La estructura de los problemas aritméticos de varias operaciones combinadas

LUIS PUIG Y FERNANDO CERDÁN
Departamento de Didàctica de la Matemàtica
de la Universitat de València

Conferencia plenaria invitada en la *Cuarta Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa*, Acapulco, Guerrero, México, 8-10 de julio de 1990

La estructura de los problemas aritméticos de varias operaciones combinadas

LUIS PUIG Y FERNANDO CERDÁN
Departamento de Didàctica de la Matemàtica
de la Universitat de València

INTRODUCCIÓN

En otro lugar (Puig y Cerdán, 1989) hemos detallado cómo el proceso de resolución de problemas aritméticos de enunciado verbal puede considerarse dividido a la manera de Polya, esto es, situándose en el punto de vista del resolutor ideal, en las fases de *lectura, comprensión, traducción, cálculo, solución* y *revisión-comprobación*. Este modelo de fases no es más que una adaptación a este tipo de problemas del clásico modelo de cuatro fases de Polya (Polya, 1957). La fase que Polya denomina en él *elaboración de un plan* la denominamos nosotros en este caso *traducción*. La razón para ello es que este momento crucial en la resolución de cualquier problema consiste a nuestro entender, para los problemas aritméticos, en el paso del enunciado verbal a la expresión aritmética correspondiente.

Hay que señalar de entrada, para evitar confusiones, que, desde el momento en que aparezcan problemas de varias operaciones combinadas (PAVOC), esto es, problemas que no se resuelven con una única operación, sino con más de una, esta fase de traducción no podrá consistir simplemente en la identificación de la operación aritmética pertinente. La traducción será un proceso más complejo, en el que habrá que contemplar al menos tres componentes: qué operaciones hay que realizar, entre qué datos y en qué orden. Por ello, creemos que si se quiere estudiar la estructura de los problemas aritméticos, conviene distinguir entre los problemas de una etapa, esto es, los que se resuelven mediante una única operación, y los de más de una etapa.

Se sabe que, para resolver los problemas de una etapa, los niños utilizan en ocasiones, sobre todo antes de recibir instrucción explícita en ello, estrategias personales que no llevan a la escritura de la expresión aritmética (ver, p.e., Carpenter, Hiebert y Moser, 1981, donde se describen y clasifican distintas estrategias de recuento encontradas en observaciones). Ahora bien, tales estrategias, aunque puedan ser efectivas localmente, dejan de funcionar en cuanto los números que aparecen en los problemas son grandes y, lo que es más importante, no pueden ser consideradas como el objetivo de instrucción correspondiente a esta clase de problemas, ya que, si se tiene en perspectiva el conjunto del currículo, el mero uso de esas estrategias no permite el paso a un nivel superior. Por ello, hemos considerado que el proceso de resolución de los problemas de una etapa reside fundamentalmente en la traducción del enunciado verbal a la expresión aritmética, al adoptar un punto de vista que considera a estos problemas inmersos en un currículo de matemáticas y resueltos en un sistema educativo, y que tiene en cuenta que la tarea de resolverlos está sometida, por tanto, a objetivos de instrucción que deben atender, entre otras cosas, a proveer de significados a números y operaciones, o a crear esquemas mediante la solución de problemas, o series de problemas, que puedan ser evocados al resolver otros problemas, con lo que estos objetivos no se reducen meramente a que se sea diestro en encontrar la solución de los problemas.

Cuando se trata de problemas aritméticos de enunciado verbal de una etapa, la traducción se realiza entre los significados que el sujeto ha construido por su experiencia en los mundos correspondientes al lenguaje vernáculo y al lenguaje aritmético. Y, como en cualquier proceso de traducción, los campos semánticos correspondientes no son isomorfos, por lo que el sujeto ha de construir el sentido en el lenguaje al que traduce, moviéndose, si quiere que la traducción sea afortunada, dentro de los límites que señala la restricción semántica que impone el texto original. Los resultados de Nesher, Greeno y Riley (1982) sobre los niveles cognitivos con que los niños son capaces de abordar distintas clases de problemas aditivos pueden interpretarse, en este marco, como conocimientos pragmáticos de los lenguajes implicados, que los niños han de poseer para poder efectuar de manera afortunada la traducción.

Aquí trataremos de dar cuenta de los PAVOC, sirviéndonos del análisis del proceso de traducción. Se podría pensar que el proceso de traducción de un problema de más de una etapa consiste en una mera yuxtaposición, en el orden adecuado, de las traducciones correspondientes a cada una de las operaciones que hay que realizar o que han de aparecer escritas en la expresión aritmética correspondiente. Lo que nosotros vamos a mantener aquí —y lo que justifica, por ende, distinguir entre unos y otros a efectos de su análisis— es que el asunto no se reduce a añadir traducciones una tras otra. Veremos, por el contrario, que, para que el enunciado sea traducible al lenguaje aritmético, es preciso realizar un trabajo sobre el texto del problema que lo transforme en un nuevo texto en el que se hagan explícitos los elementos que han de intervenir en cada una de las traducciones elementales y que muestre la manera como éstas han de enlazarse en la expresión aritmética. Veremos, además, que ese texto intermedio, que podría seguir perteneciendo al lenguaje vernáculo, se puede construir con más facilidad en un lenguaje gráfico que muestra lo que llamaremos la estructura del problema.

EL PROCESO DE TRADUCCIÓN DE UN PAVOC

Para tratar de entender mejor algo de lo dicho acerca del paso del texto original al texto intermedio y de las características de este último, podemos servirnos de la lectura y la resolución de alguno de los problemas que siguen.

Problema 1	Un tren lleva 5 coches de pasajeros. En el primero van 32 personas, en el segundo van 13 viajeros más que en el primero, en el tercero van tantos viajeros como en el primero y en el segundo, el cuarto y quinto coche llevan cada uno 43 viajeros. ¿Cuántos viajeros lleva el tren?
Problema 2	En un vagón caben 80 pasajeros. ¿Cuántos pasajeros podrá llevar un tren de 6 vagones? Si el tren lleva 4 vagones completos y en los otros dos viajan 56 pasajeros en uno y 73 en el otro, ¿cuántos viajeros lleva el tren?
Problema 3	Un niño ha comprado 4 chicles de 3 ptas. cada uno, 4 piruletas de 5 ptas. cada una y 4 bolsas de pipas de 10 ptas. cada una. ¿Cuánto dinero ha gastado en total?
Problema 4	Un comerciante ha comprado 385 botellas de aceite a 154 ptas. cada una. Después las vende a 179 ptas. cada una. ¿Cuánto ganará en la venta de todas las botellas?
Problema 5	En una tienda hay 147 cajas de pinturas. En cada caja hay 10 estuches de pinturas. Si en cada estuche hay 8 pinturas, ¿cuántas pinturas hay en la tienda?

Puede verse que la estructura de estos problemas es diferente de la de los de una etapa. En primer lugar, el número de *datos* es distinto: en un problema de una etapa —al menos en su enunciado típico— hay siempre dos datos, y en éstos hay más de dos. En segundo lugar, las relaciones entre los datos y la incógnita son más complejas, aunque sólo sea por el hecho de que hay más datos. Estos dos hechos hacen que la expresión aritmética que indica los cálculos que hay que realizar para obtener la respuesta a la pregunta del problema no sea una expresión aritmética simple.

Por otro lado, desde el punto de vista de las decisiones que ha de tomar el resolutor en el curso del proceso de resolución también podemos encontrar diferencias entre estos problemas y los de una etapa. En los de una etapa, hay una sola decisión que tomar, que consiste en elegir la operación que hay que realizar; no cabe dudar entre qué cantidades hay que realizarla: entre los datos del problema. En los problemas 1 a 5, por el contrario, hay más decisiones que tomar, decisiones que son de tres tipos: qué operaciones, entre qué cantidades y en qué orden se toman en consideración los datos y se realiza la serie de operaciones.

El enunciado del problema 2 toma buena nota de alguna de las dificultades asociadas con la necesidad de tomar todas estas decisiones, al presentar el texto del problema descompuesto en dos partes. De hecho, este problema escolar es una secuencia de problemas que consta de dos problemas, el primero de los cuales es un subproblema del otro. En el primero, el proceso de traducción simple basta para obtener la solución. Y en el otro, la traducción viene facilitada por la que ya se ha tenido que realizar antes, que sirve para aclarar el contenido de las relaciones entre los datos y la incógnita, dando pistas sobre el orden en que deben realizarse las operaciones.

Una vía para examinar lo que tiene de específico el proceso de resolución de estos problemas es considerar un argumento resolutorio que podría utilizarse para atacar el problema 1:

> — Para determinar los viajeros que lleva el tren (esto es, la incógnita del problema), hemos de determinar los viajeros que lleva cada uno de los vagones.
>
> — Sabemos cuántos viajeros llevan los vagones 1º, 4º y 5º, porque son datos del problema. No sabemos los pasajeros que llevan los vagones 2º y 3º, luego hemos de determinar los viajeros que llevan estos vagones.
>
> — Para determinar los viajeros del segundo vagón, hemos de saber los que lleva el primer vagón (lo sabemos) y añadir 13 (una condición del problema).
>
> — Para determinar los viajeros del tercer vagón, hemos de saber los que llevan el primer vagón y el segundo (lo sabemos)

Así, en el transcurso del argumento, los viajeros de cada vagón se han convertido en nuevas incógnitas que no figuraban como tales en el texto del problema, y que es preciso determinar (incógnitas auxiliares). Algunas incógnitas auxiliares (vagones 1º, 4º y 5º) se ha visto que eran datos del problema. De las que no eran datos (vagones 2º y 3º), se ha buscado de nuevo a partir de dónde pueden determinarse, hasta llegar a los datos. En cada paso, se han examinado las relaciones que permiten, en las condiciones del problema, conectar incógnita con incógnitas auxiliares y éstas con los datos, y determinar, por tanto, éstas y aquélla.

Una vez hecho esto, ya se sabe cómo hallar la solución del problema, esto es, el problema ya está resuelto, a falta únicamente de efectuar los cálculos indicados por el análisis. Para efectuar estos cálculos, basta con recorrer el camino del análisis en sentido inverso: partiendo de los datos, caminar a través de las incógnitas auxiliares, hasta llegar a la incógnita del problema.

Puede verse, además, que en alguno de los pasos del análisis se resuelven de hecho problemas de una etapa. Así, "para determinar los viajeros del segundo vagón hemos de saber los que lleva el primer vagón y añadir 13 (una condición del problema)", frase que aparece en el argumento resolutorio, corresponde a un fragmento del texto del problema ("En el primero van 32 personas, en el segundo van 13 viajeros más"). La tarea del análisis consiste, entre otras cosas, en construir enunciados de problemas de una etapa mediante la introducción de nuevas incógnitas que no están presentes explícitamente en el texto del problema: las incógnitas auxiliares; aquí en particular, al considerar el número de viajeros del segundo vagón como una cantidad que hay que determinar, se construye el problema de una etapa "En el primero (vagón) van 32 personas, en el segundo van 13 viajeros más, ¿cuántos viajeros van en el segundo vagón?". La traducción de este enunciado a la expresión aritmética simple correspondiente transcurre ya por la vía harto estudiada de los problemas de una etapa. El examen de la resolución del problema que se ha hecho a partir del argumento resolutorio anterior muestra el lugar en el que esa traducción simple se engarza y algunos de los rasgos de la traducción completa que son específicos de los PAVOC: la transformación del texto original, la selección de los datos que se combinan (los que permiten determinar incógnitas auxiliares útiles), y la manera como se establece el orden en que han de realizarse las operaciones.

EL MÉTODO DE ANÁLISIS-SÍNTESIS

ANTECEDENTES HISTÓRICOS

El argumento resolutorio que hemos esbozado en el párrafo anterior tiene una larga tradición en las matemáticas, ya que fue estudiado y sistematizado por primera vez en la Grecia clásica.

El camino que lleva desde la incógnita a los datos, estableciendo progresivamente sus relaciones mutuas, fue llamado por los griegos *Análisis*, y proporciona, como hemos visto, el plan de solución del problema.

El camino contrario, que va desde los datos hasta la incógnita, fue llamado *Síntesis*. Por tanto, cuando el análisis ha proporcionado el plan de solución de un problema, la síntesis ejecuta el plan, obteniendo la solución del problema.

En el libro XIII de los Elementos de Euclides se encuentran definidos el *Análisis* y la *Síntesis* en los términos siguientes:

> "Análisis es la suposición de lo que se busca como dado (y el paso) a través de sus consecuencias a algo adimitido como verdadero.
>
> Síntesis es la suposición de lo ya admitido (y el paso) a través de sus consecuencias para obtener lo que se busca."

Pappus (siglo IV) explica más en detalle en qué consiste el método de análisis y síntesis, distinguiendo además entre dos tipos de análisis, que él llama teorético y problemático, en el siguiente texto:

> El llamado analuomenoV ("Tesoro del Análisis") es, para decirlo brevemente, un cuerpo especial de doctrina habilitado para uso de aquéllos que, tras haber terminado los Elementos ordinarios, están deseosos de adquirir la facultad de resolver problemas que se les puedan plantear y que implican (la construcción de) líneas; dicho cuerpo de doctrina es útil sólo por esto. Constituye la obra de tres hombres, Euclides, el autor de los Elementos, Apolonio de Perga y Aristeo el viejo, y procede por vía de análisis y síntesis.
>
> El análisis, pues, considera aquello que se busca como si fuera algo aceptado y pasa desde ello, a través de sus consecuencias sucesivas, a algo que es aceptado como resultado de la síntesis: pues en el análisis damos por supuesto aquello que se busca como si (ya) estuviera dado (gegonoV), e inquirimos qué es aquello de lo cual resulta esto y a su vez cuál es la causa antecedente de lo posterior, y así sucesivamente, hasta que, volviendo así sobre nuestros pasos, llegamos a algo ya conocido o que pertenezca a la clase de los primeros principios, y a un tal método lo llamamos análisis por ser una solución hacia atrás (anåpolin lusin)
>
> Pero en la síntesis, invirtiendo el proceso, tomamos como ya dado aquello a lo que llegamos en último término en el análisis y, alineando en su orden natural como consecuencias lo que antes eran antecedentes, y conectándolas unas con otras sucesivamente, llegamos finalmente a la construcción de lo que se buscaba; y a esto llamamos síntesis.
>
> Ahora bien, el análisis es de dos tipos, uno va dirigido a la búsqueda de la verdad y se llama *teórico*, el otro se dirige a encontrar aquello que se nos ha dicho que encontremos y se llama *problemático*. 1) En el tipo *teórico* de análisis, asumimos lo que se busca como si fuera algo existente y verdadero, tras lo cual pasamos a través de sus consecuencias sucesivas, como si también ellas fueran verdaderas y estuvieran establecidas en virtud de nuestra hipótesis, a algo aceptado; entonces *a)*, si ese algo aceptado es verdadero, aquello que se busca será también verdadero y la prueba corresponderá en el orden inverso al análisis, pero *b)* si llegamos a algo reconocidamente falso, aquello que se busca será también falso. 2) En el tipo *problemático* asumimos aquello que es propuesto como si fuera algo conocido, tras lo cual pasamos a través de sus consecuencias sucesivas, considerándolas verdaderas, hasta algo aceptado: luego, si *a)* lo que es aceptado es posible y obtenible, es decir, lo que los matemáticos llaman *dado*, lo que se propuso originalmente será también posible, y la prueba corresponderá de nuevo en orden inverso al análisis, pero si *b)* llegamos a algo reconocidamente imposible, el problema será también imposible. (Lakatos, 1981, pgs. 107-108)

Este texto de Pappus, y lo que en él se dice, puede entenderse mejor si enunciamos una regla práctica, en el espíritu del método, con la cual podamos abordar problemas. Tal regla rezaría así:

> REGLA DEL ANALISIS-SINTESIS
>
> Si x es la incógnita del problema, supóngala conocida.
>
> Indague e investigue cuáles son aquellos antecedentes de los cuales x resulta y que permiten determinar x.

> Considere cada uno de estos antecedentes como una nueva incógnita (auxiliar).
>
> Indague e investigue de nuevo, iterando el proceso, hasta que
>
> 1) o bien todos los antecedentes sean datos del problema,
>
> 2) o bien alguno de los antecedentes entre en contradicción con los datos del problema.
>
> En el caso 1), volviendo sobre sus pasos y trabajando hacia atrás, esto es, desde los datos hasta la incógnita, podrá determinar esta última.
>
> En el caso 2), abandone el problema: su solución es imposible.

La regla del análisis-síntesis, que hemos enunciado, está hecha parafraseando la enunciada por Lakatos(1981) para el análisis que Pappus llamó *teórico*, y adaptándola al análisis *problemático*, teniendo presente el campo de problemas objeto de este capítulo, esto es, los problemas aritméticos de varias operaciones combinadas. La regla enunciada por Lakatos dice así:

> "Saca conclusiones de tu conjetura, una tras otra, suponiendo que la conjetura es verdadera. Si llegas a una conclusión falsa, entonces tu conjetura era falsa. Si llegas a una conclusión indudablemente verdadera, tu conjetura quizá haya sido verdadera. En este caso, invierte el proceso, trabaja hacia atrás, e intenta deducir tu conjetura original por el camino inverso, desde la verdad indudable hasta la conjetura dudosa. Si tienes éxito, habrás probado tu conjetura." (Lakatos, 1981, pgs. 106-107)

LA REGLA DE ANÁLISIS-SÍNTESIS EN ACCIÓN

La regla enunciada por Lakatos corresponde al análisis *teórico* de Pappus, que es el pertinente para los problemas que Polya llama *de probar*. La regla que hemos enunciado nosotros corresponde al análisis *problemático* de Pappus y es, por tanto, la pertinente para los problemas que Polya llama *de encontrar*. La regla no es una herramienta heurística, ni una técnica específica, sino un método general para resolver esa clase de problemas. Los reflejos en la heurística del método de análisis-síntesis quedan recogidos por las sugerencias heurísticas "trabaja hacia atrás", "da el problema por resuelto", "mira qué puedes obtener a partir de los datos"... Sin embargo, tales sugerencias son sólo ideas para comenzar a atacar el problema y no suponen, cuando se dejan caer, el que se tenga un método para resolver el problema, o un plan para su solución. Se utilizan normalmente en fases de exploración o comprensión, o en momentos en que se está atascado y no se sabe por dónde seguir. La regla enunciada, por el contrario, es un método en el sentido de que dado un problema aritmético, siguiéndola paso a paso, se obtiene la solución del problema, con el único recurso adicional a los conocimientos aritméticos pertinentes.

Resumiendo, la regla de análisis-síntesis es un método de validez universal para los PAVOC. Más adelante veremos en qué sentido hay que reformular esta afirmación categórica.

Veamos ahora la regla en acción con un problema aritmético, tomado de Kalmykova(1975):

> Problema 6 Un aeroplano recorrió 1940 km el primer día, el segundo recorrió 340 km más que el primero y el tercero 890 km menos que entre los dos anteriores. ¿Cuántos km recorrió el aeroplano en total?

ANÁLISIS.

1.— La pregunta es: ¿Cuántos km recorrió en total?
2.— Para determinar los kilómetros recorridos en total necesitamos conocer los kilómetros recorridos cada uno de los días.
3.— Conocemos los kilómetros recorridos el primer día (datos del problema), pero desconocemos los recorridos en el segundo y tercer días (incógnitas auxiliares).
4.— Para conocer los kilómetros recorridos el segundo día disponemos de los kilómetros recorridos el primer día y los kilómetros recorridos de más (datos).
5.— Para conocer los kilómetros recorridos el tercer día necesitamos conocer los kilómetros recorridos los días primero (datos) y segundo (analizado en 4) y los kilómetros recorridos de menos (datos).
6.— Como todo lo que es necesario conocer según 2 ha quedado reducido a datos del problema, el análisis ha concluido.

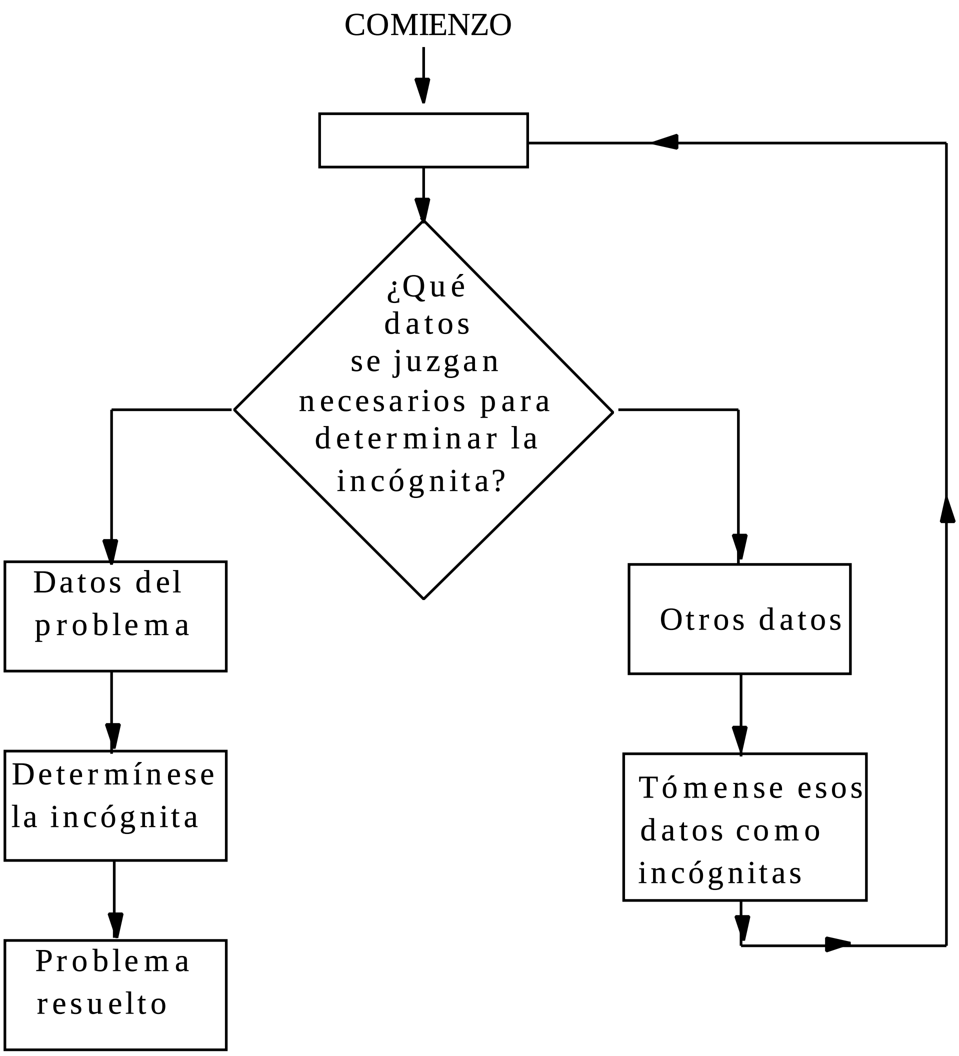
SÍNTESIS.

1.— Conozco lo recorrido el primer día y cuántos más el segundo, luego conozco lo recorrido el segundo: basta sumar 1940+340=2280.
2.— Conozco lo recorrido el primer día, lo recorrido el segundo día y cuánto menos el tercero, luego conozco lo recorrido el el tercero: basta sumar y restar 2280+1940-890=3330.
3.— Conozco lo recorrido los días primero, segundo y tercero, luego conozco lo recorrido en total: basta sumar 1940+2280+3330=7550.
4.— La incógnita está determinada, luego la síntesis ha concluido.

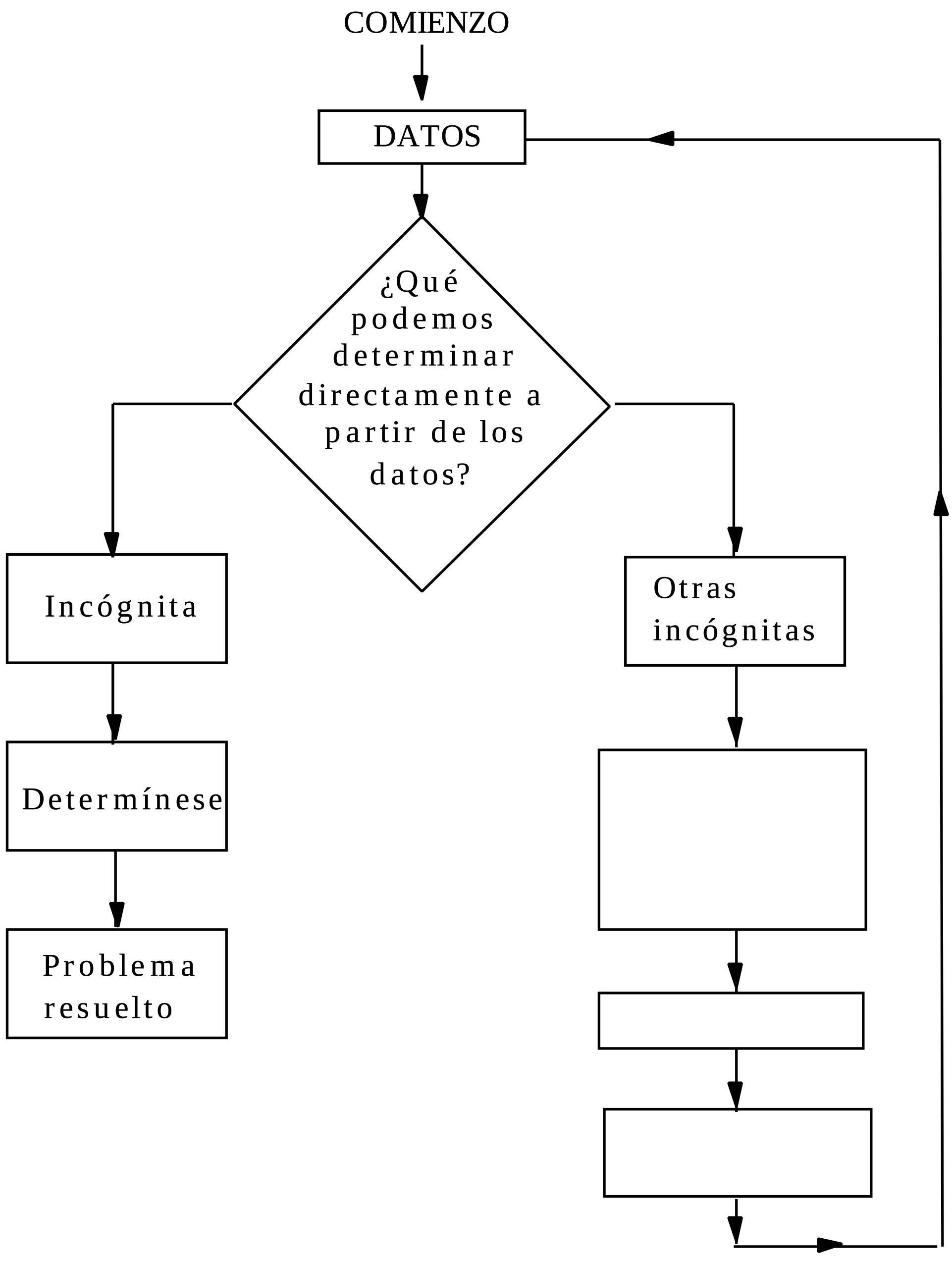
EL MÉTODO COMO ALGORITMO

La descripción del método de análisis-síntesis y los ejemplos en los que se ha presentado en funcionamiento muestran claramente cómo el método tiene caracter algorítmico: es una regla que se ejecuta paso a paso, que contiene decisiones que hay que tomar y acciones que hay que ejecutar, y el conjunto de decisiones y acciones se reitera hasta la obtención del resultado. Esto permite representar el análisis y la síntesis mediante sendos diagramas de flujo, que permiten organizar la secuencia de acciones y decisiones.

ANALISIS



SINTESIS



Es necesario hacer algunas observaciones sobre los diagramas que representan el análisis y la síntesis: una, que el diagrama tiene caracter de esquema, y, otra, que muestra con claridad el lugar del proceso de resolución en que el resolutor recurre a los conocimientos que posee y que son pertinentes para la comprensión de las relaciones que aparecen en el problema.

En primer lugar, en el diagrama del análisis aparece un primer punto de decisión en el que hay que preguntarse "qué datos se juzgan necesarios para determinar la incógnita”: en el diagrama se presentan dos caminos alternativos por los que hay que circular; ahora bien, en la práctica el asunto no es tan simple. Por ejemplo, en el análisis que hemos presentado del problema 6 puede verse que hay momentos en que es preciso circular por los dos caminos; así, en el punto 2 de dicho análisis, al contestar a la pregunta “qué datos se juzgan necesarios para determinar la incógnita” se encuentran tres datos como antecedentes; dos de ellos son datos que no están presentes en el enunciado del problema y el otro es un dato del problema, con lo que por un lado hay que circular por el lado izquierdo del diagrama —el lado de lo conocido— y, por el otro, por el derecho.—el lado de lo desconocido. Como se muestra en el diagrama, el proceso se reitera hasta que se acabe circulando sólo por el lado de lo conocido.

Por otro lado, el resolutor utiliza sus conocimientos sobre la naturaleza de las relaciones que aparecen en el problema para decidir “qué datos juzga necesarios para determinar la incógnita”. Así por ejemplo, como se pregunta por los kilómetros totales recorridos, y en el problema se habla de los días durante los que vuela el aeroplano, el resolutor evoca sus conocimientos pertinentes y decide que los totales se pueden obtener sumando los tres de cada día. Posteriormente, examina si esas tres cosas necesarias son datos del problema o no, para determinar por dónde tiene que circular en el diagrama. Por tanto, cada vez que pasa por este punto de decisión, el resolutor realiza la traducción simple correspondiente al problema de una etapa que en ese momento ha construido.

LA ESTRUCTURA DE LOS PROBLEMAS ARITMÉTICOS DE VARIAS OPERACIONES COMBINADAS

CONSTRUCCIÓN DE UN DIAGRAMA DE LA ESTRUCTURA DEL PROBLEMA

El diagrama de flujo del análisis representa el conjunto de las acciones que hay que realizar y de las decisiones que hay que tomar en el proceso de resolución de un PAVOC. Ahora bien, por su caracter de instrumento de organización, no presenta de forma explícita qué operaciones hay que realizar, entre qué datos y en qué orden. Sin embargo, es posible elaborar un diagrama que recoja estos tres aspectos esenciales del proceso de resolución de estos problemas, a partir del método de análisis-síntesis, y verlo como una representación de la estructura del problema. Esto es lo que describiremos a continuación.

Consideremos el problema 7.

Problema 7 Juan compra 3 lápices a 15 ptas. cada uno. Da al tendero 50 ptas. ¿Cuánto le devuelven?

El análisis de este problema establece que

1) la cantidad que hay que devolver se puede determinar en función de la cantidad entregada y el coste de los lápices; y

2) el coste se puede determinar en función del precio de cada lápiz y la cantidad de lápices comprados.

Estas dos relaciones

1) 'cantidad devuelta' = 'cantidad entregada' - 'coste'

2) 'coste' = 'precio unitario' - 'número de unidades'

pueden representarse por

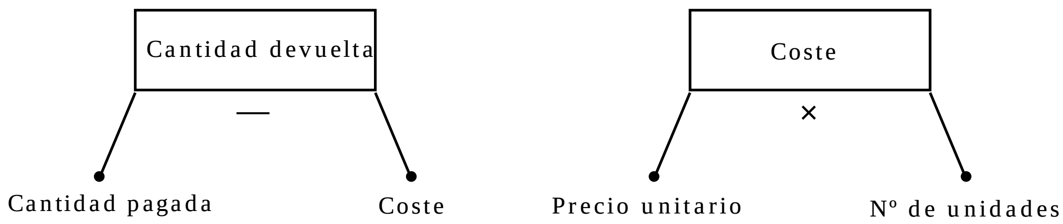


figura 1

El coste es la incógnita auxiliar que el análisis dice que debe determinarse para obtener la cantidad que hay que devolver. Luego la cadena de relaciones construida al iterar el análisis puede representarse por

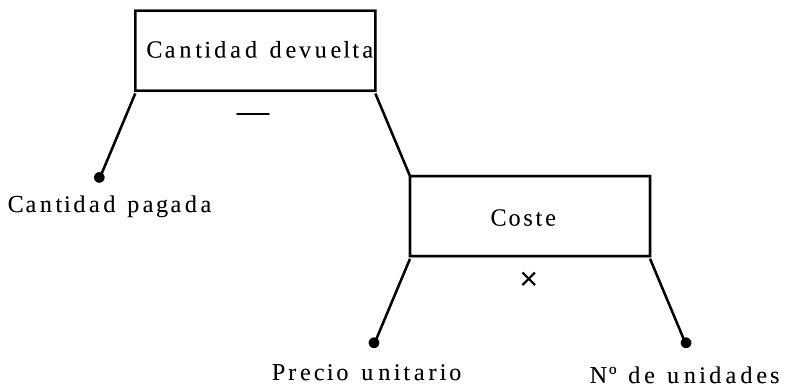


figura 2

Esta representación puede esquematizarse aún más con el fin de resaltar, como lo hace el análisis, incógnitas y datos, empleando un signo de interrogación para las incógnitas y un punto para los datos. El esquema anterior queda entonces así, introduciendo los datos concretos del problema:

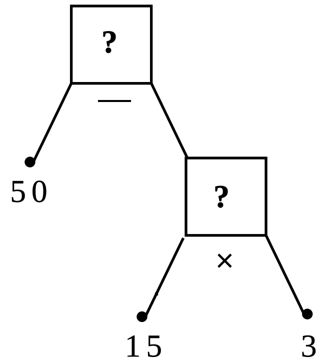


figura 3

La síntesis —que da la respuesta a la pregunta del problema ejecutando el plan que elabora el análisis— se reduce a efectuar los cálculos que aparecen en el diagrama, en el orden que el propio diagrama muestra.

EL DIAGRAMA COMO TRADUCTOR

Consideremos el problema 8 y el diagrama de la figura 4:

Problema 8	En un taller de confección disponen de 4 piezas de tela de 50 m cada una. Con ellas van a confeccionar 20 trajes que necesitan 3 m de tela cada uno. Con el resto de la tela piensan hacer abrigos que necesitan 4 m cada uno. ¿Cuántos abrigos pueden hacerse?

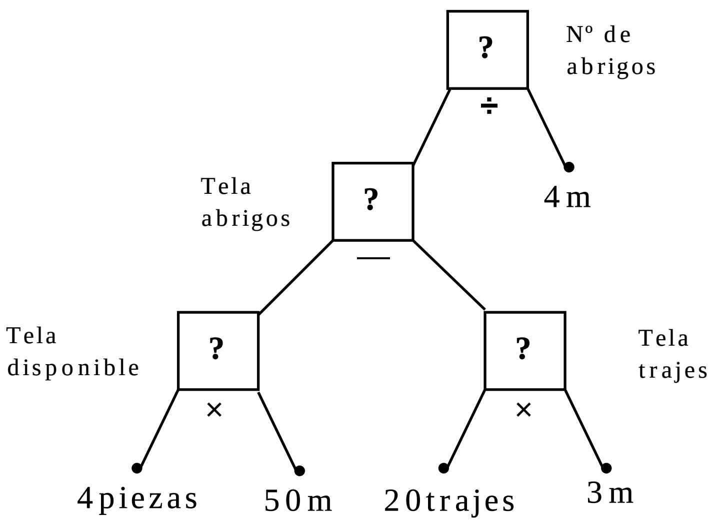


figura 4

El diagrama correspondiente al análisis del problema muestra con precisión la estructura de la cadena deductiva que conecta datos con incógnita, ya que aparecen en él:

1.— Las etapas necesarias para ir desde la incógnita a los datos. (En este caso tres).

2.— El número de incógnitas auxiliares. (Que se corresponde con el número de veces que se recorre el diagrama de flujo del análisis.)

3.— Las conexiones entre datos, incógnitas auxiliares e incógnita del problema.

4.— Las operaciones concretas que es preciso realizar para obtener, a partir de los datos, las incógnitas auxiliares y la incógnita del problema.

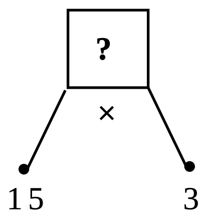
Esto es, el diagrama es un instrumento que permite traducir el enunciado verbal de un PAVOC a la expresión aritmética que lo resuelve, al indicar con toda precisión los tres elementos esenciales del proceso de resolución: qué operaciones hay que realizar, entre qué datos y en qué orden.

De hecho, el diagrama es semánticamente más rico que la expresión aritmética, incluso cuando se desprende de los significados del contexto en que está enunciado el problema, ya que se construye en la secuencia del análisis y, por tanto, aun en forma de esquema simbólico, lleva prendido los significados asociados a la búsqueda de antecedentes. Sin embargo, la expresión aritmética correspondiente, $[(4\times50)-(20\times3)]\div4$, no mantiene ninguna huella del orden de las acciones, por lo que la obtención de su resultado se ha de realizar en el terreno de la pura sintaxis, ya que son sólo las reglas sintácticas las que determinan el orden en que han de efectuarse las operaciones.

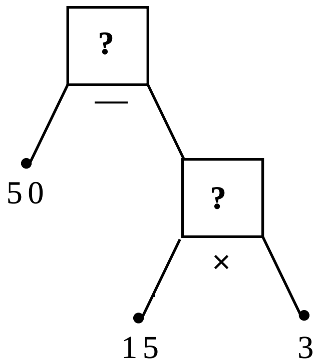
DIAGRAMA Y ESTRUCTURA DEL PROBLEMA.

Una buena ilustración de la representación de la estructura del problema por medio del diagrama y de la complejidad del proceso de traducción es la siguiente secuencia de problemas y diagramas.

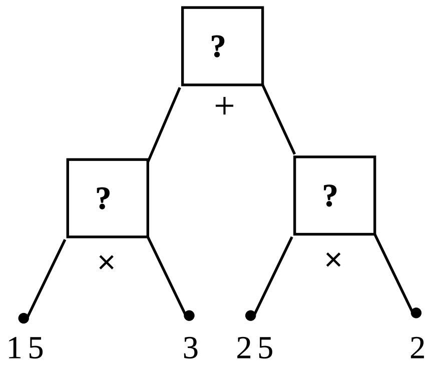
Problema 9 Juan compra 3 lápices a 15 pts. cada uno. ¿Cuánto paga?



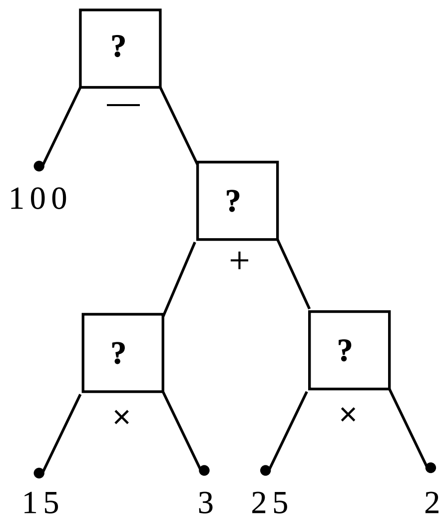
Problema 10 Un lápiz cuesta 15 pts. Juan compra 3 lápices y paga 50 pts. ¿Cuánto le devuelven?



Problema 11 Juan compra 3 lápices de 15 pts. y María 2 cuadernos de 25 pts. ¿Cuánto gastaron?



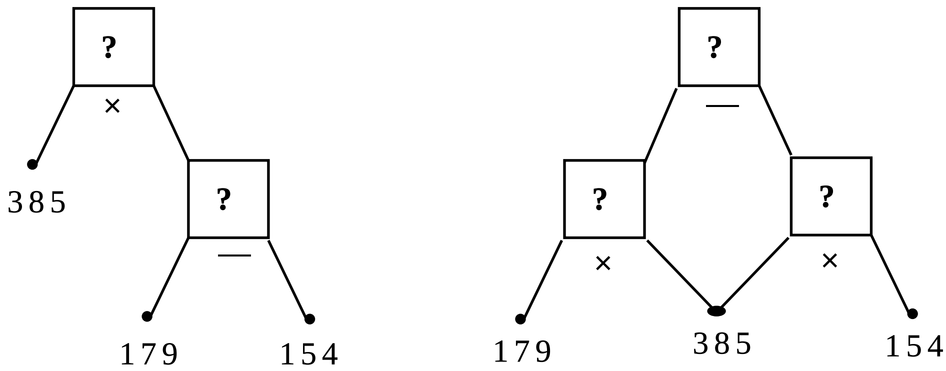
Problema 12 Juan y María son hermanos. Juan compra 3 lápices de 15 pts. y María 2 cuadernos de 25 pts. Pagan 100 pts. ¿Cuánto les devuelven?



Hay que tener en cuenta que lo que pone de manifiesto el diagrama no es una hipotética estructura profunda del enunciado del problema, sino la estructura del proceso de traducción, por lo que no ha de resultar extraño que a un mismo problema le corresponda más de un diagrama. El caso más obvio es el que se presenta cuando un problema puede ser resuelto mediante varias expresiones aritméticas distintas, pero equivalentes. Éste sucede, por ejemplo, con el problema 4, que, gracias a la propiedad distributiva, se puede traducir a las expresiones aritméticas

$$385\times(179-154) \quad \text{o} \quad 385\times179-385\times154.$$

El camino del análisis puede ser también doble: decir en primer lugar que lo ganado en total puede obtenerse en función de la ganancia por botella y el número de botellas vendidas, o decir que puede ser obtenido en función de lo invertido en la compra y lo ingresado en su venta. Los diagramas correspondientes reflejan esa doble estructura producida por la propiedad distributiva.



Así, el diagrama permite examinar con detalle la complejidad de la estructura del problema y hacer hipótesis sobre su dificultad. Por ejemplo, los tres diagramas de la figura 5 comparten el número de datos presentes en el enunciado del problema (cuatro) y el número de incógnitas auxiliares necesarias (dos).

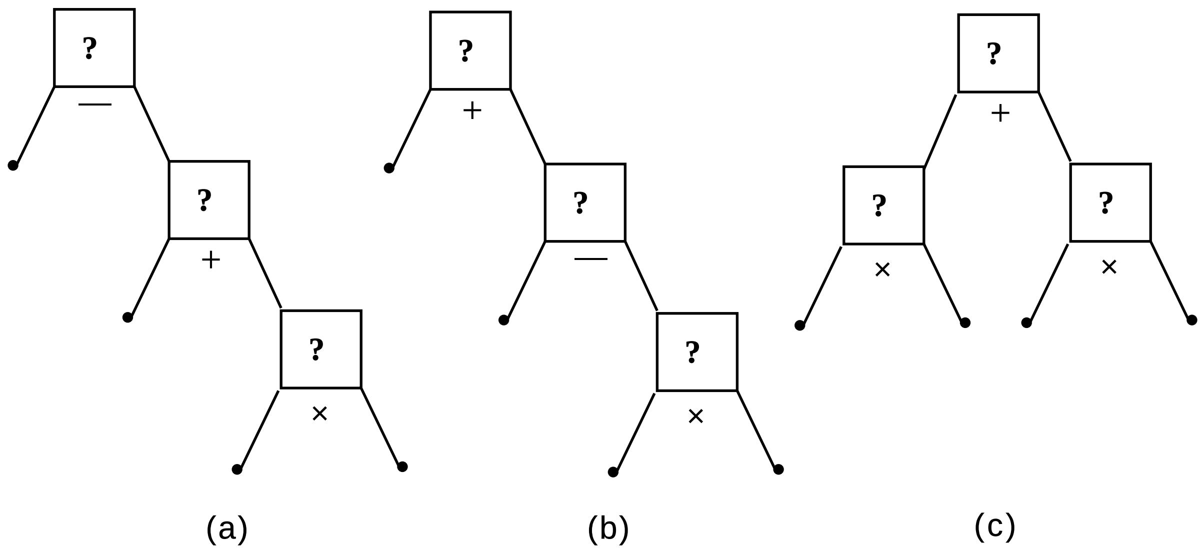


figura 5

Los diagramas a y b representan problemas de análoga dificultad en cuanto a la construcción de la cadena deductiva, pues se utilizan un dato y una incógnita auxiliar en las dos primeras etapas y dos datos en la tercera.

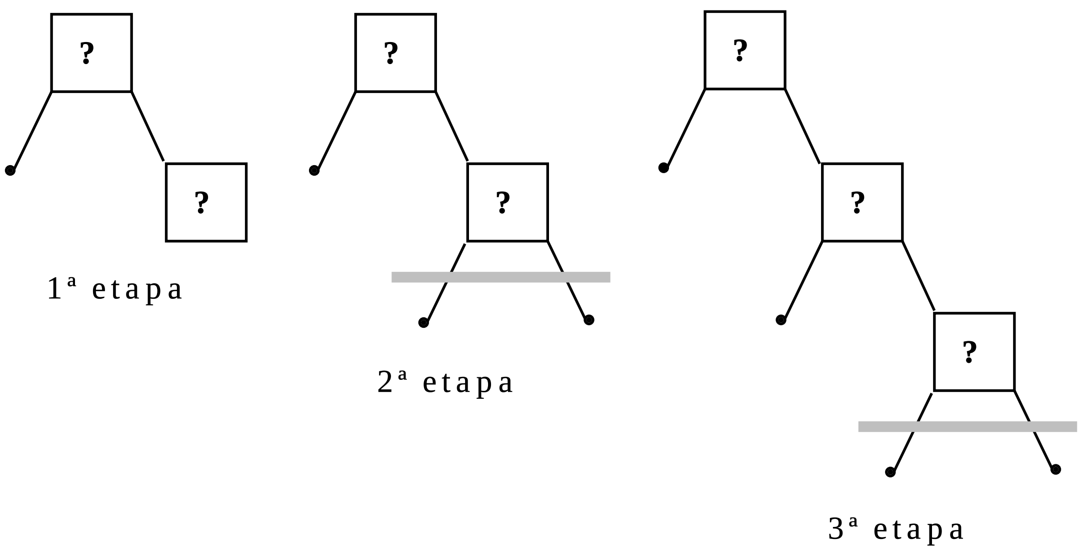


figura 6

Sin embargo, los diagramas a y b difieren en la naturaleza de las relaciones que en las primeras etapas permiten determinar la incógnita del problema mediante las incógnitas auxiliares y los datos.

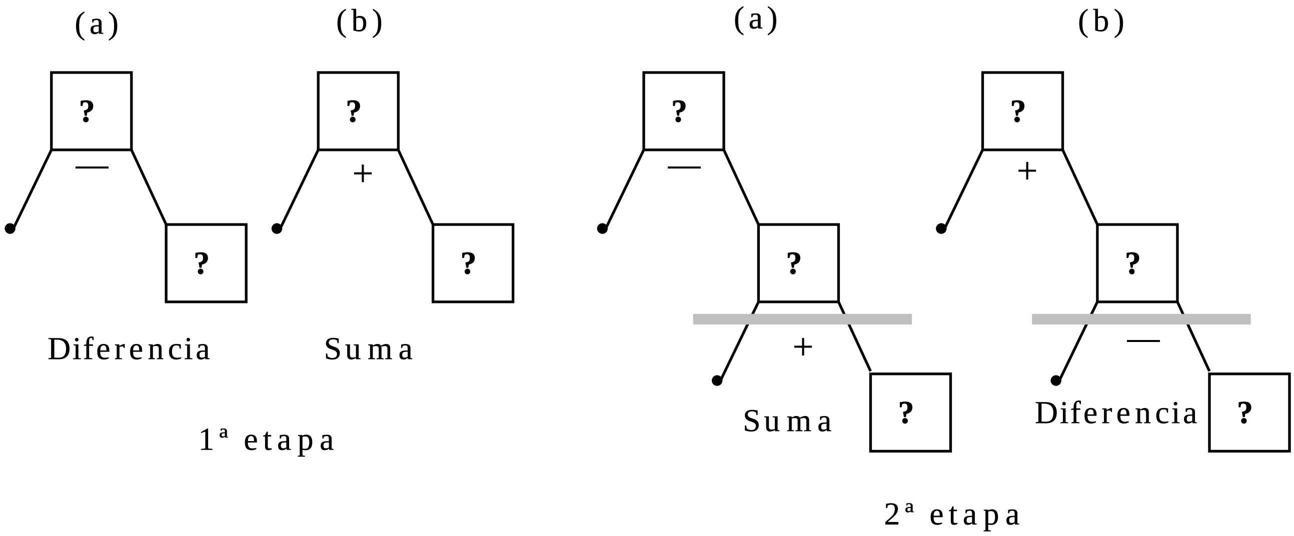


figura 7

El diagrama c, por su parte, es muy distinto de los anteriores ya que la determinación de la incógnita del problema se realiza ya desde la primera etapa en función de dos incógnitas auxiliares y no de un dato del problema y de una incógnita auxiliar como era el caso de los diagramas a y b.

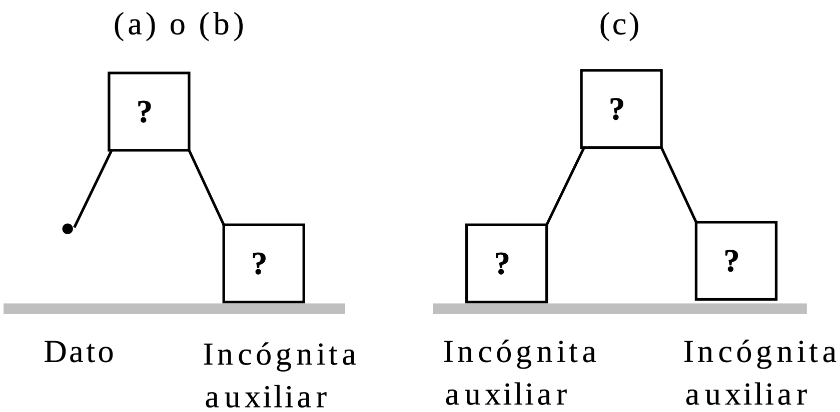


figura 8

El diagrama permite también, manipulado formalmente, examinar posibles estructuras. Por ejemplo, imponiéndose la condición de que aparezcan cuatro datos en el enunciado del problema, se pueden construir, al menos teóricamente, problemas de estructura tan diversa como los que se presentan en la figura 9, en la que hay desde diagramas que muestran el uso directo de todos los datos para determinar la incógnita, a otros en los que un dato es utilizado para determinar varias incógnitas auxiliares.

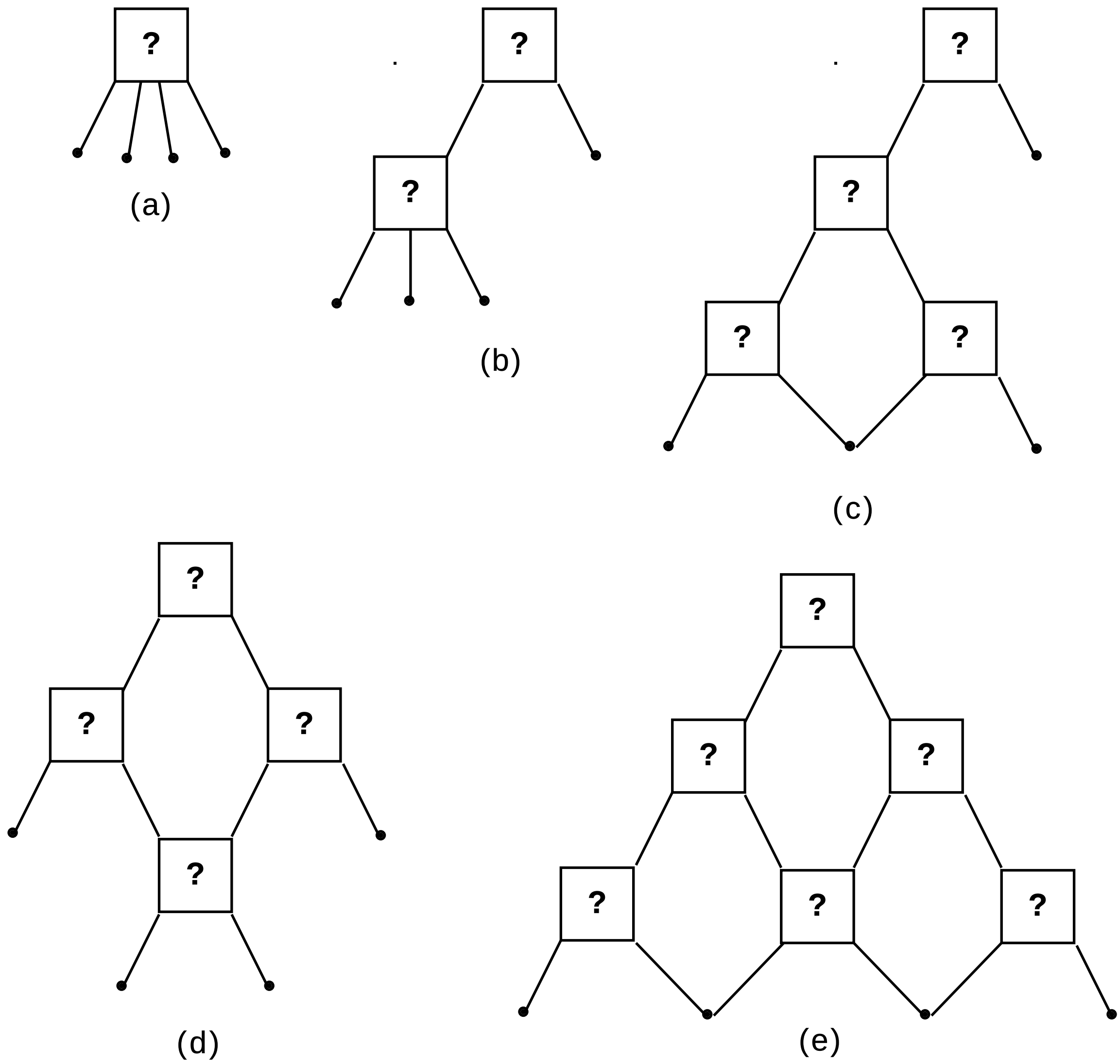


figura 9

Aunque algunos diagramas de la figura 9 puedan parecer pura especulación teórica, y cabe pensar que difícilmente aparezcan en la escuela problemas que tengan una estructura tan compleja, el análisis mediante el diagrama de los problemas que se encuentran efectivamente en los libros de texto usuales y en la práctica cotidiana de las escuelas permite encontrar ejemplos de problemas de un cierto grado de complejidad desde el punto de vista de su estructura. Por ejemplo, al examinar los textos para los cursos 4º, 5º y 6º de primaria (10-12 años) de una colección de uso extendido en España aparecieron diagramas como los de la figura 5 y como el (c) y (d) de la figura 9, además de problemas de una etapa. En la tabla siguiente se muestra la cantidad correspondiente a cada uno de ellos, desglosada en función del contexto en que está enunciado el problema.

	1-etapa	fig.5(a)	fig. 5(c)	fig. 9(c)	fig. 9(d)
compra-venta	18	15	5		1
edades	2	2			
magnitudes	3	4			
fabricar	1				
transportes	5	2			
trabajo	10	1	1	1	
fiestas		1			
granjas	1				
comidas	2				
juguetes	3		1	1	
estaciones del año	2	1			
excursiones	4	3	1	1	
cosecha	2	2			
biblioteca	3	2			
deportes	2				

EL DIAGRAMA EN LOS LÍMITES DEL MÉTODO DE A-S

El diagrama que hemos construido es un *artefacto didáctico* que permite dar cuenta de la estructura del problema, al reflejar el proceso de traducción. De la misma manera que con cualquier otro artefacto didáctico hay que tener cuidado de no caer en la tentación de convertirlo en una panacea universal para resolver todos los problemas que plantea la enseñanza de la resolución de PAVOC.

Esto no quita para que pueda utilizarse, con el tiento oportuno, para funciones de instrucción. Puede servir de ayuda al profesor en el arte de plantear problemas, ya que, al controlar a priori la estructura, el profesor puede hacerse una idea del grado de dificultad esperado. Además, puede enseñarse a usar el diagrama como un lenguaje intermedio para la traducción.

Veamos por ejemplo qué sucede con un problema como el 13, cuyo diagrama es el de la figura 10.

Problema 13	Juan ha hecho 3 problemas más que Pedro. Pedro ha hecho el doble que Enrique. Enrique ha hecho 9 problemas. ¿Cuántos problemas ha hecho Juan?

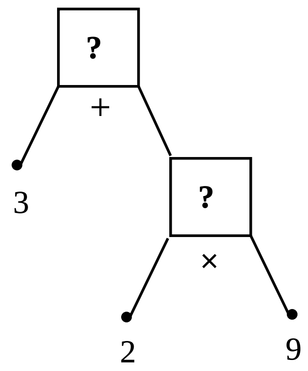
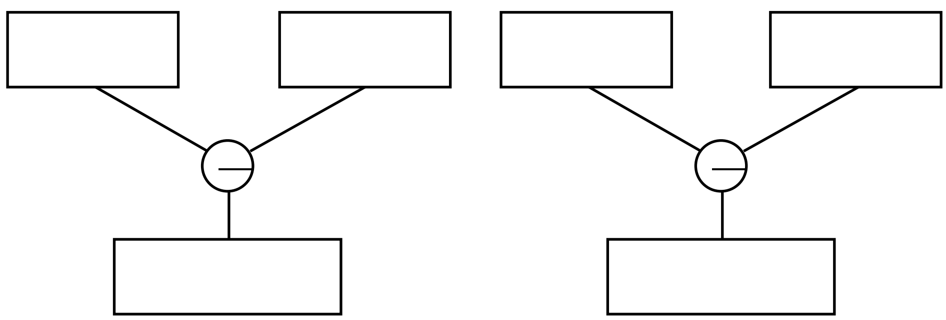
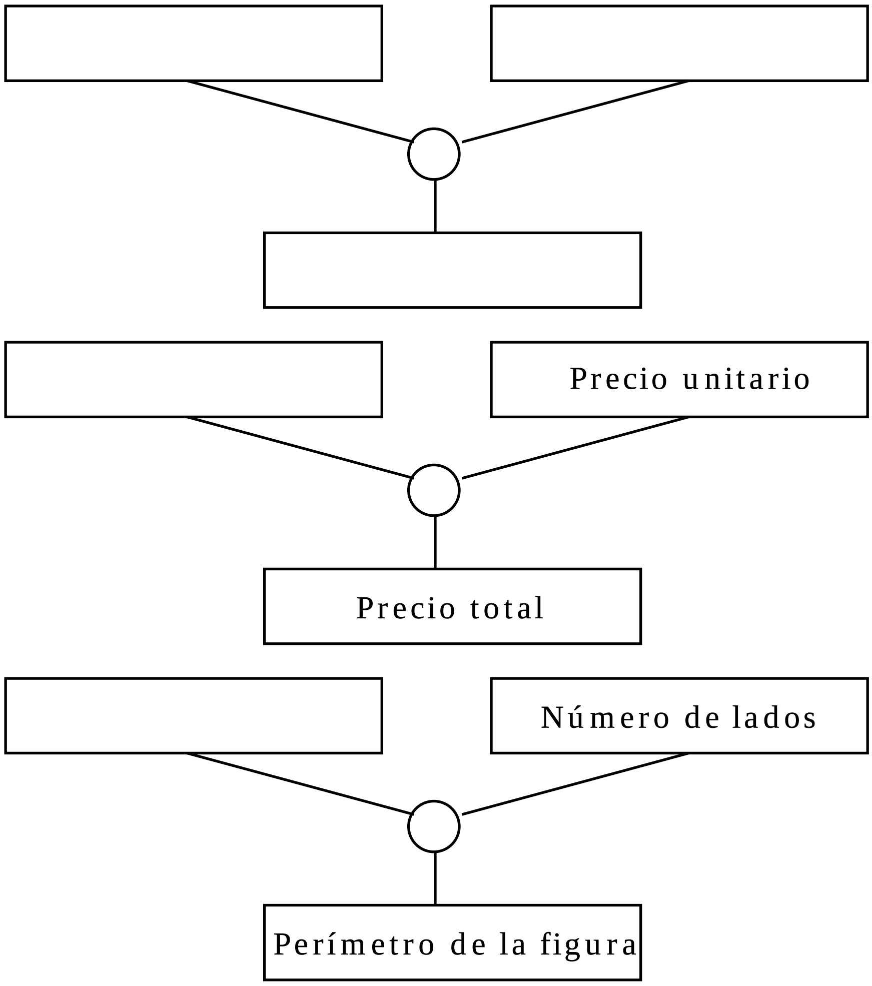


figura 10

El enunciado de este problema está construido de forma que da el análisis hecho. El diagrama, por tanto, puede utilizarse para resolver el problema; pero, además, puede haber sido utilizado previamente por el profesor para construir el enunciado del problema de manera que cada una de las oraciones del texto del problema se corresponda con cada una de las etapas que aparecen representadas en el diagrama, y que estén dispuestas en el mismo orden —con la salvedad de la oración en la que se hace la pregunta del problema que, como es usual, aparece al final del enunciado. Por otro lado, las incógnitas auxiliares que es preciso introducir se mencionan explícitamente en el enunciado del problema. En casos tan simples como éste, no hace falta insistir en la utilidad del diagrama.

Hay otro conjunto de problemas, que aparecen usualmente en los libros de texto y forman parte de la práctica usual en las escuelas, en los que también aparece en ocasiones de forma explícita el uso de los diagramas. Nos referimos a los problemas en los que las relaciones que existen entre las incógnitas, principal y auxiliares, y los datos son relaciones que se establecen entre dos cantidades y que pertenecen a estructuras conceptuales que forman parte del currículo escolar. Por ejemplo, las relaciones entre precio total, precio unitario y número de unidades; saldo, ingresos y gastos; perímetro, longitud del lado y número de lados se presentan en la colección de textos “El mundo del número”, editada hace años por Interduc/Schroedel, mediante los diagramas siguientes, que muestran la síntesis en vez del análisis:





Sin embargo, en otros PAVOC que pueden parecer igualmente simples, la utilidad del diagrama resulta dudosa tanto para expresar la estructura del problema, como para las otras funciones que se han señalado.

Veamos, por ejemplo, el problema 14 y su diagrama (figura 11).

Problema 14	Tengo 48 libros colocados en 2 estanterías. En una estantería hay 8 libros más que en la otra. ¿Cuántos libros hay en cada estantería?

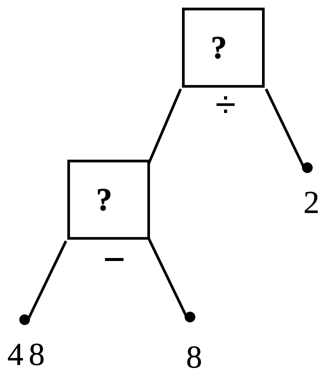


figura 11

En un problema como éste, el diagrama señala el orden de las operaciones para determinar una de las incógnitas, pero es difícil dotar de sentido a la incógnita auxiliar que es preciso introducir para poder construir de hecho ese diagrama, ya que dicha incógnita auxiliar ha de ser "el número de libros que tendría cada una de las estanterías si ambas tuvieran el mismo número de libros". En este caso, el recurso al esquema de la división con resto permite resolver el problema sin necesidad de considerar el sentido que pueda tener la incógnita auxiliar que se utiliza implícitamente dentro del esquema. Un procedimiento alternativo para este problema podría ser el tanteo por ensayo y error.

El caso del problema anterior no es único. La utilidad del diagrama para la instrucción resulta dudosa en general para todos aquellos PAVOC en los que las relaciones que se establecen entre las incógnitas y los datos son relaciones que pertenecen a estructuras conceptuales tratadas en el currículo y para las que se dispone tradicionalmente de esquemas que representan las relaciones y permiten resolver los problemas en los que éstas intervienen. Como hemos mostrado en las reflexiones anteriores, cuando estas relaciones se establecen entre dos cantidades, los esquemas se incorporan de forma natural al propio diagrama y éste se construye fácilmente ya que las incógnitas auxiliares y las relaciones en cuestión adquieren su sentido de forma inmediata gracias al propio esquema —es decir, el resolutor no ha de realizar un trabajo específico para dotarlas de sentido. Ahora bien, cuando los esquemas corresponden a relaciones entre más de dos cantidades, como es el caso de las relaciones que aparecen en la estructura conceptual de proporcionalidad, el uso del diagrama como instrumento de laboratorio para representar la estructura del problema obliga a construir unas relaciones entre las cantidades implicadas que parecen entrar en conflicto con las relaciones que están representadas en el esquema de proporcionalidad.

Así, el diagrama (figura 12) del problema 15 —o el diagrama más complejo (figura 13) del problema 16— hace aparecer como incógnitas auxiliares imprescindibles 'el número de días que tarda 1 obrero', o 'los metros que construye 1 obrero en 4 días', o 'los metros que construye 1 obrero en 1 día'.

Problema 15 Si 20 obreros hacen una obra en 6 días, ¿cuántos días tardarán en hacer esa obra 8 obreros?

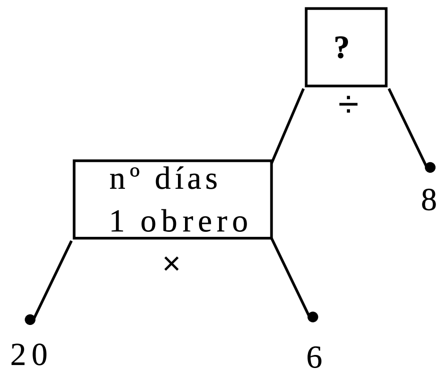


figura 12

Problema 16 100 obreros construyen una tapia de 50 m en 10 días. ¿Cuántos obreros se necesitarían para construir 40 m de tapia en 4 días?

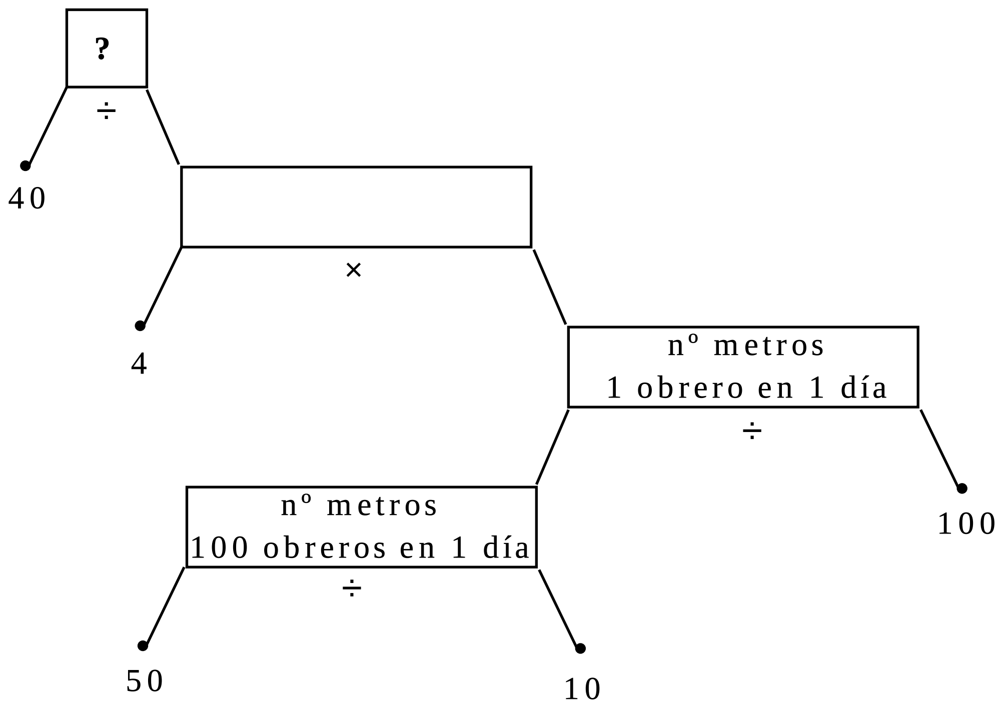


figura 13

Estas incógnitas auxiliares han desaparecido en el esquema de reparto proporcional clásico. Aunque la reducción a la unidad, que es la operación que da cuenta de las incógnitas auxiliares desaparecidas, ha tenido que formar parte de la secuencia de instrucción en torno a la estructura conceptual de proporcionalidad que permite construir, y dotar de sentido, al esquema de reparto proporcional, esta reducción a la unidad desaparece en el proceso didáctico de esquematización progresiva que lleva de la presentación de la idea de proporcionalidad a la construcción de un esquema operativo para la resolución de problemas en el interior de tal estructura conceptual. Podríamos, por tanto, concluir con caracter general que el diagrama da cuenta de la estructura del problema en aquellos casos en los que el resolutor no dispone de un esquema ad hoc, producido en el interior de una estructura conceptual determinada, para las relaciones que aparecen en el problema, o cuando el esquema no ha hecho desaparecer las incógnitas auxiliares. En los casos en que el esquema las ha hecho desaparecer, el diagrama representa una estructura más profunda, que el resolutor no necesita hacer consciente para resolver el problema, siempre que sea capaz de invocar el esquema correspondiente.

DEL ANÁLISIS AL MÉTODO CARTESIANO

Hemos visto cómo el método de análisis-síntesis permite comprender y resolver PAVOC. Sin embargo, el método de análisis, aunque aunque fuera concebido en una época en que aún no existía el álgebra, puede aplicarse igualmente a problemas que suelen resolverse actualmente por medio de procedimientos algebraicos.

En efecto, todos los PAVOC que hemos examinado hasta aquí pueden ser tratados mediante el análisis-síntesis, porque el análisis de la incógnita culmina efectivamente en los datos del problema y, por tanto, la síntesis es posible. Esto, empero, no sucede siempre como lo muestra los análisis (figura 14) del problema 17.

Problema 17	Un automóvil parte de un punto A con velocidad uniforme de 40 km/h hacia otro punto B. Dos horas después sale de A hacia B otro automóvil con velocidad uniforme de 60 km/h. Dígase a qué distancia de A se encuentran.

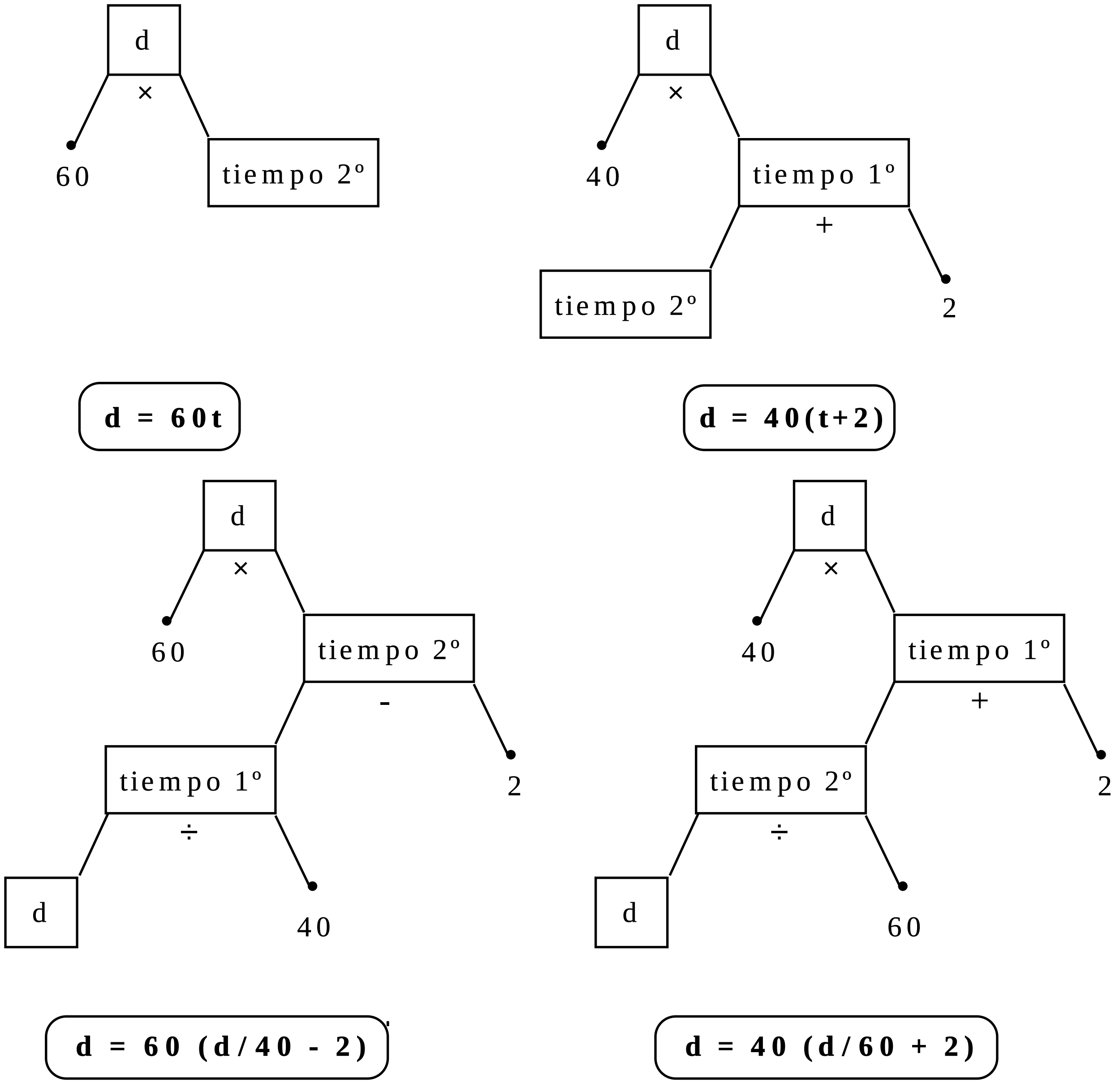


figura 14

Estos diagramas indican que, si el proceso de traducción se encamina por la vía de cualquiera de los análisis que aparecen representados en ellos, no es posible reducir la incógnita a los datos, por muchas vueltas que se dé al organigrama del análisis, ya que se vuelve inexorablemente a la incógnita original del problema. En problemas como éste, el análisis parece no acabar, al no encontrarnos en ninguno de los casos enunciados en la regla de análisis-síntesis, entrando, si se quiere seguir adelante, en un bucle sin fin, con lo que la síntesis es imposible.

Sin embargo, el intento de análisis lo que sí que ha puesto de manifiesto es la naturaleza de las relaciones que existen entre la incógnita, las incógnitas auxiliares y los datos del problema, y el orden que permite encadenarlos. Con los instrumentos de la aritmética, esto solo no permite encontrar la solución del problema. Ahora bien, si se dispone de la herramienta algebraica, basta llamar *d* a la incógnita del problema para encontrarnos con que el análisis que refleja el diagrama da un procedimiento de traducción automática del enunciado del problema a una ecuación, cuya solución es la del problema.

Esto es, en el campo de los PAVOC aparecen naturalmente problemas que sólo son susceptibles de resolverse por procedimientos algebraicos. El análisis que acabamos de realizar del problema 17 indica que esta clase de problemas puede ser un lugar natural para realizar el tránsito de la aritmética al álgebra. Filloy y Rojano(1985) han determinado en el terreno de la resolución de ecuaciones un corte entre el aritmética y el álgebra en el momento que es necesario operar con la incógnita para resolver la ecuación. El posible punto de transición que señalamos aquí entre los problemas aritméticos y algebraicos es el momento en que el análisis de la incógnita no es posible realizarlo únicamente a partir de los datos; en esos casos, la traducción, ahora al lenguaje del álgebra, que corresponde al análisis realizado conduce a una ecuación de las que Filloy y Rojano colocan del lado del álgebra. Inversamente, las ecuaciones que Filloy y Rojano consideran aritméticas se corresponden con PAVOC cuyo análisis culmina en datos y, por tanto, se traducen mediante la síntesis a expresiones aritméticas (de hecho, a la expresión aritmética que resuelve la ecuación).

Por otra parte, mirando el discurrir de los problemas por el currículo escolar, en el momento en que en éste aparecen los procedimiento algebraicos, éstos se usan no sólo para resolver los problemas que precisan el álgebra, sino también para resolver los PAVOC que pueden ser resueltos —y que han sido resueltos antes— por procedimientos aritméticos. Mostraremos en el párrafo siguiente cómo en presencia del instrumento algebraico el método de análisis y el diagrama pueden seguir siendo instrumentos útiles y en qué medida se puede modificar su uso.

EL MODELO CARTESIANO

Polya(1966) reescribe las reglas cartesianas desde el punto de vista de la resolución de problemas de matemáticas y tratando de precisar las tareas que es preciso realizar para reducir un problema de matemáticas a la resolución de un sistema de ecuaciones.

> “1. En primer lugar, comprender bien el problema, luego convertirlo en la determinación de cierto número de cantidades desconocidas. (Reglas XIII a XVI)
>
> 2. Examinar el problema de la manera más natural considerándolo como resuelto y presentando en un orden conveniente todas las relaciones que deben verificarse entre las incógnitas y los datos según la condición planteada. (Regla XVII)

3. Separar una parte de la condición que permita expresar una misma cantidad de dos maneras diferentes y obtener así una ecuación entre las incógnitas. Descomponer eventualmente la condición en varias partes. Obtendréis así un sistema con tantas ecuaciones como incógnitas. (Regla XIX)

4. Transformar el sistema de ecuaciones en una única ecuación. (Regla XXI)"

Como puede verse, las reglas del método cartesiano difieren de la del análisis-síntesis. Para empezar, estas reglas no tienen caracter algorítmico, sino que más bien constituyen un plan general de actuación para poner un problema en ecuaciones. Pero además la consideración de los datos y las incógnitas y la forma de expresar las relaciones entre ellos es distinta. Tanto datos como incógnitas se tratan como si fueran datos, esto es, se puede operar formalmente —gracias al instrumento algebraico— con ellos. Como consecuencia de esto, el examen de las relaciones que están contenidas en la condición del problema no ha de comenzar desde la incógnita, ni ha de terminar en su reducción a los datos. Lo que se hace (regla 3) es buscar una cantidad —que no tiene por qué coincidir con la incógnita del problema— que pueda expresarse de dos maneras distintas, cada una de ellas en función de una parte de la condición.

Ahora bien, aunque las diferencias sean tantas y tan radicales, hay algo presente en el método de análisis-síntesis —y que es una parte esencial de éste— que reaparece en el interior del método cartesiano. En efecto, una vez establecida la cantidad que puede expresarse de dos maneras distintas, lo que hay que hacer en el método cartesiano es *analizar* esa cantidad. El organigrama del análisis y el tipo de razonamiento que éste implica para la búsqueda de las relaciones a través de la búsqueda de antecedentes es pertinente también aquí, con una única salvedad: el análisis no ha de terminar con los datos del problema, sino con una combinación de datos e incógnitas, lo que es coherente ya que éstas últimas, expresadas algebraicamente, se están considerando *también* como datos. La regla 3 establece además que el análisis de cada cantidad se haga dos veces, y que se igualen las expresiones algebraicas que traducen los dos análisis de cada cantidad para formar las ecuaciones cuya solución es la del problema.

El diagrama que expresa el análisis puede pues servir también en el interior del método cartesiano para representar los análisis que hay que hacer de cada cantidad. El camino de la síntesis no produce ahora la solución del problema, sino la escritura de la expresión algebraica correspondiente.

Los ejemplos siguientes lo ilustran y muestran varias situaciones distintas:

En los dos análisis del problema 17 que aparecen en la parte inferior de la figura 14, se analiza la incógnita y se obtiene una expresión del tipo $x=f(x)$. En la parte superior, dos análisis distintos de la incógnita conducen a un sistema de ecuaciones con la incógnita y una incógnita auxiliar, y, —expresión del tipo $x=f(y)$, $x=g(y)$—, o a una única ecuación en la que sólo aparece la incógnita auxiliar.—expresión del tipo $f(y)=g(y)$.

Por otro lado, si el problema 18 se traduce a la ecuación

$$\frac{x+12}{13}=\frac{x-13}{12},$$

el análisis realizado no es el de la incógnita, sino de otra cantidad, y ésta cantidad se ha analizado de dos maneras distintas, como pide el método cartesiano —expresión del tipo $f(x)=g(x)$.

Problema 18.	Un profesor dice a un niño que tiene que añadir 12 a un número dado y dividir el resultado por 13. Pero el niño, que no presta atención, resta 13 del número dado y divide el resultado por 12. Se extraña, pues la respuesta es correcta. ¿Cuál es el número dado?

CONSIDERACIONES FINALES

Lo que hemos intentado hacer aquí ha sido describir la estructura de los PAVOC centrándonos en el proceso de traducción, o, más precisamente, describirla en función de un texto puente entre el texto del problema, escrito en lenguaje vernáculo, y la expresión aritmética que lo resuelve, escrita en lenguaje aritmético. Dicho texto intermedio se obtiene como producto del argumento resolutorio de un PAVOC por el método clásico de análisis-síntesis. Hemos mostrado cómo ese texto intermedio se puede expresar en un lenguaje gráfico ad hoc que resalta la red de relaciones que pueden encontrarse entre las cantidades conocidas y desconocidas pertinentes para la resolución del problema, dejando de lado los significados particulares del contexto del problema. Nuestra pretensión es que el texto intermedio expresado en ese lenguaje gráfico, esto es, el diagrama, puede tomarse como una representación de la estructura del problema.

Apuntaremos, para concluir, algunas direcciones en las que se puede explorar el uso de esta descripción de la estructura de los PAVOC, que nos parecen prometedoras, siempre que se procure tener en cuenta si se está utilizando como instrumento de diseño de instrucción, como instrumento de análisis curricular o como artefacto didáctico.

Las características del texto intermedio producto del análisis-síntesis, aun expresado en lenguaje vernáculo, muestran el interés de que en la instrucción se preste atención al análisis del contenido del problema. En Puig y Cerdán (1989) hemos discutido algunas de las tareas y actividades de enseñanza, propias del análisis del contenido, sugeridas por la comparación entre el texto intermedio que se ha de producir y el texto del problema.

Se puede instruir a los alumnos en la elaboración del texto intermedio en el lenguaje gráfico del diagrama, con lo que éstos disponen de una representación visual que les sirve, durante la elaboración del texto intermedio, como artefacto para llevar la cuenta de las relaciones establecidas entre datos, incógnita e incógnitas auxiliares del problema y para saber si ya han encontrado todas las necesarias o faltan aún algunas por encontrar. En Puig y Cerdán (1989) hemos discutido que si se quiere incluir en una estrategia de instrucción en resolución de problemas el uso del diagrama, no se puede hacer localmente, es decir, no basta con instruir en el uso del diagrama para resolver PAVOC, sino que hay que organizar globalmente la instrucción en el uso de diagramas similares para operaciones aritméticas elementales, expresiones aritméticas elementales, problemas de una etapa, relaciones entre cantidades, expresiones aritméticas complejas, propiedades algebraicas de las operaciones y PAVOC.

El diagrama comparte con otras representaciones en un lenguaje gráfico, el ser una ayuda visual, por lo que de él pueden predicarse las ventajas y dificultades de toda representación visual. Otras representaciones visuales, que pueden aparecer en el libro de texto o en el entorno en que se resuelve el problema, o que el resolutor puede producir en el curso de la resolución, pueden ser útiles para concebir las incógnitas auxiliares o para tener una comprensión global de la situación descrita en el enunciado del problema. Lo que tiene de específico el diagrama —y lo distingue, p. e., de las representaciones descritas en Greeno (1987) y Thompson (1989)— es que muestra una visión pormenorizada del proceso de traducción y, como hemos indicado anteriormente, al estar construido en la secuencia del análisis pone de relieve los significados asociados a la búsqueda de antecedentes. En el micromundo del Word Problem Assistant descrito en Thompson (1989), por el contrario, es el programa, y no el usuario, quien infiere las operaciones que hay que realizar y quien descubre que ya hay suficientes incógnitas auxiliares y relaciones establecidas, con lo que las tareas necesarias para resolver el problema están repartidas entre usuario y programa y, por tanto, el resolutor no es ni uno ni otro, sino un combinado de ambos.

Por otra parte, la posibilidad de manejo formal del diagrama lo convierte en un instrumento útil para analizar la complejidad estructural de los PAVOC que aparecen en el currículo, como hemos apuntado de pasada. Y también en un instrumento de organización para el profesor que se enfrenta a la tarea de preparar secuencias de problemas, ya que éste, dejando de lado los aspectos contextuales, puede controlar con el diagrama la complejidad de la cadena deductiva, el número de incógnitas auxiliares, la naturaleza de las relaciones, el número de datos y el número de etapas de cada problema.

Finalmente, la correspondencia entre el punto de corte establecido por Filloy y Rojano entre las ecuaciones aritméticas y algebraicas, y los procesos de traducción, representados en el diagrama, en que el análisis no culmina sólo en datos ofrece una vía para intentar delimitar el paso de la aritmética al álgebra en el terreno de los PAVOC.

Referencias bibliográficas

Carpenter, T. P., Hiebert, J. y Moser, J. M., 1981, Problem Structure and First–Grade Children Initial Solution Processes for Simple Addition and Subtraction Problems, *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol 12, pgs. 27-39.

Filloy, E. y Rojano, T., 1985, Operating the unknown and models of teaching (A clinical study with 12–13 year olds with high proficiency in pre–algebra), *7th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education — North American Chapter*, Ohio, 1985.

Greeno, J. G., 1987, Instructional Representations Based on Research about Understanding, en Schoenfeld, A. H., ed., 1987, *Cognitive Science and Mathematics Education*. (Lawrence Erlbaum Associates: Hillsdale, NJ)

Kalmykova, Z. I., 1975, Processes of Analysis and Synthesis in the Solution of Arithmetic Problems, en Kilpatrick, J., Wirszup, I, Begle, E. G. y Wilson, J. W., eds., 1975, *Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics. Vol. XI. Analysis and Synthesis as Problem Solving Methods*. (NCTM: Stanford, CA).

Lakatos, I., 1981, El método de análisis y síntesis, en *Matemáticas, ciencia y epistemología*, vol 2. (Alianza Ed.: Madrid).

Nesher, P., Greeno, J. G. y Riley, M. S., 1982, The Development of Semantic Categories for Addition and Subtraction, *Educational Studies in Mathematics*, Vol 13, pgs. 373-394.

Polya, G., 1957, *How to Solve It.* 2nd. edition. (Princeton University Press: Princeton, NJ). (Trad. castellana, *Cómo plantear y resolver problemas.* (Trillas: México, 1965).)

Polya, G., 1966, *Mathematical Discovery. 2 vols*. (John Wiley and Sons: New York). (Trad. francesa, *La découverte des mathématiques. 2 vols.* (Dunod: Paris, 1967).)

Puig, L. y Cerdán, F., 1989, *Problemas aritméticos escolares.* (Síntesis: Madrid.)

Thompson, P. W., 1989, Artificial Intelligence, Advanced Technology, and Learning and Teaching Algebra, en Wagner, S. y Kieran, C., eds., 1989, *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra.* (Lawrence Erlbaum Associates / NCTM: Hillsdale, NJ / Reston, VA.)