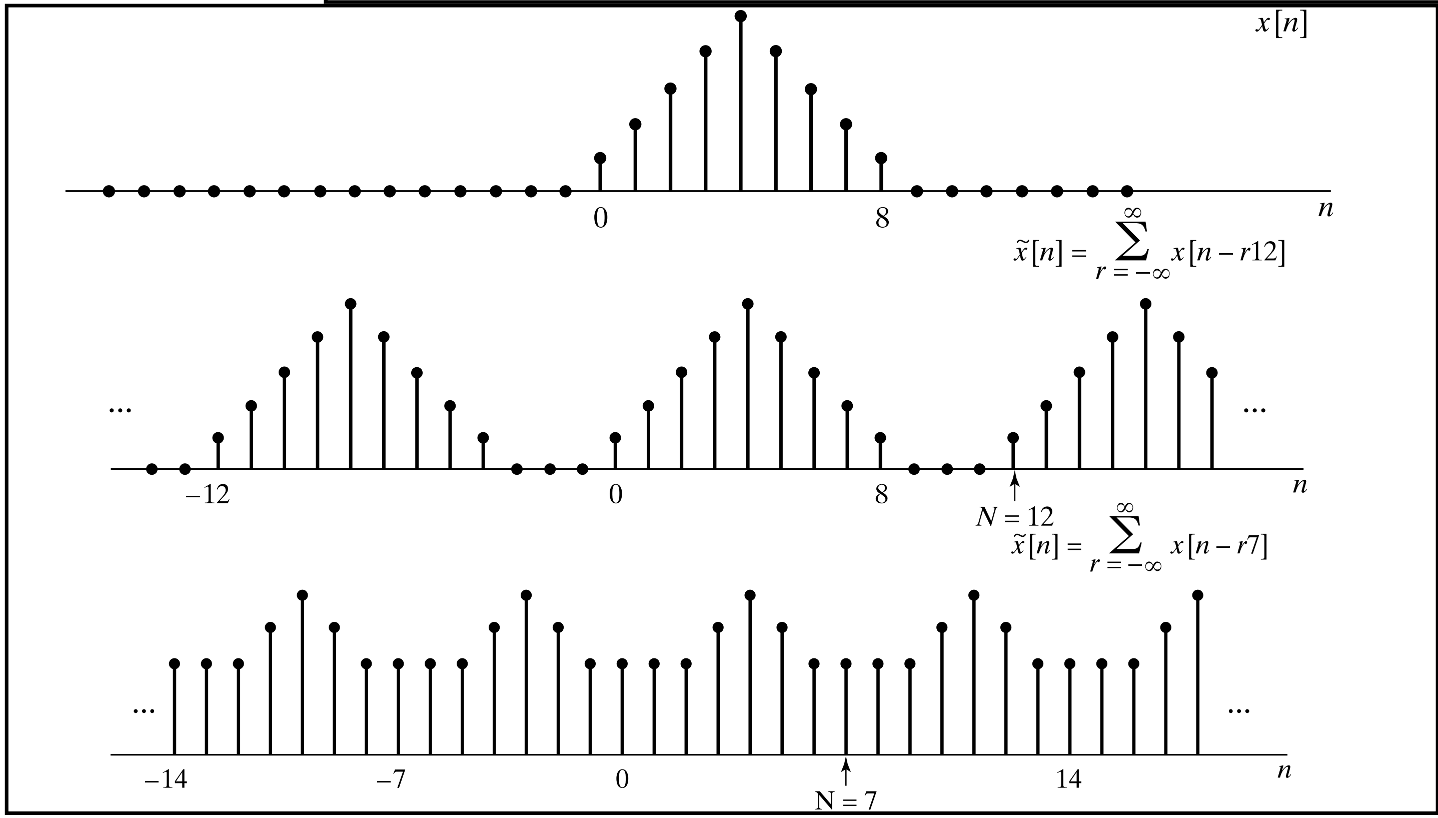
Aplicando

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{j\cdot 2\cdot\pi\cdot k\cdot(n-m)}{N}} = \begin{cases} N & n-m = r\cdot N \\ 0 & n-m \neq r\cdot N \end{cases} \quad r\ entero$$

Muestreo de la Transformada de Fourier de una secuencia discreta (II)

Se llega finalmente a

$$u(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\cdot\delta(n-m-r\cdot N) \Rightarrow u(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n-r\cdot N)$$



Transformada Discreta de Fourier (DFT).

Conclusiones a tener en cuenta.

Si x(n) tiene longitud finita se puede recuperar dicha señal a partir de muestras de su Transformada de Fourier; **no es necesario conocer dicha Transformada en todas las frecuencias.**

La señal temporal obtenida usando dicho muestreo de la Transformada de Fourier **se supone periódica por construcción;** aunque a nosotros sólo nos interesa el primer periodo.

Se define la **Transformada Discreta de Fourier (DFT)** de una señal x(n) como .

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\cdot e^{\frac{-j\cdot 2\cdot \pi\cdot k\cdot n}{N}}$$

La Transformada inversa queda definida como (ecuación de sintesis)

$$x(n)=\frac{1}{N}\cdot\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\cdot e^{\frac{j\cdot 2\cdot \pi\cdot k\cdot n}{N}}$$

Si se define

$$W_N=e^{\frac{-j\cdot 2\cdot \pi}{N}}$$

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\cdot W_N^{k\cdot n}$$

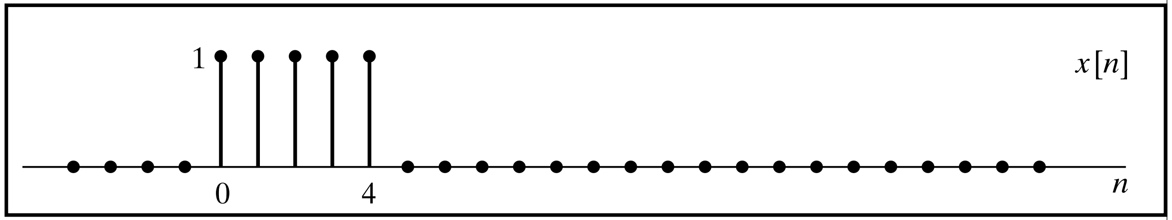
Ec. Análisis

$$x(n)=\frac{1}{N}\cdot\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\cdot W_N^{-k\cdot n}$$

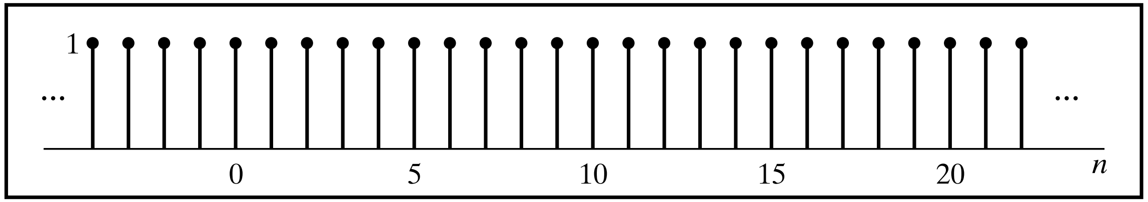
Ec. Síntesis

Ejemplo de DFT (I).

Sea la señal x(n); vamos a calcular su DFT con N=5.

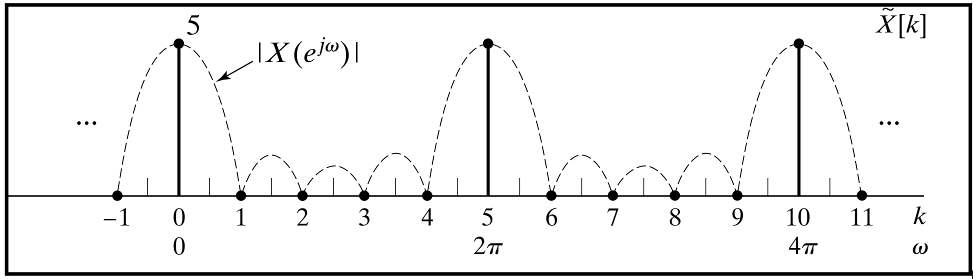


Implícitamente suponemos que se tiene la señal

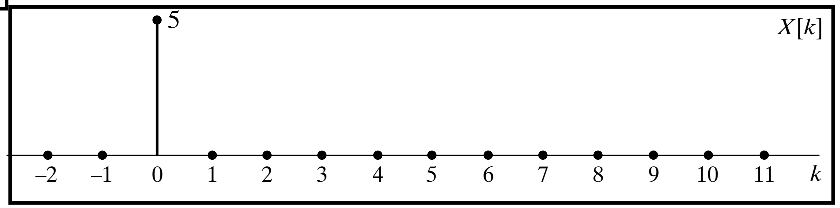


Aplicando la definición y haciendo algunos cálculos

$$X(k) = \sum_{n=0}^{4} x(n) \cdot e^{\frac{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot n}{5}} = \frac{1 - e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k}}{1 - e^{\frac{-2 \cdot j \cdot \pi \cdot k}{5}}} = \begin{cases} 0 & k \neq 5 \cdot r \\ 5 & k = 5 \cdot r \end{cases} \quad r \text{ entero}$$

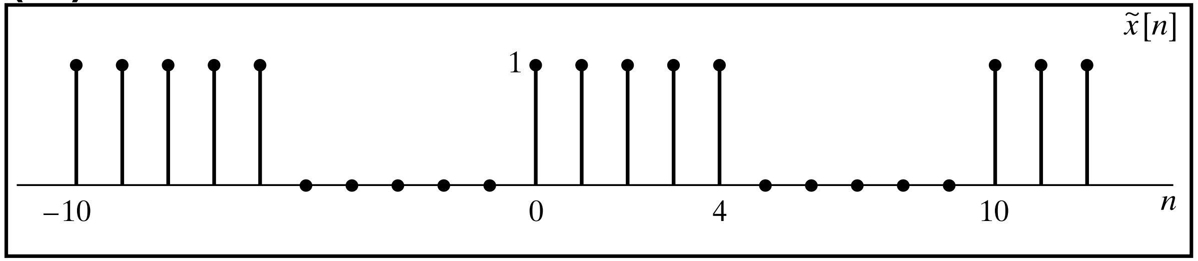


Lo que obtenemos son infinitas muestras periodicas; sólo nos interesa el primer periodo



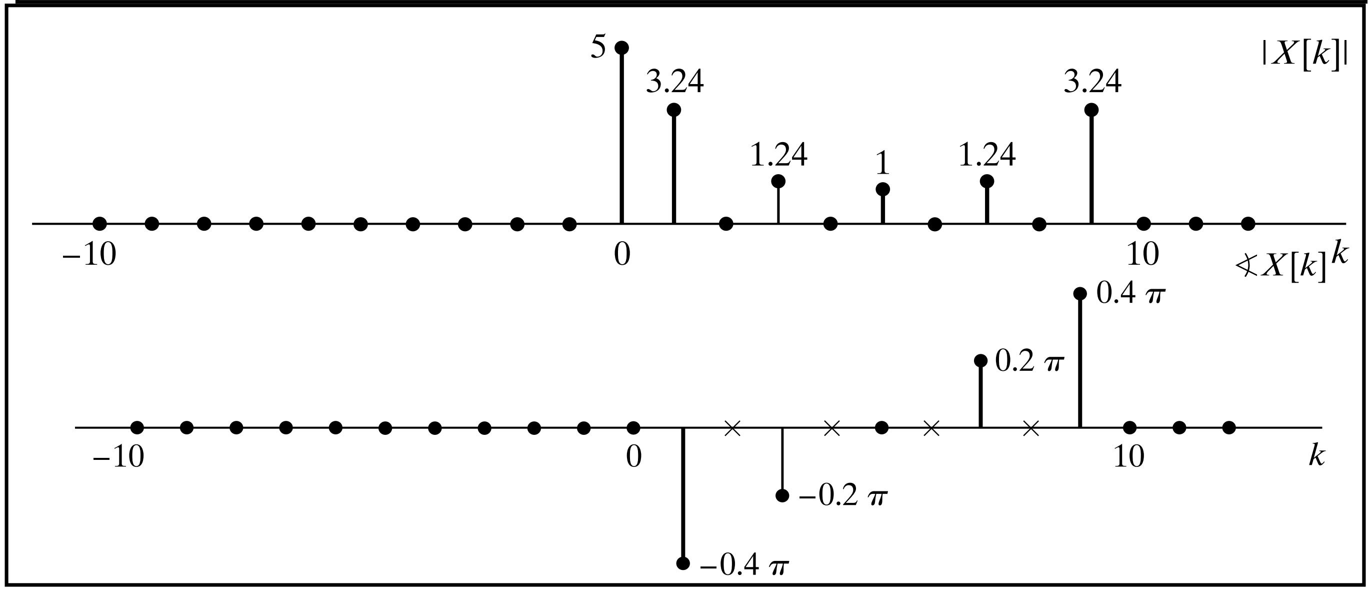
Ejemplo de DFT (II).

Ahora consideramos N=10. Implícitamente suponemos que se tiene la señal



Operando

$$X(k) = \sum_{n=0}^{9} x(n)\cdot e^{\frac{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot k\cdot n}{10}} = \sum_{n=0}^{4} x(n)\cdot e^{\frac{-j\cdot\pi\cdot k\cdot n}{5}} = \frac{1-e^{-j\cdot\pi\cdot k}}{1-e^{\frac{-j\cdot\pi\cdot k}{5}}} = e^{-j\cdot\pi\cdot 0.4\cdot k}\cdot\frac{sen\left(\frac{\pi\cdot k}{2}\right)}{sen\left(\frac{\pi\cdot k}{10}\right)}$$



Propiedades de la DFT

$$\boxed{x\left[\left((n)\right)_N\right] = x\left[\left(n \text{ módulo } N\right)\right]}$$

$$\boxed{W_N = e^{\frac{-j\cdot 2\cdot \pi}{N}}}$$

	Finite-Length Sequence (Length N)	N-point DFT (Length N)
1.	$x[n]$	$X[k]$
2.	$x_1[n], x_2[n]$	$X_1[k], X_2[k]$
3.	$ax_1[n] + bx_2[n]$	$aX_1[k] + bX_2[k]$
4.	$X[n]$	$Nx[((-k))_N]$
5.	$x[((n-m))_N]$	$W_N^{km} X[k]$
6.	$W_N^{-\ell n} x[n]$	$X[((k-\ell))_N]$
7.	$\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2[((n-m))_N]$	$X_1[k]X_2[k]$
8.	$x_1[n]x_2[n]$	$\frac{1}{N}\sum_{\ell=0}^{N-1} X_1(\ell) X_2[((k-\ell))_N]$
9.	$x^*[n]$	$X^*[((-k))_N]$
10.	$x^*[((-n))_N]$	$X^*[k]$
11.	$\mathcal{R}e\{x[n]\}$	$X_{\text{ep}}[k] = \frac{1}{2}\{X[((k))_N] + X^*[((-k))_N]\}$
12.	$j\mathcal{J}m\{x[n]\}$	$X_{\text{op}}[k] = \frac{1}{2}\{X[((k))_N] - X^*[((-k))_N]\}$
13.	$x_{\text{ep}}[n] = \frac{1}{2}\{x[n] + x^*[((-n))_N]\}$	$\mathcal{R}e\{X[k]\}$
14.	$x_{\text{op}}[n] = \frac{1}{2}\{x[n] - x^*[((-n))_N]\}$	$j\mathcal{J}m\{X[k]\}$
Properties 15–17 apply only when $x[n]$ is real.		
15.	Symmetry properties	$\begin{cases} X[k] = X^*[((-k))_N] \\ \mathcal{R}e\{X[k]\} = \mathcal{R}e\{X[((-k))_N]\} \\ \mathcal{J}m\{X[k]\} = -\mathcal{J}m\{X[((-k))_N]\} \\ \lvert X[k]\rvert = \lvert X[((-k))_N]\rvert \\ \sphericalangle\{X[k]\} = -\sphericalangle\{X[((-k))_N]\} \end{cases}$
16.	$x_{\text{ep}}[n] = \frac{1}{2}\{x[n] + x[((-n))_N]\}$	$\mathcal{R}e\{X[k]\}$
17.	$x_{\text{op}}[n] = \frac{1}{2}\{x[n] - x[((-n))_N]\}$	$j\mathcal{J}m\{X[k]\}$

Cuestiones a tener en cuenta con la DFT

La Transformada de Fourier de una secuencia discreta x(n) viene definida de la siguiente forma

$$X\left(e^{j\cdot w}\right) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l)\cdot e^{j\cdot w\cdot l}$$

Aquí teníamos dos problemas; por una parte tenemos un sumatorio infinito; necesito conocer TODA la secuencia x(n) desde ± ∞ para calcular dicha Transformada de Fourier.

Por otra parte, la Transformada de Fourier es función de una variable (w) que puede tomar infinitos valores (intervalo 0-2·π).

Las soluciones han sido por una parte ***restringir*** el tamaño de x(n); este hecho tendrá una repercusión directa sobre la RESOLUCIÓN de la DFT. Se define dicha ***resolución*** como la mínima frecuencia que la DFT puede discernir. De modo intuitivo si tengo una señal de duración 1 s la mínima frecuencia que podré diferenciar es 1 Hz (en ese intervalo temporal la sinusoide completa con frecuencia mínima es la de 1 Hz). Otro efecto relacionado con el anterior es el del ***enventanado*** que se comentará más adelante.

Por otra parte, se ha muestreado la Transformada de Fourier lo que conduce a efectos parecidos a los que se tenía cuando se muestreaba a nivel temporal; por una parte la repetición de espetros (a nivel temporal) se traduce aquí en una repetición de la señal temporal. Esto además conlleva a tener en cuenta los posible efectos del ***"aliasing temporal".***