CAPÍTULO 16

EL LENGUAJE ALGEBRAICO

16.1 — 16.4 LENGUAJE EN SENTIDO AMPLIO

16.1. *Lenguaje, lenguajes, traducción*

El singular "lenguaje" obscurece el hecho de que no hay dos personas que hablen el mismo lenguaje. Incluso cada individuo puede usar varios lenguajes — no sólo si domina idiomas extranjeros, sino también según con quién se comunique y cómo lo haga, oralmente o por escrito, hablando, llamando, llorando, susurrando, cantando. Por supuesto que un individuo también escuchará varios lenguajes. Aprender la lengua materna es comunicar con el entorno de uno en dos lenguajes en extremo diferentes, con adaptaciones que, en el curso del tiempo, aumentan por parte del que aprende y disminuyen por parte de la gente con quien éste se comunica.

Aprender a leer significa inicialmente llegar a conocer un lenguaje cortado en letras, sílabas, oraciones, que, comparado con el lenguaje hablado y oído, es extremadamente pobre en cuanto a la forma y el contenido, hasta que el texto impreso comienza a traer consigo palabras y construcciones desconocidas y no oídas en el lenguaje hablado: por lo que respecta al nivel, el lenguaje impreso supera al oral.

Al afirmar —algo provocativamente— que no hay dos personas que hablen el mismo lenguaje, usé la palabra "lenguaje" en un sentido inadecuado, esto es, no la usé de la misma manera que cuando opongo, pongamos, el inglés y el francés. Entre estos dos significados de "lenguaje" hay una escala de gradaciones que depende de los medios de expresión —lenguaje hablado y escrito— o del entorno —lenguaje culto o inculto, lenguaje infantil, lenguaje de los jóvenes, lenguaje de las jóvenes, lenguaje libresco, lenguaje de los profesores, lenguaje de la iglesia, lenguaje de los ladrones, lenguajes secretos— o de la materia —lenguaje del derecho, lenguaje de la química, lenguaje de las matemáticas.

Reproducir el mismo contenido en otro lenguaje se llama traducir, aunque en la relación entre el lenguaje hablado y escrito se llama escribir y leer, en la que hay entre un lenguaje y un lenguaje secreto se llama codificar y descodificar, y en la relación entre personas que hablan "el mismo lenguaje" es "transformar". Transformar es, en parte, un asunto lexicográfico —una palabra o una combinación de palabras reemplazada por una sinónima—; y, en parte, un asunto estructural, del que trata precisamente la gramática transformacional.

16.2. *Reglas de transformación*

En el curso del desarrollo individual, las primeras transformaciones lingüísticas vienen determinadas por lo que yo he llamado cambio de perspectiva. El ejemplo

a la pregunta "¿Tú dónde vives?" un niño (2; 8) contesta "Yo vive [sic] allí" (señalando con el dedo)

muestra una transformación de descripción personal: tú → yo. Estas transformaciones forman todo un paquete: yo, me, mi → él, le, su son algunos ejemplos, que han de ser rellenados con nombres propios, otros pronombres, descripciones personales mediante apelativos o mediante una estructura de relativo como

el ladrón,

el hombre que ha robado la bicicleta.

Las primeras transformaciones por cambio de perspectiva son, como tales, formales; las más avanzadas muestran al menos alguna estructura formal.

Por cambio de perspectiva,

aquí y allí, dentro y fuera, arriba y abajo

cambian su significado según quien las pronuncia o se considera que las pronuncia, y han de ser intercambiadas en la comunicación de acuerdo con ello.

Por supuesto que éstos no son los únicos fenómenos de transformación: partes de oraciones reemplazadas por otras, singulares por plurales e inversamente, presente por pasado, activa por pasiva, la creación de comparativos y superlativos, la transformación de verbos en nombres, etc., no son más que unos pocos ejemplos, que pueden multiplicarse ad lib. En particular, la transformación en una interrogativa es muy productiva en una cierta edad: puede ser un juego agradable hacer que a cada frase del compañero de diálogo le siga una que comienza con "por qué", "cómo", "qué", "cuándo".

Nuestros lenguajes están construidos tan irregularmente que las reglas de transformación formales no pueden ser puramente formales —"no hay regla sin excepción" es correcto especialmente para este tipo de regla. Hay algo misterioso en lo que respecta a cómo el aprendiz encuentra su camino en ese laberinto, cómo aprende a hablar bien un lenguaje y a juzgarlo —al menos si uno no estima la influencia de las reglas formales sobre el aprender a hablar (y a actuar) en su auténtica medida, si uno no considera las reglas dentro de su propio marco. Los lenguajes se aprenden dentro de un contexto *fáctico*, en estrecha conexión con los hechos del entorno humano, objetivo, literario. Tal contexto es un contexto rico, particularmente en el curso del aprendizaje de la propia lengua materna; al aprender “nuevos lenguajes”, en cualquiera de los sentidos previamente indicados, el aprendiz puede apoyarse en los lenguajes aprendidos previamente, traduciendo o transformando. La riqueza del contexto se puede extender desde el entorno humano y objetivo al literario. Un lenguaje más complejo —más complejo respecto al vocabulario o a la sintaxis o a las reglas de transformación— es preciso que se aprenda en un contexto más rico que un lenguaje más sencillo. Mientras más formal sea un lenguaje, más pobre puede ser el contexto, excepto en el caso en que un gran número de reglas de transformación exija, para ser manejado, una reorientación hacia el contexto fáctico.

16.3. *Lenguajes formales*

Según la riqueza de la estructura y su tipo hay una amplia escala de lenguajes. El lenguaje de los pictogramas tal como lo usa, por ejemplo, los ferrocarriles holandeses en las estaciones, no exhibe ninguna estructura; el lenguaje de las señales de tráfico contiene unos pocos elementos estructurales, por ejemplo las señales de limitación de velocidad al combinar una forma general con un número particular; flexiones, conjunciones, estructura de las frases son dispositivos estructurales de lo que comúnmente se llama lenguaje, y, además, la puntuación en el lenguaje escrito, y entonación y pausas en el lenguaje hablado. En el otro extremo de la escala están los lenguajes totalmente formalizados, de los que trataré más adelante.

Los pictogramas son símbolos cuyo exterior delata lo que significan (o, al menos, que el que los diseña así lo cree). Pero, para comprender el significado de las palabras y las frases se necesita experiencia lingüística; los elementos estructurales del lenguaje hacen posible la comprensión de las expresiones lingüísticas, palabras, oraciones, con las que uno no se había tropezado antes. Por otro lado, la reproducción, producción y creación de expresiones lingüísticas sólo es posible si uno entiende lo que significan los elementos lingüísticos significativos y domina el funcionamiento de los elementos estructurantes. Es cierto, sin embargo, que, respetando los requisitos estructurales, se pueden producir expresiones lingüísticas que no significan nada ni lo pretenden, y esto es tanto más fácil cuanto más estructura posea el lenguaje.

Un lenguaje es puramente formal si sus expresiones se pueden manejar, imitar y comprobar si son correctas (esto es, si exhiben la regularidad requerida) sin prestar atención a su significado, que quizá sea incluso absurdo. Bajo esta etiqueta de lenguaje formal pueden colocarse muchas cosas que no merecen el calificativo de lenguaje, ateniéndose a la terminología usual: por ejemplo el juego del ajedrez con las posiciones posibles como expresiones lingüísticas y las reglas del juego como reglas de transformación, que definen en cada posición pensable cuál es una nueva posición obtenible a partir de la dada mediante un movimiento. Las reglas no dicen qué es un *buen* movimiento en una posición dada, de la misma manera que tampoco las reglas de la gramática dan ninguna información sobre el valor de una expresión lingüística.

Hay mucha teoría sobre los lenguajes formales. Las reglas describen cómo se construyen las palabras y las proposiciones a partir de signos elementales, cómo a partir de una proposición aceptada como verdadera (o aceptada) se derivan proposiciones verdaderas (o aceptadas) nuevas. No es necesario que se asocien conceptos con las proposiciones, la mera forma de los signos, palabras y proposiciones determina lo que se puede hacer con ellos —un trabajo que puede ser ejecutado por un ordenador.

16.4. *Lenguaje aritmético*

Esto recuerda el trabajo aritmético tal como lo hace una calculadora o, si se prefiere, un calculista humano bien entrenado. La aritmética es, hasta cierto punto que depende del que calcula, un lenguaje formal como el descrito. Los problemas tienen que obedecer ciertas reglas.

$$7 + 5 =$$

es admisible, mientras que

$$7 + = 5$$

no lo es. La secuencia contadora es un sistema formal —como lo sería un cuento en que cada "palabra" produjera la siguiente ineluctablemente. Hay reglas formales que dictan cómo traducir un número escrito en vernáculo a un número escrito con cifras, uno "árabe" a uno "romano" y viceversa —al menos para números no demasiado grandes.

Pero aún hay más. Más allá del hecho de que los problemas aritméticos son datos formales cuya forma puede comprobarse, la resolución de tales problemas es un asunto formal, es decir, algo que funciona de acuerdo con unas reglas. Por supuesto que no desde el principio.

$$7 + 5 = 12$$

se adquiere por intuición y acaba grabándose en la memoria hasta tal punto que se convierte en una expresión lingüística automática. Y lo mismo sucede con las tablas. Por supuesto que

$$37 + 25 =$$

es otro asunto. Las unidades y las decenas se suman según reglas adquiridas por intuición o por decreto hasta que esas reglas se graban en la memoria. Entonces, resolver se ha convertido en un proceso puramente formal. Esto se extiende de forma similar a los algoritmos de las operaciones aritméticas. Para calcular rápidamente y sin riesgos se aconseja no atribuir significado alguno a los símbolos y las operaciones. Según reglas fijadas, expresiones bien formadas del lenguaje aritmético se transforman en otras. Se requiere mucho entrenamiento para alcanzar este objetivo. Las reglas no son tan sencillas —en particular para la división continuada y las fracciones— así que la intuición puede ser de gran ayuda para reconstruirlas, distinguirlas y aplicarlas correctamente. El ordenador puede hacerlo sin este tipo de intuición. Por su pequeño número, sus conmutadores funcionan mejor que las asociaciones en el cerebro humano: además, a diferencia del cerebro humano, está diseñado expresamente para ejecutar determinados programas.

El calculista humano, sin embargo, está preparado para tareas que no son las que constituyen la virtud del electrónico, a saber, está preparado para aprovechar las peculiaridades del cálculo particular para calcular hábilmente, y, aunque los ordenadores pueden programarse para ejecutar el mismo tipo de trucos, en general esto se deja de hacer porque es innecesario o un gasto inútil. Según su tamaño y los medios con que están programados, los ordenadores tienen una capacidad restringida y, por mucho que se aumente, siempre se pueden crear situaciones en que las personas usan mejor su capacidad igualmente restringida. Un caso especial lo constituyen los problemas verbales: incluso si se almacenara un diccionario completo en la memoria del ordenador, se podría disfrazar el problema aritmético más simple de manera que el ordenador no pudiera manejarlo. Tan pronto como aparecen las aplicaciones, la aritmética empieza a dejar de ser un lenguaje formal.

Muchos no estarán de acuerdo si interpreto la resolución de tales problemas como transformar la expresión dada en su resultado. Un punto de vista pasado de moda —dirá más de uno. Por supuesto que sé —y lo subrayé antes— que el signo igual se presupone que significa una identidad: a su izquierda y a su derecha hay nombres de la misma cosa. Es lo mismo si digo

$$7 + 5 = 12 \text{ o } 12 = 7 + 5.$$

Sigue siendo lo mismo si digo

$$7 + 5 = 5 + 7 \text{ o } 12 = 12, \text{ etc.}$$

En fin, es un hecho objetivo que 7+5 y 12 son la misma cosa, tanto como era un hecho objetivo para Edgar Allan Poe que el asesino de la calle Morgue era un mono. Lo único que importaba en uno y otro caso era descubrir tal hecho objetivo. Quien no sabe todavía que 7+5 y 12 son la misma cosa, entiende el signo igual de otra manera, a saber, como una orden de escribir al otro lado de

$$7 + 5 =$$

algo que será aceptado, por razones más o menos inteligibles. Y 5+7 no lo será, aunque sea correcto, como tampoco lo será 6+6. Al ser sancionado como lo que se acepta, éste es entonces el significado del signo igual en este tipo de lenguaje aritmético. En este nivel, la aritmética no es todavía un lenguaje puramente formal. Formalmente uno podría escribir 5+7 después del signo igual, pues conduce a una ecuación correcta. En el lenguaje aritmético, el signo igual invita a un procedimiento de transformación, y uno tiene que saber cuál. A la derecha del signo igual está el lugar para el "resultado". ¿Pero qué significa "resultado"? En

$$7 + \bullet = 12$$

el "resultado" es 5, mientras que el número al otro lado del signo igual es 12. El hecho de que unos pocos alumnos puedan comprender esto no tiene que ocultar el hecho aún más importante de que la mayoría no lo comprenden, al menos a la edad en la que se les enseña.

Para muchos alumnos, el resultado de una división es el resto. Me he encontrado con alumnos incluso de séptimo que decían 0 como respuesta a 8÷4. No hay duda de que éste es un terreno en que el lenguaje aritmético tradicional muestra defectos serios.

Intentaré esbozar a grandes rasgos la problemática del lenguaje aritmético.

16.5 — 16.8. LENGUAJE COMO ACCIÓN

16.5. *Realizar tareas — Contestar preguntas*

El aprendiz realiza tareas que otros le han planteado o que se ha planteado él mismo. Le ordeno que cuente, y la secuencia numérica oral o escrita significa realizar la tarea, la actividad de contar se documenta por su resultado lingüístico.

Le propongo que cuente *algo*. La tarea se puede formular como "cuenta las canicas" o "¿cuántas canicas hay aquí?" En el segundo caso, la tarea está implícita, al menos si el niño sabe que para responder a la pregunta tiene que contar. En cualquier caso, la tarea se ejecuta contando. El documento lingüístico puede mostrar variantes: la secuencia contadora producida o el número de canicas contado.

Las operaciones son un asunto similar. Una *tarea*

suma 3 a 4, quítale 4 a 7,

o la pregunta

¿cuánto vale 4+ 3?, ¿cuánto vale 7 −4?,

abreviada a menudo como

$$4 + 3 =, 7 - 4 =,$$

que, cuando se formula oralmente, lleva la entonación interrogativa en la palabra "igual". Uno debería esperar

tras la tarea: la ejecución,

tras la pregunta: la respuesta.

En el primer caso, la orden "suma" o "quítale" debería estimular por supuesto las actividades de sumar y restar. Pero la ejecución de la tarea también puede documentarse por el resultado del problema, y, en general, quien plantea la tarea estará satisfecho con ello, excepto que tenga razones especiales para querer pedir al alumno que ejecute explícitamente la tarea, por ejemplo si el resultado que ha dado es falso o si quisiera comprobar si el alumno no lo ha adivinado meramente, o si por razones teóricas está interesado en los procedimientos del alumno.

Depende del nivel del alumno qué se deriva de la pregunta "4+3", "7–4". Si todavía no ha memorizado los problemas, se ve obligado a darse la orden a sí mismo de sumar 3 a 4 o de quitarle 4 a 7 —con material concreto o mentalmente.

Una niña de seis años que tenía problemas con la aritmética le informó a su padre en un determinado momento del truco que había encontrado para hacer 4+3: seguir contando, 5, 6, 7, a partir de 4. Lo consideraba como un subterfugio, ya que pretendía *saber* el resultado, cuando de hecho lo calculaba.

Todo lo que hemos mostrado con el contar, el contar algo y la aritmética más sencilla se repite una y otra vez en cualquier nivel más elevado y con asuntos más complicados. La tarea que se plantea o que se ejecuta para responder a una pregunta puede estar compuesta de tareas parciales más o menos explícitas; que, a su vez, pueden subdividirse —una división continuada con divisor de más de un dígito es un ejemplo de una tarea extremadamente compleja, con ramificaciones que dependen de las circunstancias. Hoy en día tales tareas se esquematizan mediante diagramas de flujo, por ejemplo para programar ordenadores o personas.

Pero volvamos a nuestro punto de partida: la doble dicotomía

tarea — ejecución

pregunta —respuesta.

Tarea → ejecución es la relación más primitiva. La tarea, en la mayor parte de los casos, vendrá dada por una expresión lingüística, aunque pueda serlo también por un gesto, mientras que la ejecución no necesita contener más elemento lingüístico que la comprensión de la tarea. Sin embargo, si ese elemento lingüístico está presente, puede consistir en la documentación de la ejecución mediante la respuesta a la pregunta que substituye a la tarea.

Pregunta → respuesta puede ser a menudo una reacción directa, por ejemplo la respuesta a la pregunta "¿Cuántos años tienes?", "¿Cuánto es 10 × 10?", "¿Cuántos días tiene una semana?". El que pregunta puede estar queriendo decir algo que es una tarea —"¿Puedo coger 10 tarjetas?"— o puede estar seguro de que la pregunta no autoriza una tarea —por ejemplo en la pregunta aritmética "¿Cuántos años tenías cuando empezó la guerra?" o "¿Cuánto es 37 × 37?". La pregunta puede entenderse como una *pregunta,* que requiere una respuesta obtenida mediante una tarea y su ejecución; también puede suceder que la pregunta se interprete como una *tarea* que hay que ejecutar, pero que el resultado de la tarea no se traduzca en una respuesta —un fenómeno harto conocido que se produce cuando tras la pregunta "¿Cuántas canicas hay?" el niño las cuenta sin formular una respuesta.

16.6. *Conocimiento de hechos y procedimientos*

Ningún área cognitiva de enseñanza tiene menos que ver con el problema de lo que se ha dado en llamar "conocimiento preparado" que las matemáticas. Preguntas sobre un número de teléfono, sobre el camino para ir a un lugar determinado, sobre ortografía, sobre una fecha, sobre el nombre de una planta, sobre el significado de un texto o su traducción, pueden contestarse consultando fuentes de información mucho más a menudo de lo que lo pueden ser preguntas de origen matemático o en las que las matemáticas están involucradas. Por supuesto que incluso en esos casos puede ser todo un arte saber dónde buscar, qué fuentes de información consultar, cómo usar los medios de información, qué hacer con la información recogida y cómo saber si uno puede confiar en ella. Por otro lado, en matemáticas tampoco puede uno prescindir del "conocimiento preparado" o del conocimiento tomado de fuentes de información —las sumas básicas, las tablas de multiplicar, fórmulas, tablas de todo tipo de funciones y soluciones de ordenador. Pero, en cuanto conocimiento preparado, es fácil de contrastar, y, por lo que respecta a las fuentes de información, su fiabilidad y su estandarización son tan fuertes que consultarlas representa un trabajo menor en el proceso de resolución del problema.

De hecho, aunque en matemáticas se recurra a conocimientos preparados, lo que realmente importa son los procedimientos de solución. Aunque sea difícil estimar cosas de este tipo, yo diría que fuera de las matemáticas y sus aplicaciones el conocimiento preparado de hechos es de lejos mucho más importante que el conocimiento de procedimientos, mientras que en matemáticas los procedimientos parecen relativamente sencillos, y uno se siente inclinado naturalmente a subestimar su longitud y profundidad.

16.7. *Los procedimientos como transformaciones lingüísticas*

En la sección 16.3 ya discutimos una peculiaridad de las matemáticas cuando se la compara con cualquier otra materia. Las matemáticas pueden ser formuladas de forma más adecuada que cualquier otra disciplina, incluso desde el punto de vista lingüístico. De ningún tipo de objetos mentales o físicos se puede dar una descripción tan precisa y estructuralmente sencilla como de los objetos matemáticos, descripción que además no tiene en cuenta la diversidad de los idiomas; en ningún otro lugar se pueden reproducir lingüísticamente de forma tan adecuada las operaciones con los objetos como se puede hacer con las operaciones con los números. Incluso los objetos mentales de la geometría pueden ser descritos con toda la precisión deseada mediante los términos convencionales que se usan para indicarlos en los distintos idiomas, aunque no sea estructuralmente tan sencillo. Ésa es una de las razones por las que las matemáticas se identifican muy a menudo con su expresión lingüística. La consecuencia de ello puede ser tanto comprensión adecuada como equivocada de lo que son las matemáticas, tanto sensación de poder como de desamparo.

Si un niño ha entendido la aritmética elemental, disfruta de dominarla; la soltura al contestar preguntas invita el deseo de que se le planteen. Pronto olvida cuánto le ha costado adquirir esa habilidad, con cuántas dificultades. En el interín, la materia se ha ampliado: se ha atesorado más experiencia aún sobre las reglas de transformación que convierten preguntas en tareas, las reglas de transformación mediante las que las tareas se descomponen en tareas parciales que han de ser ejecutadas para acabar contestando a las preguntas. Los datos son de tipo lingüístico y, gradualmente, el conjunto del procedimiento de resolución alcanza el carácter de una transformación lingüística o una secuencia de transformaciones lingüísticas, que son en su mayor parte más sencillas y en todo caso más formales y regulares que las reglas de transformación del lenguaje vernáculo.

16.8. *Formalizar como un medio y como un objetivo*

La facilidad para formalizar es un rasgo impresionante de las matemáticas, aunque a la vez puede conducir por vías erradas: es una virtud que, como sucede con otras virtudes, puede tornarse vicio. La facilidad para formalizar nos da una sensación de poder que difícilmente puede ser estimado en demasía y que ciertamente no puede ser dejado de lado impunemente, aunque es una sensación que puede volverse en contra de las matemáticas. Para la mayoría de los que han tenido contacto con las matemáticas, éstas consisten en dominar reglas formales (o, más bien, no ser capaz de dominarlas). ¿Qué hacer con ello? ¿Desistir de enseñar ese dominio? Ésa sería una solución absurda.

La regla "para multiplicar por 100, añadir dos ceros" (que ha de ser modificada tan pronto intervengan los decimales), la regla para la multiplicación de decimales sobre "tantos lugares después de la coma" (que compite con la regla para sumar decimales), el mecanismo de la división continuada con todos sus entresijos, ¿acaso no debería uno estar contento si funcionaran bien? Cualquiera que fuera capaz de aprenderlas y aplicarlas correctamente, sería capaz, con toda certeza, de descubrir de dónde proceden esas reglas y cómo pueden justificarse. Seamos cautos: quizá sería capaz de ello. Aún más, la más ligera idea de que tal pregunta admita una respuesta racional o, simplemente, la requiera está ausente de la mente de la gran mayoría de los que dominan tales formalismos. Incluso los que estudian para ser profesores, de los que se espera que enseñen en el futuro tales formalismos, no comprenden a menudo cuál es el objetivo de calentarse la cabeza sobre formalismos que uno domina perfectamente (o que eso cree). Después de una división continuada, ejecutada con todo lujo de detalles, la pregunta "¿Qué es una división?" se archiva como no pertinente. La explicación usual es que ellos han aprendido los formalismos como meros trucos y eso es todo lo que saben de ellos. ¿Pero es realmente cierto que todo aquel que reacciona así ha aprendido los formalismos como meros trucos?

Ésa es un pregunta retórica. Yo he observado, no sólo en otras personas sino en mí mismo, que las fuentes de la intuición pueden embozarse por automatismos. Uno acaba dominando una actividad con tal perfección que las preguntas cómo y por qué ya no se plantean de nuevo, ya no pueden plantearse de nuevo, e, incluso, ya no se entiende que sean preguntas pertinentes y significativas.

Éste parece que sea el curso natural de las cosas, y no obstante uno querría cambiarlo de alguna manera. Es un problema que no sólo concierne a la aritmética. Alguien dijo en una ocasión: "Cuando se comienza a calcular, se acaba de pensar". No, no tiene por qué ser así, excepto si se bloquea el camino de vuelta a la intuición.

El error didáctico reside en el principio de aprender por intuición al comienzo y luego pasar irrevocablemente a los automatismos. Una variante es: de vuelta al comienzo por intuición en cuanto algo vaya mal. Esta variante es mejor, aunque no deja de ser insatisfactoria. Incluso cuando el formalismo funciona razonablemente, el profesor o quien diseña la instrucción debería valerse de cualquier oportunidad para regresar a la fuente de la intuición. Por ejemplo, tales oportunidades existen en cualquier nivel. Por lo que respecta a los algoritmos de las operaciones aritméticas, cuando se discuten los procedimientos para medir, o (en álgebra) cuando se tratan las potencias, o cuando se enseña la técnica de los paréntesis, o cuando se formulan leyes aritméticas: escribir números y operaciones en la forma

$$(a_m 10^m+\ldots+a_0)+(b_n 10^n+\ldots+b_0),$$

$(a_m 10^m + \ldots + a_0) \cdot (b_n 10^n + \ldots + b_0)$.

No hay ninguna necesidad de pasar a otros sistemas de numeración para restablecer la intuición anterior al formalismo. Otros sistemas de numeración son creaciones *ad hoc*, que pueden ser vistas por los niños como juegos sin pertinencia o callejones sin salida antes que como algo que pretende llevarlos de vuelta a las fuentes de la intuición.

La necesidad didáctica, que he subrayado, es una consecuencia del grado elevado de formalización del lenguaje de la aritmética. Se resiente con la misma fuerza en la fenomenología didáctica de otros lenguajes formalizados. En el uso corriente de lenguajes menos formalizados, como el lenguaje materno y los idiomas extranjeros, la forma está ligada tan fuertemente al contenido que se puede comprobar siempre mediante el contenido; en general sería incluso imposible manejar la forma lingüística sin el apoyo del contenido.

Aquí no tomo en consideración los casos de autonomía de la forma lingüística, tal como se cultiva en la poesía y la filosofía como fenómenos de un uso del lenguaje que no pretende una comunicación carente de ambigüedades, o que no es apropiado para ello. Excluyo también como un objetivo los casos de formalización en que el mismo lenguaje se tornó un objeto de estudio. Intencionalmente me restrinjo a los casos didácticos en que aprender a formalizar y aprender formalismos es una necesidad didáctica, aunque una necesidad entre otras y en su beneficio.

Un rasgo característico de las matemáticas es una línea de formalización progresiva. Reglas de transformación que han sido adquiridas por intuición —o no— se generalizan para resolver problemas con más eficacia al usar el aparato adquirido; y en virtud de esta actividad se forman reglas de transformación nuevas y más complejas que se generalizan de nuevo, y este proceso se continúa indefinidamente: una formalización progresiva que conduce a atajos cada vez más radicales.

16.9 — 16.15. CARACTERÍSTICAS DEL LENGUAJE DE LAS MATEMÁTICAS

16.9. *Construcción algorítmica de los nombres propios*

La fuente más importante de formalización progresiva es la construcción algorítmica de vocabulario, el primer y principal ejemplo de ello es la construcción de los nombres propios de los números naturales.

Los rasgos algorítmicos no son inusuales en el vocabulario y en la sintaxis de cualquier lenguaje, aunque son ocasionales y asistemáticos: plurales, tiempos verbales, comparativos, composición de palabras, esquemas de oraciones. Ninguno de ellos se acerca ni remotamente a la estructura sistemática de los *nombres de los números*. Algunos restos históricos de irregularidad —por lo que respecta sobre todo a los números pequeños— han sido totalmente eliminados en el lenguaje *digital* del sistema decimal. Si ya los sistemas anteriores a los posicionales tenían una regularidad decente, en un sistema posicional se puede representar todos los números naturales según reglas algorítmicas estrictas, partiendo de un pequeño acopio de símbolos digitales. Esta tendencia continúa cuando se extiende el concepto de número: la sinonimia de las fracciones está ligada a reglas de transformación rígidas.

De la misma forma, en los nombres de tareas o enunciados tales como "suma tres a cuatro" (en la forma 4+3) o "cuatro es mayor que tres" (4>3) la construcción algorítmica domina, aunque pueda haber una variedad de nombres para la misma tarea o afirmación.

Según lo complejos que sean los objetos, las tareas o los enunciados, los nombres que se les asignan necesitan una cierta estructura, que discutiremos a continuación.

16.10. *Reglas de puntuación*

Los lenguajes naturales han desarrollado un gran número de dispositivos estructurantes tales como preposiciones, conjunciones, afijos, sufijos, subordinación de oraciones, etc. Además, el lenguaje *oral* usa para estructurar dispositivos tales como pausa y entonación, mientras que en la versión escrita la estructura se indica de forma más o menos adecuada por la puntuación. El elemento estructurante más explícito en el lenguaje de las matemáticas son los varios tipos de paréntesis. Además hay gran cantidad de estructura implícita: al ejecutar una tarea o leer un enunciado unas operaciones tienen preferencia sobre otras —la multiplicación antes que la adición.

En el lenguaje vernáculo, habitualmente se puede prescindir de la puntuación explícita. A menudo, son criterios de contenido más que criterios formales los que deciden la estructura. En la oración inglesa[1]

---

[1]He dejado estos ejemplos sin traducir porque el inglés permite que se produzcan más ambigüedades de este estilo que el castellano por la facilidad que tiene para que una palabra determine a otra por simple yuxtaposición y por la ausencia de marcas de género y número en los determinantes. Los dos primeros ejemplos tienen su equivalente castellano en "Había niños y mujeres de edad en el autobús" y "Había hombres y mujeres de edad en el autobús", en las que se produce el mismo fenómeno que Freudenthal señala. Ahora bien, en los dos ejemplos siguientes, la presencia de marcas de género y número en los determinantes en castellano hace que las frases pierdan la anbigüedad que tienen las inglesas. Así, en "we visited Dutch towns and villages" el determinante "Dutch" no lleva marcas de género y número, pero en castellano hay que ponerlas: si se opta por "visitamos pueblos y ciudades holandesas", el femenino de "holandesas" indica que no afecta a "pueblos", ya que esta palabra es masculina; si se opta por "visitamos pueblos y ciudades holandeses", está claro que no afecta sólo a "ciudades", ya que "holandeses" es masculino plural y engloba, por tanto, la palabra femenina "ciudades" y la masculina "pueblos". Por su parte, en la traducción castellana de "we got lessons in Dutch history and mathematics", "recibimos clases de matemáticas e historia holandesa", no hace falta recurrir a la semántica para saber que "holandesa" sólo afecta a "historia" y no a

There were aged ladies and children in the bus

la palabra 'aged' se refiere exclusivamente a las mujeres, mientras que en la oración inglesa casi equivalente formalmente

There were aged ladies and gentlemen in the bus

la palabra 'aged' muy probablemente también se refiere a los hombres. (El lenguaje oral es más complejo que el escrito; probablemente las dos oraciones se pronuncian con melodías diferentes.) En las oraciones inglesas

We visited Dutch towns and villages

y

We got lessons in Dutch history and mathematics,

la palabra 'Dutch' abarca dominios distintos. Un ejemplo inglés harto conocido es

pretty little girls schools

que, según donde se coloquen los paréntesis —que faltan—, puede tener diecisiete significados distintos[2].

En la práctica de las matemáticas se es más cuidadoso.

5 veces … 3 más 7

ha de distinguirse de

5 veces 3 … más 7

y esta distinción se formaliza colocando en el primer caso el 3 más 7 entre paréntesis. Debería hacer lo mismo en el segundo caso, si no fuera porque hay una convención que dice que la multiplicación tiene preferencia sobre la adición y la substracción. Ya he señalado que el lenguaje oral es más complejo que el escrito. En los dos últimos ejemplos he intentado reproducir pausas y entonaciones mediante puntos suspensivos. En el lenguaje escrito no existen dispositivos como ésos, así que tenemos que basarnos en la comprensión del

"matemáticas", ya que, a diferencia de la palabra inglesa "Dutch", la castellana lleva marca de número, con lo que la ambigüedad se elimina en el nivel puramente sintáctico.

[2]Es imposible encontrar una versión castellana que tenga también tantos posibles significados. Una traducción posible al castellano es "escuelas de niñas pequeñas bonitas", que también admite un buen número de significados según "pequeñas" determine a "escuelas" o "niñas"; "bonitas", a "escuelas" o "niñas", y sus combinaciones. Sin embargo, en inglés también cabe la interpretación en que "pretty" determina a "little" —lo que puede traducirse al castellano por "bastante pequeñas", pero no manteniendo la palabra "bonitas" como traducción de "pretty".

contenido para entender la estructura sintáctica. Yo entiendo lo que las palabras 'aged' y 'Dutch' incluyen a partir del contenido que ha de ser significativo, en vez de a partir de la estructura de la expresión lingüística.

Por el contrario, en el lenguaje de las matemáticas el significado no es un criterio fiable. De hecho,

5 veces … 3 más 7

es tan significativo como

5 veces 3 … más 7;

de manera que ha de estar perfectamente claro lo que se quiere decir para que la expresión pueda usarse. Esto se consigue mediante reglas de puntuación estrictas, indicaciones estrictas de cómo han de colocarse los paréntesis en una expresión y de cómo ha de leerse una expresión. Si se adoptaran reglas como las matemáticas para el lenguaje vernáculo, se escribiría

(aged ladies) and children,

aged (ladies and gentlemen)[3].

Sin embargo, esto no sucede, lo que constituye una de las diferencias principales entre el lenguaje vernáculo y el formalizado.

He señalado que el lenguaje de las matemáticas posee más dispositivos para estructurar además de los paréntesis, en particular la preferencia de algunas operaciones sobre otras cuando una tarea ha de ejecutarse o ha de leerse un enunciado. También éstos son dispositivos formales para estructurar, en contraposición con los dispositivos del lenguaje vernáculo que están basados en el contenido. No explico los detalles, ya que lo he hecho en otro lugar. Lo que aquí importa es proyectar las diferencias entre el lenguaje vernáculo y el de las matemáticas.

Sin embargo, he de señalar que el sistema de reglas estructurales del lenguaje de las matemáticas no es tan sencillo como se podría creer a primera vista. Las dificultades que experimentan los que aprenden el lenguaje de las matemáticas se pueden explicar al menos en parte por la falta de visión de los autores de libros de texto y de los profesores de la complejidad del asunto. En la medida en que los que son responsables de la instrucción de esta materia no son suficientemente conscientes de estos detalles, les falta la intuición de cuáles puedan ser las fuentes posibles de errores.

---

[3]O, en la traducción castellana que he dado en la nota 1, "niños y (mujeres de edad)" y "(hombres y mujeres) de edad", respectivamente.

Es un hecho notable que los niños aprenden su lengua materna de gente que nunca ha pensado sobre la estructura de esa lengua; no es necesario un análisis teórico de la lengua materna en el intercambio con los niños que han de aprender su lengua materna; es incluso pensable que un adulto no tenga conciencia de rasgos tales como, por ejemplo, la regularidad o irregularidad de la flexión verbal hasta que oye a los niños cometer errores; que un adulto no se haya sentido perplejo ante polaridades tales como "ayer—mañana" hasta que observe la falta de seguridad de los niños ante ese par.

El caso del lenguaje de las matemáticas se parece algo más al del aprendizaje de los idiomas extranjeros: para guiar al aprendiz, el profesor debe dominar la materia más conscientemente de lo que los padres dominan la lengua materna que han de transmitir —esto está claro sin necesidad de ejemplos.

Empero, esto no significa que el sistema en extremo complejo de reglas de la estructura lingüística de las matemáticas haya de hacérsele consciente al aprendiz. En la enseñanza remedial puede llegar a ser necesario, en concreto si hay que eliminar costumbres profundamente arraigadas. En principio, las reglas para aplicar dispositivos estructurantes (lo mismo que las reglas de transformación) deberían aprenderse *usándolas* —ser consciente se requiere para combatir *usos errados.*

Aunque no repita mi análisis fenomenológico previo de los dispositivos estructurantes en el lenguaje matemático, no deseo que se descuide. Por el contrario, recomendaría con premura a los autores de libros de texto que prestaran atención a ello y que se percataran de que aprender este elemento lingüístico requiere una didáctica más consciente y así lo mostraran.

16.11. *Variables en el lenguaje vernáculo*

El paso más largo de la aritmética hacia el álgebra (de la instrucción primaria a la secundaria en matemáticas) es calcular con letras en vez de con números; "cálculo literal" solía ser un término familiar. Plantearlo de esta manera parece una fenomenología superficial, pero en la fenomenología la profundidad comienza a menudo en la superficie.

Cómo entraron las letras en las matemáticas, cómo la gente comenzó a calcular con letras sólo conscientes a medias de lo que habían hecho, cómo una conciencia creciente influyó en la didáctica de las matemáticas en este siglo, cómo esos logros preciosos han sido hechos añicos por el furor conjuntista de las llamadas "matemáticas modernas" y lo que hace falta para eliminar la basura —todo esto lo dije en el pasado, aunque no lo hiciera en un relato conexo, sino de forma dispersa a lo largo de varias ocasiones y según el detalle que quería resaltar. De modo que he de comenzar de nuevo.

En los apartados anteriores, he usado el término "nombre" en un sentido amplio: he atribuido nombres no sólo a objetos sino también a acciones, tareas, enunciados, incluso aunque tales nombres pudieran tener la forma lingüística de oraciones. En la lingüística tradicional existe el término "nombre" y los nombres se dividen en nombres propios y nombres comunes (apelativos). Es difícil trazar una línea divisoria precisa entre ambos tipos. "Juan" y "papá" pueden ser nombres propios en una familia, pero es fácil pensar en situaciones en que se usan como apelativos. "Mi Peugeot" y "la mujer al otro lado de la calle" pueden ser nombres propios, que, sin embargo, presentan una estructura más compleja que los nombres simples. "2+2=4" es el nombre de un cierto enunciado, pero en el contexto "es tan cierto como que dos y dos son cuatro" parece más bien como el "Fulano" en "Fulano, Mengano y Zutano".

Día tras día hemos de comunicar a propósito de objetos individuales —físicos y mentales— y sobre procesos, actos, deseos, que están objetivados, y, para ello, necesitamos nombres —nombres que, de hecho, aunque no lo parezcan, son nombres propios. ¿Cómo podemos inventar una y otra vez nombres propios nuevos para tal increíble variedad de objetos? La respuesta es: al manipular con destreza nombres comunes, ligando nombres comunes en situaciones cambiantes con individuos cambiantes. Para tales nombres se tiene en matemáticas el término "variable" y para fijar una variable en una situación dada se tiene el término "ligar".

Según un relato antiguo, la primera tarea de Adán en el paraíso fue dar nombre a las criaturas. Él mismo había recibido el nombre de "Adán", es decir "hombre", y a partir de él su descendencia se llamaría Adán, es decir, hombre. Él dio nombre a todos los animales que pasaron ante sus ojos, y aquél al que había llamado león transmitió ese nombre a sus descendientes. Y así "león" llegó a ser un nombre con el que podemos nombrar a cada león concreto; para distinguir unos leones de otros, se puede hablar de este león o de ese león, del león joven o el león viejo, del león del zoo de Amsterdam o del león del zoo de Londres. No sería factible inventar nombres propios absolutamente nuevos para cada ratón, silla o bicicleta; estamos acostumbrados a usar nombres ambiguos o, más bien, polivalentes —un mismo nombre para varios objetos. Cuando mi hija estaba en la edad en que los niños juegan el juego de "esto qué quiere decir" y le pregunté qué quiere decir "cosa" contestó que cosa es si quieres decir algo y no sabes cuál es su nombre. "Cosa" es un nombre que encaja con una variedad increíble de objetos: sillas, bicicletas, árboles, etc. Palabras como "aquí" y "ahora" también son nombres polivalentes: "aquí", como nombre del lugar en que uno dice "aquí"; "ahora", por el momento en que uno dice "ahora". En

la cigarra es un insecto

"cigarra" es un nombre común, el nombre de una especie, pero en cada cigarra es un insecto

se puede mantener que "cigarra" es un nombre polivalente que se acomoda a cada cigarra particular. En la fábula de La Fontaine *La cigarra y la hormiga*, "cigarra" es el nombre, carente de ambigüedades, de un animal concreto: el de la fábula. En

el ratón es un roedor

"ratón" es el nombre de una especie, en

el ratón está en la ratonera,

pronunciada en una situación especial, "ratón" puede querer decir un ratón particular que se supone que se conoce y está bien definido por esas circunstancias especiales. En

tenemos de nuevo un ratón

o

tenemos ratones,

el nombre "ratón" se da a un individuo o a unos cuantos de los que lo único que se sabe es que existen.

Para que funcionen como nombres propios, hay que ligar las variables. Las variables se pueden ligar con independencia de cualquier contexto mediante dispositivos lógicos lingüísticos, o bien dependiendo de un contexto. Los instrumentos lógicos son

el cuantificador universal

un ratón es un roedor — para todo x, si x es un ratón, es un roedor,

el cuantificador existencial

tenemos un ratón — hay un x tal que x es un ratón y nosotros tenemos x,

el artículo

nuestro ratón; el ratón que tenemos —el x tal que x es un ratón y nosotros tenemos x,

el formador de conjuntos

nuestros ratones — el conjunto de los x tales que x es un ratón y nosotros tenemos x,

el formador de funciones o especies

la especie ratón — la propiedad de ser un ratón,

el interrogativo

¿qué ratón? — ¿qué x tal que x es un ratón?

Dispositivos para ligar que dependen del contexto son

los demostrativos

este ratón, ese ratón, el ratón de la ratonera, el ratón que oigo roer.

Muchas variables asumen otra forma según cuál sea la manera de ligar. Por ejemplo, la variable de lugar

universal	:	en cualquier lugar,
existencial	:	en un lugar,
artículo	:	el lugar donde,
formador de conjuntos	:	los lugares donde,
formador de funciones	:	el lugar de,
interrogativo	:	dónde,
demostrativo	:	aquí, ahí, allí.

O la variable de tiempo

universal	:	siempre,
existencial	:	en algún tiempo,
artículo	:	el momento en que,
formador de conjuntos	:	el tiempo en que,
formador de funciones	:	el tiempo de,
interrogativo	:	cuándo,

demostrativo	:	ahora, hoy, ayer, mañana.

De forma similar, la variable que indica personas

universal	:	todos,
existencial	:	alguien,
artículo	:	el que,
formador de conjuntos	:	aquellos que,
formador de funciones	:	ser una persona,
interrogativo	:	quién,
demostrativo	:	yo, tú, éste, aquél.

16.12. *Variables en el lenguaje de las matemáticas*

Vale la pena tener en mente este abigarrado uso de variables en el lenguaje vernáculo para confrontarlo con el uso de las variables en matemáticas que está más reglado pero al mismo tiempo también más descolorido.

La variable "ratón" se puede usar sólo para ratones; una variable como "aquí", sólo para lugares; una variable como "yo", sólo para personas: en cierta medida esas variables ya están ligadas por el contenido. En matemáticas los símbolos para las variables habitualmente son letras, combinadas a veces unas con otras o con números ($A_1, A_2, \ldots, A_n$). Tales símbolos no tienen carga alguna y las variables que se indican con ellas no están restringidas por lo que respecta a su dominio, o sólo lo están *ad hoc*.

El uso de letras para las variables proviene de la geometría griega. En un período de comunicación exclusivamente oral del conocimiento es bastante probable que se razonara a propósito de una figura hablando de este punto o ese punto, es decir, mediante deícticos. Para la comunicación escrita, se requirió una forma de descripción más práctica: en una figura, se numeraban los puntos sometidos a consideración con las letras del alfabeto, que en los textos numéricos se usaban efectivamente como números. La terminología original "el punto junto a A" —esto es, al lado de A— se abrevió más adelante a "el punto A". De forma similar se nombraron las líneas, triángulos, cuadriláteros, etc. mediante letras o combinaciones de letras, que a su vez indicaban puntos.

Aquí estamos en el umbral entre la descripción demostrativa y el uso de auténticas variables. De hecho, las variables están demostrativamente ligadas por la figura a puntos materiales en el material dibujado. Por otro lado, los puntos y las figuras son paradigmas arbitrarios. Todos los puntos son lo mismo, enunciados hechos en "un triángulo" significan para "todos los triángulos", de cualquier manera que estén dibujados o indicados. A causa de este hecho parece que las variables estén ligadas mediante instrumentos lógicos en vez de demostrativos. Efectivamente, la figura puede incluso olvidarse.

> Si ABC es un triángulo, las mediatrices de AB, BC, CA pasan por un punto

es un enunciado de ese tipo; en él, A, B, C pueden considerarse como variables (de puntos) ligadas por el cuantificador universal.

En geometría el uso de letras para las variables no condujo al nacimiento de un lenguaje algorítmico: excepto la indicación de segmentos mediante pares de puntos extremos, apenas hay vocabulario algorítmico, ni hay tampoco ninguna formalización de las operaciones, formalización que, en el mejor de los casos, se presenta en el lenguaje vernáculo que actúa en esta ocasión como metalenguaje.

En álgebra las variable literales son aún más recientes. Las ecuaciones lineales y cuadráticas y los métodos generales de resolución son tan antiguos como los textos cuneiformes más antiguos, pero siempre planteados en paradigmas numéricos. En la transferencia oral de conocimientos, las incógnitas pueden haberse nombrado de manera informal —chisme— y eso sucede de hecho en el desarrollo posterior. En griego, las letras también significaban números, hecho que puede haber impedido a los matemáticos griegos que las usaran también para las incógnitas. Había, empero, otro impedimento para transferir el uso geométrico de las letras para variables directamente al álgebra: mientras que todos los puntos son "el mismo", los números tienen una individualidad perfectamente distinguida. Finalmente, en el período helenístico, en la obra de Diofanto, hay al menos un símbolo para la incógnita, una abreviatura de arithmos (número). En la edad media, la palabra cosa (del italiano) llegó a ser el nombre de la incógnita — los "cosistas" desarrollaron todo un simbolismo para las potencias de la incógnita.

El paso decisivo hacia una notación algebraica más útil lo dio Vieta (alrededor de 1600), que indicó también las magnitudes *indeterminadas*, las variables en las expresiones algebraicas, mediante letras. Esa notación es el auténtico comienzo del desarrollo del lenguaje algebraico, que cada vez se separa más del lenguaje vernáculo. Las letras se usan inicialmente para indicar números arbitrarios, pero pronto también funciones arbitrarias. Hoy en día, usamos letras para todo tipo de objetos matemáticos —conjuntos, relaciones, proposiciones, espacios, métricas y todo tipo de estructuras— y, si se siente esa necesidad, las cogemos de todo tipo de alfabetos.

Algo debería tenerse presente: las letras en matemáticas significan algo, como símbolos representan algo. En otros lugares he señalado y analizado la equivocación demostrada por la llamada "matemática moderna" a este respecto: letras que no significan nada o que significan las propias letras, y las matemáticas concebidas como un juego con símbolos carente de significado. Es cierto que esto último puede elaborarse de forma consecuente, pero con el objetivo de hacer fundamentos de las matemáticas más que matemáticas propiamente dichas. En ese caso, las matemáticas significativas se toman como un objeto de estudio, se pone su significado como si estuviera entre paréntesis y se presta atención exclusivamente a su forma —el formalismo. Ahora bien, eso se hace en provecho de las matemáticas significativas. Para algo tan temprano como el lenguaje aritmético ya he discutido tanto la utilidad como el peligro didáctico de este procedimiento, si hay que desarrollar una actitud matemática. No cabe duda de que en el caso del lenguaje del álgebra la utilidad y el peligro de una formalización rígida son igualmente grandes o aún mayores. Una comprensión errada de lo que son las matemáticas se genera a menudo por los cálculos algebraicos ciegos con letras. La llamada "matemática moderna" ha contribuido a difundir esta concepción errada incluso entre los profesores.

16.13. *El signo igual*

Si en la sección 16.4 subrayé el carácter de transformación del lenguaje de la aritmética, me siento obligado ahora a atenuarlo:

$$4 + 3 =$$

se lee primordialmente como una *tarea* o una *pregunta*, dije. El signo igual tiene el aspecto de ser asimétrico. Un lado está dado y el otro ha de ser rellenado. El problema

$$4 + \bullet = 7$$

encaja menos en ese marco —razón por la que los aprendices se sienten confusos. Si los números se reemplazan por letras, la confusión aún es mayor. ¿Qué podría significar en

$$a + b =$$

el signo igual que se ha puesto? Bueno, puede tener sentido en un ejercicio como

¿cuánto vale $a + b$ si $a = 4$ y $b = 3$?,

esto es, si hay números para substituir a y b por ellos. En contraposición con

$$4 + 3$$

no se puede considerar

$$a + b$$

como algo que calcular. Es más bien la expresión algebraica de un número cuyo valor depende de los de a y b. La expresión $a + b$ no sugiere una tarea o una pregunta, sino que nombra un número que depende de a y b. La notación de las fracciones fue el punto en que este giro tuvo lugar en la historia. En

$$\frac{3}{4}$$

no hay nada que calcular. Como tal es un número nuevo representado de forma convencional mediante los símbolos numéricos conocidos previamente 3 y 4. Por supuesto que la expresión $a + b$ puede aparecer con un signo igual tras ella, como en

$$a + b = c$$

$$a + b = b + a,$$

en el primer caso con el fin de introducir un nuevo símbolo para $a + b$ o con el fin de explicar c por medio de a y b, o con el fin de exigir que a, b y c asuman sólo valores que conduzcan a una igualdad; y, en el segundo caso, para enunciar algo que es verdadero para todo a y b.

A causa de este giro, el carácter del signo igual de la instrucción aritmética ha cambiado: se ha simetrizado. La intención es que a la izquierda y a la derecha del signo igual aparezca la misma cosa, y esa intención se puede realizar como un hecho o como una petición.

El "es" simétrico apenas representa ningún papel en el lenguaje vernáculo, ni siquiera en

Amsterdam es la capital de Holanda,

que delata una intención distinta que

La capital de Holanda es Amsterdam,

como si fueran respuestas a preguntas distintas, no muy diferentes de las preguntas contestadas por la pareja

$$4 + 3 = \bullet$$

$$7 = 4 + \bullet$$

Aún está mucho menos relacionada la igualdad con el "es" en

Sócrates es un hombre,

o con su plural en

los monos son mamíferos:

en el primer caso más bien recuerda al símbolo $\in$; en el segundo caso, al símbolo $\subset$. En inglés aún es otra cosa distinta el "is" en

the apple is ripe[4]

concretamente una parte del predicado *being ripe*[5], y lo mismo sucede con el "is" en

there is time left[6]

como parte del cuantificador lógico *there being*[7].

La aritmética tradicional usaba signos de igualdad en divisiones con resto como

$$16 \div 3 = 5\ r\ 1.$$

Si éste fuera el signo de igualdad simétrico, implicaría

$$16 \div 3 = 21 \div 4.$$

Los didactas alemanes han prestado mucha atención a la problemática relacionada con esta notación*. ¿Vale la pena la molestia? Sí y no. Vale la pena que se discuta seriamente, pero no vale la pena que se ponga cabeza abajo la instrucción aritmética por ello.

Confesé antes que los matemáticos se han puesto de acuerdo en usar el signo igual de forma que las cosas a su izquierda y a su derecha sean lo mismo, aunque estén indicadas por nombres distintos. $4 + 3 = 7$ está permitido porque con mayor o menor dificultad se puede verificar que $4 + 3$ y 7 son efectivamente

---

[4]He dejado este ejemplo en inglés, porque, al existir en castellano el verbo "estar" que cubre parte del campo semántico del inglés "to be", en la traducción más probable aquí —"la manzana está madura"— no aparece el verbo "ser". Para tener un ejemplo en castellano similar al que Freudenthal ha presentado en inglés, basta con que el adjetivo "maduro" se substituya por otro del que no interese señalar que es un atributo temporal de la manzana, y que, por tanto, no se una con "manzana" con el verbo "estar", sino con el verbo "ser": por ejemplo, "la manzana es grande".

[5]En castellano, "estar maduro".

[6]"Aún hay tiempo": en castellano no aparece aquí el verbo ser.

[7]En castellano, el defectivo "hay", "había", "hubo".

* Ver el excelente artículo de H. Winter, 'Zur Division mit Rest' en *Der Mathematikunterricht*, 4/78, pp. 38-65.

la misma cosa. $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ está permitido porque por definición las dos fracciones significan el mismo número racional. En realidad, en matemáticas la igualdad es a menudo una cuestión de definición. En un cierto momento puede suceder que un conjunto de cosas que hasta entonces se habían considerado como diferentes sería mejor que se consideraran como iguales, y, para considerarlas así con lo que en matemáticas es buena conciencia, se introduce una nueva cosa, la clase de las cosas que hay que considerar como iguales y uno se aprovecha de los nombres de estas cosas individuales, como $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{6}$, …, como varios nombres de la nueva cosa, la clase —un abuso de lenguaje conveniente y, por consiguiente, permitido.

Pero olvidemos por un momento estas matemáticas complejas. De hecho, incluso los matemáticos juegan un tira y afloja con sus reglas para el signo igual: π = 3’14159… —¿qué significa el término de la derecha? Pero además π = 3’1415926… —¿significa esto que 3’1415926… = 3’14159…? O g = 9’81 ± 0’003 ms^{-2}: ¿y esto qué? Bueno, se puede objetar que esto es matemáticas aplicadas. Pero la teoría de números es matemáticas puras, y en ella sin embargo uno escribe con toda la sangre fría 16 ≡ 1 mód 3. (Si la teoría de números se hubiera inventado más recientemente se escribiría 16 ~ 1 mód 3.) Estoy de acuerdo en que éste no es el signo igual, es una especie de símbolo de equivalencia. ¿Pero qué equivalencia? Eso sólo se dice después (como se hace con los puntos suspensivos tras 3’14159 y el ±0’003 tras 9’81, que dicen después qué tipo de signo igual es, cuál es su significado).

Si se decide colocar un signo igual entre dos expresiones, se debe saber en primer lugar qué tipo de cosas se tiene en mente nombrar con ellas. ¿Qué tipo de cosa es 16 ÷ 3 en la división con resto? En las matemáticas superiores unos dos puntos de ese tipo no son habituales. (16:3 puede significar una razón, pero eso no es lo que se quiere decir aquí.) ¿Qué tipo de cosa es 16 ÷ 3? Por supuesto que no es un número natural. Es un par ordenado, que consiste en el “cociente” 5 y el “resto” 1. O si se prefiere usar una mayor complejidad matemática:

$$a \div b = \left[\left[\frac{a}{b}\right], a - b\left[\frac{a}{b}\right] \text{mód}\, b\right]$$

un par que consiste en la parte entera $\left[\frac{a}{b}\right]$ y una clase residual módulo b, indicada en su forma “reducida”.

Ésta es una interpretación culta. De hecho en la instrucción aritmética no nos encontramos con 16 ÷ 3 sino con

$$16 \div 3 =$$

una tarea, como lo es

$$4 + 3 =.$$

Ya desde la aritmética elemental es necesario, además del significado de

$$4 + 3 =$$

como tarea, abrir camino para el significado de

$$4 + 3 = 7$$

en el sentido de que 4 + 3 es otra expresión para 7. De hecho, problemas como

$$4 + \bullet = 7$$

son la primera oportunidad para ello. ¿No sería razonable ceñirse a esta interpretación desde el principio? La aritmética tradicional posee dispositivos simbólicos para formular tareas mediante puntos. Este uso puede extenderse sistemáticamente incluso al tipo

$$4 + 3 =.$$

Los libros de texto modernos prefieren los cuadrados,

$$4 + 3 = \square$$

$$4 + \square = 7.$$

Hay más dispositivos simbólicos para formular tareas, por ejemplo en el lenguaje de las flechas

$$4 \xrightarrow{+3} \bullet,$$

$$\bullet \xrightarrow{+3} 7,$$

etc. Aquí se ha renunciado explícitamente al signo igual, que se reserva para un uso más simétrico.

Reconsideremos por un momento la división con resto.

$$16 \div 3 = 5\ r\ 1$$

requiere mucha interpretación para que se considere que contiene un signo igual matemático con sentido, pero, de hecho, ‘16 ÷ 3’ es una tarea. Si uno deja de plantearse el pasar pronto del signo igual como el índice de una tarea a su significado estático, puede escoger otro patrón para la división con resto, por ejemplo, el de un molde para ser rellenado como

… dividido por	… resulta	… veces, con resto	…
16	3	5	1
37	5	7	2
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.

que, en lenguaje llano, dice lo mismo que dijimos antes en lenguaje matemático obscuro.

Si se piensa que por la intervención del álgebra la igualdad ha sido abolida como índice de que hay que ejecutar una tarea determinada, se está equivocado. En el álgebra escolar tradicional retorna en todo su esplendor en problemas como

$$(a + b)\,(a - b) =$$

o

$$a^2 - b^2 =,$$

en los que se espera que el alumno rellene el otro lado del signo igual con algo que depende de una tarea general, que se ha hecho explícita o no. El álgebra como un sistema de reglas de transformación conduce automáticamente a una interpretación asimétrica del signo igual como algo dirigido unilateralmente hacia una "reducción".

"Reducir" es en efecto un término característico del álgebra escolar y, más en general, de las matemáticas automatizadas. Según reglas determinadas las expresiones se "reducen" en un sentido u otro, esto es, se transforman en otras, y en ese proceso la intención de que permanezcan como lo mismo puede ser olvidada con facilidad. Esta pauta de comportamiento se ve reforzada por la aplicación de "reducciones" no sólo a las expresiones algebraicas sino también a las ecuaciones, para resolverlas. Se asigna el mismo carácter a la sucesión de pasos

$$x^2 - 3x + 2 = 0,$$

$$x^2 - 2\frac{3}{2}x + \frac{9}{4} + 2 - \frac{9}{4} = 0,$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0,$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

$$x - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \text{ o } -\frac{1}{2},$$

$$x = \frac{4}{2} = 2 \text{ o } 1,$$

que al problema de factorizar

$$a^2 - 3ab + 2b^2,$$

en el que los distintos pasos se justifican mediante signos igual:

$$a^2 - 3ab + 2b^2 =$$

$$= a^2 - 2\frac{3}{2}ab + \left(\frac{3}{2}b\right)^2 + 2b^2 - \left(\frac{3}{2}b\right)^2 =$$

$$= \left(a - \frac{3}{2}b\right)^2 - \left(\frac{1}{2}b\right)^2 =$$

$$= \left(a - \frac{3}{2}b + \frac{1}{2}b\right)\left(a - \frac{3}{2}b - \frac{1}{2}b\right) =$$

$$= (a - b)(a - 2b).$$

En el primer ejemplo, uno se siente tentado de hacer explícita la conexión entre las líneas consecutivas mediante un signo igual mental, oral o escrito. Sin embargo, en este caso lo que permanece igual en los distintos pasos no es un valor numérico, sino un valor de verdad, hecho que se registra mediante el signo $\Leftrightarrow$, o en el caso asimétrico, esto es, si el valor de verdad aumenta, mediante $\Rightarrow$.

16.14. *Substitución formal*

Reemplazar en

Sócrates es un hombre

"Sócrates" por "yo" no está permitido: hay que cambiar simultáneamente "es" por "soy". Reemplazar en

Nieva

la variable temporal oculta "ahora" por "ayer" o "mañana" requiere un cambio de tiempo verbal, al pasado o al futuro. Los procesos de substitución que conducen de

$$3 + 4 = 4 + 3$$

a

$$a + b = b + a$$

o inversamente son más formales. Substituyendo formalmente x por 3 se puede verificar si

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

se satisface para $x = 3$.

La substitución formal, sin embargo, se extiende más allá. A partir de

$$(a + b)\ (a - b) = a^2 - b^2$$

se obtiene

$$(a + c + b + d)\ (a + c - b - d) = (a + c)^2 - (b + d)^2$$

al reemplazar

a por $a + c$, b por $b + d$,

es decir, las variables de una expresión se reemplazan por expresiones más complejas, que a su vez pueden comportar variables.

Un dispositivo poderoso, esta substitución formal. Es una lástima que no sea tan formal como uno puede sentirse inclinado a creer, y ésta es una de las dificultades, quizá la dificultad principal, en el aprendizaje del lenguaje del álgebra. Por un lado se le hace creer al aprendiz que las transformaciones algebraicas se realizan de manera puramente formal, por otro lado, si ha de realizarlas, se espera de él que entienda su significado. Si en

$$\ldots - b$$

tengo que reemplazar

> b por $b + d$,

lo que resulta

> no es $- b + d$, sino $-(b + d)$.

Se espera que el signo menos de b extienda su actividad a la totalidad de $b + d$.

Ésta es por tanto la consecuencia inevitable de la interpretación de

> $b + d$

como

> suma de b y d

en vez como la tarea

> suma d a b,

que se mantiene ya sean b y d auténticas variables o constantes previamente especificadas. Así

> la diferencia de … y b

se convierte, tras substituir b por $b + d$, en

> la diferencia de … y la suma de b y d.

Se espera que el aprendiz lea fórmulas comprendiéndolas. Se le permite que

> $a + b$, $a - b$, ab, a^2

las lea

> a más b, a menos b, a por b, a al cuadrado.

Sin embargo, tiene que entenderlas como

> la suma de a y b, la diferencia de a y b, el producto de a y b, el cuadrado de a.

La acción que sugieren más, menos, por, al cuadrado y la lectura lineal ha de descartarse. Las expresiones algebraicas se tienen que interpretar estáticamente si se quiere que la substitución formal pueda funcionar efectivamente de manera formal.

El formalismo del álgebra podría haber sido diseñado más rígidamente exigiendo que, en las substituciones, lo que substituye sólo pueda aceptarse entre paréntesis; en el caso de substituir a por $a + c$ y b por $b + d$ en

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

esto produciría

$$((a + c) + (b + d))((a + c) - (b + d)) = (a + c)^2 - (b + d)^2$$

expresión en la que los paréntesis que no nos gustan los podremos eliminar después, y ésa es la forma como probablemente instruiríamos a un ordenador. Pero como, desarrollada así, el álgebra se convertiría en un asunto agotador, apelamos a la comprensión, incluso cuando enseñamos álgebra. Es un hecho de la experiencia didáctica que esta llamada cae en oídos sordos: pedir al mismo tiempo que se actúe formalmente y se comprenda el contenido es demasiado. ¿Qué se puede hacer desde el punto de vista didáctico?

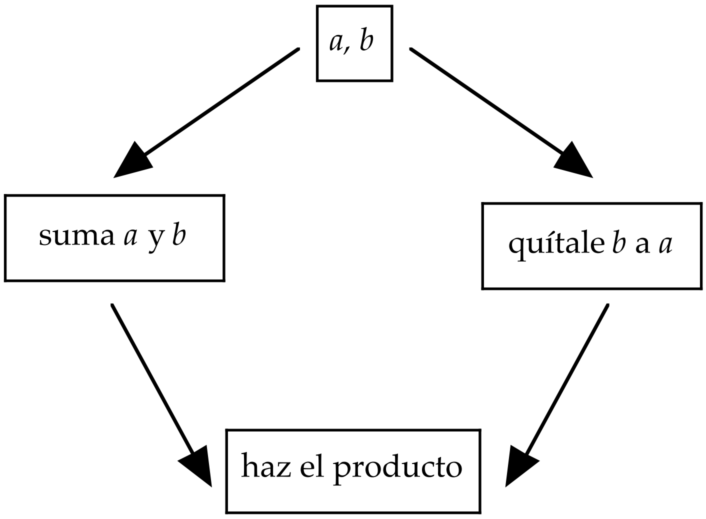
Tras el análisis fenomenológico previo, el consejo es fácil. Para enseñar el lenguaje del álgebra, en particular la substitución formal, tenemos que apelar a la lectura inteligente, y esta llamada debería estar bien dirigida y, si es necesario, planteada explícitamente. Puede que sea innecesariamente complicado leer

$$(a + b)(a - b)$$

una y otra vez

el producto de la suma de a y b y la diferencia de a y b,

pero para actuar como si se hubiera dicho esto, puede ser didácticamente necesario traerlo a la conciencia. Un estadio intermedio, del estilo de un diagrama de flujo, puede ser



La manera de hacer esto y el momento para ello depende de la organización completa de la formalización en la secuencia didáctica, en particular, depende de la manera en que se vaya a formalizar el pensar en funciones y hasta qué grado se haga.

Si el profesor puede permitirse ser paciente, la substitución formal puede surgir con autoconfianza. Una experiencia personal con una alumna de 14 años de nivel inferior a la media:

La dejé que resolviera ecuaciones tales como

$$\frac{3}{4}\, x = 7$$

como quisiera, en dos pasos ("por 4, dividido por 3") hasta que hubo encontrado cómo hacerlo en un solo paso. La tuve calculando productos como

$$a^4 \cdot a^3$$

por el procedimiento de escribir cada potencia como producto hasta que se cansó. Cuando con tipos de expresiones como

$$(a + b)^2$$

mis esfuerzos para que ella buscara minuciosamente los dos factores mixtos cayeron en el vacío, cambié a

$$(a + b)\ (a - b)$$

con la que tuve éxito, y volví a continuación a $(a + b)^2$, que se convirtió también en un éxito. Éste fue el comienzo de un lento prograso en el camino hacia la substitución formal.

La paciencia tiene un precio alto, el profesor ha de saber si vale la pena pagarlo.

La substitución formal es tan importante porque su validez se extiende mucho más allá que la substitución en expresiones dadas. Para resolver determinados problemas, los algebristas tienen a su disposición procedimientos de resolución rígidamente formalizados. La resolución de ecuaciones lineales y cuadráticas y de sistemas de ecuaciones siguen patrones que pueden ser introducidos numéricamente, generalizados luego mediante la substitución formal y aplicados de nuevo en su forma generalizada mediante la substitución formal. Gran número de estrategias algebraicas funcionan gracias a la posibilidad de la substitución formal en patrones estratégicos.

16.15. *Jerga*

En los últimos diez o veinte años ha llegado a ser una moda afirmar que el lenguaje de las matemáticas tal como lo conocemos y lo usamos presenta los rasgos del lenguaje natural hablado y escrito por los creadores del lenguaje de las matemáticas en el pasado. La instrucción matemática en países cuyos lenguajes difieren estructuralmente de forma profunda de los lenguajes occidentales sufre por este hecho, se dice. Los lingüístas que experimentan el lenguaje de las matemáticas como un fenómeno extraño e insuficientemente analizado hacen afirmaciones como ésta.

De hecho, los llamados lenguajes occidentales difieren en gran medida unos de otros, pero nunca se han observado dificultades de transferencia en el uso del lenguaje matemático común. Observado más de cerca, resulta que el lenguaje de las matemáticas también difiere en gran medida del lenguaje vernáculo que se usa en los distintos países en que se ha desarrollado. Ya he tratado de varias de las divergencias de principio y añadiré unas pocas más.

Las divergencias entre un lenguaje natural y el lenguaje de las matemáticas pueden crear efectivamente dificultades de aprendizaje. La más notable y más seria es probablemente la desviación respecto de las reglas de orden según el sistema de numeración posicional en la construcción de los nombres de los números —en muchos idiomas hasta el 20, y en unos pocos incluso hasta el 100. Estamos acostumbrados hasta tal punto a las otras desviaciones que hemos dejado de ser conscientes de ellas.

$$4 + 3$$

es, si se mira de cerca, una extraña manera de escribir la

tarea “suma tres a cuatro”

y una manera casi absurda de escribir

la suma de cuatro y tres

como debería leerse en estricta propiedad. No obstante, todo el mundo lo lee sin perturbarse

cuatro más tres

lo que no es castellano —tan poco castellano como sus "traducciones" al inglés, francés o alemán, son ajenas al inglés, francés o alemán.

Hasta comienzos de este siglo, las substracciones se formulaban en alemán —y en otros muchos idiomas con certeza— según el patrón

vier von sieben[8]

para 7 – 4. Cuando los pedagogos se hartaron de ello, lo convirtieron en

sieben minus vier[9]

para las escuelas de élite y

sieben weniger vier[10]

para la gente corriente, expresiones que no son alemán normal ninguna de las dos —un hecho que hoy en día nadie percibe ya. La terminología holandesa para 12 ÷ 3 era, y todavía lo es a menudo,

dividir tres en doce

lo que es holandés normal, aunque ahora en favor del lenguaje matemático internacional y sin lágrimas en los ojos se ha reemplazado por

doce dividido por tres.

Con anterioridad nunca se había leído el signo igual "igual a"

$$4 + 3 = 7$$

[8]Literalmente, "cuatro de siete".

[9]En castellano, "siete menos cuatro". El uso de estas expresiones en las aritméticas escolares españolas es muy anterior a la fecha que da Freudenthal: puede encontrarse, por ejemplo, en los libros de Vallejo, Lacroix o Bails, todos ellos de comienzos del siglo XIX. Es interesante observar que en cualquiera de ellos esas expresiones se introducen como algo ajeno al lenguaje vernáculo y propio del lenguaje aritmético, cuyo significado hay que explicar recurriendo a la expresión del lenguaje vernáculo "restar tanto de tanto". Así, Vallejo, por ejemplo, escribe: "la espresion 5—3=2, quiere decir que despues de quitar 3 unidades del 5 quedan 2, y se lee *cinco menos tres igual ó es igual á dos.*" (Vallejo, J. M., *Tratado elemental de Matemáticas. Cuarta edición, Tomo I.*, pg. 26.)

[10]En castellano la traducción sería también "siete menos cuatro". En el alemán conviven palabras de raíz germánica con palabras de raíz latina que tienen el mismo significado, pero cuyo uso es una marca de clase social: es el caso de "minus" y "weniger".

se leía

quatre et trois font sept[11]

o de forma similar con *facit*, *macht* en otros idiomas.

"Tres veces" puede degenerar en "una vez" y "cero veces" y ambas expresiones son cualquier cosa menos castellano. Se lee —en todos los idiomas de forma parecida—

a^2 como a cuadrado,

en vez de

el cuadrado de a

como exigirían los buenos modales lingüísticos. En expresiones como

log a

al menos se preserva el orden del lenguaje natural, pero nadie se queja por la falta de algo parecido a la palabra "de" entre sus dos componentes en la medida en que se requiere y es posible en el lenguaje que las rodea.

Me limitaré a estos ejemplos, que no tienen otra pretensión que la de poner en claro hasta qué punto el lenguaje de las matemáticas difiere de los lenguajes en los que ha nacido, y ello en extremos que, como consecuencia de la costumbre, ya no percibimos.

16.16—25. *Estrategias y tácticas algebraicas*

16.16. Se requeriría un estudio más profundo del que he podido emprender hasta ahora para enumerar, si no exhaustivamente al menos de forma representativa y al mismo tiempo sistemática, las estrategias y tácticas algebraicas. Me limitaré a exponer lo que sencillamente me pasó por la cabeza y a repetir la advertencia de que ni está completo ni bien organizado.

16.17. *El principio algebraico* — ya he usado el término en otra ocasión, pero en el apartado 15.3 lo transformé en el más florido

principio de permanencia algebraico,

con el matiz (apartados 15.13—15) de

principio de permanencia geométrico-algebraico.

---

[11] En castellano, "cuatro y tres hacen siete".

Significa la idea de extender las operaciones y las relaciones, cuando sea necesario, de manera que

> se conserven ciertas propiedades que se aprecian.

Como un principio creativo, así como en su función didáctica, se ha discutido tantas veces que no hacen falta más explicaciones. Sólo añadiré algo más de color a la forma geométrica que inicialmente no se tuvo en cuenta, repitiendo expresivamente:

> la justificación de las operaciones numéricas y sus leyes por la sencillez de la descripción algebraica de figuras geométricas y conexiones entre ellas.

16.18. *La substitución (formal)* — discutida hace poco en el apartado 16.14 tiene numerosos aspectos tácticos. Puede deparar

> especializacion — si las variables se fijan numéricamente
>
> (ejemplo: verificar si $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)=n^2$ es correcto);
>
> generalización — si términos numéricos se reemplazan por variables;
>
> especialización — si un esquema de resolución se *aplica*;
>
> generalización — si un esquema de resolución se *extiende*;
>
> simplificación estructural — si, en una expresión dada, se reeemplazan expresiones parciales por variables
>
> (ejemplo: reemplazar x^2 por y en $x^4 + 2x^2 - 3$.);
>
> complicación estructural — si, en una expresión dada, se reemplazan variables por expresiones
>
> (ejemplo: al resolver $x^3 + px + q = 0$, reemplazar x por $u + v$ con el fin de, al hacer que se anule $3uv + p$, simplificar el lado izquierdo);
>
> eliminación — de una variable involucrada en una substitución;
>
> reestructuración — para reconocer patrones que admiten la aplicación de determinadas leyes algebraicas
>
> (ejemplo: reemplazar en $x^2 + 2x + 3$ la x por $y - 1$);

En un nivel superior la substitución está implicada siempre que operaciones y relaciones se reemplazan por los términos que las definen

(ejemplos: la multiplicación como adición repetida, la elevación a potencia como multiplicación repetida, la substracción como adición invertida, etc., y las inversas).

16.19. *La traducción algebraica* de propiedades, conexiones y problemas — en el ejemplo más genuino, caracterizada por el consejo "llamar *x* a la incógnita".

Para describir un problema en su contexto algebraico,

datos, incógnitas, parámetros o relaciones entre ellos se rastrean y se traducen mediante variables, ecuaciones e inecuaciones.

Para escribir algebraicamente propiedades (conjuntos),

se introducen variables

(ejemplo: "número impar" descrito algebraicamente mediante "$2n - 1$, con *n* natural").

Es sorprendente que incluso los alumnos de los últimos cursos de la secundaria resuelvan problemas como

Una fracción equivalente a $\frac{2}{5}$ tal que la diferencia entre su numerador y su denominador es 45.

María es seis años más vieja que Juan y hace ocho años tenía tres veces la edad de Juan.

La longitud de un rectángulo es $4\frac{1}{2}$ su anchura y su superficie es 288 cm^2.

por tanteo; que no se les ocurra la idea de "hacerlo con letras".

16.20. *Resolver ecuaciones e inecuaciones*

por tanteo sistemático,

transfiriendo todos los términos a un lado,

distribuyendo los términos a ambos lados de forma adecuada,

aplicando las mismas operaciones a ambos lados, por complicación que prepara una simplificación;

en sistemas con varias incógnitas

por substitución, preparada por otras transformaciones, si es necesario.

16.21. *Considerar una expresión como una función*

una función como una composición de funciones,

una función como la inversa de una función.

16.22. *Cambio de perspectiva,*

al considerar un dato como una incógnita,

al considerar una incógnita como un dato,

al considerar los datos como las soluciones de un sistema de condiciones,

al reemplazar desigualdades por igualdades,

al reemplazar igualdades por desigualdades.

16.23. *Explotar simetrías*

en expresiones, ecuaciones, inecuaciones, funciones.

16.24. *Plantear la positividad de una expresión*

al intentar verla como una suma de cuadrados.

16.25. *Explotar analogías*

de manera informal;

en conexiones funcionales,

tales como la analogía entre adición y multiplicación informalmente o mediante las funciones exponencial y logarítmica.