PROGRAMACIÓN MATEMÁTICA

PROBLEMAS TEÓRICO-PRÁCTICOS

EJERCICIOS PARA ORDENADOR

CURSO 2002/2003

DEPARTAMENT DE MATEMÀTICA
ECONÒMICO EMPRESARIAL

COLECCIÓN DE EJERCICIOS TEÓRICO-PRÁCTICOS

TEMA 1 - INTRODUCCIÓN A LA OPTIMIZACIÓN

1.- Utilizando una de las siguientes funciones objetivo:

$$f(x,y,z)= xy+2x-z \qquad g(x,y,z)=x+2y-6z$$

y una o varias de las siguientes restricciones

$$x+2y+z\leq 6 \ ; \ x+2y-z=3 \ ; \ y+2x+3\geq 0$$

enunciar, si es posible, un problema de:

a) Programación clásica.

b) Programación no lineal.

c) Programación lineal.

d) Programación lineal entera.

2.- Dado el siguiente problema:

$$\begin{aligned} &\text{Max } x^2 + y^2 \\ &\text{s.a. } x + y = 1 \end{aligned}$$

a) Decir, razonadamente, a que tipo o tipos de programación matemática corresponde (clásica, no lineal, lineal o lineal entera).

b) Escribir el conjunto de oportunidades. Dar, si es posible, una solución factible interior, una solución factible de frontera y una solución no factible.

c) Aplicar el teorema de Weierstrass.

d) Escribir de nuevo el problema de forma que tenga

- objetivo de minimización,
- restricciones de menor o igual y
- todas las variables con condiciones de no negatividad.

3.- Dado el siguiente problema:

$$\begin{aligned} &\text{Min } x^2 + y^2 \\ &\text{s.a. } x + y \leq 6 \\ &\qquad xy \leq 4 \\ &\qquad y \geq 0 \end{aligned}$$

a) Decir, razonadamente, a que tipo o tipos de programación matemática corresponde (clásica, no lineal, lineal o lineal entera).

b) Escribir el conjunto de oportunidades. Dar, si es posible, una solución factible interior, una solución factible de frontera y una solución no factible.

c) Aplicar el teorema de Weierstrass.

d) Escribir de nuevo el problema de forma que tenga

- objetivo de maximización y
- restricciones de mayor o igual.

4.- Dado el siguiente problema:

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & 2x+3y+z \\ \text{s.a.} & x+2y+z \leq 30 \\ & x+y \geq 20 \\ & x\geq 0\ ,\ y\leq 0 \end{array}$$

a) Decir, razonadamente, a que tipo o tipos de programación matemática corresponde (clásica, no lineal, lineal o lineal entera).

b) Escribir el conjunto de oportunidades. Dar, si es posible, una solución factible interior, una solución factible de frontera y una solución no factible.

c) Escribir de nuevo el problema de forma que tenga

- objetivo de minimización,
- restricciones de igual y
- todas las variables con condiciones de no negatividad.

5.- Dado el siguiente problema:

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & 2x+3y+z \\ \text{s.a.} & x+2y+z \leq 30 \\ & x+y \geq 20 \\ & x\geq 0\ ,\ y\leq 0\ ,\ z \in Z \end{array}$$

a) Decir, razonadamente, a que tipo o tipos de programación matemática corresponde (clásica, no lineal, lineal o lineal entera).

b) Escribir el conjunto de oportunidades. Dar, si es posible, una solución factible interior, una solución factible de frontera y una solución no factible.

c) Escribir de nuevo el problema de forma que tenga restricciones de menor o igual.

6.- Dado el siguiente problema:

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & 2x+3y \\ \text{s.a.} & x+2y \leq 30 \\ & x+y \geq 20 \\ & x\geq 0 \text{ , } y\leq 0 \end{array}$$

a) Decir, razonadamente, a que tipo o tipos de programación matemática corresponde (clásica, no lineal, lineal o lineal entera).

b) Escribir el conjunto de oportunidades. Dar, si es posible, una solución factible interior, una solución factible de frontera y una solución no factible.

c) Aplicar el teorema de Weierstrass.

d) Escribir de nuevo el problema de forma que tenga: objetivo de minimización, restricciones de igualdad y todas las variables con condiciones de no negatividad.

7.- Definir problema infactible y problema no acotado. Explicar las diferencias entre ambos.

TEMA 2 - PROGRAMACIÓN CLASICA

1.- Calcular los puntos extremos de las siguientes funciones y clasificarlos:

a) $z = x^2+xy+y^2-6x+2$

b) $z = x^2+xy+y^2+x+5y$

c) $z = 3x^2+5y^2+5z^2+2yz+6xz-2xy$

d) $z = x^2+2y^2-4x+6y$

e) $z = x^2-xy+y^2+3x-2y+1$

f) $z = x^3+3xy^2-15x-12y$

g) $z = x^3+y^3-9xy+27$

h) $z = x^3+y^3+2x^2+4y^2+6$

i) $z = x^3+x^2-xy+y^2+4$

j) $z = x^3+y^3-3xy$

k) $z = x^3+4y^2+z^2+2xt+t^2-5x$

2.- Dada la función

$$F(x,y) = x^2-xy+y^2+6x-4y+1$$

a) Calcular su punto extremo y clasificarlo.

b) Imponer una restricción a dicha función de forma que el punto extremo anterior deje de serlo en el problema restringido. Calcular el multiplicador de Lagrange.

3.- Dada la función

$$F(x,y) = x^2+2y^2-6x+4y$$

a) Calcular su punto extremo y clasificarlo.

b) Imponer una restricción a dicha función de forma que el punto extremo anterior lo siga siendo en el problema restringido. Calcular el multiplicador de Lagrange.

4.- Obtener los puntos extremos restringidos en los siguientes problemas y clasificarlos:

a) $z = 3x^2+xy+4y^2$

s.a: $3x+y=6$

b) $z = 2x+y$

s.a: $x+2y^2=3$

c) $z = x^2-3y^2+2xy+4x-2y$

s.a: $x-2y+1=0$

d) $z = x^2+y^2$

s.a: $y+x^2=1$

e) $z = x^2+y^2+z^2+t^2$

s.a: $x+y+z+t=1$

f) $z = x^2+y^2+z^2-2x-2y$

s.a: $x+y-2z=0$

$y-x=0$

g) $z = -x^2+xy+yz-y^2-z^2$

s.a: $x+z=2$

$x+y=4$

5.- Calcular los puntos extremos en función del parámetro "a" en los siguientes problemas:

a) $z = (1/2)ax^2+(1/2)ay^2+(1/2)z^2$

s.a: $x+y+z=1$

b) $z = x^2+y^2-3xy+z^2$

s.a: $x+y+z=a$

c) $z = ax-2y-2z^2$

s.a: $ax+y^2-4z=-3$

6.- Dada la función:

$z = x^2-y^2+3xy$

a) Calcular sus puntos extremos y clasificarlos.

b) Al imponer una restricción lineal del tipo $ax+by=1$ se sabe que el punto extremo obtenido es $(5/6,1/6)$, calcular el valor de los coeficientes "a" y "b" y el valor del multiplicador de Lagrange. Clasificar el anterior punto extremo restringido.

7.- Dado el problema de optimizar

$z = -2x^2+ayz+2x+3y-z+2$

s.a: $2x+y-2z+b=0$

se sabe que existe un óptimo en el punto $(0,1,2)$.

a) Calcular el valor de los parámetros "a" y "b" y el del multiplicador de Lagrange.

b) Clasificar el óptimo. ¿Es también un óptimo sin restringir?.

8.- Un inversor plantea invertir cantidades "x" e "y" en dos activos financieros. Los intereses esperados vienen dados por la función $I(x,y)=0{,}12x+0{,}08y$. La restricción indica el nivel de riesgo del inversor y en este caso es $0{,}25x^2+0{,}05y^2+0{,}1xy=100r$, donde "r" es el riesgo dispuesto a asumir por el inversor. Se pide:

a) Calcular la relación entre x e y para maximizar los intereses esperados.

b) Calcular las cantidades invertidas para un nivel de riesgo $r=13{,}6$ y los intereses esperados.

c) Deducir, según el valor del multiplicador, como afecta a los intereses esperados un pequeño aumento en ese nivel de riesgo.

9.- La función de beneficios $B(x,y,z) = -x^2+4xy-2y^2+6z-3z^2+10$ corresponde a una empresa que exporta cantidades "x", "y" y "z" de un producto a tres países. La suma de las cantidades exportadas no puede superar una determinada cuota "a" (en miles de toneladas). Se pide:

a) Calcular las cantidades a exportar a cada país si la cuota a la exportación es de 10,5 miles de toneladas.

b) Razonar el efecto que produciría una pequeña disminución de la cuota a la exportación.

c) Calcular las cantidades a exportar si desaparece la cuota a la exportación.

d) Razonar si a la empresa le conviene la existencia de cuotas a la exportación o no.

10.- Una empresa produce un bien en cantidad "z" empleando dos factores de producción en cantidades "x" e "y". La función de producción que se desea maximizar es $z=x^2+2y^2+10xy$. La restricción es de tipo presupuestario y se sabe que el precio del primer factor es de una u.m. y el del segundo factor es de dos u.m., a su vez el presupuesto disponible para adquirirlos es de 70 u.m..

a) Calcular la cantidad que producirá del bien "z" y las cantidades que utilizará de los dos factores de producción.

b) Razonar acerca de la conveniencia de aumentar el presupuesto disponible.

11.- Una empresa produce tres productos (x,y,z) con la función de costes $C(x,y,z)=x^2+2x+y^2+z^2+2z$. Las cantidades que debe vender en dos mercados tienen la siguiente estructura:

$2x+8y+6z=204$ (estructura de la demanda del primer mercado)

$2x+4y+2z=92$ (estructura de la demanda del segundo mercado)

donde los términos independientes indican la demanda en cada mercado.

a) Calcular las cantidades a producir de cada producto para minimizar costes.

b) Calcular el coste óptimo.

c) Razonar si a la empresa le interesa un aumento en la demanda de los dos mercados. ¿En cual preferentemente?.

12.- La utilidad de un individuo a lo largo de su vida depende del consumo en su etapa activa "c_1" y del consumo en su etapa pasiva "c_2". La función de utilidad es del tipo Cobb-Douglas:

$$U(c_1,c_2) = (c_1c_2)^{1/2}$$

y la restricción presupuestaria indica que el consumo en el periodo pasivo es igual al ahorro en el periodo activo mas sus intereses, es decir:

$$c_2 = (Y_1-c_1)(1+i)$$

Se pide:

a) Determinar el consumo en el periodo activo y pasivo para maximizar la utilidad en un individuo con una renta $Y_1=1000$ y un interés $i=0{,}1$.

b) Razonar si otro individuo con mayor renta obtendrá mayor utilidad o no.

c) Calcular los consumos del individuo anterior si $i=0{,}05$ y comparar la estrategia consumo-ahorro respecto a la obtenida en el apartado a).

TEMA 3 - INTRODUCCIÓN A LA PROGRAMACIÓN NO LINEAL

1.- Para los siguientes problemas:

- Aplicar el teorema de Weierstrass.
- Resolverlos gráficamente.
- Estudiar si los óptimos obtenidos, cuando así sea, cumplen las condiciones de Kuhn y Tucker.
- Estudiar si los óptimos obtenidos, cuando así sea, cumplen la condición de regularidad.
- Estudiar si los óptimos obtenidos, cuando así sea, cumplen la condición de suficiencia.
- Aplicando la información de los apartados anteriores que se considere pertinente, razonar qué se sabe acerca de la solución de cada uno de los problemas.

a) Max $-x^2 - y^2$

s.a. $x + y \leq 1$

b) Min $x^2 + y^2$

s.a. $x + y \geq -1$

c) Max $x + y$

s.a. $x^2 + y^2 \leq 1$

d) Min $x + y$

s.a. $x^2 + y^2 \leq 1$

e) Max x

s.a. $x^2 + y^2 \leq 1$

$x , y \geq 0$

f) Max y

s.a. $6 - x^2 - y^2 \geq 0$

$x^2 - y \geq 0$

$x , y \geq 0$

2.- Consideremos el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & x^2 + y^2 \\ \text{s.a.} \quad & x + y \leq 1 \\ & x - y \leq 0 \\ & -x \leq 0 \end{aligned}$$

a) Demostrar que el conjunto de oportunidades es un poliedro (politopo acotado).

b) Calcular sus puntos extremos y demostrar que todos ellos son puntos de Kuhn y Tucker.

c) Demostrar que cualquier solución factible es un punto regular.

3.- Sea el problema de PNL:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & 6x + 3y - x^2 + 4xy - 4y^2 \\ \text{s.a.} \quad & x + y \leq 3 \\ & 4x + y \leq 9 \\ & x\,,\, y \geq 0 \end{aligned}$$

Sabiendo que (2,1) es su único punto de Kuhn y Tucker, demostrar que es el único máximo global.

4.- Dado el problema de PNL:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & 2x + y \\ \text{s.a.} \quad & xy \leq 4 \\ & x - y \geq -2 \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

a) Escribir las condiciones de Kuhn y Tucker.

b) Demostrar que el punto (-2,0) es un punto de Kuhn y Tucker utilizando las condiciones del apartado a).

c) Demostrar que el punto (-2,0) es un punto de Kuhn y Tucker utilizando la condición necesaria de Kuhn y Tucker.

5.- Dado el problema de programación no lineal

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & f(x,y) \\ \text{s.a.} \quad & g_1(x,y) \le b_1 \\ & g_2(x,y) = b_2 \\ & x \ge 0 \end{aligned}$$

Escribir la función lagrangiana y las condiciones de Kuhn y Tucker correspondientes.

6.- Para el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & (x-2)^2 + (y-2)^2 \\ \text{s.a.} \quad & x - y \le 8 \\ & x + y \ge -4 \\ & x, y \ge 0 \end{aligned}$$

se pide:

a) Escribir las condiciones de Kuhn y Tucker.

b) Comprobar si los puntos (2,-6) y (8,0) verifican dichas condiciones.

c) Utilizando los resultados del apartado anterior, ¿qué se puede afirmar de su optimalidad?

7.- Dado el problema:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & -4x^2 - 2xy - y^2 \\ \text{s.a.} \quad & x^2 + y^2 \le 4 \\ & 2x + 2y \ge 2 \end{aligned}$$

se pide:

a) Comprobar si los puntos (0,1), (1,0) y (2,2) cumplen las condiciones de Kuhn y Tucker.

b) Para aquellos puntos del apartado a) en que la respuesta sea afirmativa, comprobar si las condiciones de Kuhn y Tucker son necesarias y suficientes.

8.- Dado un problema de programación no lineal se sabe:

- todas sus restricciones son lineales.
- x^* es su único punto de Kuhn y Tucker.

¿Qué condiciones deben cumplirse para que x^* sea el único óptimo del problema?

TEMA 4 - INTRODUCCIÓN A LA PROGRAMACIÓN LINEAL

1.- Resolver gráficamente los siguientes problemas de PL, obteniendo la solución óptima e indicando de qué tipo es:

a)
$$\begin{array}{ll} \text{Max} & x+y \\ \text{s.a.} & -x+y\leq 2 \\ & x+2y\leq 6 \\ & 2x+y\leq 6 \\ & x,y\geq 0 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{ll} \text{Max} & 2x+y \\ \text{s.a.} & -x+y\leq 2 \\ & x+2y\leq 6 \\ & 2x+y\leq 6 \\ & x,y\geq 0 \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{ll} \text{Max} & x+y \\ \text{s.a.} & -x+y\leq 2 \\ & y\leq 4 \\ & x,y\geq 0 \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{ll} \text{Max} & x+3y \\ \text{s.a.} & x+y\leq 6 \\ & -x+2y\leq 8 \\ & x,y\geq 0 \end{array}$$

e)
$$\begin{array}{ll} \text{Min} & 6x+8y \\ \text{s.a.} & 3x+y\geq 4 \\ & 5x+2y\geq 7 \\ & x,y\geq 0 \end{array}$$

f)
$$\begin{array}{ll} \text{Min} & -x-y \\ \text{s.a.} & x-y\geq 10 \\ & -x+y\geq 1 \\ & x,y\geq 0 \end{array}$$

2.- Expresar los siguientes problemas lineales en forma estándar y canónica:

a)
$$\begin{array}{ll} \text{Max} & x+y \\ \text{s.a.} & -x+y=2 \\ & x+2y\leq 6 \\ & 2x+y\geq 6 \\ & x\geq 0 \quad y\leq 0 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{ll} \text{Max} & 2x+3y+z \\ \text{s.a.} & 4x+3y+z\leq 20 \\ & x+y\leq 20 \\ & x\geq 0 \ y\leq 0 \ \ z \text{ libre} \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{ll} \text{Min} & x+y \\ \text{s.a.} & -x+y\leq 2 \end{array}$$

3.- ¿Cuántas variables distintas de cero tiene como máximo una solución factible básica de un problema lineal de n variables y m restricciones?

4.- Dado el siguiente problema de PL:

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & 2x+3y+z \\ \text{s.a.} & x+2y+z\leq 30 \\ & x+y\leq 20 \\ & x,y,z\geq 0 \end{array}$$

Razonar cuál o cuáles de los siguientes puntos son soluciones factibles básicas.

a) (10,10,0,0,0) **c)** (20,0,5,5,0) **e)** (20,0,5, 0,0)

b) (0,0,0, 30,20) **d)** (0,0,30, 0,20)

5.- Dado el siguiente problema de PL, calcular todas las soluciones factibles básicas del problema e indicar la base que tiene asociada cada una de ellas.

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & 2x - 3y \\ \text{s.a.} \quad & x + y \leq 1 \\ & x - y \leq 0 \\ & x, y \geq 0 \end{aligned}$$

6.- Dado el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & x_1+2x_2+4x_3 \\ \text{s.a.} \quad & x_1+x_2\leq 10 \\ & x_1+2x_2+x_3=14 \\ & x_1 , x_2 , x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

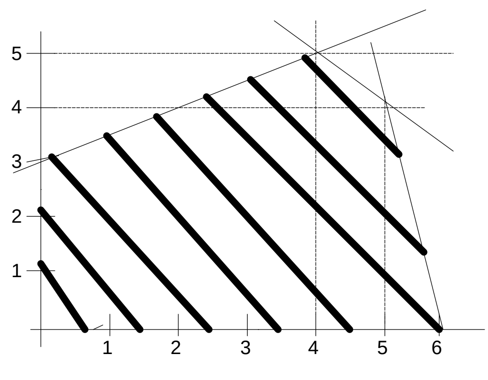
a) Determinar la solución factible básica cuya base asociada es $\{P_1, P_2\}$.

b) Calcular dos soluciones factibles básicas más.

c) Calcular una solución factible pero no básica.

d) Calcular una solución básica pero no factible.

7.- Un cierto problema lineal tiene el siguiente conjunto factible:



a) Enumerar todas las soluciones factibles básicas de dicho problema:

b) Si se sabe que la función objetivo de dicho problema es 4x-y, ¿se puede calcular cuál es la solución óptima? Si la respuesta es afirmativa, indicar cuál es y qué debería ocurrir para que no se pudiese. Si la respuesta es negativa, razonar qué debería ocurrir para que sí se pudiese.

TEMA 5 - EL MÉTODO SÍMPLEX

1.- Dado el siguiente problema de PL:

Max $2x+2y+10$

s.a. $4x+2y\leq 16$

$x+2y\leq 8$

$x,y\geq 0$

¿Con cuántas tablas diferentes podría empezar el algoritmo del símplex? Plantear dos de ellas e indicar en cada una, si es procedente, la variable de entrada, la variable de salida y el elemento pivote.

2.- .- Resolver por el método símplex:

Min $x_1+2x_2+4x_3$

s.a. $x_1+x_2\leq 10$

$x_1+2x_2+x_3=14$

$x_1\geq 0,\ x_2\leq 0,\ x_3$ libre

3.- Dado el PL:

Max $c_1x_1+2x_2+x_3$

s.a. $x_1+2x_2+a_{13}x_3\leq 8$

$2x_1+4x_3\leq b_2$

$x_i\geq 0\ \forall i$

y conociendo los siguientes valores de la tabla óptima:

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	b
x_2				1/2		
x_1						3
w_j			-7	-1	-1	

Hallar los valores de c_1, a_{13}, b_2 y completar la tabla.

4.- La última tabla del símplex correspondiente a un determinado PL de maximizar escrito en forma canónica es:

		1	-2	-1	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	B
1	x_1	1	-2	1	0	0	1	2
0	s_2	0	1	-1	0	1	0	1
0	s_1	0	½	0	1	0	½	4
	c_j-z_j	0	0	-2	0	0	-1	Z=2

a) ¿Existe solución? ¿ es única? Razonar la respuesta y, si la solución no es única, obtener las soluciones restantes.

b) ¿Qué le ocurriría al valor de la función objetivo si se decidiese cambiar de solución introduciendo x_3 en la base?

c) Calcular el problema original.

5.- Dado el problema de PL:

Max $2x_1+x_2$

s.a. $-x_1+x_2 \leq 2$

$x_1+2x_2 \leq 6$

$2x_1+x_2 \leq 6$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

y sabiendo que en el óptimo $x_1=2$ y $x_2=2$, calcular la tabla óptima del símplex sin realizar ninguna iteración. ¿De qué tipo es la solución?

6.- Dado el problema de PL

Max x_1+x_2

s.a. $-x_1+x_2 \leq 2$

$x_2 \leq 4$

$x_1\ ,\ x_2 \geq 0$

Obtener, sin iterar, la tabla del símplex en la cual las variables básicas son x_2 y s_2.

¿Es la tabla óptima? En caso afirmativo, indicar la solución y el valor de la función objetivo. En caso negativo, realizar una iteración más.

7.- Se calculan tres tablas del símplex para un problema lineal de minimización de las cuales se sabe:

- En la segunda tabla, existe una variable básica cuyo valor es cero.
- La función objetivo toma un valor de 4 en la primera tabla, 3 en la segunda y 3 en la tercera.
- En la tercera tabla uno de los costes reducidos básicos vale tres.

Se puede afirmar, con total seguridad, que ha habido algún error de cálculo. Explicar por qué.

8.- Dado el siguiente problema lineal:

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & 5x_1-x_2 \\ \text{s.a.} & 2x_1+x_2\geq 3 \\ & x_1+5x_2=1 \\ & x_i\geq 0,\ \forall i \end{array}$$

a) Resolverlo utilizando el método de las penalizaciones.

b) ¿Es imprescindible añadir variables artificiales? En caso negativo, indicar cuál podría ser la tabla inicial del símplex.

9.- Cuando en un problema de programación lineal se llega a una tabla con todos los $w_j\leq 0$ y una variable artificial es básica, ¿qué se sabe sobre la solución del problema?

10.- Poner un ejemplo de un problema lineal que tenga al menos una restricción de igualdad y no necesite variables artificiales para que la matriz básica de la primera tabla sea la identidad.

TEMA 6 - DUALIDAD EN PROGRAMACION LINEAL

1.- Dado el siguiente problema de PL:

Max $x_1+x_2+x_4$

s.a. $2x_1+x_2+4x_3=10$

$x_1+2x_4\leq 8$

$x_i\geq 0,\ \forall i=1,3,\ x_4$ libre, $x_2\leq 0$

Plantear el problema dual asociado.

2.- Dado el siguiente problema de PL:

Min $x_1+x_2+x_4$

s.a. $2x_1+x_2+4x_3=10$

$x_1+2x_4\leq 8$

$x_i\geq 0,\ \forall i=1,3,\ x_4$ libre, $x_2\leq 0$

Plantear el problema dual asociado

3.- Resolver gráficamente el siguiente problema:

Min $2x+3y+5s+2t+3u$

s.a.: $x+y+2s+t+u\geq 4$

$2x+2y+3s+t+u\geq 3$

$x,y,s,t,u\geq 0$

4.- Dado el siguiente problema lineal:

Max $4x_1+3x_2+x_3$

s.a. $x_1+x_2+x_3\leq 4$

$x_1+x_3\geq 4$

$x_i\geq 0,\ \forall i$

Plantear el problema dual asociado, obtener su solución y calcular, a partir de ella, la solución primal.

5.- El conjunto de oportunidades de un determinado problema lineal es

$$S=\{ (x , y) \in R^2 / -2x + 5y \leq 10 , 2x + y \leq 6 , -x + 3y \leq 3 , x + 2y \geq 2 , x \geq 0 , y \geq 0\}$$

Supongamos que resolvemos el problema dual asociado. Analizar cuáles de los siguientes casos son posibles:

a) El problema dual tiene solución óptima.

b) El problema dual es no factible.

c) El problema dual es no acotado.

6.- Dado un problema lineal con cinco variables, se sabe que (0,3,0,1,4) es una solución factible. Supongamos que resolvemos el problema dual asociado. Analizar cuáles de los siguientes casos son posibles:

a) El problema dual tiene solución óptima.

b) El problema dual es no factible.

c) El problema dual es no acotado.

7.- Dado un problema lineal de maximizar en forma canónica cuya solución viene dada por:

$F(x_1,x_2,x_3)=20$

$(x_1,x_2,x_3,s_1,s_2)=(1,0,3,0,0)$

$(w_{x1},w_{x2},w_{x3},w_{s1},w_{s2})=(0,-2,0,-2 ,-4)$

Indicar las variables básicas y las no básicas del óptimo dual, así como su valor, los w_j duales y el valor de la función objetivo dual en el óptimo.

8.- Dado un problema lineal de minimizar en forma canónica, se sabe que el óptimo es degenerado. ¿Qué se puede saber acerca del óptimo dual?

9.- Cierto fabricante produce sillas y mesas para lo que requiere la utilización de dos secciones de producción: la sección de montaje y la sección de pintura. La producción de una silla requiere una hora de trabajo en la sección de montaje y 2 horas en la de pintura. Por su parte, la fabricación de una mesa precisa de tres horas en la sección de montaje y una hora en la de pintura. La sección de montaje sólo puede estar 9 horas diarias en funcionamiento, mientras que la de pintura sólo 8 horas. El beneficio que se obtiene produciendo mesas es el doble que el de sillas. El fabricante pretende maximizar beneficios. Se pide:

a) Plantear el problema como un problema lineal y resolverlo mediante el método símplex.

b) Interpretar el valor de las variables principales y el de las de holgura.

c) Interpretar el valor de los costes reducidos.

d) Calcular las variables duales e interpretar su valor.

e) Utilizando aquellas interpretaciones de los apartados anteriores que se consideren pertinentes, razonar si al empresario le conviene aumentar las horas de funcionamiento de la sección de montaje ¿Y de la de pintura?

10.- ¿Es posible resolver gráficamente un problema lineal de 4 variables y 2 restricciones?. En caso afirmativo explicar cómo; en caso negativo, indicar el número máximo de variables y restricciones que debe tener un problema para poder ser resuelto gráficamente.

TEMA 7 - ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD Y POST-OPTIMIZACIÓN

1.- Sea el PL:

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & x_1+2x_2 \\ \text{s.a.} & x_1+x_2\leq 4 \\ & 2x_1+x_2\leq 6 \\ & x_1 , x_2 \geq 0 \end{array}$$

Sabiendo que las variables básicas en la solución óptima son s_2 y x_2 se pide:

a) Obtener la solución óptima.

b) Realizar el análisis de sensibilidad de:

- c_1,
- c_2,
- b_1,
- b_2 y
- a_{11}.

c) Obtener, partiendo de la solución óptima conocida, la solución óptima para cada uno de los siguientes cambios:

- $c_1=3/2$,
- $c_1=3$,
- $c_2=1/2$,
- $c_2=4$,
- $b_1=5$,
- $b_1=10$ y $b_2=8$,
- $a_{11}=2$ y $a_{21}=2$,
- se introduce una nueva variable x_3 con $c_3=6$ y $P^t_3 = (2,2)$,
- se introduce una nueva restricción $x_1 + 2x_2 \leq 8$.

d) Partiendo de la solución óptima inicial, calcular el valor que debería tener el coeficiente en la función objetivo de una nueva variable para que entrara en la base, si sus coeficientes en las restricciones son $a_{13}=2$ y $a_{23}=1$.

(Nota: cada uno de los apartados y subapartados de este problema debe realizarse a partir del problema original y no de los resultados del apartado o subapartado anterior.)

2.- Volver a resolver los apartados del problema 1 para un problema lineal de maximizar en forma canónica cuya tabla óptima es:

	x_1	x_2	s_1	s_2	b
x_2	1	1	1	0	4
s_2	1	0	-1	1	2
w_j	-1	0	-2	0	8

3.- Si el coeficiente en la función objetivo de una variable básica cambia, pero sin salirse de su intervalo de sensibilidad, analizar los cambios que se producen sobre la composición de la base, el valor de las variables básicas y el valor de la función objetivo en el óptimo del nuevo problema.

4.- Si un coeficiente técnico asociado a una variable no básica cambia, pero sin salirse de su intervalo de sensibilidad, analizar los cambios que se producen sobre la composición de la base, el valor de las variables básicas y el valor de la función objetivo en el óptimo del nuevo problema.

5.- Si el coeficiente en la función objetivo de una variable no básica cambia pero sin salirse de su intervalo de sensibilidad, analizar los cambios que se producen sobre la composición de la base, el valor de las variables básicas y el valor de la función objetivo en el óptimo del nuevo problema.

6.- Si un término independiente de una restricción cambia, pero sin salirse de su intervalo de sensibilidad, analizar los cambios que se producen sobre la composición de la base, el valor de las variables básicas y el valor de la función objetivo en el óptimo del nuevo problema.

7.- Un botellero embotella y comercializa tres tipos de vino A, B y C, obteniendo un beneficio por cuba de 50, 25 y 20 u.m., respectivamente. Cada cuba ha de pasar por dos fases, llenado y precintado. La primera trabaja hasta un total de 640 horas semanales y la segunda 900 horas semanales.

El número de horas que una cuba necesita en cada fase viene dado por la tabla:

	Llenado	**Precintado**
A	**16**	**30**
B	**4**	**5**
C	**6**	**10**

La solución óptima del modelo lineal que representa el problema es:

(0, 160, 0, 0, 100).

a) ¿Cuántas cubas de tipo C rellenaría si las horas totales de la sección de llenado fueran 700?

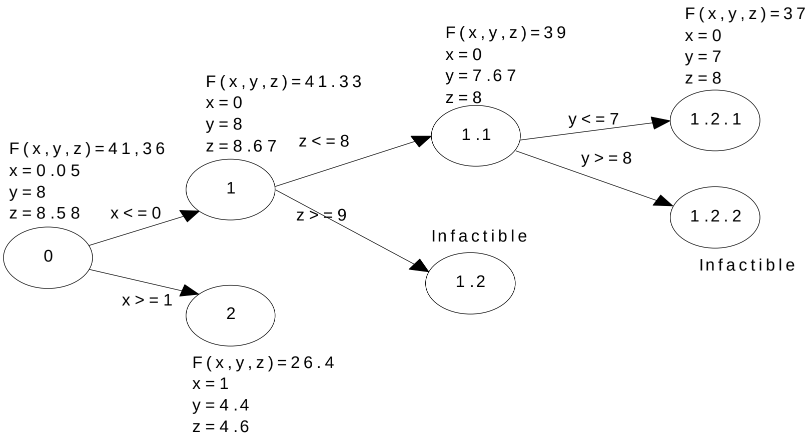
b) Si el beneficio por cuba tipo A fuese 55 u.m., ¿cuántas cubas tipo B se llenarían?

c) ¿Cuánto puede disminuir el beneficio unitario de las cubas del tipo A sin que la solución varíe?

d) Calcular e interpretar el intervalo de sensibilidad del beneficio por cuba del tipo B.

TEMA 9 - PROGRAMACIÓN LINEAL ENTERA

1.- Dado un cierto problema de programación lineal entera pura cuyo árbol de ramificación es el siguiente:

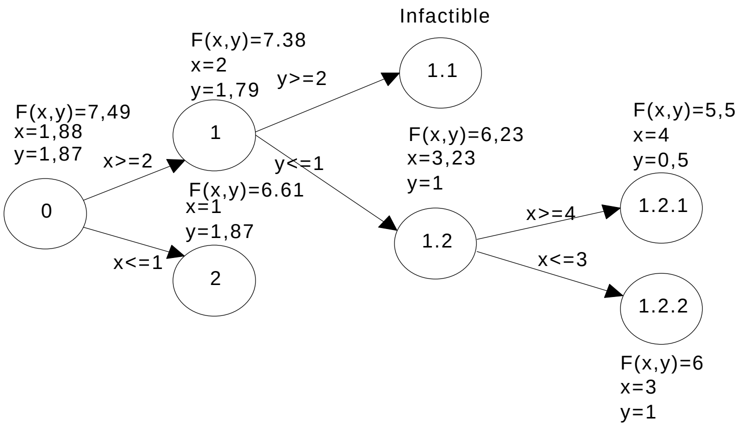


a) Razonar si el objetivo del problema es de maximización o minimización

b) ¿Se ha llegado al óptimo? En caso afirmativo explicar por qué y, en caso negativo, indicar qué nodo debería ramificarse y por medio de qué restricciones.

c) Escribir el problema que se ha resuelto en el nodo 1.2.1.

2.- Dado un cierto problema de programación lineal entera pura cuyo árbol de ramificación es el siguiente:

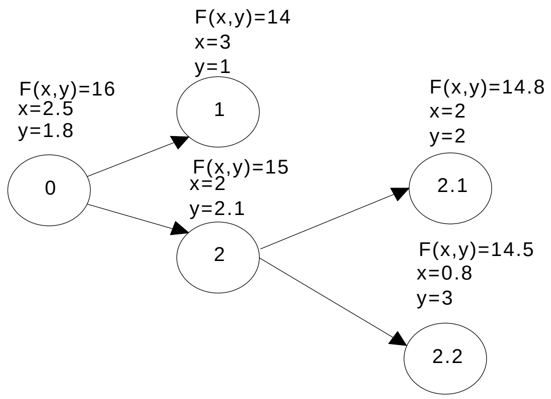


a) Razonar si el objetivo del problema es de maximización o minimización

b) ¿Se ha llegado al óptimo? En caso afirmativo explicar por qué y, en caso negativo, indicar qué nodo debería ramificarse y por medio de qué restricciones.

c) Escribir el problema que se ha resuelto en el nodo 1.2.1.

3.- Dado un cierto problema de programación lineal entera pura cuyo árbol de ramificación es el siguiente:

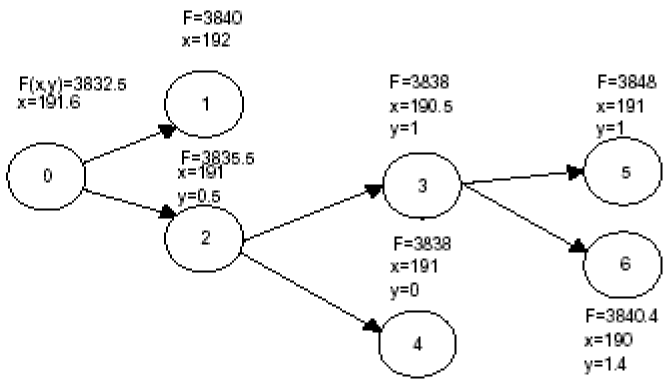


Se pide:

a) Situar en cada ramificación la restricción que se ha añadido.

b) ¿Se ha llegado al óptimo? En caso afirmativo explicar por qué y, en caso negativo, indicar qué nodo debería ramificarse y por medio de qué restricciones.

4.- Sea un cierto problema de programación lineal entera pura de cuyo árbol de ramificación y acotación se conocen los siguientes datos:

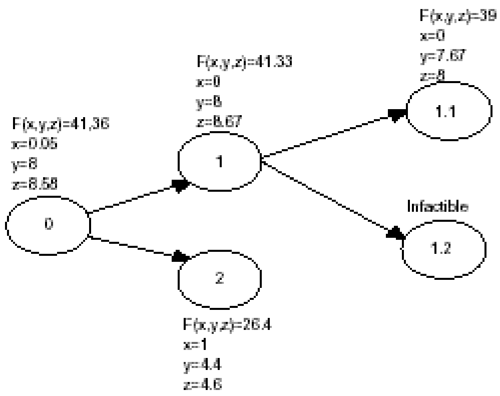


a) Razonar si el objetivo del problema es de maximización o minimización

b) ¿Se ha llegado al óptimo? En caso afirmativo explicar por qué y, en caso negativo, indicar qué nodo debería ramificarse y por medio de qué restricciones.

c) Escribir el problema que se ha resuelto en el nodo 6.

5.- Dado un cierto problema de programación lineal entera mixta, donde las variables x , z tienen condiciones de integridad, y cuyo árbol de ramificación es el siguiente:



a) Razonar si el objetivo del problema es de maximización o minimización

b) ¿Se ha llegado al óptimo? En caso afirmativo explicar por qué y, en caso negativo, indicar qué nodo debería ramificarse y por medio de qué restricciones.

c) Escribir el problema que se ha resuelto en el nodo 1.2.

COLECCIÓN DE EJERCICIOS DE ORDENADOR

PROBLEMA PCP01

El Ministerio de Economía y Finanzas de la República de Optimiza está elaborando los presupuestos generales del Estado para el año 2000. Por los compromisos adquiridos por el resto de los ministerios, el gasto público se ha establecido en 15 optidoles por habitante.

Como el ministro de economía considera que no puede seguir aumentando indefinidamente el nivel de endeudamiento mediante la emisión de Deuda Pública, resulta que la única posibilidad de financiación es aumentar los ingresos del Estado mediante el aumento de los tipos impositivos.

El Ministerio, tras un laborioso estudio de dos lustros, ha observado que el aumento de los tipos impositivos influye negativamente en la renta de los optimizandos de la siguiente forma: $x^2 = 1800-10000t^2$ $y^2 = 1800-40000i^2$

siendo:

x la renta media por habitante sujeta a los impuestos directos y t el tipo impositivo que grava esta renta.

y el gasto medio por habitante sujeto a la imposición indirecta, siendo i el tipo impositivo que grava esta parte de la renta.

Se pide:

a) Calcular, mediante un modelo de programación clásica, cuál debe ser el tipo impositivo directo e indirecto para que los ingresos por impuestos sean máximos.

b) ¿Son suficientes estos ingresos para financiar el gasto público o habría que emitir más Deuda Pública?

PROBLEMA PCP02

Un consumidor puede elegir entre dos bienes cuyos precios son respectivamente de 5 y 9 euros. Dispone de una renta de 450 euros que debe gastar enteramente entre ambos bienes. La función de utilidad es la siguiente:

$$U(x,y) = 20\, x^{0.4}\, y^{0.6}$$

siendo x las unidades consumidas del primer bien e y las del segundo.

Se pide:

a) Obtener las unidades consumidas de cada bien, el valor de la función de utilidad y el valor del multiplicador de Lagrange asociado a la restricción, cuando el consumidor maximiza su utilidad.

b) Interpretar el significado del multiplicador.

c) Resolver de nuevo el problema para el caso en que la renta disponible del consumidor sea de 452 unidades. Comparar el resultado con el obtenido en el apartado b).

PROBLEMA PCP03

Una empresa de transporte de viajeros tiene la concesión de tres rutas, siendo x, y, z el número de viajes a realizar anualmente por cada ruta. Los costes de la empresa son:

Coste fijo: 4000 u.m.

Coste variable por viaje 1ªruta: 10x+10y

Coste variable por viaje 2ªruta: 10x+20y

Coste variable por viaje 3ªruta: z

Después de un estudio de mercado, la empresa llega a la conclusión de que se deben realizar exactamente 2200 viajes anuales entre las tres rutas.

a) Determinar el número de viajes a realizar por cada ruta para que el coste sea mínimo.

b) A la empresa le proponen aumentar en uno el número total de viajes. Razonar, utilizando los datos obtenidos en el apartado a, si le conviene aceptar la oferta.

PROBLEMA PCP04

Un fabricante produce tres artículos en cantidades x, y, z. El precio de venta de cada uno es una función decreciente de la cantidad ofrecida de acuerdo con las siguientes relaciones:

Precio de venta de una unidad del producto 1: $210 - x$.

Precio de venta de una unidad del producto 2: $106 - y$.

Precio de venta de una unidad del producto 3: $65 - z$.

Por otra parte, el coste de producción de cada uno de ellos se compone de un coste fijo de mantenimiento de 100, 60 y 30 unidades monetarias, respectivamente, y un coste variable por unidad producida de 10, 6 y 5 unidades monetarias.

a) Determinar las cantidades de cada producto que maximizan el beneficio de la empresa, teniendo en cuenta que se deben producir exactamente 360 unidades entre los tres productos.

b) Si el empresario pudiera producir más de 360 unidades, ¿aumentaría su beneficio?

PROBLEMA PNLP01

La gerencia de una empresa quiere producir tres artículos a los que llama producto 1, producto 2 y producto 3. Dispone de tres máquinas de las cuales conoce la capacidad disponible de cada máquina y el número de horas-máquina que se requiere para cada producto:

Tipo de máquina	Tiempo en horas-máquina por semana	Productividad en horas-máquina por unidad		
		Prod. 1	**Prod. 2**	**Prod. 3**
Fresadora	**500**	**9**	**3**	**5**
Torno	**350**	**5**	**4**	**0**
Pulidora	**150**	**3**	**0**	**2**

Los costes unitarios al producir los artículos 1, 2 y 3 son 25, 10 y 15 unidades monetarias respectivamente y los precios de venta son $35+100x_1^{-1/3}$, $15+40x_2^{-1/4}$ y $20+50x_3^{-1/2}$, respectivamente, siendo x_i el número de unidades vendidas del producto i.

a) Calcular las cantidades de los tres productos que maximizan los beneficios.

b) Apoyándose en los resultados obtenidos en el apartado anterior, determinar si es conveniente aumentar la capacidad disponible de la pulidora.

Sugerencia: Incluir una cota inferior para cada variable de 0.0001. Volver a resolver el ejercicio sin cotas y observar qué ocurre.

PROBLEMA PNLP02

Una empresa en competencia se plantea minimizar los costes de producción. Los costes unitarios de los dos factores que utiliza (capital -K- y trabajo -L-) son de 4 y 5 unidades monetarias, respectivamente. La producción mínima que ha de cubrir la empresa es de 1000 unidades físicas. La empresa tiene la siguiente función de producción:

$$P(K,L) = 10 * (K^{0.5} * L^{0.5})$$

Se pide:

a) Obtener los valores del capital y del trabajo que minimizan el coste de producción de la empresa, así como el coste mínimo.

b) Interpretar el multiplicador. Resolver de nuevo el problema para el caso en que la producción mínima sea de 1001 unidades y comparar ambos resultados.

PROBLEMA PNLP03

Una empresa produce tres tipos de productos en cantidades x, y, z. El beneficio unitario de cada producto es:

- Beneficio unitario del producto 1: 24 – x.
- Beneficio unitario del producto 2: 20 – y.
- Beneficio unitario del producto 3: 20 – z.

Se sabe que para producir una unidad del producto 1 se utilizan cuatro horas de trabajo, para producir una unidad del segundo se utilizan dos horas y para producir una unidad del tercer producto se utilizan dos horas. Además, la empresa dispone de 16 trabajadores que trabajan 8 horas cada uno.

Se pide:

a) Calcular las cantidades a producir de cada tipo de producto para maximizar el beneficio de la empresa.

b) Determinar, según los resultados obtenidos en el apartado anterior, si a la empresa le interesa aumentar o reducir el número de horas de trabajo de su plantilla.

PROBLEMA PNLP04

En una urbanización se están construyendo dos tipos de viviendas: apartamentos y áticos, cuyos precios son p_1 y p_2 , respectivamente. La curva de demanda para los apartamentos es $d_1 = 100 – 2p_1$ y para los áticos es $d_2 = 150 – 3p_2$. El constructor, que ha vendido ya 60 apartamentos, no quiere quedarse con viviendas sin vender. Además ha calculado que, debido a los pedidos ya realizados a sus proveedores de materias primas, le conviene construir 15 veces más apartamentos que áticos. Por otra parte, ha calculado que la construcción de un apartamento le supone un coste total de 5 millones de euros y la de un ático, 3 millones de euros. Sabiendo que tiene un presupuesto de 350 millones de euros, se pide:

a) Calcular los precios de ambos tipos de viviendas para que el constructor maximice su beneficio.

b) ¿Le interesaría aumentar el presupuesto disponible?

PROBLEMA PNLP05

Una tienda de quesos tiene 20 kilos de una mezcla de frutas de estación y 60 kilos de un queso caro, con los cuales se prepararán dos tipos de queso para untar, fino y normal, que son populares durante la semana de Navidad. Cada kilo del queso fino para untar se compone de 0'2 kilos de la mezcla de frutas, 0'3 kilos del queso caro y 0'5 kilos de un queso de relleno, que es barato y del cual se tiene abundante reserva. Cada kilo del queso normal para untar se compone de 0'2 kilos de la mezcla de frutas, 0'2 kilos del queso caro y 0'6 kilos de un queso de relleno. Debido a las políticas de precios empleadas en el pasado por la tienda, se sabe que la demanda para cada tipo de queso para untar depende de su precio de la siguiente forma:

$$d_1 = 190 - 25p_1$$
$$d_2 = 250 - 50p_2$$

donde d denota la demanda (en kilos), p denota el precio (en euros por kilo), y los subíndices 1 y 2 se refieren, respectivamente, al queso para untar fino y normal.

a) ¿Cuántas libras de cada tipo de queso para untar deben prepararse, y qué precios deben establecerse, si se desea maximizar el ingreso y vender totalmente ambos tipos hacia el fin de la semana de Navidad?

b) ¿Que le ocurrirá al ingreso si la tienda puede dispones de un kilo más de queso caro?

PROBLEMA PNLP06

Una empresa produce tres artículos en cantidades x, y, z. La función de ingresos de la empresa viene determinada por:

$$I(x,y,z) = x^2 + 20y^2 + 10z^2 + 20yz$$

La capacidad máxima productiva de la empresa es de 5000 unidades entre los tres productos. Por razones de mercado no puede vender más de 1500 unidades del segundo producto ni puede ofertar menos de 1000 ni más de 3000 del primero.

Calcular las cantidades de cada artículo que debe producir la empresa si desea maximizar sus ingresos.

¿Le convendría a la empresa aumentar su capacidad productiva?

PROBLEMA PLP01

Una empresa de piensos elabora tres tipos de piensos utilizando cuatro tipos de cereales. Cada saco de pienso, de 50 kilos, se vende a un precio y de cada cereal existe una disponibilidad máxima en los almacenes. Para obtener un saco de cada tipo de pienso se necesitan determinados kilos de cada cereal. En la siguiente tabla, donde los datos aparecen en kilos y euros, se resumen los datos:

Pienso	**Avena**	**Maíz**	**Cebada**	**Mijo**	**Precio**
1	25	25	0	0	1500
2	0	20	20	10	2000
3	20	0	30	0	1200
Existencias	50000	80000	40000	10000	

Se pide:

a) Determinar el número de sacos que deberá producir la empresa de cada tipo de pienso para maximizar el ingreso, suponiendo que vende toda su producción. ¿Le sobrarán existencias de cebada?

b) Para potenciar el consumo de mijo la Unión Europea decide conceder una subvención a los piensos que lo contengan. Esto supone 200 euros adicionales por saco del pienso 2. ¿Qué ocurrirá con la solución actual si la empresa decide solicitar la subvención?

PROBLEMA PLP02

Un inversor desea invertir 150000 euros como mucho de forma que maximice los intereses esperados al final del año. Tras un estudio de las distintas alternativas de inversión selecciona seis activos con las siguientes características:

Activo	**Tipo**	**Moneda**	**Interés esperado**
1	Renta fija	Euro	4%
2	Renta fija	Euro	6%
3	Renta variable	Euro	16%
4	Renta fija	Dólar	4%
5	Renta variable	Dólar	11%
6	Renta variable	Yen	18%

Tras consultar con un asesor financiero para disminuir el riesgo de su inversión, decide invertir cumpliendo los siguientes requisitos:

- Invertir al menos un 60% del capital total disponible en renta fija.
- Invertir al menos un 30% del capital total disponible en euros.
- Invertir al menos un 30% del capital total invertido en dólares.

Se pide:

a) Obtener cómo distribuirá el inversor su capital entre los distintos activos para maximizar el total de intereses esperados y calcular qué intereses recibirá si realiza la inversión óptima.

b) El interés esperado del sexto activo es muy incierto. Calcular cuáles son los valores entre los cuales este activo se mantiene en la inversión óptima.

PROBLEMA PLP03

MONDESCOR es una empresa que fabrica dos modelos de coches en dos plantas de producción y los vende en Madrid, Barcelona y Valencia. Los costes de transportar un coche, independientemente del modelo, de cada fábrica a cada ciudad, vienen dados en unidades monetarias en la siguiente tabla:

	Madrid	**Barcelona**	**Valencia**
Planta 1	30	20	40
Planta 2	100	90	40

Y la demanda de cada modelo en cada ciudad es:

	Madrid	**Barcelona**	**Valencia**
Modelo 1	800	2000	4500
Modelo 2	1200	1000	1500

La capacidad máxima de producción de cada planta es de 10000 y 8000 coches, respectivamente, sumando los dos modelos.

Se pide:

a) Determinar cuántos coches de cada modelo se deben transportar desde cada planta a cada ciudad para satisfacer la demanda y minimizar los costes de transporte.

b) ¿Qué ocurrirá con la solución anterior si en Madrid se produce un aumento de demanda del 10% para el modelo uno?

PROBLEMA PLP04

Un fabricante de carrocerías de coches utiliza chapa metálica en la producción de tres modelos de coches, que divide en cuatro secciones. Las características de su sistema de producción se resumen en la siguiente tabla:

	Necesidades (horas/unidad)			
Sección	**Modelo 1**	**Modelo 2**	**Modelo 3**	**Horas dis.**
Cortar	0'02	0'04	0'01	500
Ensamblar	0'04	0'03	0'04	600
Pintar	0'03	0'03	0'02	300
Montar	0'05	0'04	0'04	1000

Se dispone de 40000 metros cuadrados de chapa metálica para la semana próxima. La chapa se utiliza en los tres tipos de coches en cantidades de 6, 5 y 4 metros cuadrados, respectivamente. Existen niveles máximos de producción y niveles de demanda mínimos a satisfacer, también se dispone de los precios de venta de cada modelo y del coste unitario variable.

Modelo	Precio vta	Coste var.	Prod. max.	Dem. min
1	100	30	20000	3000
2	120	35	10000	1000
3	75	25	25000	5000

a) Resolver el modelo que calcula las cantidades a producir de cada modelo de coche de forma que se maximicen los beneficios.

b) A la empresa le ofrecen 5000 metros cuadrados de chapa a un coste total de 79000 unidades monetarias. ¿Por qué la empresa aceptará la oferta? Calcular el beneficio máximo que puede obtener bajo estas nuevas condiciones.

PROBLEMA PLP05

Una empresa estudia poner en marcha un negocio de alquiler de coches. Tras un estudio de mercado se estima que los ingresos semanales por alquilar un coche utilitario son de 40000 €, si el coche es familiar el ingreso es de 60000 € y si es de lujo de 100000 €

Ese mismo estudio indica que el total de coches a comprar no debe superar las 50 unidades debido a limitaciones de demanda.

Por otra parte, la empresa dispone de un capital inicial de 105 millones para realizar su inversión en la compra de coches, cuyos precios son de 1,5 millones si es utilitario, 3 millones si es familiar y 10 millones si es de lujo. Se pide:

a) Indicar el número de coches que comprará de cada tipo si la empresa desea maximizar el ingreso semanal esperado. Si la empresa decide comprar un coche de lujo más, ¿qué ocurrirá con los ingresos?

b) Interpretar el valor de la variable de holgura de la restricción de capital inicial para comprar coches.

PROBLEMA PLP06

La NORI & LEETS CO. es una de las mayores productoras de acero del mundo situada en la ciudad de Aceroburgo. Dado que la contaminación no controlada del aire está arruinando la apariencia de la ciudad y poniendo en peligro la salud de sus habitantes, el consejo directivo de la empresa y las autoridades de la ciudad han establecido estándares rigurosos de la calidad del aire para la ciudad de Aceroburgo. Los tres tipos principales de contaminantes, y la reducción requerida en la tasa de emisión anual de los mismos para cumplir los nuevos estándares, son:

- Partículas de materia, con una reducción de 60 millones de kilos.
- Óxidos de azufre, con una reducción de 150 millones de kilos.
- Hidrocarburos, con una reducción de 125 millones de kilos.

Para conseguir dicha reducción, el personal de ingeniería de la compañía ha determinado que las dos fuentes principales de contaminación son los altos hornos y los hornos de hogar abierto. Y que los tres métodos mas eficaces de reducción son aumentar la altura de las chimeneas, usar filtros en las chimeneas e incluir limpiadores de alto grado en los combustibles de los hornos, aunque todos ellos tienen limitaciones tecnológicas en cuanto a la cantidad de emisión que pueden eliminar. La reducción efectuada por cada método (medida en millones de kg por año) al ser empleado en su totalidad es:

	Chimeneas altas		**Filtros**		**Mejores comb.**	
	Altos hornos	**Hogar abierto**	**Altos hornos**	**Hogar abierto**	**Altos hornos**	**Hogar abierto**
Partícula	12	9	25	20	17	13
Oxidos	35	42	18	31	56	49
Hidrocar.	37	53	28	24	29	20

Con estos datos, es evidente que ningún método por sí solo podía lograr las reducciones requeridas. Por otro lado, la reducción de la combinación de los tres métodos a toda su capacidad resulta mucho mayor de lo que se pide y demasiado cara. Luego, convendría usar alguna combinación de métodos con capacidades fraccionarias en base a sus costes. Dichos costes, considerando cada método utilizado al total de su capacidad y medidos en millones de euros, son:

	Altos hornos	**Hogar abierto**
Chimeneas altas	8	10
Filtros	7	6
Mejor combustible	11	9

a) ¿Qué tipo de métodos y a qué fracción de su capacidad deben emplearse para conseguir la reducción requerida por las autoridades?

b) ¿Seguirá siendo válida la solución si la reducción requerida de óxidos de azufre fuese de 175 millones de kilos?

PROBLEMA PLP07

Una compañía financiera planifica sus operaciones para el año próximo. La compañía concede tres clases de préstamos que tienen los siguientes tipos de interés:

- Préstamo personal: 9%
- Préstamo para mobiliario: 5%
- Préstamo para automóviles: 7%

La política de la compañía impone ciertas restricciones sobre el reparto de los montantes en las diferentes categorías. Los préstamos personales no deberán exceder el 25% del presupuesto de la compañía, mientras que el préstamo personal y mobiliario no deberá exceder el 45% del presupuesto. El montante concedido a los préstamos para automóviles no deberá exceder el 70% del presupuesto, pero será al menos el 80% del presupuesto concedido a los préstamos personales y de mobiliario. La compañía tiene un presupuesto de 500 unidades monetarias.

a) Determinar el reparto óptimo del presupuesto para maximizar el rendimiento.

b) La compañía decide rebajar el tipo de interés para los préstamos personales en un punto. ¿Cambiará el reparto del presupuesto?

PROBLEMA PLEP01

El equipo de motociclismo de AGRT (Andrés García Racing Team) decide inscribirse en el campeonato del mundo de motociclismo como equipo privado. El equipo ha conseguido un nuevo patrocinador, gracias a lo cual tiene la posibilidad de adquirir de la fábrica HANDO, entre otras mejoras, una serie de kits de competición que mejorarán la velocidad punta de su moto HANDO de competición. La siguiente tabla refleja el incremento de velocidad que puede proporcionarle cada kit y su coste medido en miles de euros:

	Kit 1	**Kit 2**	**Kit 3**	**Kit 4**	**Kit 5**	**Kit 6**
Coste	10’2	6	23	11’1	9’8	31’6
Incremento	8	3	15	7	10	12

Determinar los kits que adquirirá el equipo para maximizar el incremento de su velocidad, sabiendo que el nuevo patrocinador va a aportar 35000 euros.

PROBLEMA PLEP02

La Consellería de Obras Públicas dispone de un presupuesto para infraestructuras de 5000 millones de euros en los próximos 4 años. Para determinar las obras a realizar, se hace una lista de actuaciones preferentes, con el siguiente coste e impacto de beneficio social:

Obra	**Coste (en millones de euros)**	**Índice de impacto**
1	2000	4
2	3000	5
3	1000	3
4	1500	3
5	4000	7
6	500	2
7	1000	4
8	1000	3

Determinar los proyectos que se han de llevar a cabo para maximizar la suma de los índices de impacto.

PROBLEMA PLEP03

La ciudad de Villa Arriba tiene tres escuelas de enseñanza media superior. El consejo directivo de escuelas de la ciudad ha decidido redistribuir las zonas escolares asignadas a cada escuela. La ciudad está dividida en 10 secciones, cada una de ellas con una población estimada de estudiantes para los próximos años. Se ha determinado la distancia (en km) del centro de cada sección a cada una de las escuelas.

La siguiente tabla recoge estos datos junto con la capacidad máxima de cada escuela:

		Distancia		
Sección	**Alumnos**	**Escuela 1**	**Escuela 2**	**Escuela 3**
1	450	1'2	1'5	3'3
2	400	2'6	4	5'5
3	500	0'7	1'1	2'8
4	500	1'8	1'3	2
5	400	1'5	0'4	2'3
6	450	2	0'6	1'7
7	450	1'2	1'4	3'1
8	500	3'5	2'3	1'2
9	400	3'2	1'2	0'7
10	450	3'8	1'8	1
Capacidad escuela		1500	2000	1300

El consejo directivo de escuelas desea determinar cuántos estudiantes de cada sección deben asistir a cada una de las escuelas para que la distancia total recorrida por el conjunto de estudiantes de la ciudad sea mínimo.

PROBLEMA PLEP04

Una compañía minera opera con tres minas. El mineral de cada una se separa antes de embarcarse, en dos grados. La capacidad diaria de producción de las minas así como sus costes diarios (medidos en millones de euros) son los siguientes:

	Mineral grado alto(Tm/día)	**Mineral grado bajo(Tm/día)**	**Costes diarios**
Mina 1	4	4	2
Mina 2	6	4	2'2
Mina 3	1	6	1'8

La compañía se comprometió a entregar 54 toneladas de mineral de grado alto y 65 toneladas de mineral de grado bajo para fines de la siguiente semana. Además, tiene contratos de trabajo que garantizan a los trabajadores de las tres minas el pago del día completo por cada día o fracción de día que la mina esté abierta.

Determinar el número de días que cada mina debería operar durante la siguiente semana, si la compañía ha de cumplir su compromiso con un coste total mínimo, justificando que se trata de un problema entero.