CAPÍTULO 5

FRACCIONES

5.1—2 *El título*

5.1 No es un lapsus —"fracciones" en lugar de "números racionales positivos" en el título del capítulo. Esa terminología parece pasada de moda. Para el punto de vista actual, los objetos propiamente matemáticos de los que se trata aquí son los números racionales. Este punto de vista es correcto, como una consecuencia de cómo el matemático interpreta sus fórmulas. Si a y b son números,

$a+b$ no es la tarea "añadir b a a",

más bien es un número de nuevo, a saber, la suma de a y b. Si esto se entiende,

3+2 es nuevamente un número,

que puede ser escrito "5", más brevemente; aunque, si se prefiere, puede escribirse "$\sqrt{25}$" también, o $\log_{10} 10^5$.

Entonces

3+2=5

no debe ser leído

si añado 2 a 3, obtengo 5

sino

3+2 y 5 son la misma cosa—

también formulado a veces como

"3+2" y "5" son nombres diferentes de la misma cosa,

tal como, por ejemplo,

"Amsterdam" y "capital de Holanda"

son nombres de la misma cosa.

A derecha e izquierda del signo igual, aparece el *mismo* objeto. De la misma manera en

$$\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{6}{9}=\ldots$$

se habla una y otra vez de la misma cosa, sólo que representada de varias formas, y esa cosa es un *número racional*. Bien, uno puede preferir la forma $\frac{2}{3}$, y, en general, para cada número racional, la expresión por medio de una fracción en la que numerador y denominador tienen máximo común divisor 1, la fracción simplificada; como se prefiere para el número 5 la expresión 5 antes que 3+2, 10-5, etc., aunque las otras son igualmente admisibles. Hay, de todos modos, una diferencia: "5" no es sólo el nombre *preferido* del número 5, es el *primer* nombre, el nombre con el cual me ha sido presentado, y bajo el cual lo conocí, mientras que "3+2" y "10-5" son alias con los cuales lo puedo llamar también. Sin embargo, $\frac{2}{3}$, es sólo el nombre más simple de cierto número racional, e incluso yo no podría decir de muchos números racionales bajo qué nombre los conocí por primera vez. Ésta es la razón, pues, por la que las distintas expresiones fraccionarias del mismo racional viven mucho más sus propias vidas, y por la que se las conoce con un nombre especial: *fracción*.

Pero sea lo que sea lo que uno sienta sobre ello, el objeto matemático que importa es el número racional más que la fracción. No obstante, puse la palabra "fracciones" en el título, y lo hice intencionadamente. Las fracciones son el recurso fenomenológico del número racional – una fuente que nunca se seca. "Fracción" —o lo que le corresponda en otras lenguas— es la palabra con la que entra el número racional, y en todas las lenguas que conozco está relacionada con romper: fractura. "Número racional" evoca asociaciones mucho menos violentas: "racional" está relacionado con "razón", no en el sentido de la razón[1] sino en el de proporción, de medida —un contexto aprendido y mucho más aprendido que "fracción".

5.2 En realidad, las fracciones tienen mucho que ver con razón, y yo dudaba sobre si debería colocar la palabra "Razón" bajo "Capítulo 5". No como un substituto de "Fracciones" sino como tema que merecía prioridad —prioridad por razones didácticas, pero también por la propia exposición. Aplacé "Razón" para el capítulo 6, aunque lo anticipo repetidamente en el presente capítulo. Desde el comienzo, he luchado con problemas de prioridad mientras escribía este libro, y sólo puedo esperar que el daño causado por esta lucha sea soportable. De hecho, le he dado la vuelta al presente capítulo varias veces. La abundancia de fenómenos que se dominan con fracciones y razón es lo que causa el problema. Para escribir una fenomenología tengo que prestar atención a todos estos fenómenos; organizarlos demasiado sistemáticamente puede significar simplificarlos tanto que ponga trabas a la tarea fenomenológica.

No se puede negar que la didáctica de las fracciones está caracterizada por tendencias unificadoras. Por regla general, los números naturales se enfocan desde varias perspectivas. Cuando llega el turno de las fracciones, se supone que los alumnos están lo suficientemente avanzados como para quedarse satisfechos con un único enfoque desde la realidad. Desde mi punto de vista, este supuesto erróneo es la razón por la que las fracciones funcionan mucho

[1] En inglés los dos sentidos de la palabra castellana 'razón' se expresan con palabras distintas: *ratio* y *reason*; *rational* viene de *ratio* y no de *reason*. En la jerga castellana de la política y la televisión el barbarismo *ratio* está substituyendo a *razón*, por motivos poco razonables.

peor que los números naturales y por la que mucha gente nunca aprende las fracciones.

Es mi intención presentar las fracciones en su completa riqueza fenomenológica —sólo espero no ahogarme en este océano.

5.3 *Las fracciones en el lenguaje cotidiano*

5.3.1 *la mitad de* (por analogía con igual de, el doble de…)

seguido de

…, largo, pesado, viejo,

compara cantidades y valores de magnitudes[2].

Menos usual es

un tercio de, dos tercios de
…, largo, pesado, viejo, …

5.3.2 *dos y un tercio veces de*[3]

…, largo, pesado, viejo, …

como si fuera una extensión de

el doble de
…, largo, pesado, viejo, …[*]

Pero

un tercio veces de
…, largo, pesado, viejo, …

---

[2] En inglés, estas frases comparativas se forman con *as*: *half as, equally as, twice as*. Yo las he traducido *la mitad de, igual de, el doble de*, porque en castellano se dice “el doble *de* largo” o “igual *de* largo”. Esto hace desaparecer la distinción que Freudenthal subraya entre *half as*, que aparece aquí, y el *half of*, que introduce en 5.3.3, ya que ambas expresiones inglesas hay que traducirlas al castellano por “la mitad *de*”. Hay sin embargo en castellano otra expresión comparativa que no tiene equivalente en inglés y que habría que tomar en cuenta en un análisis fenomenológico de las fracciones en el lenguaje vernáculo castellano: me refiero a las expresiones con “veces” que utilizan como conectiva “más”, como, por ejemplo, “dos veces más largo que”. Esta expresión, que es equivalente a “el doble de largo que” y traduce también por tanto la expresión inglesa “twice as long as”, es la única que queda disponible cuando se avanza en la serie de los números y dejan de existir los multiplicativos “doble”, “triple”, etc., y presenta la dificultad de usar la palabra aditiva “más” en una expresión con significado global multiplicativo.

[3] En inglés, *two and a third times as*: he conservado el *de* en la traducción castellana para que pueda verse este subapartado como continuación del anterior. En castellano, las expresiones como esta inglesa se corresponden con las que he indicado en la nota anterior: más que extender “el doble de” como aquí, la expresión que se extiende es “dos veces más largo que” a “dos veces y media más largo que”, por ejemplo.

[*] En muchas otras lenguas podría añadir “pequeño”, “corto” y “poco” a esta lista. [Por ejemplo, “pequeño” y “corto” en castellano. (Nota del traductor)]

a duras penas puede ser considerado como perteneciente al lenguaje cotidiano.

5.3.3 *la mitad de, un tercio de, un cuarto de…*

describe una cantidad o un valor de una magnitud por medio de otra. El artículo indefinido o definido añade matices

…,un (uno[4]), el
mitad de, tercio de, cuarto de…
un el
pastel, camino, viaje, hora, libra, dinero, millón…

Como lo hace

un (uno), el
mitad de, tercio de, cuarto de…
siete
pasteles, horas, libras, millones…

Se pueden formar múltiplos

dos tercios de, tres cuartos de…
un (uno), el
pastel, camino, viaje, hora, dinero, millón…

5.3.4 la mitad de un…, la mitad del

se usa en el mismo sentido.

5.3.5 Del nombre o guarismo al número de medida expresado mediante números

$\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $5\frac{1}{4}$,
m, kg, l, seg, botellas, millones.

5.3.6 Un extraño fenómeno —creo que en todas las lenguas— es

vez o *veces*

tras las fracciones. En la sección 5.3.2 ya nos lo encontramos

…veces de[5]…

"Veces" pertenece a la multiplicación (cf. sección 5.31). Con un número natural *m* aparece en

[4] En inglés puede usarse el artículo indefinido *a* o el adjetivo *one;* en castellano la diferencia se desvanece al perderse la o de uno, pero también existen los femeninos "la" y "una".
[5]En castellano, como ya he indicado en una nota anterior, más a menudo "…veces más … que…".

hacer, sufrir, experimentar, esperar, *m* veces

algo, por ejemplo

coger *m* veces *n* canicas ($m \cdot n$ canicas)
llevar *m* veces una varilla de medida (*m* veces de largo)
girar *m* veces la llave en la cerradura,
m veces alrededor del reloj, la pista de carreras, la Tierra,
rodar *m* veces una rueda,
oscilar *m* veces adelante y atrás.

En un momento determinado se permite que *m* sea una fracción. Esta extensión lingüística se entiende más fácilmente si *m* es un número mixto:

2 veces de largo

lleva a

$2\frac{1}{2}$ veces de largo[6].

$\frac{1}{3}$ veces de largo[7]

parece innatural, pero el número entero en

$2\frac{1}{3}$ veces de largo

sugiere que esto significa

2 veces de largo y $\frac{1}{3}$.

En procesos cíclicos o periódicos de otro tipo

$\frac{1}{2}$ vez, $\frac{1}{3}$ vez, $\frac{2}{3}$ veces

pueden ser auto-explicativos sin números enteros. En

$\frac{1}{2}$ vez, rodar $2\frac{1}{2}$ veces la llave en la cerradura,
$\frac{1}{3}$ vez, $2\frac{1}{3}$ veces alrededor del reloj, pista de carreras, Tierra,

---

[6]O "dos veces más largo que" a "dos veces y media más largo que".
[7]En castellano, parece aún más innatural extender la expresión "veces más … que" a una fracción propia, por el choque violento entre una cantidad menor que la unidad como operador multiplicativo y la palabra "más".

$\frac{1}{2}$ vez, oscilar $2\frac{1}{2}$ veces adelante y atrás,
$\frac{1}{3}$ vez, rodar $2\frac{1}{3}$ veces una rueda,

la fracción sugiere una acción cuya última fase ha sido realizada sólo parcialmente. Si esto se aplica a la acción de medir —por ejemplo al uso de una cinta métrica—,

$\frac{1}{3}$ veces de largo, $2\frac{1}{3}$ veces de largo

se hace más claro como un proceso de ajustar una herramienta de medida periódicamente, en el que la última fase sólo se realiza parcialmente.

5.3.7 La terminología más natural es

3 *veces*…
$\frac{1}{3}$ *de*…

y también

$\frac{2}{3}$ *de*…

aplicado a un

número, cantidad de objetos, objeto divisible, valor de una magnitud,

tal como

7, 30 canicas, un pastel, 5 kg,

pero la aritmética y las matemáticas están mejor servidas con un solo término. En casos excepcionales las *veces* se reemplazan por *de*, como en

3 paquetes *de* 5 kg cada uno,

pero éste es un *de* diferente al que sigue a una fracción. En aras de uniformidad y siguiendo una vieja tradición

veces reemplaza a *de*.

En los libros de texto la mayor parte de las veces esto simplemente se prescribe:

$\frac{1}{3}$ *vez* significa $\frac{1}{3}$ *de*.

En lo que precede, esbozábamos vías naturales desde *de* a *veces*:

un camino es desde

2 veces

vía

$2\frac{1}{3}$ veces

a

$\frac{1}{3}$ vez;

el otro es el proceso cíclico o periódico:

2 veces alrededor del reloj;
$\frac{1}{2}$ vez alrededor del reloj.

Más tarde abordaré nuevamente esta cuestión cuando discutamos la multiplicación de fracciones.

5.3.8. De otro modo

de o *en* , o *entre* , o *por*[8]

sugiere una fracción en

3 de (en, por) cada 5	(gente viviendo en las ciudades),
5 de 100	(5%).
35 millas por galón,	
una escala de 1 a 1000,	
una oportunidad entre cien, en cien, de cien,	
3 de 5 partes,	

En una mezcla

3 partes de sal y 2 partes de pimienta.

5.3.9 Una terminología aparentemente más fuerte

cada tercer lote gana
cada quinto hombre es chino.[9]

[8] Las conectivas inglesas que señala Freudenthal aquí son *of, out of, in* y *to*.
[9]Traducción literal de *every third, every fifth*. En castellano no hay una expresión equivalente, aunque forzando un poco se puede usar ésa en frases como “separa cada tercero” o similares.

Parece que éste es el origen de los números ordinales como medio de indicar denominadores de fracciones[10]: contando 1, 2, 3…, 10 para separar el *décimo* ; toda esta "décima" gente u objetos forma juntos un (el) décimo del total. Así, la *décima* parte es de hecho la última de todas ellas. En una terminología obsoleta nueve partes significa 9/10, el resto que se deja si la décima se separa[11]. "Diezmar" significaba originalmente contar décimos y separarlos (para matarlos).

5.4 LA FRACCIÓN COMO FRACTURADOR

5.4.1 *Causar fracciones*

Ya hemos explicado cómo se dividen las magnitudes, con o sin resto. Para dividir substancias, medidas por magnitudes, hay muchos métodos disponibles: fracturar[12] puede ser

> irreversible, o reversible, o meramente simbólico.

La igualdad de partes se estima

> a ojo o por tacto,

o por métodos más sofisticados. Uno de ellos es

> doblarlo en dos

para partirlo por la mitad,

> doblarlo en tres

para dividirlo en tres partes iguales;

> doblarlo repetidamente en dos y tres

conduce a más fracciones.

Los objetos pesados se parten por la mitad

> pesando las partes en las manos o en una balanza,

mientras se corrige repetidamente la falta de equilibrio. Similarmente

---

[10]La Real Academia de la Lengua Castellana indica explícitamente que se trata de ordinales: "Los números quebrados 1/5, 2/6, 8/10... se expresan lingüísticamente con dos numerales: un cardinal en función adjetiva que designa el numerador del quebrado: *un, dos, ocho,* y un numeral ordinal en función substantiva que designa el denominador: *quinto, sexto, décimo"* (*Esbozo de una nueva gramática de la lengua española*, Espasa Calpe, Madrid, 1986, pg. 245.)

[11]"En español antiguo y clásico se decía también *las dos partes* por *las dos terceras partes, las tres partes* por *las tres cuartas partes,* etc., como en el pasaje de Cervantes: *Consumían las tres partes de su hacienda* (*Quijote,* I, 1)." (*Esbozo de una nueva gramática de la lengua española*, Espasa Calpe, Madrid, 1986, pg.246.)

[12]La fracción como resultado de fracturar está presente en el nombre tradicional castellano para las fracciones: *quebrados*.

comparar y corregir

desempeña su papel si en general una substancia medida por magnitudes tiene que ser distribuida; por ejemplo, un líquido en un número de vasos congruentes, en los que se compara las alturas del líquido.

Las figuras u objetos planos y espaciales, así como cantidades grandes, se distribuyen a veces con respecto al área o volumen mediante el uso de

congruencias y simetrías;

por ejemplo, el pastel redondo en partes congruentes, que puede dividirse

a ojo o por tacto,

En todos estos ejemplos desatendí la medida correcta. Pretendía prestar atención a métodos más primitivos. En la constitución mental de todas las clases de magnitudes, repartir en partes equitativas me parece un eslabón importante —más importante que lo que los psicólogos investigan bajo el nombre de conservación. Que yo sepa, los psicólogos del desarrollo no han prestado ninguna atención a este aspecto. He observado muchas veces que de los 7 a los 8 años se es capaz de estimar una mitad o un tercio de un área irregular que hay que colorear; mediante esta habilidad están dominando un componente importante del objeto mental "área", mientras que el conocimiento de la fórmula del área de un rectángulo, como el que exhiben niños entre los 10 y 12 años, no significa necesariamente progreso —por el contrario puede muy bien significar retroceso. Anteriormente subrayé la importancia de las transformaciones de composición y descomposición para el desarrollo de las magnitudes como objetos mentales.

5.4.2. *Todo y parte*

Del modo más concreto las fracciones se presentan si un todo ha sido o está siendo

rajado, cortado, rebanado, roto, coloreado,

en partes iguales, o si se

experimenta, imagina, piensa

como si lo fuera. En este complejo de fenómenos voy a intentar una clasificación, ilustrada con ejemplos.

El todo puede ser

discreto	o continuo,
definido	o indefinido,
estructurado	o carente de estructura,

lo que quieren ser calificaciones extremas con una variedad de transiciones entre ellas.

La atención puede ser dirigida a

una parte, un número de partes, todas las partes.

Las partes pueden estar

conectadas o desconectadas.

El modo de dividir puede ser

estructurado o no estructurado.

5.4.3. *Ejemplos —Todo definido (figuras 26—32)*

De una bolsa de canicas —todo definido discreto—, he sacado una décima parte; mi atención está fijada en esa décima parte, y quizás también en los restantes nueve décimos.

De las mismas canicas que tengo frente a mí, quietas o rodando, estructuradas como una secuencia, tomé arbitrariamente una décima parte —una elección no estructurada— o la primera décima parte o una de cada diez —una elección estructurada.

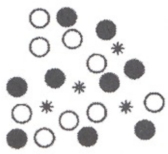

Figura 26

De las 60 cuentas que hay en un bol, 1/6 son rojas, 1/3 blancas, 1/2 azules —un todo definido discreto, estructurado de acuerdo con el color, no estructurado en el espacio. Lo mismo con un collar —estructurado como un todo, y, si las cuentas se suceden regularmente, 1 roja, 2 blancas, 3 azules, también estructurado respecto a una distribución.

Una tarjeta de bingo —todo definido discreto, estructurado mediante numeración— la atención se fija en las partes que ganan premios.

Figura 27

Una tira —continua, de longitud definida, con estructura lineal— con uno o más segmentos coloreados, pongamos, rojo–blanco–azul —partes conectadas, o desconectadas— aquí y allá unas motas rojas, blancas, azules —dividida con o sin estructura.

Figura 28

Lo mismo con un disco circular —continuo, definido, estructurado cíclicamente, dividido en sectores, que separadamente o tomados juntos representan partes (ruleta, *spinner*, diagrama de sectores).

Lo mismo ocurre con figuras geométricas más o menos estructuradas:

Un cuadrado con o sin una estructura de papel cuadriculado subyacente, o un polígono regular o irregular con o sin una estructura de retícula subyacente, dividido regular o irregularmente.

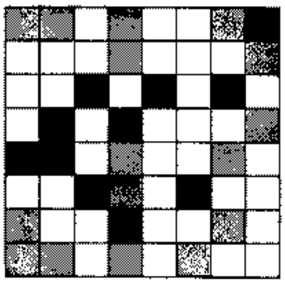

Figura 29

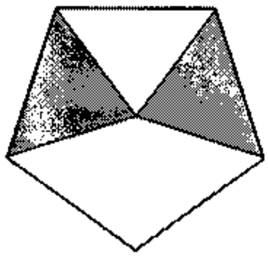

Figura 30

Las aristas o caras de un cubo, combinadas en cuádruplos y pares paralelos, respectivamente.

Dominios planos limitados por una curva, o dominios espaciales limitados por superficies curvas, regulares o irregulares, divididas de varias formas.

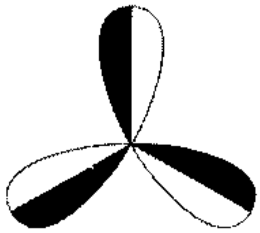

Figura 31

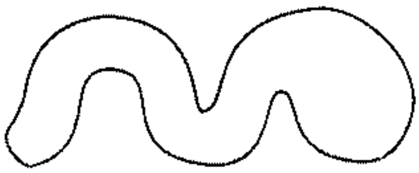

Figura 32

5.4.4. *Ejemplos—Todo indefinido (Figuras 33–34)*

La humanidad —todo indefinido discreto— dividida de acuerdo con los grupos sanguíneos, donde la atención se presta a uno o más de ellos; el todo puede ser tomado, además, como no estructurado, o como estructurado de acuerdo con el sexo, la raza, la distribución geográfica, etc.

Una hilera de cuentas de longitud indefinida (posiblemente infinita) —discreta, indefinida, estructurada linealmente— y, como una hilera de longitud finita, dividida de acuerdo con números de rango o colores, que se pueden colocar de una forma estructurada o no.

Una tira de longitud indefinida (posiblemente infinita) —continua, indefinida, estructurada linealmente— y, como una tira de longitud finita, con segmentos coloreados o a lunares, distribuidos estructurada o no estructuradamente.

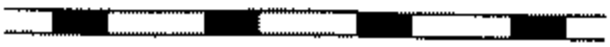

Figura 33

Un muro o suelo embaldosado —continuo, de extensión indefinida, estructurado mediante un patrón de ladrillos o baldosas— dividido de acuerdo con el color, el esmalte, los dibujos, el material, —piezas desconectadas, distribuidas estructurada o no estructuradamente, con o sin estructura.

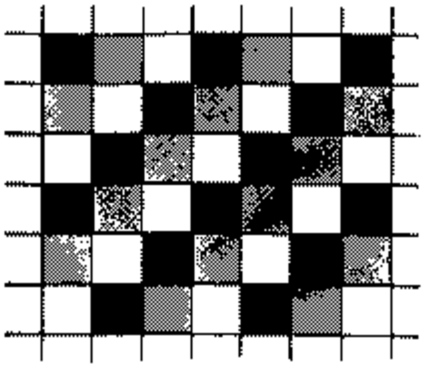

Figura 34

El aire —continuo, indefinido, un todo sin estructura— dividido en gases, oxígeno, nitrógeno, etc., partes conectadas, distribución no estructurada.

El suelo —continuo, indefinido, un todo no estructurado— dividido de acuerdo con las categorías de su uso —partes desconectadas, distribución no estructurada.

Un texto impreso en un cierto idioma —discreto, indefinido, un todo no estructurado— dividido de acuerdo con los símbolos de las letras, distribución no estructurada.

El tiempo —continuo, todo indefinido— estructurado de acuerdo con varios criterios.

Nota: todos estos ejemplos han de ser considerados con una pizca de prevención. En casos en que yo llamo a algo "estructurado", es posible dejar de lado la estructura si no vale la pena tenerla en cuenta, y en casos en que apunto "no estructurado", se puede introducir una estructura. Hay transiciones entre discreto y continuo: las partículas pueden ser tan pequeñas que el todo parezca continuo. En un todo discreto, se puede construir una conexión sobre relaciones de vecindad.

Nota: La mayoría de los ejemplos han sido presentados de forma estática: algo *es* o *se considera* como dividido. Sin embargo, también se pueden leer en el sentido de algo *siendo* dividido. En algunos casos es incluso más natural, como ocurre con las cuentas en un bol, la lotería, y los colores de las tiras y los dominios planos; en los últimos ejemplos (aire, suelo, texto impreso) parece menos plausible, pero se pueden imaginar situaciones en las que incluso aquí el énfasis está en "estar siendo" más que en "es" dividido.

5.4.5. *Todo, parte y fracción*

Las fracciones fueron mencionadas explícitamente sólo al principio de la sección 5.4.2., aunque el propósito de la exposición general en la sección 5.4.2 y de los ejemplos en las secciones 5.4.3—4 era relacionar las partes y el todo mediante fracciones. Las partes y el todo se comparan numéricamente según medidas que pueden variar enormemente.

La cuestión de cuántas veces una parte cabe en un todo es significativa sólo si uno ha acordado bajo qué condición se consideran las partes como equivalentes. El criterio puede ser

número

o

valor de cierta magnitud.

Esto lo desarrollaré más adelante.

A pesar de una clasificación con tantas caras y de la abundancia de ejemplos posibles, enfocar las fracciones desde el punto de vista de "parte–todo" es algo bastante limitado no sólo fenomenológicamente sino también matemáticamente —este enfoque produce sólo fracciones propias. La didáctica tradicional de la aritmética se limita a este enfoque, mayoritariamente incluso en el sentido restringido de la división del pastel. Tras estas divisiones concretas del pastel —en fracciones propias sólo— se introduce inmediatamente al estudiante en la división abstracta de cantidades y valores de magnitudes presentados abstractamente; con decretos arbitrarios como "1/2 vez significa lo mismo que 1/2 de", y con reglas aritméticas se aplana un camino recto hacia el número racional. Algunos innovadores[13] insertaron un nivel de operadores fraccionarios como inversos a los operadores multiplicativos. Esto podría haber sido un progreso, si no fuera porque incluso ellos se sienten satisfechos con una base de orientación demasiado pequeña.

Los alumnos con el don de digerir algoritmos aprenden a operar con fracciones de todos modos, los alumnos menos o nada dotados en este sentido específico lo aprenden por ensayo y error o no lo aprenden en absoluto. Después de uno o dos años de fracciones, algunos alumnos dominan los algoritmos, aunque no tienen ni idea de lo que significan las fracciones, ni de lo que se puede hacer con ellas; otros no conocen siquiera el nombre de fracciones particulares. La pobreza fenomenológica del enfoque me parece, en gran parte, responsable de este fallo didáctico.

5.5. LAS FRACCIONES COMO COMPARADORES

5.5.1. *Comparación de objetos concretos*

La didáctica tradicional pasa por alto que la concreción de las fracciones no se agota con romper un todo en partes. Como el análisis lingüístico de la sección 5.3 mostró, las fracciones sirven también para comparar objetos que se

separan uno de otro

o que se

experimenta, imagina, piensa como si se separaran:

[13]Cuando Freudenthal dice *innovadores* se refiere a quienes, como Papy o Dienes, fueron los protagonistas de la didáctica asociada a la introducción de las "matemáticas modernas".

en esta habitación hay la mitad de mujeres que de hombres,
el banco es la mitad de alto que la mesa,
la calle es $2\frac{1}{2}$ veces más ancha que el sendero,
Juan gana la mitad que Pedro,
el cobre es la mitad de pesado que el oro.

La comparación se realiza de acuerdo con ciertos criterios,

directa e indirectamente.

Directamente: los objetos que han de ser comparados se colocan juntos, o se consideran de algún otro modo como si el más pequeño fuese parte del más grande, estrategia mediante la cual la fracción como comparador se reduce a fracción como fracturador de un objeto concreto.

Indirectamente: un tercer objeto, digamos una vara de medir, media entre los dos objetos que son comparados siendo transferida de uno a otro, o considerando como si se transfiriera.

Los ejemplos anteriores admiten otra formulación:

el número de mujeres de esta habitación es la mitad que el número de hombres,
la altura del banco es la mitad de la altura de la mesa,
la anchura de la calle es $2\frac{1}{2}$ veces la del sendero,
el sueldo de Juan es la mitad que el de Pedro,
el peso (específico) del cobre es la mitad que el del oro.

En vez de

los objetos respecto al número o valor de la magnitud,

comparamos ahora

los propios números o valores de magnitudes.

Parece demasiado complicado hacer esta distinción y en la fenomenología insatisfactoria de la investigación psicológica tanto como en la didáctica tradicional está desatendida. En nuestro análisis fenomenológico esto no es superfluo. Uno puede darse cuenta completamente de que comparar con respecto al número o valor de una magnitud precede a la comparación con los propios números o valores de magnitudes, y que lo primero queda, o debería quedar, inmanentemente presente en lo segundo, siempre que las fracciones hayan de ser algo más que un formalismo.

5.5.2. *Fracción y magnitud*

Antes explicamos cómo puede hacerse una distribución en tres partes iguales: con pequeñas cantidades, a ojo; con grandes, apartando alternativamente partes iguales, o algorítmicamente, por división como la inversa de la multiplicación. Si la división termina, no surgirá ningún problema nuevo. Si no, entonces, en problemas realistas, surge la cuestión de qué hacer con el resto. Si es factible su división, entonces el problema *matemático* de distribución y su relación con el problema *real* ha cambiado. Ya no es un conjunto finito lo que se distribuye: el modelo del conjunto finito ya no encaja con el problema real de distribución. Por ejemplo, mejor que seis —discreto— rebanadas de pan, que se distribuyen, es pan, en una cantidad que se piensa como arbitrariamente divisible y según una regla que establece cuándo las cantidades pueden reemplazarse unas por otras para ser consideradas iguales.

El modelo matemático que encaja en esta tarea de distribución, es la *magnitud*. Ya se discutió en el capítulo 1 y es un asunto para ser tratado una vez más. Mientras tanto repetimos los rasgos esenciales:

> Constituir una magnitud en un sistema de cantidades requiere:
>
> una relación de equivalencia, que describe las condiciones para substituir objetos (por ejemplo cantidades de una cierta substancia) unos por otros, y que conduce a la *igualdad* dentro de la magnitud,
>
> una manera de juntar objetos (cantidades), que lleva a una *adición* en la magnitud,
>
> la disponibilidad sin restricciones de objetos con el mismo valor de magnitud (esto es, en la misma clase de equivalencia), que hace la *adición posible sin restricciones*,
>
> la posibilidad de dividir un objeto en un número arbitrario de objetos parciales que se reemplazan entre sí, que lleva a la *división por números naturales.*

La multiplicación de números naturales es una operación derivada, definida por la adición repetida: "*n*–ésima parte de[14]" se convierte en el inverso de "*n* veces". Componiendo multiplicaciones y divisiones entre sí, se obtiene *multiplicaciones por números racionales*.

Si nos restringimos sólo a las *matemáticas*, entonces para definir qué es magnitud podemos estar satisfechos con los postulados de adición y división. En un enfoque fenomenológico debemos comenzar con los objetos que, mediante una relación de equivalencia, se requieren para formar clases que

---

[14]En inglés "*n*–th part of". El castellano admite el ordinal con "parte", que traduce literalmente la expresión inglesa, o el partitivo "*n*–avo". Aquí hemos traducido sistemáticamente *n*–th por *n*–ésimo para respetar la discusión que hace Freudenthal del uso de los ordinales para las fracciones. Una fenomenología hecha en castellano habría de tomar en cuenta la existencia de los partitivos y el empleo tanto de ordinales como de partitivos en las fracciones, lo que quizá llevaría a considerar diferencias entre expresiones como "la duodécima parte" y "una doceava parte": en la primera permanece el rastro del acto de contar gracias al cual se ha determinado la fracción —y sólo una de las partes es realmente la duodécima—; en la segunda, se señala una cualquiera de las partes en que la fracción ha fracturado el todo. También habría que tomar en cuenta la irrupción en el uso —aunque no esté en la norma— de los partitivos substituyendo a los ordinales.

representan valores de magnitud. La disponibilidad sin restricciones de tales objetos en cada clase es, de hecho, indispensable. Hago hincapié en este punto, que a través de una fenomenología defectuosa ha producido una didáctica defectuosa de las fracciones.

Nuestra exposición muestra una asimetría entre la multiplicación y la división. El operador "*n*–ésima parte de" puede ser aplicado al objeto antes que al valor de la magnitud. Una *n*–ésima parte puede ser una parte concreta de algo dado. Por otro lado, "*n* veces" no puede ser realizado por medio del objeto dado; tenemos que utilizar otros, quizás arbitrarios, mientras que "*n*–ésima parte" puede ser realizado dentro del objeto, y sólo la *elección* de la parte es arbitraria.

Esta asimetría es tan impresionante que ninguna fenomenología puede permitirse pasarla por alto y ninguna didáctica de las fracciones debe dejar de lado los resultados de este análisis. Sin embargo, es precisamente el punto en que la didáctica tradicional de las fracciones muestra sus defectos, de los cuales es probable que se pueda hacer responsable a una fenomenología defectuosa. La fracción como parte de algo es de una concreción tan fascinante y convincente que uno se siente fácilmente satisfecho con este enfoque fenomenológico y olvida los otros. En todos los ejemplos, tanto visualizados como no, uno se limita a fracturar. La *n*–ésima parte se ve o se imagina exclusivamente *dentro* del todo —algo que no sería factible con "*n* veces". Fenomenológicamente este enfoque lleva sólo a las fracciones propias (<1). La insuficiencia aparecería tan pronto como se abordaran las fracciones mixtas (>1), pero, cuando se alcanza ese punto, la matematización de las fracciones y de las operaciones con fracciones está ya en pleno funcionamiento, si no completada; la extensión requerida para fracciones mixtas simplemente es arrastrada por la corriente de matematización, o llevada a cabo de manera puramente formal sin ningún vínculo fenomenológico. Expresiones tales como $1\frac{1}{2}$ son materia de trabajo en el papel, desvinculado de la realidad, que es aún visible en las fracciones propias.

La "fracción como fracturador" no es sólo un comienzo demasiado estrecho, es también unidireccional. Es extraño que todos los intentos de innovación hayan pasado por alto este punto. El moderno análisis fenomenológico ha enfocado el concepto de magnitud con cuidado; se ha reconocido el papel desempeñado por equivalencia y fracciones, pero este análisis fenomenológico nunca ha tenido una vertiente didáctica. En particular, no se han dado cuenta de que la didáctica de las magnitudes no puede ser construida sobre la de las fracciones, que a su vez requiere magnitudes para que sean enfocadas didáctica y fenomenológicamente. La "fracción como fracturador" puede ser descrita mediante un concepto de equivalencia bastante restringido: no requiere más que dividir algo en *n* partes iguales. Pero en la realidad de la didáctica se necesita una equivalencia de más amplio alcance, así como una disponibilidad sin restricciones de objetos en cada clase de equivalencia. Esta necesidad no ha sido reconocida en la didáctica de las fracciones ni en la elección de modelos didácticos hasta la fecha.

5.6. *Aspectos de la fracción*

Vamos a resumir el contenido de las secciones 5.4—5 formalmente, y a completarlo.

En la medida en que el énfasis mental esté en

algo dinámico o estático

la fracción aparece

en un *operador* o en una *relación*

—partiendo por la mitad contra “la mitad de grande”.

Ambos, el operador fracción y la relación, pueden respectivamente actuar sobre

objetos

y relacionar entre sí

objetos

con respecto a ciertas características (número, longitud, salario, peso…) —la mitad de la vara, el banco es la mitad de alto que la mesa, y así sucesivamente— o

cantidades y valores de magnitud

—esta longitud es la mitad que, este peso es $2\frac{1}{2}$ veces más que.

Si los objetos comparados son

todo y parte

o son considerados como tales, la fracción aparece en el

operador fracturante o relación de fractura.

Si están

separados,

es mejor hablar de

relación de razón.

Si es acerca de cantidades y magnitudes, la fracción aparece en el

operador razón

que transforma un número, una longitud, un peso, en otro.

De la relación razón establecida entre objetos se puede pasar al operador razón, que actúa sobre cantidades y magnitudes, mediante un estadio intermedio, la fracción en el

transformador,

tal como "aplicación a escala un medio", "prolongando $2\frac{1}{2}$ veces". Esta operación se realiza

sobre el objeto mismo,

aunque no por ruptura, sino por

aplicación y deformación.

Si nos alejamos paso a paso de la esfera concreta que rodea a las fracciones, llegaremos a la

fracción como medidora,

precediendo a una unidad —$2\frac{1}{2}$ en $2\frac{1}{2}$ kg, $2\frac{1}{2}$ m, $2\frac{1}{2}$ cc, $2\frac{1}{2}$ botellas— o sin una unidad como es el caso de $\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, … que mide segmentos

sobre la recta numérica,

el operador fracción

inverso del operador multiplicación

y la

fracción como número racional.

Como explicamos anteriormente, la didáctica tradicional sólo reconoce a la fracción en el operador fracturante, del cual pasa sin más al final de la secuencia: la fracción como número racional.

5.7. *La fracción en un operador*

Entre los aspectos de la sección 5.6 encontramos un aspecto de operador en tres ocasiones, que son

el fracturante

que pide actuar sobre *objetos concretos* rompiéndolos en partes equivalentes, el operador razón,

que coloca *las magnitudes en una razón* unas respecto a otras,

el operador fracción formalmente definido

en el *campo de los números.*

Las diferencias parecen innecesariamente complejas, pero didácticamente no lo son tanto —el medio en el cual actúa el operador fracción está siendo despojado de su concreción paso a paso. Inicialmente actúa en los objetos citados concretamente, mientras sus aspectos de magnitud son los factores que controlan la imparcialidad del procedimiento de distribución. Acto seguido, las magnitudes en sí mismas son objetos, mientras que los objetos concretos medidos por ellas son omitidos o pasados por alto en silencio. Aquí hay un nivel intermedio notable, el transformador, que, por decirlo de alguna manera, conserva la substancia mientras cambian proporcionalmente los valores de las magnitudes. Finalmente, el operador fracción actúa en el puro dominio del número, donde satisface la necesidad de inversos de los multiplicadores.

En la *relación* razón, el *operador* razón está, por así decirlo, coagulado, de una operación a una relación entre el objeto operado y el resultado. La fracción como un número de medida, como mota en la recta numérica, y finalmente como número racional es el resultado de aplicar el operador fracción a una unidad. En todos los aspectos de la fracción, se nota el aspecto operador. En una didáctica de las fracciones debería apreciarse, por consiguiente, y en enfoques modernos, de hecho, se ha realizado. Desafortunadamente, esto está aliado con concepciones erradas, expresadas en formulaciones tales como la "fracción como operador". Lógicamente tal interpretación es, desde luego, factible —números y vectores también pueden ser interpretados como operadores. En otra parte* he mostrado los cimientos didácticos en los cuales debe fundarse esta lógica. La interpretación de la fracción como un operador es insostenible, como lo es la terminología que implica. Uno necesita imperiosamente la fracción como *número*, que, a propósito, puede haber surgido al aplicar un *operador* fracción a una unidad. Esto significa que en el *operador fracción* se debe distinguir el *operador* de la *fracción*. El operador con una fracción *en él* no puede soportar un segundo yo en la forma de la fracción *como* operador.

Es un hecho que el aspecto operador es más importante para las fracciones que para los números naturales. En la constitución del objeto mental "número natural", es decisivo el crecimiento paralelo de la raíz cardinal y ordinal, y sólo después de que han sido constituidos los números naturales, se usan en operadores tales como "tres más que", "tres menos que", "tres veces (más que, menos que)".

Las fracciones, sin embargo, muestran el aspecto operador desde el principio, lo que justifica una didáctica llamada a sí misma —por exageración— la interpretación operador de las fracciones.

* *Mathematics as an Educational Task*, pp. 260-262.

Una operación que se conoce tan pronto como los números naturales es la operación de distribuir. Si se distribuye un grupo finito de objetos equivalentes en tres partes iguales, es decir, entre tres personas, cada parte es un tercio, esto es, un tercio del total —una extraña terminología[15] cuya fuente problemática he descubierto en la sección 5.3.9 —ahora estamos tan acostumbrados a este extraño uso del número ordinal que ya no somos conscientes de lo curioso que es, ni mucho menos nos sentimos inclinados a protestar por ello, ni a preguntarnos por qué año tras año multitudes de alumnos no lo comprenden.

5.8. *Modelos de la relación razón (Figuras 35—38)*

El modelo universal de magnitud es "número positivo", visualizado en la recta numérica como longitud, mientras otros modelos pueden ser didácticamente útiles, en particular si se trata de fracciones: área, volumen, peso, hora, por mencionar unos pocos. Longitudes y áreas tienen sus propias visualizaciones: con alguna precaución los volúmenes también pueden ser visualizados gráficamente, aunque las visualizaciones espaciales propiamente dichas, que al mismo tiempo pueden ser palpables, son altamente recomendables.

Los pesos pueden ser visualizados linealmente, en la escala de una balanza de farmacia o en el brazo de una antigua romana en los que se desplaza una pesa corrediza; el tiempo se visualiza sobre ejes de tiempo, desplazándose por toda la esfera del reloj, por así decirlo. Cada uno de estos modelos merece nuestra atención ya que puede ser útil en la relación razón.

Figura 35

No mencioné aquí el modelo clásico para fracciones: la distribución del pastel; por no mencionar otros más recientes, tales como las cajas de fracciones. Ciertamente en la práctica didáctica no deben ser omitidos. La distribución del pastel es la predecesora de divisiones generales del círculo que son aplicadas a diagramas de sectores estadísticos, en ruletas y en *spinners*. Como modelos didácticos para fracciones son especialmente efectivos si se ha de tomar conjuntamente varios sectores, con el fin de decir cosas sobre "m de n partes" o"p partes de esto contra q partes de aquello". En un *spinning top*[16], mezclar p partes de un color con q partes de otro color para obtener un cierto tono, es una

[15] Extraña en inglés, que no distingue el partitivo *tercio* del ordinal *tercero:* para lo que el castellano tiene esas dos palabras, el inglés sólo tiene *third.*

[16]Un *spinning top* es una peonza que se hace girar mediante un tornillo que entra y sale en su parte superior. Usualmente está dividido en sectores de varios colores.

ilustración efectiva de razones en mezclas. Igualmente, uno puede mezclar líquidos en una razón dada, e ilustrar la mezcla en un diagrama de sectores. Son buenas las ilustraciones ofrecidas por tiras de cuentas, muros y otros patrones en los que las cuentas, piedras, etc., de varios colores o tonos se alternan regularmente en una determinada razón fraccionaria —tres blancas y dos negras— un todo indefinido en el que no se sugiere ningún límite. Si el tema son las fracciones, las porciones particulares se expresarán mediante fracciones. Igualmente, la caja de fracciones puede ser usada estupendamente para hacer histogramas, pero debo decir que no he visto ninguna usada para ello.

Figura 36

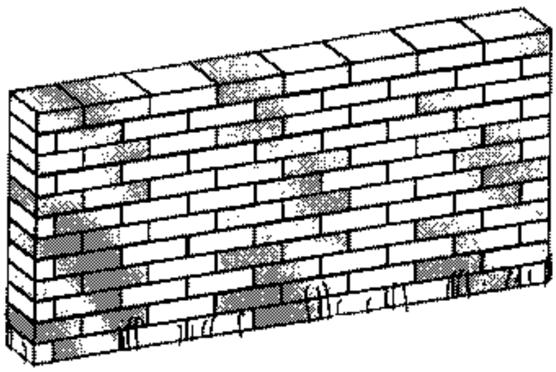

Figura 37

Quienquiera que use estos modelos tradicionales ha de tener en cuenta que no son suficientes. Su cruda concreción no debe seducirle hasta el extremo de confiar en ese enfoque limitado. La distribución del pastel tiene lugar *dentro del* pastel: el círculo que ha de ser dividido es el universo, que está dividido en sectores. La esfera del reloj puede ser manejarse con más suavidad: por la relación del tiempo, la restricción a una hora o a medio día se puede hacer desaparecer, la esfera puede, por así decir, ser desenvuelta en el eje del tiempo. La caja de fracciones es la herramienta más restringida: se resiste no sólo a la extensión sino también al refinamiento.

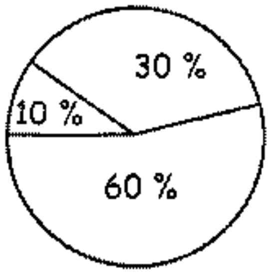

Figura 38

Las longitudes y áreas son los medios más naturales para visualizar magnitudes con respecto a la enseñanza de fracciones. Las longitudes surgen de los objetos rectos y “largos”[17] por medio de la congruencia como relación de equivalencia: si se admite objetos “largos” *arbitrarios*, las congruencias han de ser ampliadas a transformaciones de descomposición y recomposición o flexiones. Las áreas surgen de los objetos planos por la relación de equivalencia de la igualdad de área, que será tratada en el capítulo 13; las congruencias y las transformaciones de descomposición y recomposición contribuyen a la extensión de esta clase de equivalencia. En el proceso de la división del pastel, los sectores circulares son comparados por congruencia, lo que debe garantizar la igualdad del área o volumen.

Los segmentos lineales son la representación visual más simple de valores de magnitud. Dos valores de magnitud en una relación fraccionaria se visualizan fácilmente mediante dos segmentos lineales en la misma razón (figura 39); para hacer la comparación de la razón más fácil, las partes pertinentes se pueden marcar; los segmentos lineales representativos se toman, preferentemente, paralelos. Ésta, sin embargo, no es la única forma. Dos árboles contiguos (figura 40) que están en una razón fraccionaria, que puede ser presentada mediante medidas, o usando escalas intermedias; dos libros con grosores en razón fraccionaria; las edades en el eje del tiempo; los pesos en la escala de una báscula de pesa móvil, son otros ejemplos. La mayoría de estas representaciones muestra más de una dimensión lineal, lo cual significa que las otras extensiones pueden ser discutidas también. No son tan delgadas como las longitudes puras, de hecho.

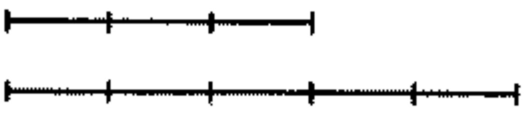

figura 39

[17]Freudenthal llama *long objects* a los objetos de los que se puede predicar la longitud, los objetos para los que tiene sentido hablar de su longitud. Esta expresión la he traducido por objetos “largos”, indicando con las comillas que hay que leer objeto “largo” en el sentido que le da Freudenthal.

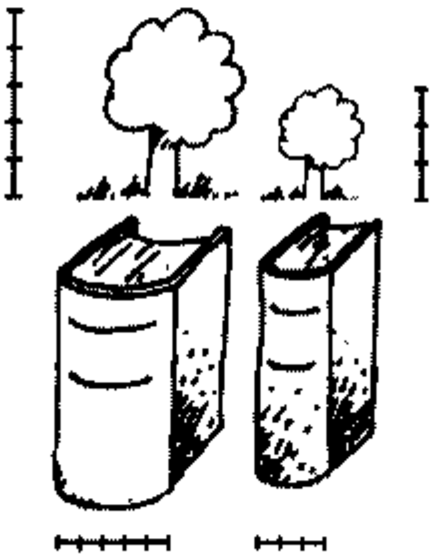

figura 40

Longitudes más delgadas pueden ser estilizadas por rectángulos bajos, tiras que son fijas en una extensión y variables en la otra (figura 41). Para sistematizar esto y para facilitar la comparación se debe dibujar el rectángulo en papel cuadriculado (figura 42), en el que comparar se reduce a contar. Pero, de nuevo, ésta no debería ser la única manera. Se deberían admitir figuras que se solapan a la estructura del papel cuadriculado o que están de través.

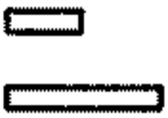

Figura 41

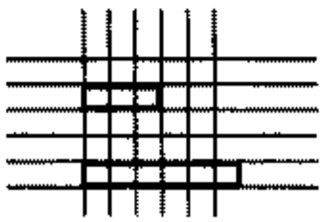

Figura 42

Subrayo una vez más que en todos estos casos los pares de objetos geométricos —segmentos lineales, dominios planos— pueden ser presentados por derecho propio para dar cuerpo a fracciones, o pueden ser representativos de otras clases de pares de objetos —dos árboles, dos libros, dos cuerpos con peso, dos intervalos de tiempo— que han de ser entendidos en su razón fraccionaria. Entonces pueden surgir acoplamientos bastante concretos: peso y precio en las básculas de las tiendas, peso *en* el platillo y longitud en el brazo o *en* la escala del peso de muelle.

5.9. *Modelos del operador razón*

De la forma más natural, "$\frac{3}{5}$ de" se representa mediante dos figuras, una es $\frac{3}{5}$ de la otra longitud o área. Sin embargo, este procedimiento representa

"$\frac{3}{5}$ de" insatisfactoriamente como un operador. Es como si se ilustrase una función no mediante una *gráfica* sino mediante *un punto de la gráfica*. Para una función lineal esto es, de hecho, suficiente, pero de ningún modo satisface nuestras expectativas. Para mostrar la acción de "$\frac{3}{5}$ de" en su dominio completo se necesitan otros recursos.

El artilugio más popular en nuestros días es sugerir una máquina —en el presente caso será la máquina "$\frac{3}{5}$ de". Con frecuencia, es meramente una sugerencia verbal ilustrada por un dibujo convencional. La entrada de la máquina es un dato numérico que, no obstante, puede también ser representado geométricamente. La máquina en sí misma no muestra ninguna estructura geométrica o de otra clase. Es una "caja negra". Hasta donde alcanza mi experiencia, autores de libros de texto, profesores y alumnos usan estas máquinas sólo verbalmente, sin relación con ninguna operación de fracción concreta. Mi impresión es que las máquinas deben su origen a los intentos de introducir el *concepto* de función, antes que a las funciones como objetos mentales; las falsas concreciones que son entonces ineludibles han adoptado aquí la forma de una pseudoconcreción: una sugestión verbal.

El dibujo de la distribución de flujo proporciona más concreción para encarnar las fracciones (figura 43). De hecho, la magnitud que fluye hacia adentro y hacia afuera existe sólo en la imaginación —es reemplazada, por así decirlo, por un tiempo indefinido—, pero la imagen bifurcada puede representar la parte fraccionaria (y su complemento) con precisión geométrica.

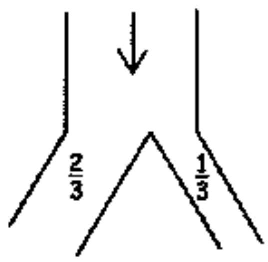

Figura 43

Cualquiera que sea el modelo elegido, uno es libre de interpretarlo arbitrariamente, por ejemplo, la imagen del flujo como longitud, peso, moneda, etc.

5.10. *Modelos del operador razón mediante aplicaciones*

Un cuadro geométrico completo de las operaciones con fracciones, y no sólo geométrico sino global, se obtiene tan pronto como éstas se interpretan de forma genuina mediante operaciones geométricas. Para hacer esto, se aplican rectas unas sobre otras. Hay unas pocas posibilidades, todas ellas aplicaciones afines (figura 44):

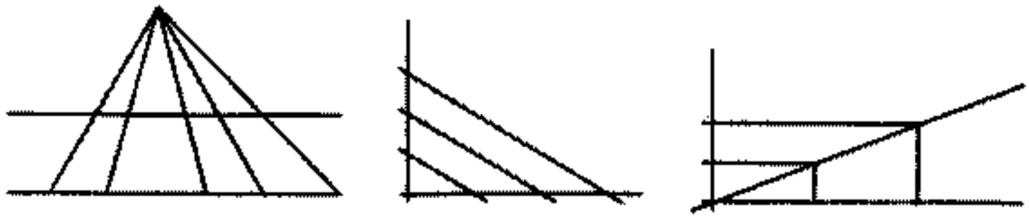

Figura 44

proyección central de líneas paralelas (sombra de la lámpara),

proyección paralela de, pongamos, líneas ortogonales (sombra del sol),

composición de dos proyecciones paralelas (tal como la usada en la representación gráfica de una función lineal).

Realizar las construcciones geométricas en detalle puede ser tanto ventajoso como desventajoso: todos los detalles se vuelven conscientemente claros, pero los procedimientos se alargan.

Un modo más atractivo es usar

planos, mejor que líneas, esto es, *planos de proyección*.

Las construcciones detalladas son mucho más difíciles de realizar, pero puede fácilmente prescindirse de ellas si los dibujos están diferenciados para mostrar claramente qué puntos se corresponden entre sí en el original y en la imagen (figura 45). Lo que quiero decir es: dos figuras contiguas, una, ampliación o reducción de la otra, en las que la misma relación razón puede ser establecida para cada detalle particular. Lo mismo puede hacerse en tres dimensiones

Un peligro que hay que prever si se usan tales representaciones de 2 o 3 dimensiones es la posible confusión de las razones de longitud, área, y volumen. Sin embargo, incluso si es la razón de longitudes lo que importa, se ha de preferir las figuras planas como medios de representación por su expresividad más global; entonces, para subrayar la longitud, uno puede valerse de dos artificios:

como figuras planas uno elige bandas estrechas, que son transformadas sólo según la longitud, mientras que se distinguen lugares mediante adornos,

o se toman partes bidimensionales simples, que se transforman según ambas dimensiones, a las que se adjuntan dibujos que sugieren una dimensión, tales como gusanos, serpientes, látigos, monturas de gafas.

mediante la construcción de modelos en diferentes escalas.

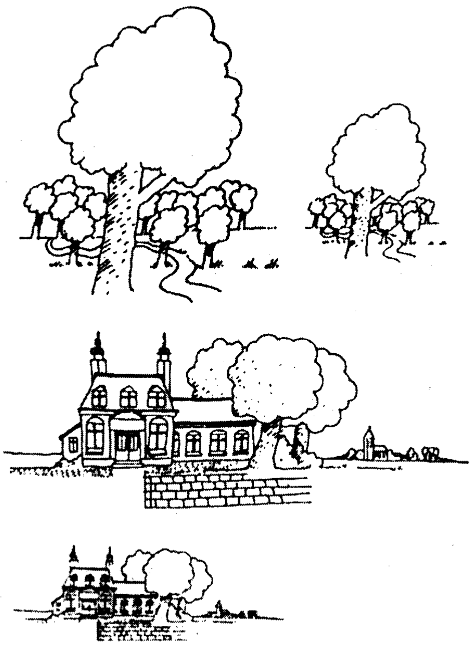

Figura 45

5.11. *Teoría matemática del número racional desde el punto de vista del operador razón*

Es harto conocido cómo se introducen los números racionales, empezando con los números naturales (o enteros): se consideran pares ("fracciones") de enteros con un segundo miembro distinto de cero y se prescribe una relación de equivalencia

$$\lceil m, n \rceil \approx \lceil m_1, n_1 \rceil \leftrightarrow mn_1 = m_1 n;$$

los números racionales son entonces las clases de equivalencia de estos pares. Las operaciones aritméticas están definidas apropiadamente para los pares y, por consiguiente, para las clases de equivalencia.

Esbozo ahora cómo se hace esto si se elige el operador multiplicación para comenzar con él y se sigue una vía genética *a priori* en vez de una vía axiomática *a posteriori*. Las fracciones, entonces, no son el resultado de una definición; en cambio, se descubren y describen.

Consideramos una magnitud S y dentro de S multiplicaciones por números naturales ($\neq 0$), lo que forma un conjunto M, con la composición como una operación en M. M entonces es

un semigrupo conmutativo
con identidad y una
regla de cancelación: $a \circ x = a \circ y \to x = y$

Tales semigrupos, en general, pueden ser extendidos a grupos, lo que se prueba fácilmente.

En el caso presente es incluso más fácil porque los elementos del semigrupo se dan como multiplicaciones dentro de una magnitud S. Expongo la secuencia de pasos (las letras itálicas son números naturales distintos de cero):

(1) "k veces" es una aplicación inyectiva de S en sí misma.

(2) El inverso de "k veces" se llama "k–ésima parte de".

(3) Todas las "k veces" forman un conjunto M; la "k–ésima parte de", un conjunto M^{-1}.

(4) (k veces) o (m veces)=km veces.

(5) M es cerrado y conmutativo para la composición.

(6) Dado un conjunto T y aplicaciones inyectivas φ, ψ de T en sí mismo, entonces, de

$$\varphi \circ \psi \circ \psi^{-1} \circ \varphi^{-1} = \text{identidad}$$

se concluye:

Si φ y ψ conmutan, entonces φ y ψ^{-1} también, así como φ^{-1} y ψ^{-1}, además $(\varphi \circ \psi)^{-1} = \psi^{-1} \circ \varphi^{-1}$.

(7) Aplicando (6) a S en vez de a T y dos elementos de M en lugar de φ, ψ, se obtiene

$M \cup M^{-1}$ con la composición, ya que su operación es conmutativa.

(8) De la última parte de (6) se deduce que

(n–ésima parte de)o(m–ésima parte de)=(mn–ésima parte de).

(9) Se define

$\left(\frac{m}{n}\text{ de}\right)$=($m$ veces)o(n–ésima parte de)

que, de acuerdo con (7) puede también ser escrito

=(n–ésima parte)o(m veces).

Aquí $\frac{m}{n}$ todavía no se concibe como símbolo de un número racional. Es más bien un símbolo arbitrario, expresado por medio de m y n.

(10) La regla de multiplicación

$$\left(\frac{m}{n}\text{ de}\right)\circ\left(\frac{k}{l}\text{ de}\right)=\left(\frac{mk}{nl}\text{ de}\right)$$

se deriva de (9), (8), (7).

(11) $$\left(\frac{k}{k}\text{ de}\right)=(1\text{ vez})$$

se deriva de (8) y (2).

(12) La regla de cancelación

$$\frac{mk}{nk}\text{ de}=\frac{m}{n}\text{ de}$$

se deriva de (10) y (11). Esto nos permite presentar números racionales como clases de fracciones.

(13) Los $\left(\frac{m}{n}\text{ de}\right)$ forman un conjunto *N*, que, según (11), es cerrado y conmutativo.

(14) $\left(\frac{m}{n}\text{ de}\right)$ es una aplicación inyectiva de *S* en sí mismo con $\left(\frac{n}{m}\text{ de}\right)$ como su inverso.

(15) *N* es un grupo conmutativo de aplicaciones inyectivas de *S* en sí mismo.

Parece terriblemente complicado, aunque refleja nada más que la existencia de números racionales en los operadores multiplicación; falta la suma, y los números racionales no están liberados todavía de su formulación como operador. Sin embargo, la secuencia anterior no debe entenderse en el sentido de que cualquiera de sus pasos se haría explícito, excepto si se hace paradigmáticamente. Si miramos más de cerca lo que se requiere didácticamente en esta línea de pensamiento, entonces obtendremos la siguiente secuencia:

el objeto mental “aplicación inyectiva”, aunque especializado a estiramientos y contracciones del rayo numérico,

la actividad mental de componer e invertir aplicaciones,

el reconocimiento de “*k* veces” (para *k* paradigmático) como una aplicación inyectiva y la identificación de ciertas aplicaciones como “*k* veces”, el ver e identificar el inverso de "k veces" como "k–ésima parte de" o "$\frac{1}{k}$ de" (conocido así desde la tarea de división),

la composición mental de "k veces" y "m veces" (para k y m paradigmáticos) y el reconocimiento del resultado como "km veces",

la composición mental de "n–ésima parte de" y "m–ésima parte de" (para n y m paradigmáticos) y el reconocimiento del resultado como "mn–ésima parte de",

la definición y reconocimiento como una aplicación de "$\frac{m}{n}$ de" como compuesto de "m veces" y "n–ésima parte de" en orden arbitrario,

la composición mental de "$\frac{m}{n}$ de" y "$\frac{k}{l}$ de" y la comprensión de la regla de multiplicación,

la comprensión de las reglas de cancelación,

invertir "$\frac{m}{n}$ de" en "$\frac{n}{m}$ de".

Los únicos pasos del análisis matemático que no figuran en esta secuencia didáctica imaginaria son aquellos en los que la conmutatividad está adscrita a ciertos pares de aplicaciones. En la mayoría de los casos esta propiedad es tan obvia que hacerla explícita causaría confusión. El único caso en que se requiere hacerlo es en la conmutatividad de "m veces" y "n–ésima parte de".

Es quizás sorprendente que, en el análisis matemático, el inverso de "m veces" no se llama inmediatamente "$1/m$ veces" sino "$1/m$ de" —matemáticamente visto, la nomenclatura no está limitada por ninguna regla. Lo hacemos así porque —como se ha añadido entre paréntesis— el inverso de "m veces" debe ser identificado primero con la forma familiar y visualmente enraizada "m–ésima parte de", y etiquetar este inverso con "$1/m$ de" requiere una motivación que debe ser preparada cuidadosamente.

El enfoque anterior apenas puede ser comparado con el de introducir los números racionales como clases de equivalencia de pares de números: la aproximación por operadores sigue una secuencia didáctica, mientras que la que utiliza clases de equivalencia da cuenta formalmente de una habilidad aritmética ya adquirida.

¿Hasta qué punto la secuencia descrita anteriormente y justificada matemáticamente puede ser realizada? Bien, ésta es una pregunta formulada erróneamente. De hecho, esta secuencia debe estar implícita en cualquier didáctica de las fracciones —es, mejor dicho, una lista de comprobación. El verdadero problema es que la secuencia no tiene cuerpo. Restringirse uno mismo a esta lista sería un pasatiempo, inspirado en una búsqueda errónea de la pureza del método. La secuencia no tiene cuerpo, su base es demasiado estrecha. Es como andar con anteojos que, por otra parte, no le protegen a uno suficientemente de las perturbaciones.

Ambas, la secuencia didáctica y la matemática, comienzan con aplicaciones (multiplicaciones) en una magnitud. Esta magnitud debe ser especificada de alguna manera y la especificación más obvia es la longitud, visualizada como un rayo numérico (o recta numérica), que debemos suponer familiar a los alumnos. Ahí, las multiplicaciones por números naturales son aplicaciones fácilmente reconocibles, así como sus productos e inversos. Esta reconocibilidad intuitiva, de cualquier manera, es insuficiente; la comunicación requiere verbalización, que inicialmente puede ser ostensiva, pero gradualmente debe ser refinada por medio de recursos lingüísticos relativos y funcionales*. Un sistema de flechas desde (variable) x a mx para mostrar "m veces" permanece bloqueado en la esfera ostensiva. Se requieren recursos lingüísticos más sofisticados: por ejemplo,

indicar un punto mediante A,

la imagen de sus "m veces" mediante mA,

la imagen de "$\frac{1}{n}$ de" mediante $\frac{1}{n}\ A$,

la imagen de "$\frac{m}{n}$ de" mediante $\frac{m}{n}\ A$,

lo que se reduce a trazar escalas racionales positivas en el rayo numérico y ponerlas en relación mutua.

Éste puede ser un ejercicio bastante útil en detalle, si no fuera por el hecho de que el rayo numérico es ya familiar para los alumnos, como la regla infinita, en la que los números naturales están alojados, quizás incluso intercalados con algunas fracciones. Esta presencia no se puede obscurecer. En realidad, se encuentra incluso sistematizada: aplicando la operación "$\frac{1}{m}$ de" a los números naturales, que puede asumirse que esté prefigurada en el rayo numérico, todos los números racionales nacen en el rayo numérico. Esto no sería un inconveniente si ocurriera algo más tarde. Siendo como es, los números racionales desempeñan ahora una doble tarea: números alojados en la recta numérica y partes lingüísticas de los operadores razón. A largo plazo esto es desde luego inevitable y en cierto momento esta consecuencia *debe* ser aceptada y hecha consciente, pero entonces uno *debe* ser capaz de elegir ese momento de tal manera que la consecuencia *pueda* hacerse consciente para que el número racional pueda desempeñar su doble papel bien y de forma no perturbada.

Esto, de cualquier manera, no es la mayor objeción en contra de la secuencia didáctica incorpórea. Intencionadamente tengo a las fracciones marchando en un amplio frente fenomenológico. La abundancia fenomenológica debería ser puesta al servicio del uso correcto. Los pasos

---

* *Weeding and Sowing*, cap. IV, sección 15.

aislados en la secuencia matemática no deben ser tomados *in abstracto*, sino en un contexto diversificado. Incluso si cada uno de los pasos pudiera ser tomado paradigmáticamente, uno no debería esperar que en la secuencia *didáctica*, en la cual intento realizar didácticamente la secuencia *matemática,* contenga automáticamente los paradigmas que se quieren.

Deseo añadir que además de la realización didáctica de la secuencia matemática debe crearse un espacio para

> sumar y restar fracciones,
> aislar las fracciones como parte del operador razón,
> reemplazar "$\frac{m}{n}$ de" por "$\frac{m}{n}$ veces".

Incluso con ello, aún no podría dar cuenta de la algoritmización o formalización de la aritmética de fracciones.

Voy a esbozar ahora una secuencia didáctica rica para la aritmética de las fracciones.

5.12—23 *Una secuencia didáctica rica para la aritmética de las fracciones*

5.12. Ocho botellas de cerveza, tres personas y cada una toma su parte justa — una niña de diez años reacciona ante este problema estableciendo una división con decimales y reprochándome que no termina. A mi respuesta "pues lo compartieron" reacciona como si hubiera despertado de un sueño —de repente se da cuenta de que hay más cosas entre cielo y tierra que las soñadas en las lecciones de aritmética que ella ha tenido hasta ese momento.

Dibuja esbozos de ocho botellas unas al lado de otras, divididas cada una de ellas en tres partes, da a cada persona ocho tercios —en realidad ella no conoce esta palabra, pero dice "botellitas"— y porque lo sugería el problema en su conjunto ella dio a *A* la parte de la izquierda, a *C* la de la derecha, y a *B* la parte del medio.

Posiblemente habría alumnos que asignarían todas las partes de abajo a *A*, las del medio a *B* y las de arriba a *C*. "¿Puede hacerse de otro modo?", se puede preguntar. Los niños hallan una rica variedad de soluciones. (Las permutaciones contempladas son 280, pero la intención de esta pregunta no es encontrarlas todas).

El mismo problema puede ser planteado con otros números. Es particularmente instructivo intentarlo con los siguientes, unos tras otros:

> 24 botellas y 5 personas,
> 26 botellas y 5 personas.

En un contexto visual los niños aprenden

> con respecto a una m-partición a cambiar los todos en m–ésimos (para m pequeño), usando particiones aditivas de k en $k_1+\ldots+k_i$, con

> la intención de obtener particiones aditivas de $\frac{k}{m}$ en $\frac{k_1}{m}$ +… $\frac{k_i}{m}$, ejercitando, en particular, la partición de todos.

La notación inicial es k m-ésimos; la notación $\frac{k}{m}$ es de aparición posterior. Si los todos se dividen, la notación inicial sería $1+1+\frac{2}{3}$, $2+\frac{2}{3}$, para finalizar con $2\frac{2}{3}$.

El propósito es

> transferir adición, substracción, relación de orden desde **N** isomórficamente a $\frac{1}{m}$ **N** $\left(x \to \frac{x}{m}\right)$

mientras se afloja el vínculo visual esto puede mantenerse mediante tablas como

0	1	2	3	
$\frac{0}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	

0	1	2	3	4
$\frac{0}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{4}{12}$
$=0$		$=\frac{1}{6}$	$=\frac{1}{4}$	$=\frac{1}{3}$

En este punto se puede practicar la simplificación de fracciones con denominadores como 12, 24, 60.

Entonces se visualizan tablas nuevamente en la recta numérica en las que los puntos correspondientes se unen (figuras 46 y 47).

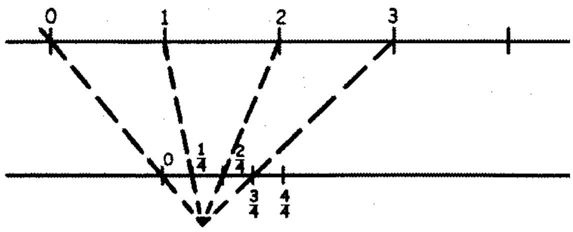

Figura 46

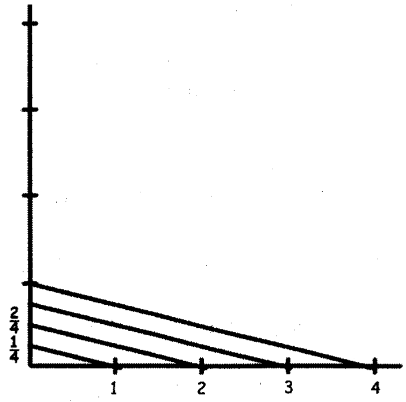

Figura 47

Las multiplicaciones pueden prepararse como adiciones repetidas: después de plantear

$$\frac{2}{3}+\frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}$$

hacer la pregunta: "¿Cómo puedes decirlo de otras maneras?"

Ejemplos cautos de división:

la mitad de $\frac{2}{3}$, de $\frac{4}{3}$, de $\frac{6}{3}$,

y aún más cautamente

un tercio de $\frac{2}{3}$ …

5.13 Se distribuye cerveza entre parejas y después viene la distribución entre ambos miembros de cada pareja —una secuencia algo más compacta que la anterior, que pretende

transferir la adición, substracción, orden desde $\frac{1}{n}$ N a $\frac{1}{pm}$ N $\left(x \to \frac{1}{p}x\right)$ y entender el isomorfismo $x \to \frac{1}{pm}\ x$ como el producto de los isomorfismos $x \to \frac{1}{m}\ x$ y $x \to \frac{1}{p}\ x$.

La misma situación visualizada por modelos de flujo o de árbol produce la figura 48.

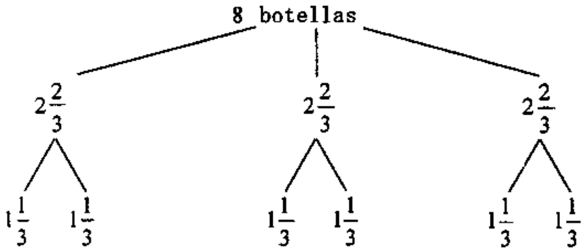

Figura 48

5.14 Un dibujo de un rebaño de ovejas: el granjero vende una de cada tres (esto es, $\frac{1}{3}$). Táchalas. ¿Qué queda? Si había 120, ¿cuántas se vendieron?, ¿cuántas quedaron?

$\frac{1}{3}$ de 120= $\qquad$ $\frac{2}{3}$ de 120=

El tablero con cien cuadritos: colorea de rojo $\frac{1}{5}$ de los cuadrados. ¿Puede hacerse de modo diferente? Colorea $\frac{2}{5}$ rojos. ¿Puede hacerse de otra manera? ¡Encuentra pautas hermosas!

Lo mismo con un muro de ladrillos —todo indefinido.

Una lotería con mil lotes. Uno de cada cinco gana. ¿Cómo fijas cuáles? Uno de los cinco obtiene al menos la devolución de su apuesta; un tercio de éstos, dobla su apuesta. ¿Cuántos?

Hay 10 primeros premios —esto es, uno de cada…

Toma una cinta; dóblala en dos, en tres. ¿Qué parte de la original es la cinta doblada? Dóblala hasta que sea un sexto.

Cintas que se encuentran una debajo de otra en una razón visual $m : n$. Si una vale A, ¿cuánto valdrá la otra?

El objetivo de estos problema es

> reconocer y evaluar casos de la función $x \rightarrow \frac{1}{m}x$ en relaciones y visualizaciones numéricas.

5.15 $\frac{m}{n}$ ha funcionado sistemáticamente como un número solamente en medidas tales como $\frac{2}{3}$ de botella, $\frac{2}{3}$ de cinta. Lo siguiente pretende

constituir, construir, reconocer la función $x \rightarrow \frac{m}{n}x$

Aquí está el árbol *A*.
Dibuja el árbol *B* la mitad de alto que el *A*.
Dibuja el árbol *C* tres veces más alto que el *B*.
Dibuja el árbol *D* un tercio del árbol *C*.
Dibuja el árbol *E* cinco veces más alto que el *D*.
Dibuja el árbol *F* un tercio del *E*.

Puedo escribir también

$B = \frac{1}{2}$ de A,
$C = 3$ veces $B = \ldots A$,
$D = \frac{1}{3}$ de $C = \ldots B = \ldots A$,
$E = 5$ veces $D = \ldots C = \ldots B = \ldots A$,
$F = \frac{1}{3}$ de $E = \ldots D = \ldots C = \ldots B = \ldots A$.

Yo poseo una

lente convexa a través de la cual veo todo 3 veces más grande

y una

lente cóncava a través de la cual veo todo $\frac{1}{5}$ de grande.

Miro la flor a través de ambas en hilera (Figura 49)

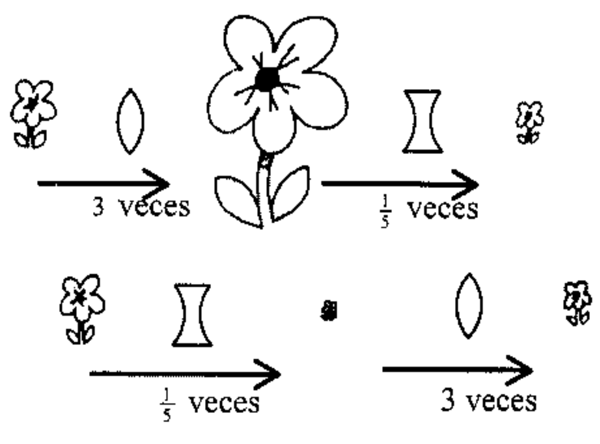

Figura 49

¿Cuál es el resultado en ambos casos?

Una variedad de ejemplos debería servir para

> ejercitar la composición de la función $x \to mx$, $x \to \frac{1}{n}x$ en un número arbitrario, soportable visualmente al igual que numéricamente aislado, por ejemplo, evaluando ($\frac{1}{3}$ de) (5 veces) ($\frac{1}{6}$ de) (2 veces) aplicado a longitudes y números, y reconociéndolo como $\frac{5}{9}$.

5.16 Lo que sigue sirve para

> reemplazar "$\frac{m}{n}$ de" por "$\frac{m}{n}$ veces".

Como se ha mencionado anteriormente, la mayoría de los libros de texto no se preocupan por motivar esta equivalencia. Es molesto que "tres veces" sea una operación natural, como es "$\frac{1}{3}$ de", mientras la lengua vernácula no da cuenta de su carácter similar. Hay, sin embargo, una oportunidad, como se destacaba anteriormente, en la que el lenguaje cotidiano —hasta donde yo sé, en todos los idiomas— admite el paso desde "$\frac{m}{n}$ de" a "$\frac{m}{n}$ veces", a saber, en procesos cíclicos:

> girar la llave $2\frac{1}{2}$ veces en la cerradura,
>
> la manecilla grande ha rodado $3\frac{1}{2}$ veces alrededor del reloj,
>
> el satélite ha dado la vuelta $10\frac{2}{5}$ veces alrededor de la Tierra —¿dónde está ahora?
> el tiovivo ha dado la vuelta $5\frac{1}{2}$ veces,
> también lo ha hecho la noria —¿dónde estarás ahora?

Los circuitos irregulares en la feria,

> la montaña rusa,
> la casa encantada,

permiten la misma cuestión, así como los movimientos oscilantes,

> reemplazar "$\frac{m}{n}$ de" por "$\frac{m}{n}$ veces".

Como se ha mencionado anteriormente, la mayoría de los libros de texto no se preocupan por motivar esta equivalencia. Es molesto que "tres veces" sea una operación natural, como es "$\frac{1}{3}$ de", mientras la lengua vernácula no da cuenta de su carácter similar. Hay, sin embargo, una oportunidad, como se

destacaba anteriormente, en la que el lenguaje cotidiano —hasta donde yo sé, en todos los idiomas— admite el paso desde "$\frac{m}{n}$ de" a "$\frac{m}{n}$ veces", a saber, en procesos cíclicos:

> girar la llave $2\frac{1}{2}$ veces en la cerradura,
>
> la manecilla grande ha rodado $3\frac{1}{2}$ veces alrededor del reloj,
>
> el satélite ha dado la vuelta $10\frac{2}{5}$ veces alrededor de la Tierra —¿dónde está ahora?
>
> el tiovivo ha dado la vuelta $5\frac{1}{2}$ veces,
> también lo ha hecho la noria —¿dónde estarás ahora?

De los procesos cíclicos a los periódicos,

> $3\frac{1}{2}$ cientos de veces haciendo tic–tac el reloj (mecanografiando, rodando el odómetro, saltando)

y al rodar una rueda

> ¿cómo de lejos tras girar 1, 2, 3 veces , $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{3}$ veces?

Esto conduce de un modo natural a

> $1\frac{1}{2}$ veces, $2\frac{2}{3}$ veces una medida dada,

que puede darse también numéricamente.

Se establece por tanto un lenguaje natural de "$1\frac{1}{2}$ veces", "$2\frac{2}{3}$ veces". Como ejemplos he tomado hasta aquí fracciones mixtas, que veo que son didácticamente importantes. En $4\frac{2}{5}$ veces la parte entera 4 sugiere qué operación debería realizarse y arrastra tras sí $\frac{2}{5}$. En la progresión de la secuencia didáctica, sin embargo, las fracciones propias aparecerían más frecuentemente.

5.17 De momento

> "$\frac{m}{n}$ de" y "$\frac{m}{n}$ veces"

están juntas; al final deberán

> ser identificadas una con otra.

Esto puede hacerse aplicándolas en donde ambas sean significativas (Figura 50):

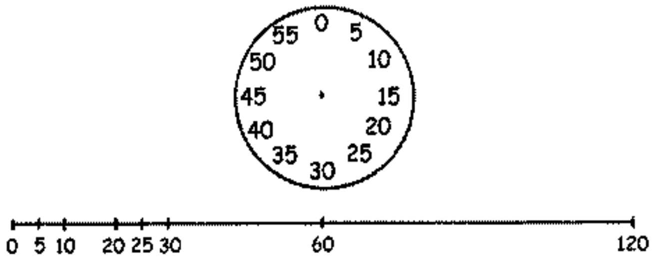

Figura 50

$\frac{1}{2}$ veces 60 (alrededor del reloj)=$\frac{1}{2}$ de 60 (en el segmento lineal)

$2\frac{2}{3}$ veces 60 (alrededor del reloj)=$2\frac{2}{3}$ de 60 (en el segmento lineal).

Es crítico que

la identificación se haga consciente

para que se pueda invocar su recuerdo, si hay errores. De la misma manera,

conscientemente: $\frac{2}{3}$ de $1 = \frac{2}{3}$ veces $1 = \frac{2}{3}$.

Identificar la fracción en el operador de fracción y la fracción como número racional se aplaza, sin embargo. $\frac{5}{3}$ se introducía como

"5 veces $\frac{1}{3}$ de" o "$\frac{1}{3}$ de 5 veces".

Ahora el asunto sería

conscientemente: "5 veces $\frac{1}{3}$ veces" o "$\frac{1}{3}$ veces 5 veces".

En general, otros ejemplos deben repetirse para

reemplazar conscientemente "$\frac{m}{n}$ de" por "$\frac{m}{n}$ veces".

5.18 Dado un punto A en el rayo, la escala racional de $\frac{m}{n}A$ se construye sistemáticamente —la expresión se lee como $\frac{m}{n}$ veces A.

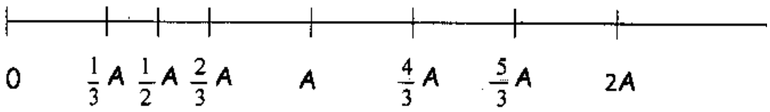

Figura 51

En este dibujo (Figura 51)

para un punto $\frac{p}{q}A$

su imagen por "m veces",
su imagen por "$\frac{1}{n}$ veces",
su imagen por "$\frac{m}{n}$ veces"

puede ser localizada, de manera que

a la escala de los múltiplos racionales de *A*, se aplica la operación "$\frac{m}{n}$ veces",

para validar paradigmáticamente la fórmula

$$\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}A=\frac{m\cdot p}{n\cdot q}A.$$

De aquí, mediante la eliminación de *A*, la

fórmula de multiplicación

$$\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}=\frac{m\cdot p}{n\cdot q}$$

se hace

consciente paradigmáticamente.

Los ejercicios en casos especiales tales como

$$\frac{m}{n}\cdot\frac{n}{m}=1,$$

$$\frac{m}{n}\cdot\frac{n}{q}=\frac{m}{q}$$

están incluidos.

5.19 Parece natural añadir la división de fracciones a esta secuencia, a saber, como el inverso de la multiplicación

$(?x)ax=b$.

En el caso $b = 1$ este problema se resolvió al final de la sección 5.18:

$(?x)ax=1$

se resuelve dando la vuelta a la fracción que representa a, cabeza abajo, y para resolver

$(?x)ax=b$,

este resultado ha de ser multiplicado por b. Esto, sin embargo, no responde didácticamente al problema de la división de fracciones. Toda pista de que dividir está de alguna manera relacionado con la realidad falta en esta aproximación.

Interpretar $b : a$ como una

división distributiva,

esto es, como partición de b en a partes, carece igualmente de sentido a menos que a sea un entero.

Es más apropiado entender $b : a$ como una

división razón,

que contesta a la pregunta

¿cuántas veces cabe a en b?,

por ejemplo, si ambos se visualizan como longitudes. Pero entonces es más apropiado hacer esta pregunta honestamente en el contexto de razones, que abordaremos en el próximo capítulo. Presupongamos este contexto por un momento como una precondición didáctica, con la conclusión operativo:

las divisiones $b : a$ y $bc : ac$ ($c \neq 0$) son equivalentes,

esto es, dan el mismo resultado. De hecho, éste es un importante principio que no se hace significativo hasta que las fracciones están en juego —esto no valdría para divisiones con resto.

Desde luego este principio puede también ser motivado si la división se entiende como el inverso de la multiplicación:

$ax=b$ y $acx=bc$ ($c\neq 0$)

tienen la misma solución x. Así como en el contexto de "razón" el principio puede ser también motivado con enfoques simples, tales como

$\frac{2}{3}$ cabe en $\frac{4}{3}$ tantas veces como 2 en 4,

$\frac{2}{3}$ cabe en 6 tantas veces como 2 en 18,

$\frac{2}{3}$ cabe en $\frac{7}{6}$ tantas veces como 4 en 7,

$\frac{2}{3}$ cabe en $\frac{8}{5}$ tantas veces como 5 en 12.

Lo esencial de este principio es

reducir la división de fracciones a la de *enteros*
vía fracciones con *igual denominador*

—un procedimiento que es formalmente equivalente a

multiplicar con el divisor puesto al revés,

aunque está mejor motivado didácticamente.

5.20 Sumar, restar y comparar fracciones se apoyan en la imagen de la recta numérica, tal como se preparó en la sección 5.12:

comprender visualmente la situación mutua de

$\frac{1}{4}$ **N** y $\frac{1}{6}$ **N**;

encontrar para los p y q paradigmáticos un r tal que

$\frac{1}{p}$ **N** y $\frac{1}{q}$ **N**;

están comprendidos en $\frac{1}{r}$ **N**.

Sumar, restar y comparar se realiza, de acuerdo con la sección 5.12, en un $\frac{1}{n}$ **N**, que se produce en cada caso particular.

5.21 Las combinaciones de sumas y multiplicaciones se ejercitan en modelos de flujo (Figura 52):

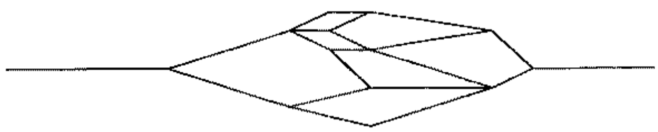

Figura 52

5.22 Finalmente, los logros se ejercitan en alargamientos y reducciones.

Dibujos I, II, III del mismo objeto,

> transición de I a II por multiplicación por el factor *a*,
> transición de II a III por multiplicación por el factor *b*,
> ¿de I a III?

(*a*,*b*, son fracciones paradigmáticas).

5.23 En la didáctica tradicional de las fracciones, la multiplicación está vinculada al patrón rectangular antes que al operador fracción. En nuestra particular secuencia didáctica elegimos el operador fracción; en esta *estructura* el modelo rectangular no se acomoda con facilidad. Esto no significa que deba ser abandonado. Puede estar ligado a 5.20 si no se presenta antes, aunque ciertamente no en la restringida forma tradicional de mera *sub*división de un rectángulo.

La siguiente secuencia didáctica está basada en un tratamiento previo de áreas de rectángulos y figuras semejantes (Figura 53). Está bordado en el patrón del

> producto cartesiano de $\frac{1}{n}$ **N** y $\frac{1}{q}$ **N**.

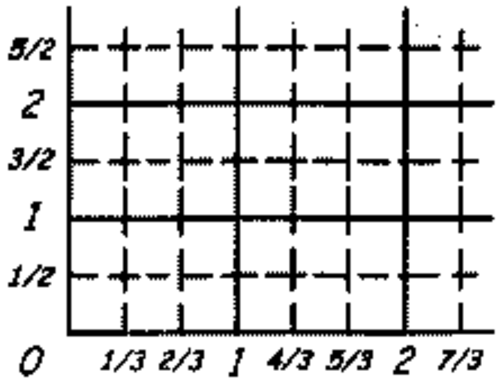

Figura 53

El problema típico es:

> calcular el área de un rectángulo de lados $\frac{m}{n}$ y $\frac{p}{q}$.

A esto se puede añadir la secuencia:

> dado un rectángulo, encontrar otros con la misma área.

Estos rectángulos están construidos con el ángulo suroeste común y reunidos en tablas (Figura 54).

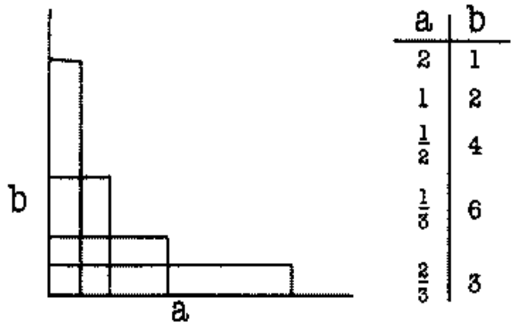

Figura 54

Otra versión:

> dado un rectángulo, encontrar rectángulos de *a* veces su área.

Esta secuencia será considerada en la sección del área en el capítulo 13.

5.24. *Fracciones decimales*

Ya en las propuestas de Stevin*, las fracciones decimales se conectaron estrechamente a un sistema decimal de medida. Se deberían volver a tratar en ese contexto y entonces el problema debería encararse así: el porqué de la existencia de ambas fracciones, decimales y comunes; la precisión y el redondeo de los números decimales; tantos por cien y por mil; la notación típica. Aquí nos restringimos a asuntos estrechamente relacionados con la sección 5.12.

Las fracciones decimales se introducen consecutivamente como elementos de redes cada vez más finas

$\frac{1}{10}$ **N** ($\frac{1}{10}\cdot 31$ escrito como 3'1),
$\frac{1}{100}$ **N** ($\frac{1}{100}\cdot 314$ escrito como 3'14),
$\frac{1}{1000}$ **N** ($\frac{1}{1000}\cdot 3141$ escrito como 3'141),

y así sucesivamente. Estas transiciones son paralelas a las transiciones desde mm a cm, dm, m, …, y de g a dg, kg, y así sucesivamente.

Las conexiones se hacen de nuevo entre las capas

$$\mathbf{N}, \frac{1}{10}\mathbf{N}, \frac{1}{100}\mathbf{N}, \frac{1}{1000}\mathbf{N}, \ldots$$

esto es

$$a = \frac{1}{10}\cdot 10a, \text{ etc.},$$

así,

* Simon Stevin de Brujas en su librito *La Disme* (1585).

3’14=3’140, y así sucesivamente.

Adición, substracción, comparación se realizan en cada red

$$\frac{1}{10}\ \mathbf{N},\ 1\frac{1}{100}\ \mathbf{N},\ \frac{1}{1000}\ \mathbf{N}$$

separadamente. La multiplicación vincula dos redes una a otra. Gracias a

$$\frac{1}{10^p}\ a \cdot \frac{1}{10^p}\ b = \frac{1}{10^{p+q}}\ ab \qquad (a \in \mathbf{N}, b \in \mathbf{N})$$

se obtiene

$$\frac{1}{10^p}\ \mathbf{N} \cdot \frac{1}{10^p}\ \mathbf{N}\ \frac{1}{10^{p+q}}\ \mathbf{N}$$

El algoritmo de la multiplicación se aumenta con una

regla sobre la colocación del punto decimal.

En las divisiones se tiene cuidado, de acuerdo con 5.19, con que el dividendo y el divisor pertenezcan a la misma red; esto es, transformar el problema en la forma

$$\frac{1}{10^m}\ a : \frac{1}{10^m}\ b,$$

que es equivalente a

$$a : b.$$

5.24a *Un comentario didáctico*

En la enseñanza compensatoria y en las observaciones en las instituciones de formación de profesores (cf. sección 4.36a), se me ocurrió que la didáctica usual, que apunta a la enseñanza de reglas para el lugar del punto decimal puede conducir a un bloqueo de la intuición y de la necesidad de intuición. Una vez estas reglas han sido formuladas y aprendidas, es casi imposible corregir aplicaciones erróneas, mediante la apelación a la intuición. Si se necesitan, tales reglas serían el término de un desarrollo, que no puede ser acelerado artificialmente. Las reglas se entenderían en diferentes niveles.

El más bajo es comenzar con la explicación de que a la izquierda del punto decimal están los enteros y de que al punto decimal le siguen por la derecha las décimas, centésimas y así sucesivamente, y le preceden por la izquierda las unidades, decenas, centenas y así sucesivamente. Multiplicar por 10 y dividir por 10 cambia las unidades en decenas y las decenas en unidades, respectivamente. Esto puede ser ilustrado por un ábaco con un punto decimal. Igualmente útil es una escalera de refinamiento

.
.
1000
100
10
1
0'1
0'01
0'001
.
.

que se puede relacionar con las medidas del sistema métrico. Multiplicar y dividir por 10, 100, 1000…, se experimenta como una acción en esta escalera. Esto prepara la multiplicación mutua (positiva y negativa) de potencias de 10. Puede preguntarse cuándo la notación usual por potencias de 10 debería introducirse (cf. sección 4.36a). Escrito como sea, multiplicar y dividir (positiva o negativamente) potencias de 10 precede a la introducción formal y al aprendizaje de la multiplicación y división de las fracciones decimales en general. La reducción de multiplicaciones y divisiones en este dominio a las en **N**, por medio de la extensión de potencias de 10, merece preferirse más que la memorización de reglas sobre la situación del punto decimal.

5.25—26 *Desarrollo decimal*

5.25 La división de fracciones decimales se reduce por estos medios a la de enteros, esto es, a lo que se llama el

desarrollo de $b : a$, o la fracción $\frac{b}{a}$, en una fracción decimal,

que puede ser de longitud infinita.

Hasta aquí las fracciones decimales han sido tratadas como fracciones con potencias de 10 como denominadores, lo que significa que una división o una fracción es transformada de

$$\frac{b}{a} \text{ a } \frac{e}{10^n}.$$

Para que esto sea posible, la fracción en su forma simplificada debe poseer un denominador que sea un divisor de una potencia de 10, esto es,

el denominador no debe poseer factores primos distintos de 2 y 5.

Otras fracciones no admiten tal desarrollo —finito.

Transformar

$$\frac{b}{a} \text{ en } \frac{e}{10^n}.$$

se realiza por medio de una división

$$10^n b : a = e,$$

basada en

$$b : a = \frac{1}{10^n}(10^n b : a)\ ,$$

esto es tanto como decir, en el dividendo y finalmente en el cociente se pasa a $\frac{1}{10^n}$ como nuevas unidades antes de realizar la división.

En realidad esto ocurre sucesivamente:

> tras la primera división de *b* por *a* las unidades del resto se cambian en décimas, con las cuales se continúa la división; el nuevo cociente, siendo un número de décimas, se pone en la primera posición a la derecha del punto decimal;
> el resto se cambia en centésimas, con las cuales se continúa la división; el nuevo cociente, siendo un número de centésimas, se pone en segunda posición a la derecha del punto decimal, y así sucesivamente.

Si el denominador no tiene factores primos distintos de 2 y 5, el procedimiento termina con el resultado deseado. En otros casos, una fracción decimal infinita sale a la luz,

$$\frac{1}{3} = 0'33\ldots$$

$$\frac{1}{7} = 0'142857142857\ldots$$

Lo que es pertinente matemáticamente aquí difiere mucho de lo que ha sido tratado hasta ahora en esta fenomenología didáctica. Pertenece a la teoría de números y a las series infinitas, que, sin embargo, no excluyen una aproximación fenomenológica que encaja en la presente estructura.

5.26 No hay en este momento necesidad de colocar el desarrollo infinito de las fracciones en la estructura de series infinitas o, para lo que nos ocupa, en la de fracciones decimales infinitas, en general. Esto puede volverse a tomar más adelante. También hay poca necesidad de apelar a la teoría de números para explicar la periodicidad del desarrollo. Se hace de un modo más elemental.

Una división por *n* produce en cada paso particular un resto que, considerado como un entero, es un número menor que *n*. Por tanto, entre los *n* primeros restos parciales hay al menos dos iguales. Hay una primera vez en la secuencia de restos en que un resto se iguala a uno previo. Asumamos que es el *j*–ésimo el que es igual que el *i*–ésimo, esto es, el trozo desde el i–ésimo al (j–1)-ésimo cociente

se repite periódicamente. El desarrollo decimal de un número racional

eventualmente se convierte en periódico.

Puede ser

periódico puro

o el período está precedido por un segmento inicial. Ejemplos del primer tipo;

$\frac{1}{3} = 0'3\ldots \qquad \frac{1}{7} = 0'142857\ldots;$

del segundo tipo

$\frac{1}{6} = 0'166\ldots \qquad \frac{1}{35} = 0'0285714285714\ldots$

¿Cómo podemos predecir lo que ocurre?

Los ejemplos sugieren: el desarrollo decimal de la fracción —simplificada— es

periódico puro o no

según que el denominador n

tenga o no

un factor primo 2 o 5.

Esto parece ser correcto: el período del desarrollo de $\frac{m}{n}$ aparece cuando para ciertos i y j los restos después de la división i–ésima y j–ésima son iguales, lo cual significa que

$10^i m$ y $10^j m$ dan el mismo resto,

cuando se dividen por n. En otras palabras,

$(10^j-10^i)m$ es divisible por n.

Si n no tiene factores primos 2 y 5 , esto implica que

$(10^{j-1}-1)m$ es divisible por n,

luego

$10^{j-1}m$ y m dan el mismo resto,

cuando se dividen por n. De este modo el período empieza inmediatamente después del punto decimal.

A la inversa: tómese un desarrollo periódico puro con un período de, digamos, longitud l. Sea c el período considerado como un número natural. Entonces

$$\frac{b}{a} = c\left(\frac{1}{10^l} + \frac{1}{10^{2l}} + \dots\right)$$

La expresión e, entre paréntesis, se puede calcular de la siguiente forma

$$10^l e = 1 + e$$

de donde

$$e = \frac{1}{10^l - 1},$$

luego

$$\frac{m}{n} = \frac{c}{10^l - 1}.$$

Ahora 10^l-1 ciertamente no tiene factores primos 2 o 5, ni tampoco n. Luego si el desarrollo —simplificado— de $\frac{m}{n}$ es periódico puro, el denominador n no tiene factores primos 2 o 5.

5.27. *Otras bases*

Con respecto a llegar a conocer y trabajar en sistemas posicionales distintos del decimal, los argumentos de la sección 4.43 pueden ser repetidos, aunque se puede mencionar una cierta diferencia. En general, no se espera que un cambio de bases cree mayor intuición, incluso con vistas a desarrollos que terminan y que no terminan. Si se ha entendido qué denominadores, en el sistema decimal, conducen a desarrollos infinitos, por qué son finalmente periódicos, y qué casos son periódicos puros, la transición a una nueva base g puede abrir nuevas perspectivas. Los divisores de 10 son reemplazados por los de g y esto tiene diferentes consecuencias según g sea un número primo, una potencia de un número primo u otro tipo de compuesto. Depende de la situación de instrucción total y en particular del grupo especial de alumnos a los que concierne, si las intuiciones adquiridas en dicho curso merecen el trabajo de introducir otros sistemas posicionales.