ACERCA DEL CARÁCTER ARITMÉTICO O ALGEBRAICO DE LOS PROBLEMAS VERBALES

Luis Puig y Fernando Cerdán
Departamento de Didàctica de la Matemàtica
de la Universitat de València

Conferencia invitada al grupo de *Álgebra* del *Segundo Simposio Internacional de Educación Matemática*, Cuernavaca, Morelos, México, 12-14 de julio de 1990.

ACERCA DEL CARÁCTER ARITMÉTICO O ALGEBRAICO DE LOS PROBLEMAS VERBALES

Luis Puig y Fernando Cerdán
Departamento de Didàctica de la Matemàtica
de la Universitat de València

INTRODUCCIÓN

En la agenda de investigación sobre álgebra que plantean Wagner y Kieran (1989), aparecen varias preguntas relativas a problemas verbales. Nuestro propósito aquí es examinar algunas de esas preguntas a la luz de algunas ideas que ya hemos apuntado en otro sitio (Puig y Cerdán, 1989, 1990).

Las preguntas en concreto son las siguientes:

¿Qué es un problema verbal algebraico? ¿Hay problemas verbales que son intrínsecamente más algebraicos que aritméticos? ¿Cuándo un método de resolver problemas verbales es más algebraico que aritmético?

¿Hay tipos particulares de problemas verbales que estimulan el desarrollo del razonamiento algebraico?

¿Qué está involucrado en el proceso de traducir problemas verbales a notación algebraica?

Contestar a estas preguntas es interesante al menos para conocer los puntos de corte entre la aritmética y el álgebra en el currículo escolar, prever los obstáculos que pueden presentarse en el tránsito de la aritmética al álgebra, comprender la naturaleza del proceso de resolución de los problemas verbales y desarrollar estrategias de enseñanza.

Hay varias vías que pueden explorarse para intentar encontrar contestación a estas preguntas. En primer lugar, se pueden examinar los libros de texto que se utilizan en los currículos escolares y afirmar que son problemas aritméticos los que aparecen en las lecciones de aritmética y algebraicos los que aparecen en las lecciones de álgebra, para, luego, intentar caracterizar qué es lo que los diferencia. Y examinar, también, las estrategias de enseñanza tradicionales para una y otra clase de problemas.

Por otro lado, puede recurrirse al examen de las soluciones que suelen utilizar los alumnos. Sin embargo, ese examen ha de ser difícil ya que los alumnos pueden abordar estos problemas por métodos que no pueden ser caracterizados como aritméticos ni algebraicos, siempre que la tarea que se les encomiende sea “resolver el problema”, sin que el contexto de la tarea les induzca al uso de métodos aritméticos o algebraicos institucionalizados por la enseñanza. Cabe, en último extremo, recurrir al artificio de examinar la resolución de problemas sin álgebra por parte de alumnos que poseen la herramienta algebraica, pero a los que se les prohíbe usarla, con el fin de determinar qué problemas son capaces de resolver y cuáles no, y a qué recurren para hacerlo.

La vía que nosotros vamos a explorar parte de lo siguiente: a) En el proceso de resolución de un problema verbal, aritmético o algebraico, la fase crucial es la traducción del enunciado del problema a la expresión aritmética o algebraica que proporciona su solución. Las características del proceso de traducción será entonces lo que hay que dilucidar. b) Los problemas cuyo proceso de traducción hay que estudiar son los problemas verbales de varias operaciones combinadas (PAVOC), y esto por dos razones: la primera, porque el proceso de traducción de éstos es cualitativamente diferente del de los problemas de una etapa; la segunda, porque los problemas de una etapa se resuelven siempre por procedimientos que son puramente aritméticos, incluso si aparecen disfrazados con rasgos algebraicos. c) Dos métodos generales de resolución de problemas, que en dos épocas de la historia pretendieron ser métodos universales —el método de análisis y síntesis y el modelo cartesiano— pueden usarse como instrumento de análisis del proceso de traducción de los PAVOC. Por su situación en la historia de las matemáticas y su voluntad explícita, el modelo cartesiano produce un proceso de traducción algebraico; el método de análisis-síntesis, por su parte, cuando se aplica a los PAVOC conduce a un proceso de traducción de naturaleza aritmética.

De estos puntos de partida se puede ya colegir en qué sentido pueden ir nuestras respuestas tentativas a las preguntas planteadas. Lo que podremos calificar de aritmético o algebraico será el proceso de traducción, las características que diferenciarán uno de otro vendrán determinadas por la comparación entre los dos métodos históricos que se usan como instrumento de análisis, lo que resultará determinante no será pues la estructura del problema, sino la estructura del proceso de traducción, y sólo será posible decir que un problema es más algebraico que aritmético en función de que presente características que impidan que se pueda dar el proceso de traducción modelado por el método de análisis-síntesis.

EL PROCESO DE RESOLUCIÓN DE UN PAVOC A LA LUZ DEL MÉTODO DE ANÁLISIS-SÍNTESIS

Se podría pensar que el proceso de traducción de un problema de más de una etapa consiste en una mera yuxtaposición, en el orden adecuado, de las traducciones correspondientes a cada una de las operaciones que hay que realizar o que han de aparecer escritas en la expresión aritmética correspondiente y extender sin más lo que se sabe sobre el proceso de traducción de los problemas de una etapa a los PAVOC. Para nosotros —y ello justifica, por ende, distinguir entre unos y otros a efectos de su análisis— el asunto no se reduce a añadir traducciones una tras otra (Puig y Cerdán, 1989, 1990). Por el contrario, para que el enunciado sea traducible al lenguaje aritmético, es preciso realizar un trabajo sobre el texto del problema que lo transforme en un nuevo texto en el que se hagan explícitos los elementos que han de intervenir en cada una de las traducciones elementales y que muestre la manera como éstas han de enlazarse en la expresión aritmética producto de la traducción. Las características de este texto intermedio pueden dilucidarse examinando cómo actúa el método de análisis-síntesis sobre los PAVOC.

Para ello, recurriremos a enunciar una regla del análisis-síntesis para los PAVOC, parafraseando la que aparece en Lakatos (1981) con otros fines, correspondiente al análisis que Pappus llamó *problemático* (frente al *teórico*, que es el que examina Lakatos). Tal regla reza así:

> REGLA DEL ANALISIS-SINTESIS
>
> Si x es la incógnita del problema, supóngala conocida.
>
> Indague e investigue cuáles son aquellos antecedentes de los cuales x resulta y que permiten determinar x.
>
> Considere cada uno de estos antecedentes como una nueva incógnita (auxiliar).
>
> Indague e investigue de nuevo, iterando el proceso, hasta que
>
> 1) o bien todos los antecedentes sean datos del problema,
>
> 2) o bien alguno de los antecedentes entre en contradicción con los datos del problema.
>
> En el caso 1), volviendo sobre sus pasos y trabajando hacia atrás, esto es, desde los datos hasta la incógnita, podrá determinar esta última.
>
> En el caso 2), abandone el problema: su solución es imposible.

El paso desde la incógnita a través de la búsqueda de antecedentes hasta reducirlos todos a datos del problema es el *análisis*, el camino inverso, volviendo sobre sus pasos, es la *síntesis*. Veamos con un ejemplo concreto cómo el análisis produce el texto intermedio y la síntesis lo traduce a la expresión aritmética. El texto intermedio, que siguiendo la regla enunciada se puede escribir en lenguaje vernáculo, lo presentamos aquí mediante un lenguaje gráfico construido ad hoc, que hemos descrito en Puig y Cerdán (1989).

El problema:

> En un taller de confección disponen de 4 piezas de tela de 50m cada una. Con ellas van a confeccionar 20 trajes que necesitan 3m de tela cada uno. Con el resto de la tela piensan hacer abrigos que necesitan 4m cada uno. ¿Cuántos abrigos pueden hacerse?

El texto intermedio:

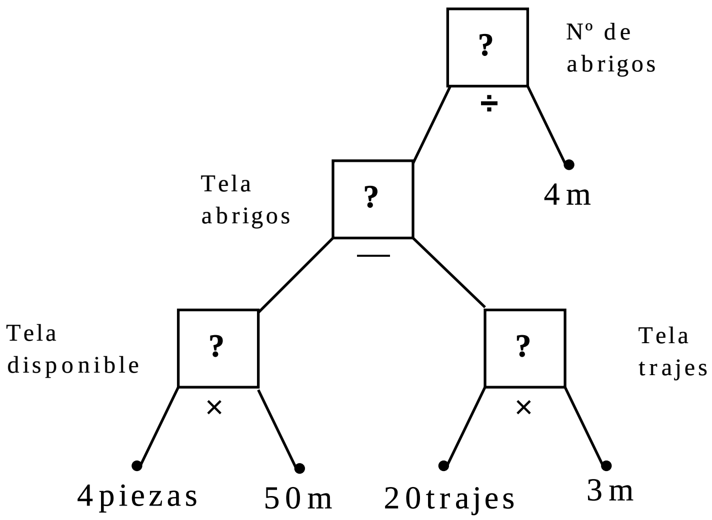


figura 1

La síntesis consiste en efectuar los cálculos que aparecen en el diagrama, en el orden que el propio diagrama muestra. O bien permite escribir de forma automática la expresion aritmética $[(4\times50)-(20\times3)]\div4$, que es la traducción del problema al lenguaje aritmético.

El diagrama correspondiente al análisis del problema muestra con precisión la estructura de la cadena deductiva que conecta datos con incógnita, ya que aparecen en él:

1.— Las etapas necesarias para ir desde la incógnita a los datos. (En este caso tres).

2.— El número de incógnitas auxiliares.

3.— Las conexiones entre datos, incógnitas auxiliares e incógnita del problema.

4.— Las operaciones concretas que es preciso realizar para obtener, a partir de los datos, las incógnitas auxiliares y la incógnita del problema.

Esto es, el diagrama es un texto intermedio que sirve de puente para traducir el enunciado verbal de un PAVOC a la expresión aritmética que lo resuelve. Por un lado pone de relieve cuáles son los elementos esenciales del texto intermedio: las incógnitas auxiliares que hay que establecer, los problemas de una etapa inmersos en el texto intermedio (y, de ellos, cuáles son sus datos e incógnita y cuál la operación que los resuelve) y la cadena de relaciones entre ellos. Por otro lado, indica con toda precisión los tres elementos esenciales de la expresión aritmética a que se traduce el problema: las operaciones que hay que realizar, entre qué datos y en qué orden se realizan.

De hecho, el diagrama es semánticamente más rico que la expresión aritmética, incluso cuando se desprende de los significados del contexto en que está enunciado el problema, ya que se construye en la secuencia del análisis y, por tanto, aun en forma de esquema simbólico, lleva prendido los significados asociados a la búsqueda de antecedentes. Sin embargo, la expresión aritmética correspondiente, $[(4\times50)-(20\times3)]\div4$, no mantiene ninguna huella del orden de las acciones, por lo que la obtención de su resultado se ha de realizar en el terreno de la pura sintaxis, ya que son sólo las reglas sintácticas las que determinan el orden en que han de efectuarse las operaciones.

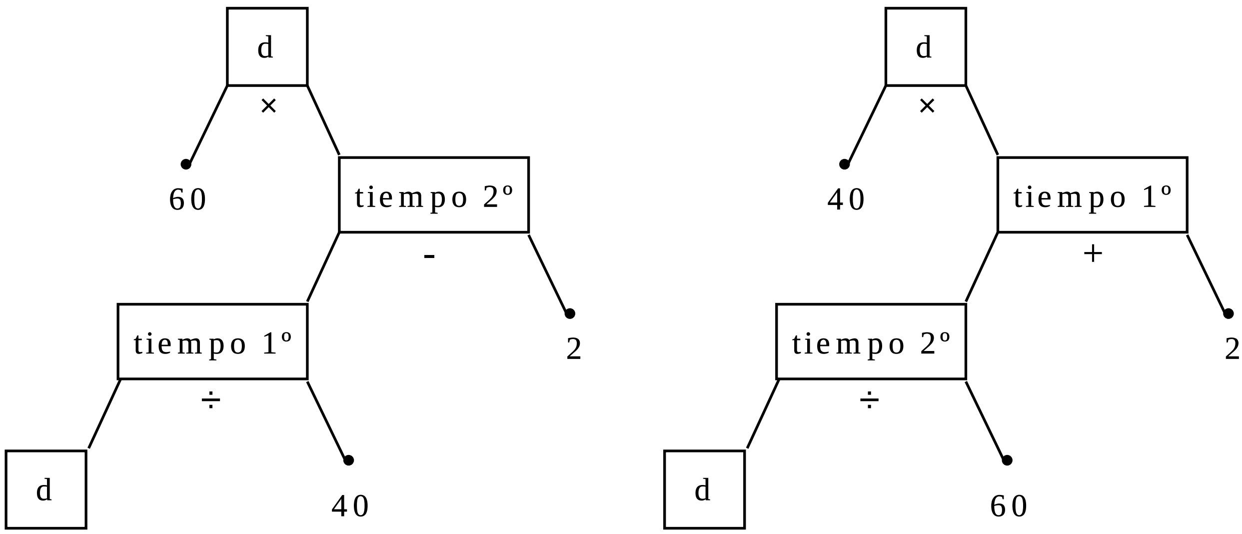
Kieran (1989) llama, siguiendo a Vergnaud (1982), estructura de un problema verbal a la proposición abierta que lo representa. El diagrama que acabamos de presentar no pretendemos que represente una hipotética estructura profunda del problema, sino la estructura del proceso de traducción. Una de las consecuencias inmediatas que tiene este punto de vista es que un mismo problema puede llevar asociados varios diagramas correspondientes a procesos de traducción que han de ser considerados cualitativamente distintos aunque conduzcan a expresiones aritméticas equivalentes, ya que difieren en algunos elementos esenciales del texto intermedio (incógnitas auxiliares, problemas de una etapa y cadena de relaciones).

Thompson (1989) describe un programa —Word Problem Assistant— en el que el problema se representa en la pantalla del ordenador mediante un diagrama que tiene algunos puntos de contacto con el que hemos presentado. Sin embargo, es el programa, y no el usuario, quien infiere las operaciones que hay que realizar y quien descubre que ya hay suficientes incógnitas auxiliares y relaciones establecidas, con lo que las tareas necesarias para resolver el problema —vistas desde el método de análisis-síntesis— están repartidas entre usuario y programa y, por tanto, el resolutor no es ni uno ni otro, sino un combinado de ambos.

LA TRANSICIÓN AL ÁLGEBRA DESDE EL MÉTODO DE ANÁLISIS-SÍNTESIS

El método de análisis-síntesis puede usarse pues como herramienta metodológica para obtener una representación de la estructura de un proceso de traducción de un PAVOC al lenguaje aritmético y caracterizar, en consecuencia, como aritmética dicha estructura. Para ello, hace falta que el análisis de la incógnita culmine efectivamente en los datos del problema y, por tanto, la síntesis sea posible. Esto, empero, no sucede siempre, como lo muestra los análisis (figura 2) del problema siguiente.

> Un automóvil parte de un punto A con velocidad uniforme de 40 km / h hacia otro punto B. Dos horas después sale de A hacia B otro automóvil con velocidad uniforme de 60 km / h. Dígase a qué distancia de A se encuentran.



$$d = 60\ (d/40 - 2)$$

$$d = 40\ (d/60 + 2)$$

figura 2

Estos diagramas indican que, si el proceso de traducción se encamina por la vía de cualquiera de los análisis que aparecen representados en ellos, no se consigue reducir la incógnita a los datos, sino que ésta reaparece como antecedente; con lo que, al no encontrarnos en ninguno de los casos enunciados en la regla de análisis-síntesis, si se quiere seguir adelante, se entra en un bucle sin fin, y la síntesis es imposible.

Sin embargo, el intento de análisis, y el texto intermedio producido, lo que sí que consigue poner de manifiesto es la naturaleza de las relaciones que existen entre la incógnita, las incógnitas auxiliares y los datos del problema, y el orden que permite encadenarlos. Con los instrumentos de la aritmética, esto solo no permite encontrar la solución del problema. Ahora bien, si se dispone del lenguaje algebraico, basta llamar *d* a la incógnita del problema para encontrarnos con que el análisis realizado conlleva, al invertirlo por síntesis, un procedimiento de traducción automática a una ecuación, cuya solución es la del problema. En el límite del análisis-síntesis, el método se torna algebraico cuando la incógnita del problema se considera —o no parece haber más remedio— como un dato útil para determinarla, esto es, cuando lo conocido y la desconocido se tratan de la misma forma.

En el campo de los PAVOC aparecen pues problemas cuyo análisis más natural lleva a que sea precisa la herramienta algebraica para resolverlos. Filloy y Rojano(1985) han determinado en el terreno de la resolución de ecuaciones un corte entre la aritmética y el álgebra en el momento en que es necesario operar con la incógnita para resolver la ecuación. El posible punto de transición que señalamos aquí entre los problemas aritméticos y algebraicos es el momento en que el análisis de la incógnita no es posible realizarlo únicamente a partir de los datos; en esos casos, la traducción, ahora al lenguaje del álgebra, que corresponde al análisis realizado conduce a una ecuación de las que Filloy y Rojano colocan del lado del álgebra. Inversamente, las ecuaciones que Filloy y Rojano consideran aritméticas se corresponden con PAVOC cuyo análisis culmina en datos y, por tanto, se traducen mediante la síntesis a expresiones aritméticas (de hecho, a la expresión aritmética que resuelve la ecuación).

EL MODELO CARTESIANO

El fracaso de un proceso de traducción, que hemos calificado de aritmético al estar modelado por el análisis-síntesis, lo hemos resuelto en el interior de ese método, gracias a que el lenguaje algebraico está construido sobre la base del lenguaje aritmético, introduciendo algunos de los significados nuevos propios del álgebra (en particular, la posibilidad de operar con la incógnita y no sólo con datos, el significado del signo igual y la visión general de la expresión simbólica resultante), pero sin romper con el esquema general del método. Por decirlo de algún modo, este proceso de traducción parte de la aritmética y se ve abocado al álgebra. El modelo cartesiano se sitúa de entrada, por el contrario, en el terreno del álgebra. Examinaremos brevemente lo que lo diferencia del análisis-síntesis y veremos cómo en su interior, inversamente, perviven rasgos aritméticos propios del análisis-síntesis.

Una buena fuente para ello es Polya(1966), que reescribe las reglas cartesianas desde el punto de vista de la resolución de problemas de matemáticas, tratando de precisar las tareas que es preciso realizar para reducir un problema de matemáticas a la resolución de un sistema de ecuaciones.

> "1. En primer lugar, comprender bien el problema, luego convertirlo en la determinación de cierto número de cantidades desconocidas. (Reglas XIII a XVI)
>
> 2. Examinar el problema de la manera más natural considerándolo como resuelto y presentando en un orden conveniente todas las relaciones que deben verificarse entre las incógnitas y los datos según la condición planteada. (Regla XVII)
>
> 3. Separar una parte de la condición que permita expresar una misma cantidad de dos maneras diferentes y obtener así una ecuación entre las incógnitas. Descomponer eventualmente la condición en varias partes. Obtendréis así un sistema con tantas ecuaciones como incógnitas. (Regla XIX)
>
> 4. Transformar el sistema de ecuaciones en una única ecuación. (Regla XXI)"

Como puede verse, las reglas del método cartesiano difieren de la del análisis-síntesis. En primer lugar, la consideración de los datos y las incógnitas y la forma de expresar las relaciones entre ellos es distinta. Tanto datos como incógnitas se tratan desde el primer momento como si fueran datos, esto es, se puede operar formalmente con ellos —Descartes mismo señaló que ahí reside todo el artificio del método. Como consecuencia de esto, el examen de las relaciones que están contenidas en la condición del problema no ha de comenzar desde la incógnita, ni ha de terminar en su reducción a los datos. Lo que se hace (regla 3) es buscar una cantidad —que no tiene por qué coincidir con la incógnita del problema— que pueda expresarse de dos maneras distintas, cada una de ellas en función de una parte de la condición. Finalmente, hay que señalar también que lo que se llaman incógnitas en el modelo cartesiano no tienen por qué ser las incógnitas del problema —entendiendo por incógnitas del problema las cantidades requeridas en la pregunta del problema— sino las cantidades desconocidas que se ha creído conveniente determinar para obtener la solución del problema, esto es, las incógnitas del problema en el modelo cartesiano se corresponden tanto con la incógnita en análisis-síntesis (la incógnita del problema), como con incógnitas auxiliares de análisis-síntesis.

Ahora bien, aunque las diferencias sean tantas y tan radicales, hay algo presente en el método de análisis-síntesis —y que es una parte esencial de éste— que reaparece en el interior del método cartesiano. En efecto, una vez establecida la cantidad que puede expresarse de dos maneras distintas, lo que hay que hacer en el método cartesiano es *analizar* esa cantidad. La regla de análisis-síntesis y el tipo de razonamiento que ésta implica para la búsqueda de las relaciones a través de la búsqueda de antecedentes es pertinente también aquí, con una única salvedad: el análisis no ha de terminar con los datos del problema, sino con una combinación de datos e incógnitas, lo que es coherente ya que éstas últimas, expresadas algebraicamente, se están considerando *también* como datos. La regla 3 establece además que el análisis de cada cantidad se haga dos veces, y que se igualen las expresiones algebraicas que traducen los dos análisis de cada cantidad para formar las ecuaciones cuya solución es la del problema.

El diagrama, texto intermedio producido por el análisis, puede pues servir también en el interior del método cartesiano para representar los análisis que hay que hacer de cada cantidad. El camino de la síntesis no produce ahora la solución del problema, sino la escritura de la expresión algebraica correspondiente.

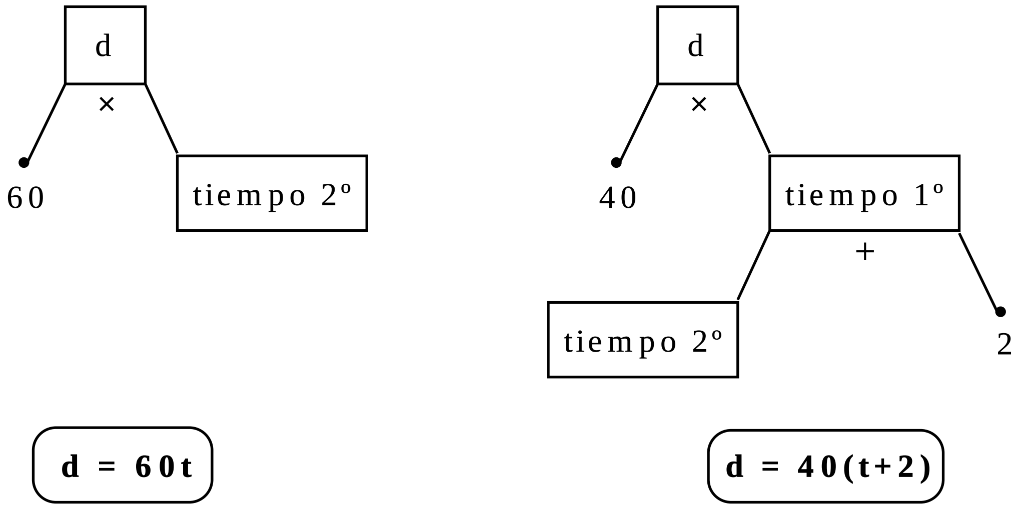


figura 3

Esto es lo que se muestra en la figura 3 en la que, con las reglas del modelo cartesiano, hemos analizado dos veces la incógnita del problema anterior, para obtener las ecuaciones d=60t y d=40(t+2), o la ecuación 60t=40(t+2). En estos análisis, t, el tiempo del segundo coche, que era una incógnita auxiliar en el análisis anterior, es la incógnita utilizada en el modelo cartesiano. Si se utiliza una versión más automática del modelo cartesiano, que separa las condiciones, y se utilizan como incógnitas el tiempo del primer coche, t_1, y el tiempo del segundo coche, t_2, los análisis de la distancia recorrida y del tiempo del segundo llevan al sistema de ecuaciones

$t_2=t_1-2$

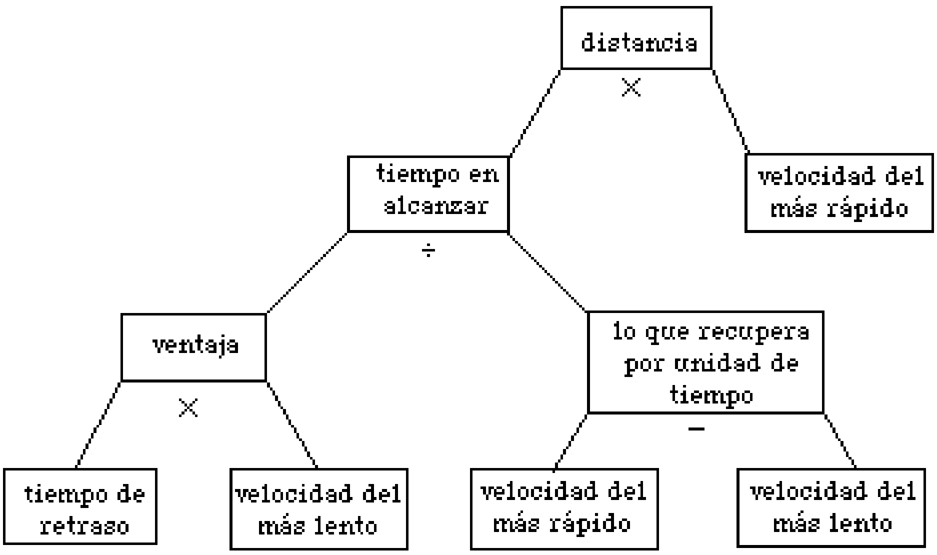
$60t_2=40t_1$

Resumiendo, si con análisis-síntesis se analiza la incógnita, se obtiene una expresión del tipo d=f(d). Si se utiliza análisis-síntesis dos veces en el interior del modelo cartesiano con la incógnita del problema, se obtiene d=f(t) y d=g(t), o f(t)=g(t). Y si se utiliza el modelo cartesiano de modo rígido se obtiene $f(t_1,t_2)=0$, $g(t_1,t_2)=0$.

Estos tres procesos de traducción del mismo problema, que son algebraicos ya que producidos por las reglas del modelo cartesiano, pueden graduarse, considerando el papel que juega en ellos el análisis-síntesis, como cada vez más algebraicos. Trujillo (1987) ha examinado con detalle el comportamiento de alumnos instruidos con dos estrategias de traducción que son versiones del modelo cartesiano y ha observado, entre otras cosas, el conflicto entre las tendencias al uso de estrategias más algebraicas, que son las que quiere la enseñanza, y la inhibición de las habilidades pre-algebraicas de los alumnos, que son las que necesitan ante situaciones difíciles.

UNA SOLUCIÓN ARITMÉTICA PARA LOS PROBLEMAS DE ALCANZAR

El problema que estamos usando como ejemplo de fracaso del método de análisis-síntesis, y del que hemos mostrado tres procesos de traducción algebraicos, puede, sin embargo, ser traducido a una expresión aritmética a condición de que el análisis que se realice no sea el que hemos realizado sino el que muestra el diagrama siguiente.

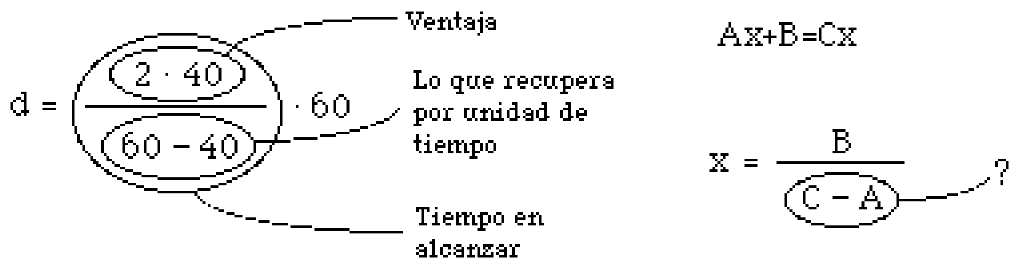


Este análisis sí que culmina en datos, con lo que la síntesis produce una expresión aritmética, $[(2\times40)\div(60-40)]\times60$, y por tanto la solución del problema.

De hecho, problemas como éste están tipificados en la Aritmética de Treviso y se enuncia una regla para resolverlos: «La regla de las dos cosas que se persiguen y después se alcanzan es ésta: que se ha de multiplicar los dos números [de pasos recorridos en un mismo tiempo] por el número de pasos de ventaja y dividir por la diferencia que hay entre las magnitudes de los dos números» (Paradís y Malet, 1989, pg. 112). La regla es similar a la solución que acabamos de presentar, a excepción de que se ha invertido el orden de las operaciones —probablemente porque es más sencillo hacer primero la multiplicación y luego la división, o porque se invoca una regla de tres— con lo que desaparecen las incógnitas auxiliares «tiempo en alcanzar» y «lo que recupera por unidad de tiempo».

En nuestro análisis, el establecimiento de esas incógnitas auxiliares y de las relaciones entre ellas, la incógnita y los datos del problema es precisamente lo que permite que éste se encamine por una vía que culmina en datos. Sin embargo, esas incógnitas auxiliares necesarias para que el proceso de traducción pueda ser aritmético son más difíciles de establecer que las que aparecieron en el análisis anterior. En efecto, aquéllas —tiempo del primer automóvil y tiempo del segundo— son cantidades que, aunque no aparecen mencionadas explícitamente en el texto del problema, están asociadas a las que aparecen —velocidad y distancia— en el esquema conceptual de la velocidad. Éstas, por el contrario, han de ser forjadas explorando más minuciosamente el campo semántico del texto del problema. El primer análisis puede calificarse de análisis natural y éste, de complejo, refinado o sutil. Este problema pues se ve abocado al álgebra por la vía del análisis natural, pero admite un proceso de traducción, más sutil, cuya estructura es aritmética.

Por otro lado, la expresión aritmética producto del proceso de traducción aritmético, $[(2\times40)\div(60-40)]\times60$, es la misma expresión aritmética que se obtiene al resolver la ecuación $d=60(d/40-2)$, producto del proceso de traducción algebraico. Lo que ha hecho posible llegar directamente a la expresión aritmética ha sido que en el campo semántico del problema era factible, aunque no a primera vista, dotar de sentido a cada parte de la expresión aritmética y convertirla en una incógnita auxiliar. Esta posibilidad, pues, puede plantearse formalmente para cualquier problema cuyo análisis natural no culmine en datos y se traduzca entonces a una ecuación no aritmética. En efecto, una ecuación del tipo $Ax+B=Cx$, cuando se resuelve da $x=B/(C-A)$, que, como es aritmética, puede ser el producto de un proceso de traducción modelado por el análisis-síntesis. Lo que hace falta para que ese proceso de traducción pueda desencadenarse es que en el campo semántico del texto del problema sea posible dotar de sentido a la diferencia entre los coeficientes de la incógnita y, por tanto, establecer como antecedente de la incógnita del problema esa diferencia como incógnita auxiliar, con lo que se elude operar con la incógnita y el proceso de traducción será aritmético.



CONSIDERACIONES FINALES

Lo que hemos hecho aquí abre pues una vía por la que algunas de las preguntas iniciales pueden ser, si no contestadas, al menos reformuladas. Hemos visto que, tanto por lo que respecta a los problemas, como por lo que respecta a los métodos de resolución, no puede pensarse en establecer una separación nítida entre lo que es aritmético y lo que es algebraico. El modelo cartesiano, que hemos tomado como paradigma de método algebraico, lleva en su interior aspectos esenciales del método de análisis-síntesis, y el método de análisis-síntesis, paradigma de lo aritmético, puede abocar al álgebra con tal de que se operen en su interior transformaciones de significado similares a las que se producen en la elaboración del lenguaje algebraico sobre la base del lenguaje aritmético.

Los problemas de alcanzar, por otro lado, nos han proporcionado un ejemplo de PAVOC que se encuentran en el tránsito de la aritmética al álgebra, o, quizá mejor dicho, en un lugar en que aritmética y álgebra se solapan: la primera en su extremo superior y la segunda ocupando el terreno del que ésta se retira. Un examen más minucioso y amplio de problemas que se encuentren en el mismo lugar que éstos puede conducir a determinar si hay características estructurales —como la estructura de cantidades o el tipo de división, partitiva o cuotitiva, que aparece al despejar el coeficiente de la incógnita— que influyen en la posibilidad de dotar de sentido a las incógnitas auxiliares necesarias para la resolución del problema por análisis-síntesis.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Filloy, E. y Rojano, T., 1985, Operating the unknown and models of teaching (A clinical study with 12–13 year olds with high proficiency in pre–algebra), *7th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education — North American Chapter,* Ohio, 1985.

Kieran, C., 1989, The Early Learning of Algebra: A Structural Perspective, en Wagner, S. y Kieran, C., eds. (1989).

Lakatos, I., 1981, El método de análisis y síntesis, en *Matemáticas, ciencia y epistemología,* vol 2. (Alianza Ed.: Madrid).

Paradís, J. y Malet, A., 1989, *Los orígenes del álgebra: de los árabes al Renacimiento.* (PPU: Barcelona.)

Polya, G., 1966, *Mathematical Discovery. 2 vols.* (John Wiley and Sons: New York).

Puig, L. y Cerdán, F., 1989, *Problemas aritméticos escolares.* (Síntesis: Madrid.)

Puig, L. y Cerdán, F., 1990, La estructura de los problemas aritméticos de varias operaciones combinadas. *Cuarta Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa*, Acapulco, Guerrero, México, 8-10 de julio de 1990.

Thompson, P. W., 1989, Artificial Intelligence, Advanced Technology, and Learning and Teaching Algebra, en Wagner, S. y Kieran, C., eds. (1989).

Trujillo, M., 1987, *Uso del lenguaje algebraico en la resolución de problemas de aplicación*. (Centro de Investigación y Estudios Avanzados del I.P.N., Sección de Matemática Educativa: México, D.F.)

Vergnaud, G., 1982, A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems, en Carpenter, T. P., Moser, J. M. y Romberg, T. A., eds., *Addition and Subtraction: A Cognitive Perspective,* pgs. 39-59. (Lawrence Erlbaum Associates: Hillsdale, NJ.)

Wagner, S. y Kieran, C., eds., 1989, *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra.* (Lawrence Erlbaum Associates / NCTM: Hillsdale, NJ / Reston, VA.)

Wagner, S. y Kieran, C., 1989, An Agenda for Research on the Learning and Teaching of Algebra, en Wagner, S. y Kieran, C., eds. (1989).