EJERCICIO DE PROGRAMACIÓN NO LINEAL

Una compañía petrolífera acaba de adquirir por 50 millones de € una concesión para explotar un campo petrolífero con unas reservas de 17 millones de barriles. La empresa tiene que determinar cuantos barriles de petróleo va a extraer del pozo en los tres próximos años (periodo de la concesión) para maximizar los beneficios.

Conoce que si extrae x_1 millones de barriles durante el primer año, puede vender cada uno de ellos por $(28-x_1)$ €, siendo el coste de extracción de x_1^2 millones de €. Durante el segundo año, si extrae x_2 millones de barriles, el precio de venta será de $(30-x_2)$ € por barril y los costes de extracción serán de $1.5\ x_2^2$. En el tercer año si se extraen x_3 millones de barriles, cada uno de ellos se puede vender a $(33-x_3)$ € el barril, siendo en este caso los costes de extracción de $2x_3^2$.

La empresa, por otra parte, conoce que a lo largo de los tres años puede extraer como máximo el volumen de las reservas conocidas, es decir, un total de 17 millones de barriles y gastar, con independencia del año, 150 millones de € en las tareas de extracción.

a) Supuesto que el tipo de interés anual sea del 4 por ciento, determinar la política óptima de extracción de los próximos tres años.

b) Al realizar una nuevo análisis de las reservas, el nuevo valor es de 17,5 millones de barriles, por ello se solicita a la empresa un incremento de precio de la concesión de 0.7 millones de €. Supuesto que los costes de extracción de los barriles adicionales costaran 0.3 millones de €. Le interesará a la empresa realizar la ampliación de la concesión por el nuevo importe de las reservas, o bien será preferible mantener la concesión sobre los 17 millones iniciales.

EJERCICIO DE PROGRAMACIÓN NO LINEAL:

Planteamiento:

$$\text{Max } B(x_1, x_2, x_3) = [(28-x_1)\, x_1 - x_1^2] + (1.04)^{-1}\, [(30-x_2)\, x_2 - 1.5\, x_2^2] + (1.04)^{-2}\, [(33-x_3)\, x_3 - 2\, x_3^2] - 50$$

s.a:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 17$$

$$x_1^2 + 1.5\, x_2^2 + 2\, x_3^2 \leq 150$$

$$x_1 \geq 0;\; x_2 \geq 0\;;\; x_3 \geq 0$$

La función lagrangiana será:

$$\text{Max } B(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = [(28-x_1)\, x_1 - x_1^2] + (1.04)^{-1}\, [(30-x_2)\, x_2 - 1.5\, x_2^2] + (1.04)^{-2}\, [(33-x_3)\, x_3 - 2\, x_3^2] - 50 + \lambda_1\, [\, 17 - x_1 - x_2 - x_3\,] + \lambda_2\, [\, 150 - x_1^2 - 1.5\, x_2^2 - 2\, x_3^2\,]$$

Las condiciones de Kuhn - Tucker del problema son:

Con relación a x_1 (variable no negativa):

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 28 - 4x_1 - l_1 - 2 l_2 x_1 \leq 0$$

$$x_1 \frac{\partial L}{\partial x_1} = x_1 \left[28 - 4x_1 - l_1 - 2 l_2 x_1 \right] = 0$$

$$x_1 \geq 0$$

Con relación a x_2 (variable no negativa):

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = (1.04)^{-1}\ (30 - 5\ x_2) - l_1\ - 3\ l_2\ x_2 \leq\ 0$$

$$x_2 \frac{\partial L}{\partial x_2} = x_2 \left[(1.04)^{-1}\ (30 - 5\ x_2) - l_1\ - 3\ l_2\ x_2\right] = 0$$

$$x_2\ \geq\ 0$$

Con relación a x_3 (variable no negativa):

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = (1.04)^{-2}\ (33 - 6\ x_3) - l_1 - 4\ l_2\ x_3 \leq\ 0$$

$$x_3 \frac{\partial L}{\partial x_3} = x_3 \left[(1.04)^{-2}\ (33 - 6\ x_3) - l_1 - 4\ l_2\ x_3 \right] = 0$$

$$x_3\ \geq\ 0$$

Con relación a λ_1 (variable dual de restricción de desigualdad):

$$\frac{\partial\ L}{\partial\ l_1} = 17 - x_1 - x_2 - x_3 \geq 0$$

$$l_1 \frac{\partial\ L}{\partial\ l_1} = l_1 \left[17 - x_1 - x_2 - x_3\right] = 0$$

$$l_1 \geq 0$$

Con relación a λ$_2$ (variable dual de restricción de desigualdad):

$$\frac{\partial\ L}{\partial\ l_2} = 150 - x_1^2 - 1.5\ x_2^2 - 2\ x_3^2 \quad \geq 0$$

$$l_2 \frac{\partial\ L}{\partial\ l_2} = l_2 \left[150 - x_1^2 - 1.5\ x_2^2 - 2\ x_3^2\ \right] = 0$$

$$l_2 \ \geq \ 0$$

Estudio de la convexidad de la función:

$B(x_1, x_2, x_3) = [(28-x_1)\, x_1 - x_1^2] + (1.04)^{-1}\, [(30-x_2)\, x_2 - 1.5\, x_2^2] +$
$(1.04)^{-2}\, [(33-x_3)\, x_3 - 2\, x_3^2] - 50$

La matriz hessiana será:

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -(1.04)^{-1}\, 5 & 0 \\ 0 & 0 & -(1.04)^{-2}\, 6 \end{pmatrix}$$

La matriz hessiana es una matriz diagonal.

Los autovalores son todos negativos, por tanto, la forma cuadrática es DEFINIDA NEGATIVA.

Por tanto, la función B es una función CONCAVA.

Estudio de Conjunto de Oportunidades:

$S = \{ x \in R^3 / x_1 + x_2 + x_3 \leq 17 ; x_1^2 + 1.5 x_2^2 + 2 x_3^2 \leq 150 \}$

Formado por dos restricciones:

$x_1 + x_2 + x_3 \leq 17$ Lineal C. Convexo

$x_1^2 + 1.5 x_2^2 + 2 x_3^2 \leq 150$ Conjunto de nivel inferior.

Función: $x_1^2 + 1.5 x_2^2 + 2 x_3^2$

Hessiano:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Forma cuadrática DEFINIDA POSITIVA Función CONVEXA

Conjunto de nivel inferior es CONVEXO

Conjunto de oportunidades: Intersección de convexos

CONVEXO

Aplicar el TEOREMA LOCAL GLOBAL

En definitiva, el punto de K-T es un máximo global del problema.

	LOWER	LEVEL	UPPER	MARGINAL
---- VAR X1	-INF	**6.412**	+INF	.
---- VAR X2	-INF	**5.511**	+INF	EPS
---- VAR X3	-INF	**5.076**	+INF	EPS
---- VAR BGLOBAL	-INF	**266.679**	+INF	