MÉTODOS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE REGLA Y COMPÁS.

Alejandro Fernández Lajusticia, Onofre Monzó y Luis Puig
Departamento de Didáctica de las Matemáticas
Universitat de València Estudi General

Fernández Lajusticia, Alejandro, Monzó, Onofre y Puig, Luis (2014). Métodos de resolución de problemas de regla y compás. En B. Gómez y L. Puig (Eds.) (2014). *Resolver problemas. Estudios en memoria de Fernando Cerdán* (pp. 259-295). Valencia: Universitat de València. ISBN 978-84-370-6863-3.

8

Métodos de resolución de problemas de regla y compás

Alejandro Fernández Lajusticia,
Onofre Monzó
y Luis Puig

8.0 INTRODUCCIÓN

Este capítulo lo firmamos Alejandro Fernández Lajusticia, Onofre Monzó y Luis Puig, pero recoge un material y unas ideas que tienen una historia de años, en la que participaron en diversa medida otras personas, entre las que se cuenta Fernando Cerdán. Ése es el motivo que nos ha hecho pensar que era adecuado para este libro escrito en su memoria.

En el origen de lo que presentamos aquí está el estudio, que algunos de nosotros realizamos a finales de los años setenta y principios de los ochenta, de los libros de Polya sobre la heurística en la resolución de problemas *Cómo plantear y resolver problemas*, *Matemáticas y razonamiento plausible* y *La découverte des mathématiques*. Escribimos sus títulos así, los dos primeros en castellano y el tercero en francés, porque así fue como leímos en aquellos años *How to solve it* (Polya, 1945), *Mathematics and plausible reasoning* (Polya, 1954) y *Mathematical discovery* (Polya, 1962-1965). El tercero no estaba traducido al castellano, ni lo está tampoco ahora, y recurrimos a una traducción francesa[1] porque nos sentíamos más cómodos con el francés que con el inglés.

Fernando Cerdán y Luis Puig desarrollaron una serie de proyectos de investigación a comienzos de los años ochenta en los que, además de los resultados empíricos que se obtuvieron, se fueron perfilando una serie de conceptos teóricos con el fin de distinguir distintos elementos que intervienen en lo que en Puig (1996) se llama el "estilo heurístico de resolución de problemas". Algunos de esos conceptos van apareciendo en los títulos de los proyectos: *El papel de la resolución de problemas en el curriculum de formación de profesores de EGB. Herramientas heurísticas y patrones plausibles* (XI Plan de Investigación Educativa del INCIE, 1982-1983); *Mecanismos de control y de decisión en la resolución de problemas de matemáticas* (I Plan de Investigación Educativa de la Comunidad Valenciana, 1984-1985); *Sugerencias heurísticas y gestión del proceso de resolución de problemas: efectos de la instrucción* (Plan de Investigación Educativa de la Comunidad Valenciana, 1986). "Herramientas heurísticas (HH)", "sugerencias heurísticas (SH)", "patrones plausibles (PP)", y los mecanismos de control, decisión y gestión del proceso de resolución, que acabarían llamándose en Puig (1996) "gestor instruido (GI)", son algunos de los conceptos desarrollados a partir de los libros de Polya citados, incorporando también ideas de los trabajos que Alan Schoenfeld recogió en su libro *Mathematical Problem Solving*, publicado por esas fechas (Schoenfeld, 1985). En el capítulo tercero de Puig (1996) está descrito con un cierto grado de detalle qué ideas se tomaron de Polya y Schoenfeld y en qué sentido y cómo se transformaron para enunciarse como elementos del modelo de competencia del estilo heurístico de resolución de problemas.

La transformación de esos conceptos, comenzados a elaborar por Fernando Cerdán y Luis Puig en los trabajos realizados en el contexto de los proyectos de investigación citados, en elementos de un modelo de competencia se produjo como consecuencia de la propuesta de Eugenio Filloy del marco teórico y metodológico para la investigación en didáctica de las matemáticas, al que dio el nombre de "Modelos Teóricos Locales (MTL)", a cuyo desarrollo se incorporó

1. Años después, cuando dos de nosotros (Alejandro y Luis) hicimos una traducción al catalán de un capítulo de este libro, precisamente del capítulo que vamos a tratar aquí, y, para hacerla, quisimos usar el original inglés, que, en el ínterin, habíamos conseguido, descubrimos entonces que la traducción francesa se había tomado algunas libertades con el texto original. Esa traducción al catalán la hemos usado como material de trabajo para los alumnos durante años.

Luis Puig desde sus inicios[2], y que así los formuló para su tesis doctoral, leída en 1993 y publicada en forma de libro tres años después (Puig, 1996).

Pero en esa lista de conceptos tomados de los títulos de los proyectos de investigación –HH, SH, PP y GI–, no aparece, sin embargo, el que nos interesa especialmente porque es del que trata en concreto este capítulo. Polya le dedica precisamente el tercero de sus libros citados, *Mathematical Discovery*, y uno de nosotros acabó denominándolo "métodos de resolución con contenido heurístico" (MH) (Puig, 1996, p. 44). ¿Qué se quiere decir con "método con contenido heurístico"? La explicación de esta denominación hay que buscarla en la caracterización que habíamos hecho previamente de lo que en el primero de los proyectos citados denominamos HH, "herramienta heurística": un procedimiento independiente del contenido, que no resuelve el problema, sino que lo transforma en otro. Delimitado de esta manera el concepto de HH, hubo procedimientos de los que Polya llamaba "heurísticas" que eran HH y otros que no, a los que dimos otras denominaciones, como SH, ya citada, o "destrezas con potencial heurístico" (DH). ¿Qué decir entonces de los métodos generales de resolución como el método cartesiano, cuya pretensión es precisamente "resolver todos los problemas (dentro de un cierto universo de problemas)"? Si el método resuelve el problema, queda excluido de la heurística. Si el método se limita a transformar el problema en otro, es una herramienta heurística, y no hay por qué introducir una nueva denominación.

Un examen más minucioso desde este punto de vista nuestro de los métodos que Polya presenta en *Mathematical Discovery* condujo a esta denominación de MH, al poder determinar que esos métodos lo que hacen es organizar un

2. Eugenio Filloy elaboró el primer esbozo de la teoría de los MTL en 1988 durante una estancia académica en el Institute of Education de la University of London en un manuscrito nunca publicado que tituló *Theoretical Aspects of PME Algebra Research*. Una parte importante de ese manuscrito apareció al año siguiente junto con un panorama de la investigación en didáctica del álgebra escrito por Carolyn Kieran en un artículo que se publicó en la revista *Enseñanza de las Ciencias* (Kieran y Filloy, 1989), siendo esa la primera vez que la teoría de los MTL apareció publicada. En esa época, la revista *Enseñanza de las Ciencias* traducía al castellano los artículos que se remitían en otras lenguas y ése fue el caso de este artículo de Kieran y Filloy. La traducción al castellano la hizo uno de nosotros, Luis Puig, quien, al enfrentarse a la traducción de uno de los términos centrales de la teoría, que en la versión inglesa estaba escrito "mathematical sign system", decidió que lo adecuado era "sistema matemático de signos" y no "sistema de signos matemáticos", decisión que, consultado, ratificó Eugenio Filloy, perfilando así un concepto que el inglés deja ambiguo, en uno de los sentidos que éste admite.

plan para resolver el problema planteado trazando un conjunto de pasos que hay que realizar para ejecutarlo, pero que la ejecución de cada uno de los pasos constituye un problema (o varios) que hay que resolver. Dicho de otra manera, el método indica una serie de pasos que, si se realizan, resuelven el problema –este rasgo lo comparte con un algoritmo–, pero, a diferencia de lo que sucede con un algoritmo en que la ejecución de cada uno de los pasos es un ejercicio, en el caso del método, la ejecución de cada paso es un problema. El método, en este sentido, transforma el problema planteado en una serie de problemas ordenados que, si se resuelven, el problema planteado queda resuelto. El método, por tanto, comparte un rasgo con los algoritmos, establecer los pasos de un plan de solución, y otro con las HH, transformar el problema en otros; pero, a diferencia de los algoritmos, cada paso es un problema y no un ejercicio, y, a diferencia de las HH, garantiza la solución del problema (si se recorren con éxito todos los pasos). De ahí viene que acabáramos llamándolos MH, "métodos con contenido heurístico". El método cartesiano, el método de inducción y los métodos de los que hablamos en este capítulo son MH.

El origen pues de lo que vamos a presentar en este capítulo es este estudio e interpretación de los métodos que Polya presenta en *Mathematical Discovery* que nos llevó a caracterizarlos como MH, pero además hay otro desarrollo teórico que tiene que ver con la forma concreta en que describimos los métodos: se trata de los MTL. En cualquier trabajo de investigación desarrollado con la teoría de los MTL, hay que elaborar al menos un esbozo de lo que en esa teoría se llama "modelo de competencia". No vamos a entrar aquí en una exposición de en qué sentido se usa "modelo de competencia" en los MTL, que puede leerse expuesto en Filloy, Rojano y Puig (2008) y discutido en detalle frente a otros usos actuales del término "competencia" en Puig (2006). Lo que nos interesa para el asunto que tratamos en este texto es cuál es el procedimiento que hemos utilizado para elaborar los modelos de competencia en nuestros estudios. En el caso de estudios sobre la enseñanza y el aprendizaje de un contenido conceptual, nuestra fuente fundamental para la elaboración del modelo de competencia ha sido el análisis fenomenológico, como puede verse, por ejemplo, en Fernández Lajusticia y Puig (2002), pero el análisis fenomenológico no puede ser la fuente de elaboración del modelo de competencia en el caso de que lo que se quiera estudiar sea un contenido matemático no conceptual como es el proceso de resolución de problemas. Ese problema lo resolvió uno de nosotros en el caso del estilo heurístico de resolución de problemas de una forma que no vamos a detallar aquí y que puede verse descrita en el curso de su elaboración en Puig (1996) y posteriormente de forma más sintética en Puig (2006). Pero además, ya en Puig (1996) se apunta que hay clases de problemas para las que alguno de los elementos de ese modelo de competencia desempeñan un papel crucial. Es el caso de las clases de problemas para las cuales hay métodos de resolución con contenido heurístico establecidos. Como el modelo de competencia podemos verlo como la forma de predecir, explicar y describir la conducta del resolutor ideal, pueden usarse entonces los pasos del método como un esquema que indica cuáles son los elementos que componen la competencia en la resolución de esa clase de problemas. Este idea está desarrollada por primera vez para el caso de la clase de problemas aritmético-algebraicos de enunciado verbal, mediante un estudio en la historia, en Puig (2003) y Puig y Rojano (2004) y completada posteriormente con un cierto grado de detalle en Filloy, Rojano y Puig (2008), y, sobre todo, en Filloy, Puig y Rojano (2008), usando como esquema del modelo de competencia una descomposición en pasos del método cartesiano.

La clase de problemas que vamos a abordar en este capítulo es la de los problemas de construcción con regla y compás. Los problemas de construcción con regla y compás constituyen una clase de problemas clásicos que se caracterizan por dos cosas. Por un lado, por lo que pide el problema, que es la construcción de una figura geométrica, y, por otro, porque esa construcción ha de realizarse utilizando para ello sólo dos instrumentos: una regla no graduada y un compás. La restricción de los instrumentos a esos dos es lo que de hecho caracteriza qué se puede hacer para realizar la construcción, y equivale, en términos geométricos, a que sólo pueden trazarse segmentos de recta y arcos de circunferencia. El hecho de que la regla sea una regla no graduada excluye además el recurso a cualquier otra medición que la que puede hacerse mediante el compás.

La elaboración de un modelo de competencia para esa clase de problemas se abordó para la tesis doctoral de Liliana Siñerez (Siñeriz, 2000) y está descrita en ella y en Siñeriz y Puig (2006). En el caso de esta clase de problemas, el asunto es más complejo que en el de los problemas aritmético-algebraicos de enunciado verbal, porque no puede partirse de un único método de resolución con contenido heurístico como en ese caso. Aquí hay cuatro métodos de resolución implicados: tres que son propios de esa clase de problemas (el método de los dos lugares, el método de la figura auxiliar y el método de la figura semejante) y uno que es de índole más universal, el método de análisis y síntesis, que adopta en esta clase de problemas una versión específica que sirve para organizar el uso de los otros tres métodos. A esa conclusión llegamos, y así lo establecimos, a partir del estudio del capítulo que Polya dedica a esa clase de problemas en su libro *Mathematical Discovery* (Polya, 1962-1965), y su transformación en una descripción metódica de la conducta del resolutor ideal: el método de análisis y síntesis organiza el conjunto de las acciones, el método de los dos lugares es el núcleo central del proceso y sus pasos indican pues elementos esenciales de la competencia, y los otros dos métodos entran en juego cuando la condición del problema no permite que la aplicación de los pasos del método de los dos lugares conduzca a resolver el problema. En ese caso, el método de la figura auxiliar establece cómo reiterar el método de los dos lugares a través de la construcción de figuras que no son las que el problema pide construir (la figura auxiliar o las figuras auxiliares), y el método de la figura semejante introduce una forma especial de buscar dos lugares (a través de la construcción de una figura homotética a la que el problema pide construir).

En este texto presentamos una selección de los problemas planteados por Polya en el capítulo mencionado de Polya (1962-1965), resueltos siguiendo de forma explícita los pasos de los métodos.

8.1 EL MÉTODO DE ANÁLISIS Y SÍNTESIS COMO ORGANIZADOR DEL PROCESO DE RESOLUCIÓN

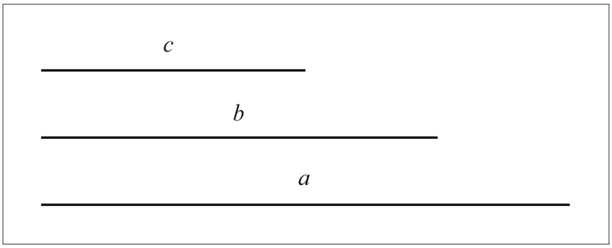
El método de análisis y síntesis, cuando se aplica a la resolución de un problema de encontrar (en este caso de encontrar la construcción de una figura geométrica), comienza dando el problema por resuelto y buscando cuáles son los antecedentes que conducen al resultado hasta encontrar lo que ha sido dado en el problema (éste es el camino del análisis), para después efectuar la construcción siguiendo el camino inverso (la síntesis).

Dar el problema por resuelto en el caso de los problemas de construcción consiste en suponer que la figura ya está construida. En concreto, esta figura que suponemos ya construida, la vamos a llamar “figura de análisis”, y la resolución del problema comenzará pues resaltando en la figura de análisis los datos del problema, con el fin de buscar cómo puede provenir esa figura ya construida de los datos del problema. Eso es lo que indica el método de análisis y síntesis, pero no la manera en que se puede buscar ese camino desde la figura a los datos y viceversa, que constituye la construcción y resuelve el problema. La manera de buscarlo está trazada por el método de los dos lugares, en primer lugar, y por el método de la figura auxiliar y el método de la figura semejante. En el apartado siguiente examinamos una construcción conocida, la de un triángulo dados sus tres lados, para generalizar sus pasos, convirtiéndola así en un método de resolución: el método de los dos lugares.

8.2 UN EJEMPLO PARA EXTRAER EL MÉTODO DE LOS DOS LUGARES

Analizaremos pues el problema de construir un triángulo dados sus tres lados, que es un problema clásico[3].

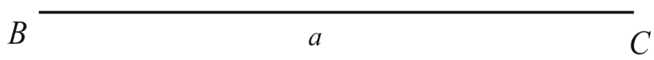
En este caso la incógnita es una figura geométrica, un triángulo. Los datos son tres segmentos de recta, *a*, *b* y *c*[4], que están dados en magnitud.



La condición que liga los datos a la incógnita es que los lados del triángulo que buscamos son iguales en magnitud a esos tres segmentos de recta.

3. En los *Elementos* de Euclides es el problema 22 del libro I. El enunciado euclídeo, en la traducción de María Luisa Puertas, es "Construir un triángulo con tres rectas que son iguales a tres rectas dadas. Pero es necesario que dos (de las) rectas tomadas juntas de cualquier manera sean mayores que la restante" (Euclides, 1991, p. 227). Como es harto conocido Euclides no presenta el análisis, sino sólo la síntesis. La construcción que nosotros presentamos no es la del texto euclídeo.
4. Para que el triángulo pueda construirse es necesaria la condición (el diorismo, en términos de la matemática griega) que Euclides incluye en el enunciado de la proposición 22 del libro I, que hemos citado en la nota 3. La construcción que nosotros presentamos también serviría para demostrar que esa condición es necesaria, ya que, si no se cumple, la construcción no puede realizarse.

Para construir el triángulo, lo primero que hacemos es colocar un segmento igual en magnitud al segmento a: sea el segmento BC.



Al colocar el segmento BC, igual en magnitud al segmento a, el segmento BC, además de estar dado en magnitud, también está dado en posición, porque lo hemos colocado en un determinado lugar. Como consecuencia de ello, también están dados en posición los extremos del segmento, que son dos vértices del triángulo: B y C. Con lo cual, para hallar la incógnita (el triángulo ABC) queda únicamente por determinar el vértice A. Dicho de otra manera, al colocar el segmento BC, igual en magnitud al segmento a, el problema propuesto se ha transformado en otro, que podemos enunciar de la siguiente manera:

> Dado el segmento BC, en magnitud y en posición, hallar el vértice A del triángulo ABC.

El nuevo problema pide hallar un punto, el punto A, y hallar un punto consiste en determinar su posición.

En lo que llevamos examinado, que es sólo el comienzo de la construcción y que consiste en colocar un segmento, ha aparecido algo que conviene subrayar porque no suele prestársele la atención que merece, y desempeña un papel importante en esta clase de problemas. Se trata del hecho de que los objetos geométricos pueden estar dados de tres maneras distintas: en posición, en magnitud y en forma[5]. Es decir, de una figura geométrica puede estar dado en qué lugar se encuentra, que tamaño tiene o qué forma tiene. Los puntos sólo pueden darse en posición, ya que no tienen ni tamaño ni forma. Los segmentos pueden darse en posición y en tamaño, pero no en forma (ya que todos los segmentos tienen la misma forma).

El nuevo problema en que se ha transformado el problema inicial al colocar el segmento BC, tiene una nueva incógnita y nuevos datos: la incógnita es ahora el punto A (y no el triángulo ABC) y los datos son dos puntos, B y C, dados

5. El libro de Euclides que en griego se llama *Δεδομένα*, literalmente "lo que ha sido dado", y se conoce por su título en latín *Data*, comienza precisamente por cuatro definiciones, tres para las figuras geométricas, las de haber sido dado en magnitud (definición 1), en forma (definición 3) y en posición (definición 4), y la definición de haber sido dada para el caso de una razón (definición 2) (Taisbak, 2003, p. 17).

en posición, y tres segmentos, a, b y c, de los que a está dado en magnitud y posición, y b y c están dados en magnitud (y no simplemente los tres segmentos a, b y c, dados en magnitud).

Si examinamos ahora la condición del problema inicial, que los tres segmentos sean los lados de un triángulo, esa condición se convierte en el nuevo problema en que el punto A esté a una distancia b de C y a una distancia c de B. La condición del nuevo problema consta pues de dos partes.

Tomando una sola parte de la condición el punto incógnita A no está totalmente determinado, está condicionado a pertenecer a una circunferencia de centro uno de los extremos del segmento BC y de radio el segmento c o el segmento b, según corresponda. El punto incógnita A pertenece a dos lugares geométricos, dos circunferencias, y se encuentra en su intersección. Para resolver el nuevo problema bastará pues con trazar esas dos circunferencias, esos dos lugares geométricos, y la posición del punto buscado estará en su intersección. Pero la resolución de ese problema resuelve el problema original, ya que para construir el triángulo buscado basta sólo con unir los extremos del segmento BC con el punto A.

El detalle con que hemos analizado la resolución de este problema nos permite enunciar un método para resolver problemas de construcción geométrica, que se llama "método de los dos lugares" porque su parte central consiste en determinar dos lugares geométricos. El método de los dos lugares consta pues de dos pasos:

1. Transformar el problema de forma que se reduzca a la determinación de un punto.
2. Dividir la condición en dos partes tales que cada una de ellas sea un lugar geométrico para el punto incógnita.

Como los instrumentos permitidos en estos problemas de construcción con regla y compás sólo permiten construir rectas (segmentos) y circunferencias (arcos de circunferencia), los lugares han de ser rectas o circunferencias. Como esas figuras geométricas son el resultado de propiedades en que se divide la condición del problema, esas figuras geométricas han de ser vistas como lugares geométricos. Una parte importante de la resolución de esta clase de problemas se juega en la capacidad del resolutor de ver las figuras geométricas como lugares geométricos definidos por propiedades. Así, por ejemplo, hará falta ver la bisectriz de un ángulo no como la recta que divide el ángulo en dos ángulos iguales, sino como el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los dos lados del ángulo. La enseñanza de la resolución de esta clase de problemas necesita que algunos conceptos geométricos se reconceptualicen como lugares geométricos, y es el lugar adecuado para ello.

8.3 LA ARTICULACIÓN DE LOS CUATRO MÉTODOS

El método de los dos lugares es el método central de resolución de los problemas de construcción con regla y compás, pero no es suficiente. Hay problemas que se dejan reducir a la determinación de un punto que puede ser determinado mediante dos lugares geométricos que pueden construirse a partir de los datos del problema. Para esos problemas, el método de los dos lugares es suficiente. Sin embargo, en otras ocasiones eso no es posible, pero sí que es posible construir una figura mediante el método de los dos lugares que no es la pedida, pero que, una vez construida, proporciona nuevos datos con los que se puede reducir, ahora sí, la construcción de la figura inicialmente pedida a la determinación de un punto, que, ahora sí, puede hallarse por el método de los dos lugares. Llamaremos "método de la figura auxiliar" a la construcción de esa figura que permite, apoyándose en ella, construir la figura inicialmente pedida por reiteración del método de los dos lugares.

Hay aún un tercer método que puede ser necesario cuando no es posible encontrar una figura auxiliar (o varias) que desempeñe el papel de intermediario para la construcción de la figura pedida o servir en lugar del método de la figura auxiliar. Ese tercer método consiste en la construcción de una figura semejante a la que se pide, que se construye mediante el método de los dos lugares o el método de la figura auxiliar (y el de los dos lugares). Así, se consigue una figura que, con respecto a la figura que pide el problema, ya está dada en forma y sólo falta que esté dada también en tamaño y en posición. Finalmente, la figura que pide el problema puede construirse a partir de ella porque la figura semejante que se ha decidido en el análisis construir está elegida de manera que los datos proporcionen un centro y una razón para construir mediante una homotecia la figura pedida a partir de la figura semejante.

Pero además, por la complejidad del conjunto del proceso en el que puede que haya que combinar el uso de varios métodos, y, en todo caso, hay que comenzar transformando el problema inicial en la determinación de un punto y el análisis de qué métodos hay que usar y en qué orden, el conjunto del proceso está organizado por el método de análisis y síntesis. Es decir, se comienza dando el problema por resuelto y examinando en la figura pedida, que se da como ya construida, la combinación y orden de los métodos, en función de las relaciones entre los datos que se tienen y la figura incógnita.

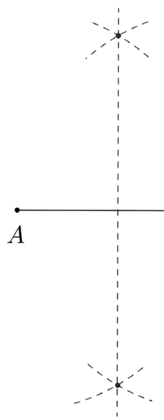
Ilustraremos en lo que sigue, en orden de complejidad creciente, el uso de los métodos organizados por el método de análisis y síntesis en problemas de construcción de triángulos. Pero antes de ello presentaremos una serie de construcciones elementales, que constituyen los problemas elementales de construcción a partir de los cuales se realizan las construcciones de los triángulos. Puede observarse que, de hecho, en la mayoría de esas construcciones elementales se usa una versión del método de los dos lugares.

8.4 CONSTRUCCIONES ELEMENTALES

Para resolver problemas de construcción geométrica con regla y compás es conveniente recordar algunas construcciones elementales. En particular aquellas que son lugares geométricos que utilizaremos en la aplicación del método de los dos lugares, y otras relacionadas con dichos lugares.

Empezamos presentando, en 8.4.1, 8.4.2 y 8.4.3, las construcciones de la "mediatriz" de un segmento, lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los extremos de un segmento dado, y las relacionadas con ella.

8.4.1 La mediatriz de un segmento

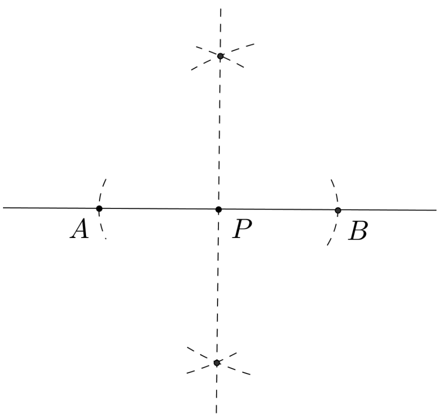


Dibujamos un arco de circunferencia con centro en A y radio mayor que $AB/2$.

Con el mismo radio dibujamos un arco de circunferencia con centro en B.

Trazamos la recta que une los dos puntos de corte.

8.4.2 La perpendicular a una recta por un punto de la recta

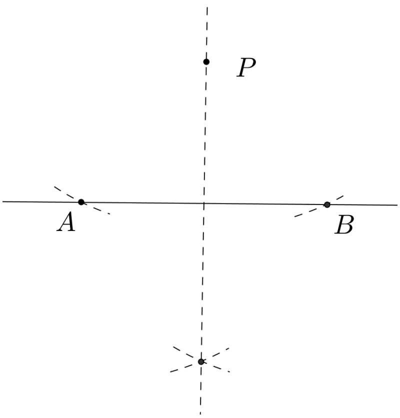


Dibujamos dos arcos de circunferencia con centro en P y radio cualquiera. Obtenemos los puntos A y B. La perpendicular que pasa por P es ahora la mediatriz del segmento AB, de modo que la construcción continúa con la de esa mediatriz.

Trazamos un arco de circunferencia con centro en A y radio mayor que AP y otro arco de circunferencia con centro en B y el mismo radio anterior.

La recta que une los dos puntos de corte es la perpendicular por el punto P.

8.4.3 La perpendicular a una recta por un punto exterior a ella



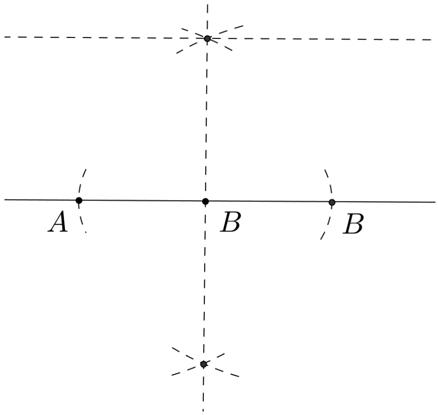
Dibujamos un arco de circunferencia con centro en P y radio mayor que la distancia de P a la recta. Obtenemos los puntos A y B. La perpendicular que pasa por P es ahora la mediatriz del segmento AB, de modo que la construcción continúa con la de esa mediatriz.

Trazamos dos arcos de circunferencia: uno con centro en A y radio mayor que $AB/2$ y otro con centro en B y el mismo radio anterior.

La recta que une los dos puntos de corte entre los arcos es la perpendicular.

En 8.4.4. presentamos la construcción de una recta paralela a otra dada, lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan a otra recta dada, y la paralela media a dos rectas paralelas, lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de las dos rectas.

8.4.4 La paralela a una recta dada y la paralela media

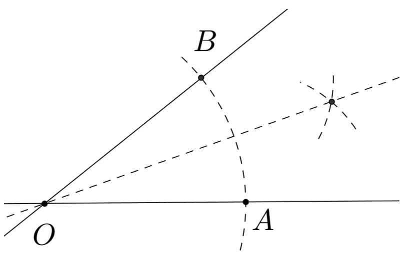


La construcción de la paralela se reduce a la de dos perpendiculares: primero una a la recta dada y luego otra a la anterior (ver las construcciones 8.4.2 y 8.4.3). La segunda perpendicular es la paralela a la recta dada.

Para obtener la paralela media: primero trazamos una perpendicular a las rectas dadas. Después, con la ayuda de la mediatriz obtenemos el punto medio del segmento que se ha formado. Finalmente, por este punto trazamos una perpendicular al segmento que es paralela a las rectas dadas.

En 8.4.5, 8.4.6 y 8.4.7, presentamos construcciones que tienen que ver con ángulos: la construcción de la bisectriz, lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los lados de un ángulo, la construcción sobre una recta dado en un punto dado de un ángulo dado (construcción que se suele llamar "transportar un ángulo") y la construcción del arco capaz, lugar geométrico de los puntos del plano desde los cuales se ve con un ángulo dado un segmento dado.

8.4.5 La bisectriz, lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los lados del ángulo

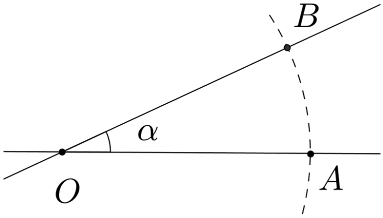


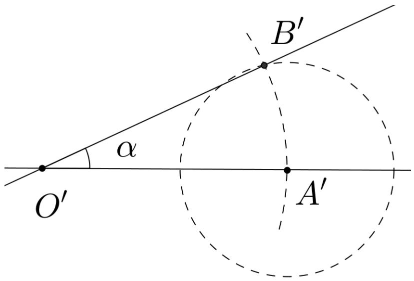
Dibujamos un arco de circunferencia con centro en O y radio cualquiera. Obtenemos los puntos A y B.

Trazamos dos arcos de circunferencia: Uno con centro en A y radio mayor que $AB/2$ y otro con centro en B y el mismo radio anterior.

La recta que une el vértice O con uno de los puntos de corte es la bisectriz.

8.4.6 Transportar un ángulo





El ángulo dado, que hay que transportar a otro lugar es *AOB*. La construcción de un ángulo de la misma amplitud, situado sobre otra recta se realiza de la siguiente manera

En la recta a la que se quiere transportar el ángulo, se fija un punto *O*'.

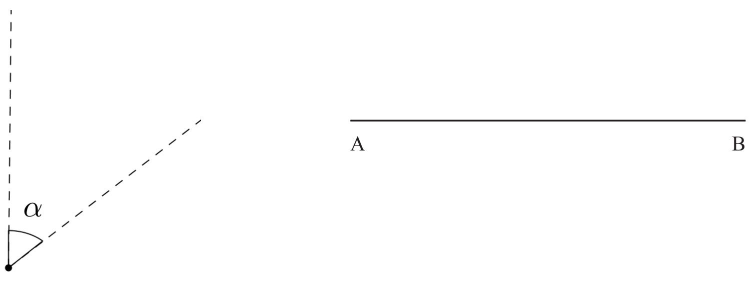
Mediante un arco de circunferencia con centro en *O*' y radio *OA* obtenemos *A*'.

Con un arco de circunferencia con centro en *A*' y radio *AB* obtenemos *B*'.

La recta *O*'*B*' es el otro lado del ángulo.

8.4.7 El arco capaz, dado un segmento *AB* y un ángulo α

Los datos son: un ángulo α y un segmento *AB*.



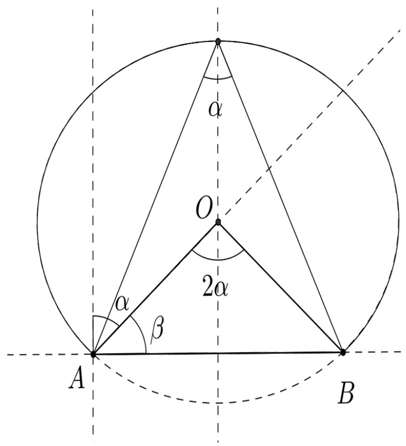
1. Fijamos el segmento dado *AB*.
2. Trazamos por *A* una perpendicular al segmento anterior.
3. Transportamos el ángulo dado α de forma que tenga el vértice en *A* y que un lado sea la perpendicular al segmento *AB* en el punto *A*.
4. Trazamos la mediatriz al segmento *AB*.

5. El punto de corte entre el lado del ángulo α y la mediatriz nos da el centro de la circunferencia. El arco AB es la solución.

Veamos que esta construcción es correcta:

– El triángulo AOB es isósceles y el valor del ángulo central AOB es 180º – 2 β.
– Como $\alpha + \beta = 90º$, entonces $AOB = 180º - 2\,(90º - \alpha) = 180º - 180º + 2\,\alpha = 2\,\alpha$

  Un ángulo inscrito vale la mitad de su correspondiente ángulo central. Por tanto el ángulo inscrito que tiene por arco AB vale α, tal como queríamos construir.

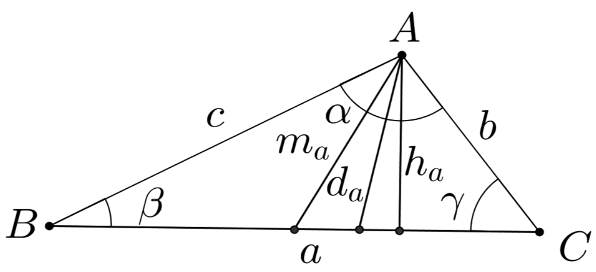


8.5 PROBLEMAS RESUELTOS CON EL MÉTODO DE LOS DOS LUGARES

En este apartado presentamos, de forma esquemática y metódica, la resolución de varios problemas de construcción de triángulos que se pueden resolver aplicando exclusivamente el método de los dos lugares.

Para referirnos con comodidad a los datos de los problemas que vamos a presentar en este apartado y en 8.6 y 8.7, utilizaremos las notaciones siguientes:

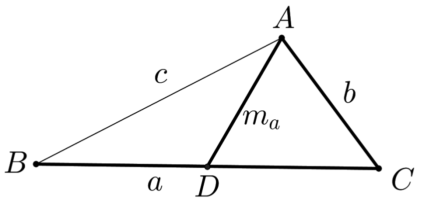
– los vértices	A, B, C
– los lados	a, b, c
– los ángulos	α, β, γ
– las alturas	h_a, h_b, h_c
– las medianas	m_a, m_b, m_c
– las bisectrices de los ángulo	$d_\alpha, d_\beta, d_\gamma$
– el radio del círculo circunscrito	R
– el radio del círculo inscrito	r



8.5.1 Construir un triángulo dados dos lados a, b y la mediana m_a

Damos el problema por resuelto, construimos una figura de análisis (el triángulo *ABC*) y en ella, mediante un trazo grueso, señalamos los datos.

Figura de análisis



Datos

Dos lados, a y b, y la mediana m_a.

Transformamos el enunciado del problema para reducirlo a la determinación de un punto.

Si fijamos el lado *BC*, entonces el problema queda reducido a hallar el vértice *A*.

Fijado el lado *BC*, en el nuevo enunciado del problema tenemos:

Datos: El lado a [*BC*], el lado b [*AC*] y el segmento m_a.
Incógnita: Vértice *A*.

Las dos condiciones para la incógnita son:

- El punto A está a una distancia m_a del punto D, punto medio del segmento BC.
- El punto A está a una distancia b del vértice C.

El punto A está pues en los dos lugares que se corresponden con las dos propiedades que constituyen las dos condiciones:

1. En una circunferencia de centro D y radio m_a .
2. En una circunferencia de centro C y radio b.

Finalizado el *análisis*, la construcción (la *síntesis*) de la figura demandada será:

1. Colocamos a, tenemos los vértices B y C y nos falta hallar el vértice A.
2. Trazamos la mediatriz del segmento BC y hallamos D, punto medio del segmento.
3. Con centro en D y radio m_a trazamos una circunferencia.
4. Con centro en C y radio b trazamos una circunferencia.
5. La intersección de las dos circunferencias nos dará el vértice A buscado.

El triángulo ABC es la solución.

Discusión:

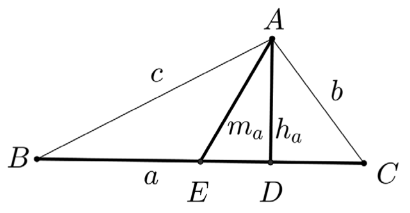
Podemos encontrar dos soluciones.

Para ello es necesario que se cumpla la condición de existencia de triángulos; en el triángulo ADC un lado (la mediana m_a) ha de ser menor que la suma de los otros dos (lado b y la mitad del lado a).

8.5.2 Construir un triángulo dados un lado a, la altura h_a y la mediana m_a

Damos el problema por resuelto, construimos una figura de análisis, el triángulo *ABC*, y en ella señalamos los datos.

Figura de análisis



Datos

Un lado a, una altura h_a y una mediana m_a.

Transformamos el enunciado del problema para reducirlo a la construcción de un punto.

Si fijamos el lado *BC*, entonces el problema queda reducido a hallar el vértice *A*.

Fijado el lado *BC,* en el nuevo enunciado del problema tenemos:

Datos: El segmento a (los puntos *B* y *C*) y los segmentos: h_a (altura) y m_a (mediana).
Incógnita: Vértice *A*.

Las dos condiciones para la incógnita son:

– El punto *A* está a una distancia m_a del punto *E*, punto medio del segmento *BC*.
– El punto *A* está a una distancia h_a de la recta que contiene al segmento *BC*.

El punto *A* está en dos lugares*:*

1. En una circunferencia de centro *E* y radio m_a.
2. En una recta paralela al segmento *BC* a una distancia h_a.

Finalizado el *análisis*, la construcción (la *síntesis*) de la figura demandada será:

1. Colocamos a y tenemos los vértices *B* y *C*. Nos falta hallar el vértice *A*.
2. Trazamos la mediatriz del segmento *BC* y hallamos E, punto medio del segmento.
3. Con centro en *E* y radio m_a trazamos una circunferencia.
4. Trazamos una paralela al segmento *BC* a una distancia h_a.
5. La intersección de la circunferencia y la recta nos dará el vértice *A* buscado.

El triángulo ABC es la solución.

Discusión:

Podemos encontrar cuatro soluciones.

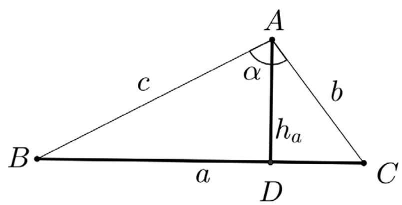
Para que exista solución es necesario que el radio de la circunferencia (la mediana m_a) sea mayor o igual que la distancia entre las paralelas (la altura h_a).

En el primer caso hallamos cuatro soluciones y en el segundo dos. En ambos casos las soluciones "por arriba" del segmento BC son simétricas respecto de las soluciones "por abajo". La recta BC es el eje de simetría respecto de las soluciones encontradas.

8.5.3 Construir un triángulo dado un lado a, la altura h_a y el ángulo α

Damos el problema por resuelto, construimos una figura de análisis (el triángulo ABC) y señalamos en ella los datos.

Figura de análisis



Datos

Dos segmentos, a y h_a, y un ángulo α .

Transformamos el enunciado del problema para reducirlo a la construcción de un punto.

Si fijamos el lado BC, entonces el problema queda reducido a hallar el vértice A.

Fijado el lado BC en el nuevo enunciado del problema tenemos:

Datos: El lado a [BC], el segmento h_a y el ángulo α.
Incógnita: Vértice A.

Las dos condiciones para determinar la incógnita son:

– El punto A está a una distancia h_a de la recta que contiene el segmento a.
– Desde A el segmento BC se ve con un ángulo α.

El punto A está en dos lugares:

1. En una recta paralela al segmento BC a una distancia h_a .
2. En un arco capaz de segmento BC y ángulo α.

Finalizado el *análisis*, la construcción (la *síntesis*) de la figura demandada será:

1. Colocamos a (tenemos los vértices B y C). Nos falta hallar el vértice A.
2. Trazamos la paralela al segmento BC a una distancia h_a.
3. Trazamos el arco capaz de segmento BC y ángulo α.
4. La intersección de la recta con el arco capaz nos dará el vértice A buscado.

El triángulo ABC es la solución.

Discusión:

Si la paralela es secante con el arco capaz, entonces encontraremos dos soluciones por arriba y otras dos por abajo.

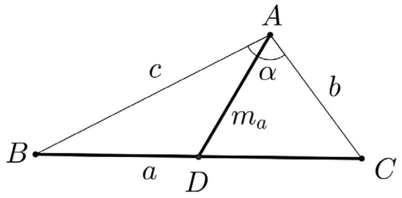
Si es tangente, entonces hallaremos dos soluciones, una por arriba y otra por abajo del lado a.

El lado a se comporta como eje de simetría en relación con las soluciones encontradas.

8.5.4 CONSTRUIR UN TRIÁNGULO DADO EL LADO a, LA MEDIANA m_a Y EL ÁNGULO α

Damos el problema por resuelto, construimos la figura de análisis (el triángulo ABC) y señalamos en ella los datos.

Figura de análisis



Datos

Dos segmentos, a y m_a, y un ángulo α .

Transformamos el enunciado del problema para reducirlo a la construcción de un punto.

Si fijamos el lado BC, entonces el problema queda reducido a hallar el vértice A.

Fijado el lado BC en el nuevo enunciado del problema tenemos:

Datos: El lado a [BC], el segmento m_a y el ángulo α.
Incógnita: Vértice A.

Las dos condiciones para determinar la incógnita son:

- El punto A está a una distancia m_a del punto D, punto medio del segmento BC.
- Desde A el segmento BC se ve con un ángulo α.

El punto A está en dos lugares:

1. En una circunferencia de centro D y radio m_a.
2. En un arco capaz de segmento BC y ángulo α.

Finalizado el *análisis*, la construcción (la *síntesis*) de la figura demandada será:

1. Colocamos a (tenemos los vértices B y C). Nos falta hallar el vértice A.
2. Trazamos la mediatriz del segmento BC y con ello hallamos D, punto medio del segmento.
3. Con centro en D y radio m_a trazamos una circunferencia.
4. Trazamos el arco capaz de segmento BC y ángulo α.
5. La intersección de la circunferencia con el arco capaz nos dará el vértice A buscado.

El triángulo ABC es la solución.

Discusión:

La intersección de la circunferencia con el arco capaz nos dará la solución por arriba y por abajo de la recta que contiene el lado a. Las soluciones encontradas son simétricas; la recta que contiene al segmento a es el eje de simetría.

8.6 PROBLEMAS RESUELTOS CON EL MÉTODO DE LA FIGURA AUXILIAR

Hay casos en los que el problema no se puede resolver directamente con el método de los dos lugares, entonces interviene el método de la figura auxiliar, que conlleva el uso reiterado del método de los dos lugares.

Lo que hace que el problema no se pueda resolver mediante el método de los dos lugares es que al aplicar el primer paso del método, esto es, la transformación del problema original en el problema de determinar un punto, transformación que se realiza colocando uno de los datos del problema, el punto que hay que determinar no está en dos lugares que puedan construirse a partir de los otros dos datos.

El método de la figura auxiliar consiste en introducir, como una etapa de la resolución del problema original, la construcción de una figura tal que pueda construirse mediante el método de los dos lugares, al fijar uno de los datos del problema inicial. Además, para que realmente la construcción de esa figura auxilie en la construcción de la que pide el problema original, hace falta que los datos nuevos que proporciona su construcción permitan construir la figura inicial, usando el método de los dos lugares; o, en todo caso, que permitan la construcción de otra figura auxiliar a partir de la cual se pueda construir la figura inicial. También cabe que a la construcción de la figura inicial se llegue tras la construcción de más de una figura auxiliar.

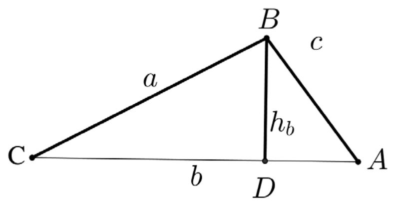
De forma general podemos decir que el método de la figura auxiliar consiste en:

1. Enunciar un problema de construir otra figura (la figura auxiliar) a partir de (parte de) los datos del problema inicial, que sea resoluble mediante el método de los dos lugares.
2. Resolver ese nuevo problema con el método de los dos lugares.
3. Volver al problema inicial ampliándolo con la incorporación como datos de los elementos de la figura auxiliar.
4. Resolver el problema inicial así ampliado con nuevos datos, mediante el método de los dos lugares. Si no es posible, reiterar el método de la figura auxiliar.

8.6.1 Construir un triángulo dados los lados a y c y la altura h_b

Damos el problema por resuelto, construimos la figura de análisis, el triángulo ABC, y en ella señalamos los datos.

Figura de análisis



Datos

Si fijamos el lado a entonces la incógnita es el vértice A, pero para ella sólo tenemos una condición: está a distancia c del vértice B. Análogamente si colocamos c. Si fijamos la altura h_b entonces tenemos dos incógnitas: los vértices C y A, pero para cada una de ellas solamente tenemos una condición.

Por tanto para resolver el problema necesitaremos recurrir al método de la figura auxiliar. La figura auxiliar, en este caso, será el triángulo BCD.

El nuevo problema que genera el método de la figura auxiliar es construir el triángulo BCD a partir de los datos del problema inicial, a, c y h_b. Lo habitual es usar sólo parte de los datos del problema inicial, en este caso, c no lo usaremos.

En efecto, si colocamos el dato h_b, entonces hemos de determinar el punto C, y, en el enunciado de este nuevo problema tenemos:

Datos: El segmento h_b, los puntos B y D, el segmento a y el ángulo BDC de 90º.
Incógnita: Vértice C.

Las dos condiciones para la incógnita son:

– Está en la perpendicular a la recta BD por D.
– Está a distancia a de B.

El punto C está en dos lugares:

1. En una recta: la perpendicular a h_b por D.
2. En una circunferencia de centro B y radio a.

Determinado C, podemos construir la figura auxiliar BCD, y, para determinar el triángulo pedido, ABC, nos falta hallar el vértice A.

Los *datos* para resolver este nuevo problema son:

Todos los dados en el enunciado y los obtenidos con la figura auxiliar.

Las dos condiciones para el punto *A* son:

– Está la recta que pasa por *C* y por *D*.
– Está a una distancia *c* de *B*.

La incógnita está en dos lugares:

1. En una recta: la prolongación del lado *CD*.
2. En una circunferencia de centro *B* y radio *c*.

Finalizado el *análisis*, la construcción (la *síntesis*) de la figura demandada será:

1. Colocamos h_b, y tenemos el vértice *B* y el punto *D*.
2. Trazamos una perpendicular a h_b, por el punto *D*.
3. Con centro en *B* y radio *a* trazamos una circunferencia que corta a la perpendicular trazada en el punto *C*.
4. Con centro en *B* y radio *c* trazamos una circunferencia que corta a la perpendicular trazada en el punto *A*.

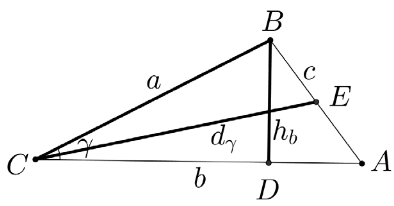
El triángulo *ABC* es la solución.

Continuaremos con la resolución de un par de problemas en los que hace falta aplicar el método de la figura auxiliar dos veces, y se usan, por tanto, dos figuras auxiliares.

8.6.2 Construir un triángulo dados el lado a, la altura h_b, y la bisectriz d_γ

Damos el problema por resuelto, construimos la figura de análisis, el triángulo *ABC*, y señalamos en ella los datos.

Figura de análisis



Datos

Si fijamos el lado *a*, entonces la incógnita es el vértice *A*, pero para ella no tenemos ninguna condición. Por tanto necesitaremos más de una figura auxiliar para encontrar las dos condiciones que determinan la incógnita *A*. Observamos que el punto *A* está en la prolongación del lado *CD* del triángulo *BCD* y en la prolongación del lado *BE* del triángulo *BCE*.

En primer lugar construiremos como *figura auxiliar* el triángulo rectángulo *BCD*. Si colocamos el dato h_b, entonces sólo hemos de hallar el punto *C*. En el nuevo enunciado del problema tenemos:

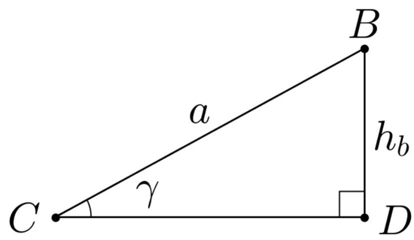
Datos: El segmento h_b, los puntos *B* y *D*, el segmento *a* y el ángulo recto *BDC*.
Incógnita: Vértice *C*.

Las dos condiciones para la incógnita son:

- Está en la perpendicular a la recta *BD* por *D*.
- Está a distancia *a* de *B*.

El punto *C* está en dos lugares:

1. En una recta: la perpendicular a h_b por *D*.
2. En una circunferencia de centro *B* y radio *a*.



Ya tenemos dos vértices de la figura buscada, los puntos *B* y *C*, y hemos de determinar el tercero *A*.

Para ello construiremos como *segunda figura auxiliar* el triángulo *BCE*. Si fijamos el lado *BC*, en este nuevo enunciado tenemos:

Datos: El segmento *BC*, los puntos *B* y *C*, el ángulo γ y el lado *CE*, segmento d_γ.
Incógnita: Vértice *E*

Las dos condiciones para *E* son:

- Está a una distancia d_γ del punto *C*.
- Está en la bisectriz del ángulo γ determinado en la primera figura auxiliar.

El punto *E* está en dos lugares:

1. En una circunferencia de centro *C* y radio d_γ.
2. En la recta que contiene a la bisectriz del ángulo γ.

Construidas las figuras auxiliares: los triángulos *BDC* y *BCE*, nos falta hallar el vértice *A* para resolver el problema.

Los datos para determinar esta incógnita son: Todos los dados en el enunciado y los obtenidos con las dos figuras auxiliares.

Las dos condiciones para *A* son:

– Está la recta que pasa *C* y por *D*.
– Está la recta que pasa *B* y por *E*.

El punto *A* está en dos lugares:

1. En una recta: la prolongación del lado *CD* de la primera figura auxiliar.
2. En una recta: la prolongación del lado *BE* de la segunda figura auxiliar.

Finalizado el *análisis*, la construcción (la *síntesis*) de la figura demandada será:

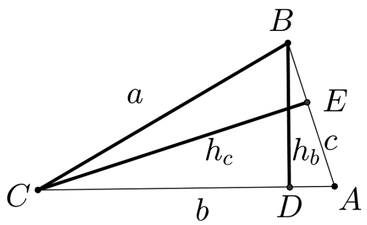
1. Colocamos h_b , tenemos el vértice *B* y el punto *D*.
2. Trazamos una circunferencia de centro *B* y radio *a*.
3. Dibujamos una perpendicular al segmento *BD* por el punto *D*.
4. En la intersección de la circunferencia con la perpendicular está el punto *C*.
5. Construimos el triángulo rectángulo *BDC*.
6. La bisectriz del ángulo γ (*BCD*) contendrá el lado *CE* del triángulo *BCE*.
7. Dibujamos una circunferencia de centro *C* y de radio d_γ, el segmento de bisectriz dado.
8. La intersección de la bisectriz con la circunferencia nos dará el punto *E*.
9. La intersección de la recta que contiene el segmento *CD* con la recta que contiene el lado *BE* nos dará el punto *A*.

El triángulo *ABC* es la solución.

8.6.3 Construir un triángulo dados el lado a y las alturas h_b y h_c

Damos el problema por resuelto, construimos la figura de análisis (el triángulo *ABC*) y señalamos en ella los datos.

Figura de análisis



Datos

Si fijamos el lado *a* entonces la incógnita es el vértice *A*, pero para ella no tenemos ninguna condición.

Necesitaremos dos figuras auxiliares para encontrar las dos condiciones que determinan la incógnita *A*.

El punto *A* está en la prolongación del lado *CD* del triángulo *BCD* y en la prolongación del lado *BE* del triángulo *BCE*.

Construiremos como *primera figura auxiliar* el triángulo rectángulo *BCD*.

Si fijamos el dato h_b, entonces sólo hemos de hallar el punto *C*. En el enunciado de este problema tenemos:

Datos: El segmento h_b, los puntos *B* y *D*, el segmento *a* y el ángulo recto en *D*.
Incógnita: Vértice *C*.

Las dos condiciones para la incógnita son:

– Está en la perpendicular a la recta *BD* por *D*.
– Está a distancia *a* de *B*.

El punto *C* está en dos lugares:

1. En una recta (la perpendicular a h_b por *D*).
2. En una circunferencia de centro *B* y radio *a*.

Tenemos dos vértices de la figura buscada, los puntos *B* y *C*, y hemos de determinar el tercero *A*.

Para ello construiremos como *segunda figura auxiliar* el triángulo rectángulo *BCE*.

Si fijamos el lado *BC*, hemos de hallar el punto *E*. En este nuevo problema tenemos:

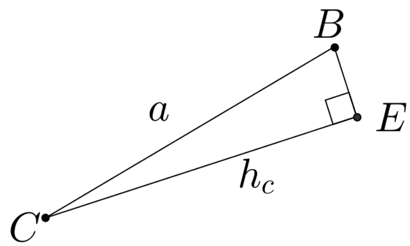
Datos: El segmento BC, los puntos B y C, el ángulo recto en E y el lado CE, segmento h_c.
Incógnita: Vértice E.

Las dos condiciones para E son:

– Está a una distancia h_c del punto C.
– Ve el segmento CB bajo un ángulo de 90°.

El punto E está en dos lugares:

– En una circunferencia de centro C y radio h_c.
– En un arco capaz (CB, 90°).



Construidas las figuras auxiliares: los triángulos BDC y BCE, nos falta hallar el vértice A para resolver el problema.

Los *datos* para resolver este nuevo problema son:

Todos los dados en el enunciado y los obtenidos con las dos figuras auxiliares.

Las dos condiciones para A son:

– Está en la recta que pasa C y por D.
– Está en la recta que pasa B y por E.

Está en dos lugares:

1. En una recta: la prolongación del lado CD.
2. En una recta: la prolongación del lado BE.

Finalizado el *análisis*, la construcción (la *síntesis*) de la figura demandada será:

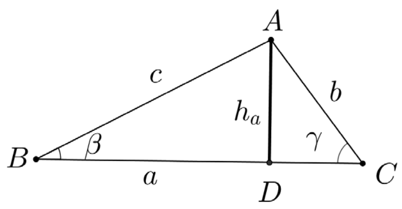
1. Colocamos h_b; tenemos el vértice B y el punto D.
2. Trazamos una circunferencia de centro B y radio a.
3. Trazamos una perpendicular al segmento BD por el punto D.
4. En la intersección de la circunferencia con la perpendicular está el punto C.
5. Construimos el triángulo rectángulo BDC.
6. Trazamos el arco capaz determinado por el segmento BC y un ángulo de 90°. Es decir una semicircunferencia de centro en el punto medio de CB y de diámetro CB.
7. Dibujamos una circunferencia de centro C y de radio h_b.
8. La intersección del arco capaz con la circunferencia nos dará el punto E.
9. La intersección de la recta que contiene el segmento CD con la recta que contiene el lado BE nos dará el punto A.

El triángulo ABC es la solución.

El problema que resolvemos a continuación se puede abordar tanto con el método de la figura auxiliar como con el de la figura semejante. Ahora haremos uso del método de la figura auxiliar y más tarde del de la figura semejante.

8.6.4 Construir un triángulo dada la altura h_A y los ángulos β y γ

Figura de análisis



Datos:

Una altura, h_a, y dos ángulos: β y γ.

Si fijamos el lado a, segmento BC, entonces la incógnita es el vértice A; pero no tenemos dos condiciones para ella.

Usamos pues el método de la figura auxiliar.

Tomamos como *figura auxiliar* el triángulo rectángulo ADB.

Si colocamos el segmento h_a (AD), entonces la incógnita para determinar la figura auxiliar será el punto B. En este problema tenemos:

Datos: Segmento h_a, los puntos A y D, un ángulo de 90° en D y el ángulo β.
Incógnita: Vértice B.

Las dos condiciones para la incógnita son:

– El punto *B* está en una recta perpendicular al segmento *AD*.
– Desde el punto *B* se ve el segmento AD bajo un ángulo β.

El punto *B* está en dos lugares:

– Una recta perpendicular al segmento *AD* por el punto *D*.
– Un arco capaz de ángulo β y segmento *AD*.

Resuelto el triángulo *ADB* hemos de hallar el punto *C*. Los datos son los que nos proporciona el enunciado y los obtenidos con la figura auxiliar.

Las condiciones para el nuevo punto incógnita son:

– El punto *C* está en una recta que pasa por los puntos *B* y *D*.
– Desde el punto *C* se ve el segmento *AD* bajo un ángulo γ.

El punto *A* está en dos lugares:

1. En una recta prolongación del segmento *BD*.
2. En un arco capaz determinado por el ángulo γ y el segmento *AD*.

El triángulo *ABC* es la solución.

Finalizado el *análisis*, la construcción (la *síntesis*) de la figura demandada será:

1. Colocamos h_a; tenemos el vértice *A* y el punto *D*.
2. Trazamos una recta perpendicular al segmento h_a por el punto *D*.
3. Trazamos el arco capaz determinado por el segmento *AD* y el ángulo β.
4. En la intersección de la circunferencia con el arco capaz está el punto *B*.
5. Trazamos la recta que pasa por *B* y *D*.
6. Construimos el arco capaz determinado por el segmento *AD* y el ángulo γ.
7. La intersección del arco capaz con la recta *BD* nos dará el punto *C*.

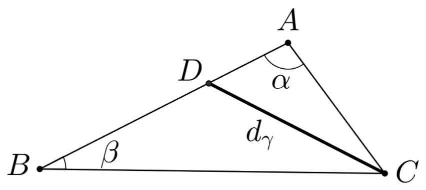
El triángulo *ABC* es la solución.

8.7 PROBLEMAS RESUELTOS CON EL MÉTODO DE LA FIGURA SEMEJANTE

Cuando el método de los dos lugares no puede aplicarse también puede recurrirse a la construcción a partir de (parte de) los datos de una figura semejante a la que pide el problema. Esa figura semejante ha de ser construible mediante el método de los dos lugares, o, en su caso, mediante el método de la figura auxiliar y el de los dos lugares. Además, ha de ser tal que sea posible obtener la razón de semejanza entre la figura semejante y la figura inicialmente pedida a partir de los datos del problema.

8.7.1 Construir un triángulo dados la bisectriz d_γ y los ángulos α y β

Figura de análisis

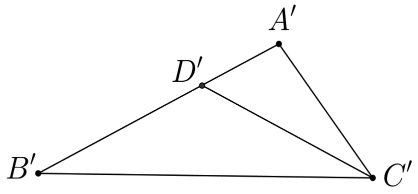


Datos

Dos ángulos y un segmento.

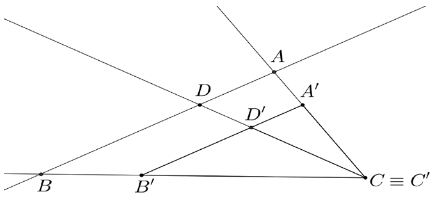
En este caso, hacer un triángulo semejante al pedido es fácil, pues nos dan dos ángulos, sin embargo hay que preguntarse cómo se construye el triángulo pedido a partir del semejante.

Para ello hay que pensar en cómo se puede determinar la razón de semejanza entre el construido y el demandado. Con tal fin se usa algún dato que se conozca de la figura pedida y se compara con el correspondiente de la figura semejante construida. La construcción de un segmento que esté en una razón dada con un segmento dado la proporciona el teorema de *Thales* y se realiza mediante la conocida figura del teorema. Éstas son pues las ideas fundamentales para relacionar la figura pedida con la construida.



Sea *A'B'C'* la figura semejante. En ella podemos determinar el segmento bisectriz *C'D'*. Como tenemos el dato d_γ , ya tenemos la razón de semejanza: la relación entre el segmento *C'D'* y el segmento dado d_γ .

Con ella ya podemos construir el triángulo pedido pues podemos encontrar todos sus datos.



Todo lo anterior se puede ver y hacer en la figura adjunta. Si *C* (o *C'*) es el centro de homotecia, la razón la determinan los puntos homólogos *D* y *D'*. La paralela a la recta *A'B'* por el punto *D* corta a las rectas *CA'* y *CB'* en los puntos *A* y *C*, respectivamente. El triángulo *ABC* es la figura pedida.

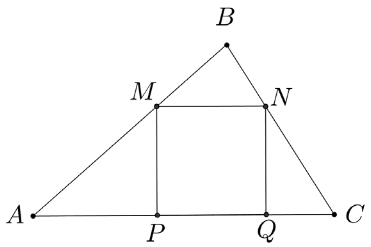
La construcción (la *síntesis*) de la figura pedida es:

1. Se traza una recta y en ella se fijan dos puntos arbitrarios *A'* y *B'*.
2. Se transporta el ángulo α a partir del vértice *A'* y se transporta el ángulo β a partir del vértice *B'*.
3. Los lados de los ángulos transportados se cortan en el punto *C'*. De esa manera queda construido el triángulo *A'B'C'*. El vértice *C'* es común a la figura demandada y a la figura semejante construida.
4. Se traza la bisectriz del ángulo γ.
5. Mediante un arco de circunferencia de centro en *C'* y radio d_γ se señala en la bisectriz el punto *D*.
6. Por el punto *D* se traza la paralela a la recta *A'B'*.
7. La paralela trazada se corta con las rectas que contienen a los segmentos *C'A'* y *C'B'* en los punto *A* y *B*.

El triángulo *ABC* es la solución del problema.

8.7.2 Inscribir en un triángulo dado ABC un cuadrado, de manera que dos vértices se encuentren sobre AB, uno sobre AC y uno sobre BC

Figura de análisis



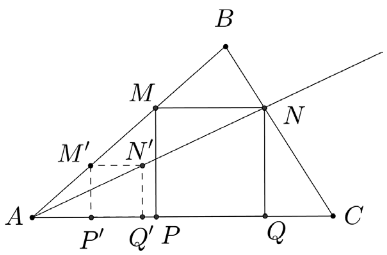
Datos

El triángulo *ABC*.

Supongamos el problema resuelto.

Sea *MNPQ* el cuadrado pedido.

La solución del problema consistirá en encontrar una figura semejante al cuadrado anterior y mediante una homotecia, de centro en uno de los vértices del triángulo, hallar la figura demandada.



Sea *M'* un punto cualquiera sobre *AB*. Por *M'* trazamos una perpendicular al segmento *AC* y determinamos el punto *P'*. Trazamos el segmento *P'Q'*, tal que la distancia *P'Q'* es igual a la distancia *M'P'*.

Además por *Q'* trazamos una perpendicular a la recta *AC*. En ella determinamos el segmento *Q'N'* tal que la distancia *Q'N'* es igual a la distancia *P'Q'*.

La figura *M'P'Q'N'* es *semejante* a la figura demandada.

Mediante una homotecia de centro en el vértice *A* hallaremos la figura pedida.

La recta que pasa por los puntos *A* y *N'* corta al lado *BC* en el punto *N* que se corresponde con el *N'* de la figura semejante.

Desde *N* trazamos una paralela al segmento *AC* y hallaremos el punto *M*.

Desde *N* trazamos una perpendicular al segmento *AC* y hallaremos el punto *Q*.

Desde *M* trazamos una perpendicular al segmento *AC* y hallaremos el punto *P*.

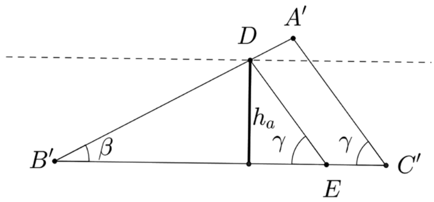
La figura *MNQP* es semejante a la construida, en razón *AN/AN'*, y es la solución demandada.

8.7.3 Resolución mediante el método de la figura semejante de un problema que también puede resolverse mediante el método de la figura auxiliar

El problema que hemos resuelto en 8.5.4 con el método de la figura auxiliar, también puede resolverse mediante el método de la figura semejante. En el caso de este problema, la solución mediante el método de la figura semejante es más corta que la solución mediante el método de la figura auxiliar, lo que no significa que el proceso de resolución mediante el método de la figura semejante resulte más fácil para los alumnos que el proceso de resolución mediante el método de la figura auxiliar.

El problema, tal como lo enunciamos en 8.54., es "Construir un triángulo dado el segmento h_a y los ángulos β y γ".

Figura semejante



Datos

Una altura h_a y dos ángulos: β y γ.

Como nos dan dos ángulos tenemos un dato implícito, el tercer ángulo del triángulo.

$\alpha = 180° - (\beta + \gamma)$

Cualquier triángulo con los ángulos β y γ es semejante al que buscamos.

Construimos un triángulo cualquiera *A'B'C'* que tenga los ángulos dados β y γ.

Trazamos una paralela al lado *B'C'* a una distancia h_a. Esta recta corta al lado *B'A'* en el punto D. Por este punto trazamos una paralela al lado A'C' que corta al lado *B'C'* en el punto E.

Los triángulos *B'DE y B'A'C'* son semejantes.

Como el triángulo *B'DE* tiene los datos que se dan en el enunciado, dos ángulos y una altura, es la figura pedida.

8.8. MÁS ALLÁ DE LA REGLA Y EL COMPÁS: UN PROBLEMA DE DOS LUGARES QUE NO SE PUEDE CONSTRUIR CON REGLA Y COMPÁS

Terminamos mostrando cómo el método de los dos lugares se puede llevar más allá de los problemas de regla y compás, examinando cómo puede aplicarse a un problema como el siguiente y qué hay que cambiar para ello en lo que hemos presentado hasta ahora.

El problema es:

> Dadas dos rectas paralelas, *r* y *s*, y un punto, *P*, entre ellas, trazar una circunferencia tangente a las rectas dadas que pase por el punto dado.

Una circunferencia queda determinada por su centro *O* y el radio.

La condición que liga la incógnita la dividimos de la siguiente manera:

– El punto *O* está a la misma distancia del punto dado y de la recta *r* dada.
– El punto *O* está a la misma distancia del punto dado y de la recta *s* dada.

En este caso, si tenemos en cuenta que la parábola es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto (foco) y de una recta (directriz), los dos lugares buscados para determinar la incógnita son dos parábolas. De manera que el punto *O* se encuentra en la intersección de dos parábolas: la parábola de foco *P* y directriz *r*, y la parábola de foco *P* y directriz *s*.

Con las restricciones que caracterizan los problemas de construcción con regla y compás, esta aplicación del método de los dos lugares no nos permite resolver el problema, porque con el uso de la regla y el compás sólo pueden construirse rectas y circunferencias. Ahora bien, queda claro que el método de los dos lugares va más allá de la clase de problemas que hemos tratado en este capítulo: basta con eliminar las restricciones propias de esta clase de problemas. Entonces, el método de los dos lugares permite resolver también problemas como el propuesto.

8.9 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Euclides (1991). *Elementos. Libros I-IV.* Traducción y notas de María Luis Puertas. Madrid: Gredos

Fernández Lajusticia, A. y Puig, L. (2002). Análisis fenomenológico de los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 5*(2), pp. 397-416

Filloy, E., Puig, L. y Rojano, T. (2008). El estudio teórico local del desarrollo de competencias algebraicas. *Enseñanza de las Ciencias*, *26*(3), pp. 327-342.

Filloy, E., Rojano, T., y Puig, L. (2008). *Educational Algebra. A Theoretical and Empirical Approach*. New York: Springer.

Kieran, C. y Filloy, F. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica, *Enseñanza de las Ciencias 7*, pp. 229-240.

Polya, G. (1945). *How to Solve It.* Princeton, NJ: Princeton University Press. [Traducción castellana de Julián Zugazagoitia, *Cómo plantear y resolver problemas.* (México: Trillas, 1965).]

Polya, G. (1954). *Mathematics and Plausible Reasoning. 2 vols.* Princeton, NJ: Princeton University Press. [Traducción castellana de José Luis Abellán, *Matemáticas y razonamiento plausible.* Madrid: Tecnos, 1966).]

Polya, G. (1962-1965). *Mathematical Discovery. 2 vols*. New York: John Wiley and Sons. [Traducción francesa, *La découverte des mathématiques. 2 vols.* Paris: Dunod, 1967.]

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas.* Granada: Comares.

Puig, L. (2003). Historia de las ideas algebraicas: componentes y preguntas de investigación desde el punto de vista de la matemática educativa. En E. Castro, P. Flores, T., Ortega, L. Rico y A. Vallecillos (Eds.) *Investigación en Educación Matemática. Actas del Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 97-108). Granada: Universidad de Granada.

Puig, L. (2006). Sentido y elaboración del componente de competencia de los modelos teóricos locales en la investigación de la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos. En Bolea, P.; González, Mª. J. y Moreno, M. (Eds.) *Investigación en Educación Matemática 10. Actas del Décimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 107-126) Huesca: Instituto de Estudios Altoaragoneses / Universidad de Zaragoza.

Puig, L. y Rojano, T. (2004). The history of algebra in mathematics education. In K. Stacey, H. Chick, & M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI study* (pp. 189-224). Boston / Dordrecht / New York / London: Kluwer Academic Publishers.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando, FL: Academic Press.

Siñeriz, L. (2000). *La enseñanza de la resolución de problemas de regla y compás. Del mundo de la pura resolución de problemas a la Escuela Media Argentina: Estudio de dos casos*. Tesis doctoral. Universitat de València.

Siñeriz, L. y Puig, L. (2006). Un modelo de competencia para la resolución de problemas de construcción con regla y compás. En J. V. Aymerich y S. M. Vives (Eds.). *Matemáticas para el siglo XXI* (pp. 323-331). Castellón: Universitat Jaume I.

Taisbak, C. M. (2003) *Δεδομένα. Euclid's Data. The importance of being given*. Copenhagen: Museum Tusculanum Press.