

Un modelo matemático dinámico para simular la viabilidad económica de una pequeña empresa

María Teresa Sanz

Departament de Didàctica de les Matemàtiques. Universitat de València
m.teresa.sanz@uv.es

Antonio Caselles

Sociedad Española de Sistemas Generales
Antonio.Caselles@uv.es

Resumen

En este artículo se presenta un modelo matemático dinámico discreto que simula la actividad económica de una pequeña empresa: un centro de estudios. Las variables principales son las relacionadas con gastos e ingresos. El modelo es validado con datos de una empresa real en el periodo 2008-2012 de forma trimestral. Este modelo puede ser ilustrativo para el diseño de modelos simuladores de la actividad de otras pequeñas empresas.

Palabras clave: modelo matemático; modelo dinámico; pequeña empresa.

Abstract

This article presents a discreet dynamic mathematical model that simulates the economic activity of a small company: a school. The main variables are related to expenses and income. The model is validated for a concrete school in the 2008-2012 period. This model may be illustrative for designing similar small company ones.

Key words: Mathematical model; dynamic model; small company.

1. Introducción

En este trabajo se pretende mostrar un modelo matemático dinámico discreto aplicado a las gestiones económicas de una pequeña empresa. En el mundo en el que vivimos, envuelto de una crisis globalizada, debemos dar expectativas a las nuevas generaciones. Uno de los caminos para ello es la creación de empleo mediante la generación de empresas. Pero el camino para la creación de una empresa no es ni sencillo ni rápido. Podemos decir que, para ello, existen cuatro factores que se deben tener en cuenta:

1. Plan o proyecto de empresa
2. Obtención de recursos
3. Formas jurídicas de constitución y trámites.
4. Obligaciones fiscales.

Si bien es cierto que los puntos dos, tres y cuatro son importantes, es el primero, el *plan de*

empresa, el que se debe contemplar en primer lugar.

El plan de empresa consta de dos partes, la elección del modelo de negocio y el análisis del mismo. La elección del modelo de negocio es personal, pero el análisis debe responder a preguntas como, ¿se trata de una idea realista? ¿Es viable técnicamente? ¿Es viable desde el punto de vista económico? ¿Se está en condiciones de poder acometerla?

En este trabajo abordamos la respuesta a la segunda pregunta. Con un modelo matemático como el que presentamos podremos simular si un proyecto puede llegar a ser rentable y por lo tanto viable económicamente. Tal como nos dice Shannon (1976), "La simulación es el proceso de diseñar un modelo de un sistema real y llevar a término experiencias con él, con la finalidad de comprender el comportamiento del sistema o evaluar nuevas estrategias dentro de los límites impuestos por un cierto criterio o un conjunto de ellos para el funcionamiento del

sistema". Así pues, es la simulación el objetivo de un modelo como el que se introduce en este artículo. El modelo es verificado y con él se podrá trabajar para realizar predicciones ante diversos escenarios y estrategias de intervención.

La literatura existente sobre el tema nos muestra diversos modelos matemáticos aplicados a empresas. Modelos que permiten seleccionar proveedores idóneos y que utilizan la lógica difusa y la metodología "fuzzy" (Ordoobadi, 2009). O como el que presentan Naraparaju et al. (2005), que permite ubicar la empresa en un lugar óptimo.

También se encuentran modelos que se basan en la maximización de ganancias de grandes empresas, como la teoría neoclásica presentada por Carlson (1956) o los distintos enfoques que han ido evolucionando y se pueden estudiar en los trabajos de Baumol (1958, 1967). Sin embargo estas teorías de gestión empresarial han ido perdiendo interés en las últimas décadas, ya que se centran en la maximización de ganancias sin tener en cuenta la parte social.

Actualmente existe un crecimiento de modelos de empresas en donde todas las hipótesis económicas básicas son probadas desde el punto de vista psicológico. Esto ha abierto las puertas a la formulación de hipótesis alternativas a la puramente económica (por ejemplo, Camerer et al. (2004) y Diamond et al. (2007)).

Existe en la actualidad también un potente marco analítico, *MCDM* (multiple criteria decision making paradigm) para hacer frente a la optimización de problemas económicos, (Zeleny (1982), Ballestero (1998). En esta línea Martin et al. (2011) también propone un modelo matemático para planificar la estrategia financiera de una gran empresa. Este modelo se vincula a la filosofía de la nueva economía del comportamiento *MCDM* y es validado mediante una empresa española en el sector energético.

Nuestro modelo sigue la Metodología de Modelización General (*MMG*) propuesta por Caselles (2008) y se implementa utilizando el generador inteligente de modelos de sistemas complejos Sigem (disponible en: <http://www.uv.es/~caselles/>).

El modelo aquí presentado difiere del resto en primer lugar porque, por la forma en la que está diseñado, nos permite probar estrategias para encontrar un precio óptimo de nuestro producto, así como cualquier otro objetivo que queramos marcar con las variables utilizadas. En segundo lugar, estamos frente a un modelo determinista que se podría definir también estocásticamente, lo que nos permitiría determinar la fiabilidad de los resultados al obtener cada resultado con su intervalo de confianza correspondiente, para un nivel de significación determinado, o bien, con sus respectivos valores promedio y desviación estándar, para cada instante de cálculo. En este artículo tan sólo se presenta el modelo en su formulación determinista (que no contempla la incertidumbre de las variables), detallando las variables involucradas, así como todas las ecuaciones que relacionan unas variables con otras. Será en trabajos sucesivos donde se mostrará la formulación estocástica del modelo y sus aplicaciones.

Las etapas seguidas para el diseño del modelo matemático han sido las siguientes:

1. Encontrar las variables involucradas en el modelo.
2. Encontrar las relaciones entre todas estas variables.
3. Encontrar las ecuaciones matemáticas que las expliquen y ajusten.
4. Encontrar datos históricos.
5. Verificar el modelo.

2. Variables del Modelo

En esta sección van a ser detalladas las distintas variables involucradas en el modelo. Se ha seguido el método "brainstorming" para identificarlas. A continuación se procede a su codificación que en este caso ha consistido en darles un nombre de cuatro letras. En la lista que aparece a continuación, al lado de cada código, se detalla el significado de la variable que representa y entre corchetes la unidad de medida correspondiente.

La empresa que se pretende modelizar es un centro de estudios y, por tanto, las variables están relacionadas con la actividad que allí se desarrolla. No obstante, el modelo puede servir

de ilustración para la modelización de cualquier otra pequeña empresa.

Las variables se van a dividir en cuatro bloques claramente identificados: Ingresos, Gastos, Beneficios y Agencia Tributaria. Estos cuatro bloques se observan claramente diferenciados en cuatro colores (Ingresos, rojo; Gastos, Naranja, Beneficios, Azul, Agencia Tributaria, Verde) en el diagrama de Forrester (Figura 1) dónde se representan las relaciones de influencia entre las variables.

Nótese que en cada uno de los cuatro bloques las variables se encuentran ordenadas alfabéticamente.

Variables relacionadas con los Ingresos

CUI1 Cuota inicial para tres días semanales [€]
CUI2 Cuota inicial para dos días semanales [€]
CUI3 Cuota inicial para 1 día semanal [€]
CUI4 Cuota inicial para clases particulares [€]
CUO1 Cuota para tres días semanales [€]
CUO2 Cuota para dos días semanales [€]
CUO3 Cuota para 1 día semanal [€]
CUO4 Cuota para clases particulares [€]
XNGT Ingresos trimestrales [€]
XNU1 Alumnos trimestrales con tipo de cuota 1 [número]
XNU2 Alumnos trimestrales con tipo de cuota 2 [número]
XNU3 Alumnos trimestrales con tipo de cuota 3 [número]
XNU4 Alumnos trimestrales con tipo de cuota 4 [número]

Variables relacionadas con los Gastos

AINF Valor trimestral equipos informáticos [€]
AINM Valor trimestral inmueble [€]
AGUA Gasto trimestral total en agua [€]
AMO1 Amortización trimestral mobiliario [€]
AMO2 Amortización trimestral inmueble [€]
AMO3 Amortización trimestral de equipos informáticos [€]
AMOB Valor trimestral mobiliario [€]
AMOR Total amortización trimestral [€]
ASEG Prima seguros trimestrales [€]
COMP Compras trimestrales realizadas, material didáctico [€]
EMPS Trabajos trimestrales realizados por otras empresas [€]
GAST Gasto total trimestral [€]

GTRI Gasto tributario trimestral [€]
GTRA Gasto tributario anual [€]
GFIN Gastos financieros trimestrales [€]
OTRS Otros gastos trimestrales [€]
REI1 Reinversión en mobiliario [€]
REI2 Reinversión en el inmueble [€]
REI3 Reinversión en equipos informáticos [€]
REIN Total reinversión trimestral [€]
SEGS Seguros anuales [€]
SSCC Seguridad social base (autónomo) trimestralmente [€]
SSCT Seguridad social (autónomo) trimestralmente [€]
SUEL Sueldo base de un trabajador [€]
SUET Gastos trimestrales en sueldos [€]
TAMO Tasa amortización mobiliario [proporción]
TINF Tasa amortización de equipos informáticos [proporción]
TINM Tasa amortización inmueble [proporción]
TRAB Número de trabajadores trimestrales [constante]
XAIN Aportación cubrir reinversión inmueble [€]
XAMO Aportación cubrir reinversión mobiliario [€]
XFII Valor inicial de equipos informáticos para reinvertir [€]
XIFI Gasto inicial equipos informáticos [€]
XINF Aportación cubrir reinversión equipos informáticos [€]
XINI Gasto inicial en el inmueble [€]
XLUZ Gasto trimestral total en luz [€]
XMII Valor inicial mobiliario para reinvertir [€]
XMOI Gasto inicial en mobiliario [€]
XNII Valor inicial inmueble para reinvertir [€]

Variables relacionadas con los Beneficios

AHOR Beneficio acumulado [€]
AHOI Parte del beneficio dedicado a crear un colchón de seguridad [€]
BENF Beneficios trimestrales finales [€]
BENT Beneficios trimestrales [€]
REPA Parte de lo dedicado a invertir cuándo haya necesidad [€]
XCUO Tasa de disminución de las cuotas [probabilidad]
XENT Tasa de beneficios que se traslada a inversión [probabilidad]
XIVE Parte de beneficios que se traslada a inversión [€]
XIVI Beneficio inversiones inicial [€]

XIVN Parte del beneficio dedicado a inversiones [€]

Variables relacionadas con la Agencia Tributaria

XHAC Total a pagar a la Agencia Tributaria [€]
XI08 Impuesto anual sobre el Valor Añadido 8% [€]
XI21 Impuesto sobre el Valor Añadido trimestral 21% [€]
XIRT Impuesto sobre el Valor Añadido trimestral repercutido [€]
XIVT Impuesto sobre el Valor Añadido trimestral [€]
XMPB Impuesto 12% trimestral sobre los beneficios [€]
XVI1 Impuesto de tipo 1 para aguas [%]
XVI2 Impuesto de tipo 2 para valores generales [%]
XVI3 Impuesto de tipo 3 para aplicar sobre beneficios de una empresa [%]

Las variables de entrada están representadas en el diagrama de Forrester (Figura 1) dentro de una doble elipse y entran como datos discretos de periodo trimestral (estamos en un modelo matemático discreto). Las variables auxiliares (para cálculos intermedios) están representadas en dicho diagrama dentro de una elipse simple. Las variables de nivel (comparables a depósitos: de dinero, de materiales, etc.) se representan dentro de un rectángulo. Y las variables de flujo (que son las entradas o salidas trimestrales de los depósitos) están representadas dentro de iconos que recuerdan a las llaves de paso.

3. Ecuaciones del Modelo

Estas ecuaciones (así las llamaremos aunque en realidad son funciones) están escritas en lenguaje Visual Basic, ya que este es el lenguaje necesario para el uso del sistema de programación automática Sigem (Caselles, 2008) utilizado en este trabajo. Otras aplicaciones de esta metodología pueden verse en el trabajo de Micó et al. (2006) y en el libro de Caselles (2008). Cada ecuación de la lista que se presenta está precedida por el nombre en mayúsculas de la variable que calcula.

Debemos señalar que, aunque el modelo está verificado anualmente para el periodo 2008-2012, los resultados se obtienen de forma trimestral.

- **En primer lugar, se presentan las ecuaciones relacionadas con los Gastos.**

Consideraremos como gastos el agua, la luz, compras, trabajos realizados por otras empresas, seguros, gastos financieros, tributos no estatales, sueldos de los empleados, seguridad social y las amortizaciones del inmueble, mobiliario y equipos informáticos.

```
ASEG aseg = segs/4  
GAST gast = comp + agua + xluz +  
           otrs + emps + ssct + suet +  
           aseg + gtri + gfin + amor  
GTRI gtri = gtra/4  
SSCT ssct = ssc * trab  
SUET suet = suel * trab
```

- **En segundo lugar, las ecuaciones relacionadas con la Agencia Tributaria.**

Aquí contemplamos el IVA soportado y el IVA repercutido. Entendemos como IVA soportado aquel que lleva incluido cada gasto que se hace. Se ha utilizado el IVA al 6% (año 2008) que evolucionó al 8% (año 2011) además del IVA al 16% (año 2008) que evolucionó al 18% (año 2011) y al 21% (en el tercer cuatrimestre del 2012).

El IVA repercutido que es el que genera la propia empresa, y ha evolucionado igualmente (del 16% al 18% y 21%).

Además se incluye en este apartado el 12% que se debe pagar a la Agencia Tributaria por los beneficios obtenidos.

```
XHAC xhac = xivt + xmpb  
XI08 xi08 = agua * xvi1  
XI21 xi21 = (comp + agua + xluz +  
           otrs + emps) * xvi2  
XIRT xirt = xngt * xvi2  
XIVT xivt = xirt - (xi08 + xi21)
```

- **En tercer lugar, las ecuaciones relacionadas con los Ingresos.**

En esta pequeña empresa existen cuatro tipos de cuotas distintas, dependiendo del número de horas que el alumno contrate. Además las cuotas podrán ser rebajadas un 1% de forma trimestral si el porcentaje de beneficios trimestrales que se traslada a inversiones supera al gasto total en amortizaciones. En caso contrario la cuota quedará fijada en ese periodo en la misma cantidad que en el periodo anterior.

```
CUO1 if xive > amor then
    cuo1 = xcuo * cui1
else
    cuo1 = cui1
endif
CUO2 if xive > amor then
    cuo2 = xcuo * cui2
else
    cuo2 = cui2
endif
CUO3 if xive > amor then
    cuo3 = xcuo * cui3
else
    cuo3 = cui3
endif
CUO4 if xive > amor then
    cuo4 = xcuo * cui4
else
    cuo4 = cui4
endif
XNGT xngt = cui1 * xnu1 + cui2 *
xnu2 + cui3 * xnu3 + cui4 *
xnu4
```

- **En cuarto lugar, las ecuaciones que involucran a las amortizaciones trimestrales del mobiliario, del inmueble, y del equipo informático.**

Nótese que se ha supuesto un tiempo de amortización de 10, 50 y 5 años respectivamente para cada uno de los tres tipos de bienes considerados. Además, una vez cumplido ese plazo se reinvertirá en cada uno de ellos la misma cantidad que al inicio. Dicha reinversión se podrá realizar si existe capital procedente de la parte de beneficios destinada a reinversiones.

```
AMO1 amo1= tamo*xmii
AMOB amob = xmoi - amo1 + rei1
REI1 if xmoi = amo1 then
    rei1 = repa + (xmii - repa)
else
    rei1 = 0
endif
AMO2 amo2= tinm*xnii
AINM ainm = xini - amo2 + rei2
```

```
REI2 if xini = amo2 then
    rei2 = repa+ (xnii - repa)
else
    rei2 = 0
endif
AMO3 amo3= tinf*xfii
AINF ainf = xifi - amo3 + rei3
REI3 if xifi = amo3 then
    rei3 = repa + (xfii - repa)
else
    rei3 = 0
endif
XAMO if xmoi = amo1 then
    xamo = (xmii - repa)
else
    xamo = 0
endif
XAIN if xini = amo2 then
    xain = (xnii - repa)
else
    xain = 0
endif
XINF if xifi = amo3 then
    xinf = (xfii - repa)
else
    xinf = 0
endif
AMOR amor = amo1 + amo2 + amo3
REIN rein = rei1 + rei2 + rei3
```

- **Por último, las ecuaciones que corresponden a los beneficios.**

Debemos destacar que se ha estipulado que, en el momento en que existan beneficios en la empresa, un 30% de los mismos serán destinados a crear un colchón monetario de seguridad y, que los restantes se acumularán para posibles reinversiones futuras. Además se acuerda que la forma de distribuir el capital destinado a reinversiones será la siguiente:

- si se necesita reinversión en uno de los tres tipos de bienes (inmueble, mobiliario, equipos informáticos) el capital para reinversiones irá en su totalidad para el que lo necesite.
- si se necesita reinversión en dos de ellos, se repartirá, de forma que a cada uno de ellos se le asignará el 50%.
- si se necesita reinversión en todos, se asignará la tercera parte a cada uno.

```
BENT bent = xngt - gast
BENF benf = bent - xhac
AHOR if benf > 0 then
    ahor = ahoi + benf - xive
else
    ahor = ahoi + benf
endif
```

```

XMPB xmpb = bent * xvi3
XENT xent = 0.7
XIVE if benf > 0 then
    xive = xent*benf
else
    xive = 0
endif
XIVN if rein = 0 then
    xivn = xivi + xive
else
    xivn = xivi + xive - repa
endif
REPA if (xmoi = amo1) Xor (xini =
    amo2) Xor (xifi = amo3) then
    repa = xivi
else
    if ((xmoi = amo1) And (xini
    = amo2)) Xor ((xmoi =
    amo1) And ((xifi = amo3))
    Xor ((xifi = amo3)
    And( xini= amo2)) then
        repa = xivi / 2
    else
        if (xmoi = amo1) And
        ((xini = amo2) And (xifi =
        amo3) then
            repa = xivi/3
        else
            repa = 0
        endif
    endif
endif
    
```

4. Verificación del Modelo

Con los datos trimestrales de la empresa correspondientes al periodo 2008-2012 los resultados obtenidos con el modelo simulador se ajustan de manera suficientemente aproximada a los que registró la empresa en dicho periodo. El ajuste se considera satisfactorio debido a tres razones:

- La superposición gráfica es muy buena.
- Se ha obtenido un coeficiente de determinación superior al 99% entre resultados reales y simulados, según la fórmula que se indica a continuación:

$$R^2 = \frac{\sum_i (x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y)}{\sum_i (x_i - \mu_x)^2 \sum_i (y_i - \mu_y)^2},$$

dónde (x_i, y_i) son los resultados (reales x_i y simulados y_i), y dónde μ_x y μ_y son los valores medios correspondientes.

- Además, el error relativo no supera al 5%. Véase la Figura 2.

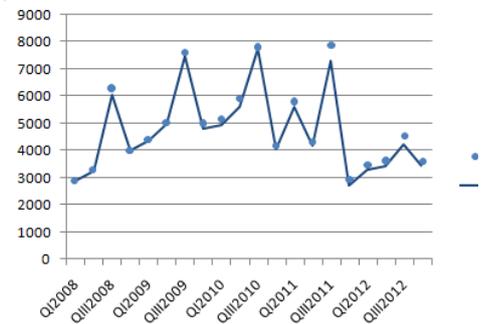


Figura 2: Resultados simulados (línea) y datos reales (puntos) para los beneficios de un centro de estudios durante el periodo 2008-2012, trimestralmente. $R^2 = 0.994165$. Error relativo máximo 4.4%.

Se observa en la Figura 2 que los mayores ingresos corresponden al tercer trimestre, meses de Julio, Agosto y Septiembre, época en la cual se producía una mayor afluencia de alumnos para la preparación de los exámenes de recuperación de Septiembre.

También se observa que la superposición gráfica entre valores reales y simulados no es exacta. Esto se debe a la fluctuación del precio de las clases particulares (véase Tabla 1). Es cierto que la empresa redujo el precio de las mismas, pero no aplicó exactamente la política de precios que aquí se describe y se ha ideado, es decir, reducir un 1% la cuota si los beneficios trimestrales finales son superiores al gasto en amortización de inmueble, mobiliario y equipos informáticos (política propuesta para favorecer a las familias).

5. Conclusiones

Se ha presentado un modelo matemático discreto y dinámico aplicado a las gestiones económicas de una pequeña empresa (un centro de estudios) que ha sido diseñado y validado para un centro de estudios real, asumiendo que puede ser ilustrativo para el diseño de modelos similares para otros tipos de pequeñas empresas.

Se ha utilizado la formulación determinista del mismo y se muestra cómo resulta validado con un coeficiente de determinación superior al 0.99 y un error relativo que no supera en ningún caso

al 5%. Además se observa una superposición gráfica casi perfecta entre los resultados reales y los simulados.

En este trabajo se presenta la definición completa del modelo y su validación, pero será en futuras investigaciones donde le daremos una aplicabilidad. Entonces, en primer lugar, todas las variables de entrada serán ajustadas mediante funciones dependientes del tiempo. En segundo lugar, el modelo será escrito en su formulación estocástica, lo que nos permitirá obtener los resultados en forma de intervalo de confianza, es decir, no obtendremos un valor concreto sino un máximo y mínimo entre los que el resultado podrá encontrarse con una determinada probabilidad. Por último, se planteará un objetivo a conseguir, por ejemplo hacer máximo el beneficio final trimestral, y se construirán diferentes estrategias y escenarios de cuya simulación se deducirá la mejor estrategia de cara al objetivo propuesto.

Referencias

Caselles, A. (2008). Modelización y simulación de sistemas complejos. *Editorial: Universitat de València*. ISBN: 978-84-370-7198-5

Martin, M.A., Cuadrado, M.L., Romero, C. (2011). Computing efficient financial strategies: An extended compromise programming approach. *Applied Mathematics and Computation*, 217, 19, 7831-7837.

Ordoobadi, S.M., (2009). Development of a supplier selection model using fuzzy logic. *Supply Chain Management: An International Journal*, Vol. 14 Iss: 4, pp.314 - 327

Naraparaju, R., Karamcheti, R.A., Wang, Z.Y. (2005). Mathematical solution for the

determination of optimal warehouse location and optimal distribution route. *Manufacturing Engineering and Materials Handling*, 16, 1437-1444.

Micó, J.C., Caselles, A., Soler, D. (2006). Age-Structured Human Population Dynamics. *Journal of Mathematical Sociology*, 30, 1-31.

Shanon, R., Johannes, J. (1976). Systems simulation: the art and science. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 6(10), 7234-724.

Carlson, S. (1956). A Study on the Pure Theory of Production, Augustus M. Kelley Publishers, New Jersey.

Baumol, W.J. (1958). On the theory of oligopoly, *Economica* 25, 187-198.

Baumol, W.J. (1959). Business Behavior, Value and Growth. *Harcourt Brace and World, New York*.

Camerer, C.F., Loewenstein, G., Rabin, M. (2004). Advances in Behavioral Economics, *Princeton University Press, Princeton, New Jersey*.

Diamond, P., Vartiainen, H. (2007). Behavioral Economics and its Applications, *Princeton University Press, Princeton, New Jersey*.

Zeleny, M. (1982). Multiple Criteria Decision Making, *McGraw Hill, New York*.

Ballester, E., Romero, C. (1998). Multiple Criteria Decision Making and its Application to Economic Problems. *Kluwer Academic Publishers, Boston, Massachusetts*.

	CUO1	CUO2	CUO3	CUO4
QI2008	252	216	120	240
QII2008	252	216	120	240
QIII2008	249.48	213.84	118.8	237.6
QIV2008	249.48	213.84	118.8	237.6
QI2009	249.48	213.84	118.8	237.6
QII2009	249.48	213.84	118.8	237.6
QIII2009	246.9852	211.7016	117.612	235.224
QIV2009	246.9852	211.7016	117.612	235.224
QI2010	244.5154	209.5846	116.4359	232.8718
QII2010	242.0702	207.4887	115.2715	230.5431
QIII2010	239.6495	205.4138	114.1188	228.2376
QIV2010	239.6495	205.4138	114.1188	228.2376
QI2011	239.6495	205.4138	114.1188	228.2376
QII2011	239.6495	205.4138	114.1188	228.2376
QIII2011	237.253	203.3597	112.9776	225.9552
QIV2011	237.253	203.3597	112.9776	225.9552
QI2012	237.253	203.3597	112.9776	225.9552
QII2012	237.253	203.3597	112.9776	225.9552
QIII2012	237.253	203.3597	112.9776	225.9552
QIV2012	237.253	203.3597	112.9776	225.9552

Tabla 1: Datos de las cuotas simuladas por el Modelo.