HISTORIA DE LAS IDEAS ALGEBRAICAS: COMPONENTES Y PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN DESDE EL PUNTO DE VISTA DE LA MATEMÁTICA EDUCATIVA

Luis Puig

Departamento de Didáctica de la Matemática

Universitat de València

INVESTIGAR EN LA HISTORIA PARA LA INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS.

[Este es el título de la introducción porque lo que voy a presentar es una investigación en la historia realizada con la intención por mi parte de que sirva para la investigación en didáctica de las matemáticas.]

Para que la historia pueda usarse con provecho en la investigación en didáctica de las matemáticas, la situación óptima es que la propia investigación histórica se realice teniendo en cuenta las preguntas que están presentes en la investigación en didáctica de las matemáticas y no sólo las preguntas propias de la investigación histórica. Filloy propuso hace tiempo con esta intención un programa ideal de uso de la historia en la investigación en didáctica de las matemáticas que se caracteriza entre otras cosas por un vaivén entre el análisis de textos históricos y el de las actuaciones de alumnos en los sistemas educativos (Filloy y Rojano, 1984).

EL MÉTODO CARTESIANO COMO PARADIGMA DE LA RESOLUCIÓN ALGEBRAICA DE PROBLEMAS

Para poder comparar las escrituras de las ecuaciones que representan los problemas verbales en distintos textos históricos de forma que esa comparación traiga a colación lo que es pertinente para la didáctica, una buena estrategia es tomar como referencia lo que se hace en el método cartesiano, que es el método algebraico por excelencia y que puede considerarse como el canon de los métodos que se enseñan tradicionalmente en los sistemas escolares.

La razón de llamar cartesiano a ese método es que una parte de las *Regulæ ad directionem ingenii (Reglas para la dirección del espíritu)* de Descartes [un texto póstumo, escrito en latín] puede interpretarse como el examen de la naturaleza del trabajo de traducción de un problema aritmético-algebraico de enunciado verbal al sistema matemático de signos (SMS) del álgebra y su solución en ese SMS. Así lo entendió Polya, quien en el capítulo “El patrón cartesiano” de su libro *Mathematical Discovery*, reescribió las reglas cartesianas pertinentes de tal forma que se pudieran ver como pautas de resolución de problemas que usan el SMS del álgebra. [Expondré brevemente a Polya, pero lo abandonaré enseguida, porque Polya plantea sugerencias para la conducta de los resolutores y lo que me interesa es una descripción del comportamiento del sujeto epistémico o real, lo que llamamos un modelo de competencia.]

La paráfrasis de Polya de las reglas de Descartes es la siguiente:

(1) En primer lugar, comprender bien el problema, luego convertirlo en la determinación de cierto número de cantidades desconocidas. (Reglas XIII a XVI)

Aunque Polya diga que con esta frase parafrasea cuatro de las reglas de Descartes, en realidad la regla XIII contiene todo lo que parafrasea: “Quand nous comprenons parfaitement une question, il faut la dégager de toute conception superflue, la réduire au plus simple, la subdiviser le plus possible au moyen de l’énumération.” (Descartes, 1826, tomo undécimo, pág. 284). Anteriormente (regla VII) Descartes ya ha afirmado la importancia de la “énumération”, que define como “la recherche attentive et exacte de tout ce qui a rapport à la question proposée. […] cette recherche doit être telle que nous puissions conclure avec certitude que nous n’avons rien mis à tort” (Descartes, 1826, tomo undécimo, pág. 235). La regla XIV habla de la comprensión de "l'étendue réelle des corps" y dice que a ella se aplica también la regla anterior. Las reglas XV y XVI constituyen consejos para que el espíritu esté atento a lo esencial y la memoria no se fatigue con lo que, aun siendo necesario, no exige la atención del espíritu. Así, la regla XV recomienda trazar figuras para mantener el espíritu atento: "Souvent il est bon de tracer ces figures, et de les montrer aux sens externes, pour tenir plus facilement notre esprit attentif." (Descartes, 1826, tomo undécimo, pág. 313). La regla XVI, por su parte, recomienda no usar figuras enteras, sino simples anotaciones para descargar la memoria, cuando no se precise la atención del espíritu: "Quant à ce qui n'exige pas l'attention de l'esprit, quoique nécessaire pour la conclusion, il vaut mieux le designer par de courtes notes que par des figures entières. Par ce moyen la mémoire ne pourra nous faire défaut, et cependant la pensée ne sera pas distraite, pour le retenir, des autres opérations auxquelles elle est occupée." (Descartes, 1826, tomo undécimo, pág. 313)

(2) Examinar el problema de la manera más natural considerándolo como resuelto y presentando en un orden conveniente todas las relaciones que deben verificarse entre las incógnitas y los datos según la condición planteada. (Regla XVII)

El texto de Descartes de la regla XVII es bastante diferente de la paráfrasis de Polya: "Il faut parcourir directement la difficulté proposée, en faisant abstraction de ce que quelques uns de ses termes sont connus et les autres inconnus, et en suivant, par la marche véritable, la mutuelle dépendance des unes et des autres." (Descartes, 1826, tomo undécimo, pág. 319) "Proposta difficultas directe est percurrenda, abstrahendo ab eo quod quidam ejus termini sint cogniti, alii incogniti, & mutuam singulorum ab aliis dependentiam per veros discursus intuendo." (Descartes 1701, pág. 61). La paráfrasis de Polya no señala como sí lo hace el texto de Descartes el que se hace abstracción de que unos términos sean conocidos y otros descconocidos. Este tratar de la misma manera lo conocido y lo desconocido es precisamente uno de los rasgos fundamentales del carácter algebraico del método y el mismo Descartes señala que ahí radica lo fundamental de su método: "[…] tout l'art en ce lieu doit consister à pouvoir, en supposant connu ce qui ne l'est pas, nous munir d'un moyen facile et direct de recherche même dans les difficultés les plus embarrassées." (Descartes, 1826, tomo undécimo, pág. 320) "[…] totum huius loci artificium consistet in eo, quod ignota pro cognitis supponendo possimus facilem & directam quærendi viam nobis proponere, etiam in difficultatibus quantumcumque intricatis." (Descartes, 1701, págs. 61-62)

(3) Separar una parte de la condición que permita expresar una misma cantidad de dos maneras diferentes y obtener así una ecuación entre las incógnitas. Descomponer eventualmente la condición en varias partes. Obtendréis así un sistema con tantas ecuaciones como incógnitas. (Regla XIX)

En el caso de esta regla XIX, la paráfrasis de Polya contiene la formulación explícita de lo que en el método cartesiano da sentido a la construcción de la ecuación, la expresión de una cantidad de dos maneras diferentes. El texto de Descartes pone además el énfasis en que por ese procedimiento hay que construir el mismo número de ecuaciones que el de cantidades desconocidas que hemos supuesto conocidas ["terminos incognitos pro cognitis supponimus" (Descartes, 1701, pág. 66)]. Suponer conocido lo desconocido es la clave para la escritura de las expresiones algebraicas y para el desarrollo del análisis. "C'est par cette méthode qu'il faut chercher autant de grandeurs exprimées de deux manières différentes que nous supposons connus de termes inconnus, pour parcourir directement la difficulté; car, par ce moyen, nous aurons autant de comparaisons entre deux choses égales." (Descartes, 1826, tomo undécimo, pág. 328)

(4) Transformar el sistema de ecuaciones en una única ecuación. (Regla XXI) (Polya, 1966, págs. 27-28)

S'il y a plusieurs équations de cette espèce, il faudra les réduire toutes à une seule, savoir à celle dont les termes occuperont le plus petit nombre de degrés, dans la série des grandeurs en proportion continue, selon laquelle ces termes eux-mêmes doivent être disposés. (Descartes, 1826, tomo undécimo, pág. 329)

El método cartesiano como Modelo de Competencia

Desglosado en pasos ideales, es decir, los que recorrería el usuario competente, el método cartesiano comienza por una lectura analítica del enunciado del problema que lo reduce a una lista de cantidades y de relaciones entre cantidades.

El segundo paso consiste en la elección de una cantidad que se va a representar con una letra (o de unas cuantas cantidades que se van a representar con letras distintas) y el tercer paso consiste en representar otras cantidades mediante expresiones algebraicas que describen la relación (aritmética) que esas cantidades tienen con otras que ya han sido previamente representadas por una letra o una expresión algebraica.

El cuarto paso consiste en el establecimiento de una ecuación (o tantas como letras distintas se haya decidido introducir en el segundo paso), lo que se hace igualando dos expresiones, de las que se han escrito en el tercer paso, que representen la misma cantidad.

Con ello termina la parte del método descrita en las *Regulæ*, que se corresponde con la traducción del enunciado del problema al SMS del álgebra. La continuación del método, que describe la resolución de la ecuación, hay que ir a buscarla en la Geometría que Descartes publicó como apéndice del *Discurso del Método*, que es donde de hecho desarrolla lo que él mismo llama "su álgebra".

En una carta a Mersenne de abril de 1637, Descartes dice que las reglas de su álgebra las da a partir de la página 372 de la *Geometría*. En esa página lo que Descartes comienza a hacer, por usar por un momento la terminología de la fenomenología, es tomar las propias ecuaciones no ya como un medio de organización de fenómenos, sino, en un movimiento de matematización vertical, como un campo de objetos sometidos a exploración fenomenológica, que necesitan nuevos medios de organización para ello. A partir de la idea de que si a es una raíz de una ecuación $x - a$ divide al polinomio correspondiente, Descartes explora el número de raíces de las ecuaciones, el efecto que tiene sobre las raíces el cambiar x por $y - a$, etc. Cardano ya había estudiado el número de soluciones en algunos casos en el primer capítulo de su *Ars Magna* y, en el capítulo séptimo, el efecto que tiene sobre las raíces de una ecuación el cambiar alguno de los términos de miembro –lo que para Cardano suponía cambiar a otra forma canónica–, y Vieta le había dedicado el libro *De emendatione æquationum*, pero Descartes dice que él empieza su álgebra precisamente donde la dejó Vieta en ese libro.

En la *Geometría* Descartes explica el método en un apartado titulado "Comment il faut venir aux Equations qui servent a resoudre les problemes", en el que subraya también el tratamiento indiferente de lo conocido y lo desconocido, "sans considerer aucune difference entre ces lignes connuës, & inconnuës", y la escritura de una ecuación a partir de la expresión de una cantidad de dos maneras diferentes, "iusques a ce qu'on ait trouvé moyen d'exprimer une mesme quantité en deux façons: ce qui se nomme une Equation; car les termes de l'une de ces deux façons sont esgaux a ceux de l'autre". Pero, a diferencia de lo que puede encontrarse en las *Regulæ* (que de hecho acaban con el mero enunciado de la última regla), Descartes continúa el desarrollo del método, explicando que una vez se tienen construidas todas las ecuaciones, hay que transformar las ecuaciones.

Descartes no expone aquí las reglas de transformación de las expresiones algebraicas, las da por conocidas, lo que sí que dice es la forma que ha de tener la ecuación canónica indicando que las transformaciones han de hacerse de modo que se obtenga al final una ecuación para “expliquer chascune de ces lignes inconnuës; & faire ainsi en les demeslant, qu’il n’en demeure qu’une seule, esgale a quelque autre, qui soit connuë, ou bien dont le quarré, ou le cube, ou le quarré de quarré, ou le sursolide, ou le quarré de cube, &c, soit egal a ce, qui se produist par l’addition, ou soustraction de deux ou plusieurs autres quantités, dont l’une soit connuë, & les autres soient composées de quelques moyennes proportionnelles entre l’unité, & ce quarré, ou cube, ou quarré de quarré, &c. multipliés par d’autres connuës. Ce que i’escris en cete sorte.

$z \propto^{1} b$. ou
$z^2 \propto -az + bb$. ou
$z^3 \propto +az^2 + bbz - c^3$. ou
$z^4 \propto az^3 - c^3z + d^4$. &c.

C’est a dire, z, que ie prens pour la quantité inconnuë, est esgalé a b, ou le quarré de z est esgal au quarré de b moins a multiplié par z […].” (págs. 300-301)

El método continúa, por tanto, transformando las expresiones algebraicas escritas y las ecuaciones resultantes para reducirlas a una forma canónica. Esto supone que previamente se haya determinado qué expresiones y qué ecuaciones se van a considerar canónicas, y que se disponga de un catálogo de todas las formas canónicas posibles y de procedimientos de solución para cada una de ellas.

Acabamos de mostrar cuáles son las que presenta concretamente Descartes, pero podríamos decir que todas ellas se reducen a una única forma canónica, que Descartes presenta desglosada por grados, ya que en todos los casos la forma es la misma. El desglose por grados está justificado por el hecho de que el procedimiento de solución es distinto para cada uno de los grados (o no hay, en función del grado). La forma que tiene la ecuación canónica, escrita de forma más general es:

$$x^n = a_{n-1}x^{n-1} \pm a_{n-2}x^{n-2} \pm \ldots \pm a_2x^2 \pm a_1x \pm a_0$$

Descartes iguala pues la potencia de mayor grado sin coeficiente (con lo que sólo hay una cantidad desconocida y ninguna conocida en el miembro izquierdo de la ecuación) con el resto del polinomio. Como en el resto del polinomio sigue habiendo cantidades desconocidas (las otras potencias de la incógnita) dice que lo que hay ahí es una cantidad conocida (el monomio de grado cero) y cantidades “compuestas de algunas medias proporcionales entre la unidad y ese cuadrado o cubo, etc.”, expresión en la que está presente la idea que conduce a establecer los “grados”, es decir, el hecho de que $1 : x : x^2$, etc.

Las expresiones algebraicas que se consideran canónicas son pues los polinomios. Esto es así porque la reiteración de las cuatro operaciones aritméticas elementales conduce, cuando estas operaciones se realizan sobre cantidades desconocidas, a que todas las multiplicaciones (y divisiones) produzcan una cantidad *multiplicada por sí misma tantas veces* y multiplicada por un número determinado, es decir, produzcan un monomio, y la reiteración de adiciones (y substracciones), que sólo puede realizarse –y este hecho es crucial– entre monomios del mismo grado, produzca una suma (y resta) de monomios.

Desde que se dispone del SMS del álgebra escolar actual y de los números reales, esto conlleva que las reglas que permiten reducir cualquier ecuación a una forma canónica son las reglas del cálculo literal y la transposición de términos y que sólo haya una expresión canónica

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

y una ecuación canónica

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0.$$

Acabamos de ver que en el caso de Descartes, las formas canónicas son casi éstas. Las diferencias son dos. En primer lugar, Descartes no establece como forma canónica un polinomio igualado a cero, sino el monomio de mayor grado igualado a la suma o resta de los demás. Igualar el polinomio a cero es algo que Descartes sólo hará 71 páginas después, cuando trate lo que él llama “su álgebra”.

En segundo lugar, la forma canónica actual presenta los monomios unidos todos por el signo más, mientras que en la de Descartes no es así. Esto segundo es debido a que las letras que representan los coeficientes o las cantidades conocidas en el SMS de Descartes representan siempre números positivos y los monomios están unidos por las operaciones de adición o substracción que él concibe como dos operaciones distintas; sin embargo, en la forma canónica actual, la adición es la única operación que aparece (porque la substracción ha dejado de concebirse como una operación con entidad propia), gracias a que los coeficientes son cualquier número real. Incluso aunque Descartes admita la existencia de raíces negativas (“falsas”, en su terminología) y pueda escribir un monomio precedido de un signo menos aunque no esté restando a ningún otro monomio, como en $z^2 \propto -az + bb$, las letras en cuanto representan números conocidos (líneas) no pueden ser más que números “verdaderos”, es decir, positivos. Es sintomático que cuando Descartes explica esa ecuación traduciéndola al lenguaje natural, cambia el orden para poder darle sentido y escribe: “le quarré de *z* est esgal au quarré de *b* moins *a* multiplié par *z*”.

Pero además en el texto de Descartes, aunque las formas canónicas se escriben ya como polinomios, todavía los monomios se nombran por su especie, con nombres que combinan las especies básicas cuadrado y cubo, en el caso de Descartes de forma multiplicativa. Sin embargo, Descartes rompe con la vinculación geométrica de los nombres de las especies al mostrar al comienzo de la *Geometría* cómo el producto de una línea por una línea puede representarse como otra línea y no como una superficie con lo que las especies “cuadrado” o “cubo” ya dejan de ser heterogéneas.

Où il est a remarquer que par a^2 ou b^2 ou semblables, ie ne conçoy ordinairement que des lignes toutes simples, encore que pour me servir des noms usités en l’Algebre, ie les nomme des quarrés ou des cubes, &c. (Descartes, 1927, p. 299)

UNA HISTORIA DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y ECUACIONES

Este análisis de lo que supone el uso del método cartesiano con el SMS del álgebra escolar actual, lo hemos entrelazado con algunas observaciones procedentes del examen de textos de Descartes y, por tanto, ya procedentes del estudio de la historia de las ideas algebraicas. Esto lo hemos hecho así porque podemos decir que en Descartes está ya prácticamente constituido el SMS del álgebra actual. La indagación ahora de la historia de las ideas algebraicas puede hacerse desde la perspectiva que da este análisis.

En efecto, los polinomios son el final en esta historia de todo aquello a lo que se ha considerado en un momento u otro como formas canónicas, pero previamente ha sido necesario que apareciera la idea de búsqueda de formas canónicas. Para que esta idea pueda aparecer es necesario que la resolución de los problemas no se plantee con el único objetivo de obtener el resultado del problema concreto planteado, sino que el proceso de resolución incluya una cuarta fase (por usar la terminología de Polya) con carácter epistémico (Puig, 1996), en la que el procedimiento de solución se analice y se generen problemas que pueden resolverse con el mismo procedimiento o con variantes o generalizaciones de ese procedimiento de solución. Pero además hace falta que se disponga de un SMS en el que el análisis de la solución pueda realizarse desprendiéndose de los números concretos con los que se hacen los cálculos, esto es, que de alguna manera se pueda representar los números con los que se calcula y los cálculos que se hacen con ellos como expresiones.

Entonces, la idea de búsqueda de formas canónicas se presenta por la necesidad de reducir el número de expresiones que se producen como resultado de la traducción de los problemas a algunas expresiones que ya se saben resolver. Las expresiones que se saben resolver se conciben entonces como "ecuaciones".

Esta idea de reducir a expresiones que ya se saben resolver conduce a dos proyectos además del de identificar a qué se va a llamar forma canónica: por un lado, a tener un catálogo de las expresiones que ya se sabe resolver, y, por otro, a desarrollar un cálculo con las expresiones que permita transformarlas en las que se sabe resolver.

Este proyecto adopta una forma que para nosotros es cada vez más algebraica, cuando el catálogo de expresiones que se sabe resolver deja de constituirse por acumulación de problemas resueltos, las expresiones correspondientes y las técnicas, procedimientos (o algoritmos) de solución de cada uno de ellos y para a ser un catálogo de todas las formas canónicas posibles.

El álgebra babilónica no supera este criterio, a pesar de que haya catálogos de técnicas y de problemas que se saben resolver, se usen los sumerogramas que significan "largo" y "ancho" para representar cantidades que nada tienen que ver con las figuras geométricas, los procedimientos de solución sean analíticos y se reduzcan configuraciones a otras que ya se sabe resolver (cf. Høyrup, 2002). Pero tampoco lo supera la *Aritmética* de Diofanto.

Ahora bien, la búsqueda de todas las formas canónicas posibles precisa, por un lado, disponer de un SMS en que las expresiones estén representadas de forma lo suficientemente precisa como para poder realizar la búsqueda de posibilidades. Eso no implica que el SMS tenga que ser "simbólico" –en el sentido de la distinción entre "retórico", "sincopado" y "simbólico" de Nesselmann (1842) que analizamos en la sección 3– como atestigua el que en el *libro conciso del cálculo de al-jabr y al-muqâbala* al-Khwârizmî establezca tal catálogo de formas canónicas en un SMS que sólo está formado por la lengua natural, en este caso el árabe, y algunas figuras geométricas, que se insertan en el texto como representaciones (*sûra*, "figura", pero también "representación" o incluso "fotografía"), precedidas siempre por la frase "ésta es la representación" o "ésta es la figura". Por otro lado, modifica el proyecto de elaborar un catálogo de lo que ya se sabe resolver para convertirlo en el proyecto de saber resolver todas las formas canónicas.

Este nuevo proyecto se acomete en la historia estableciendo conjuntos de formas canónicas que son completos en algún sentido. Así, al-Khwârizmî establece todas las posibilidades para lo que para nosotros son los trinomios de grado no superior al segundo. Para él forman un conjunto completo ya que los "tipos de números que aparecen en los cálculos" son tres, *mâl*, raíz y simples números.

Aunque las discusiones sobre prioridad no sean importantes desde el punto de vista de la investigación didáctica, merece la pena señalar que no conocemos ningún texto anterior al *Libro conciso de cálculo de al-jabr y al-muqabala* de al-Khwârizmî en el que se establezca un conjunto completo de formas canónicas. En ese sentido, lo que constituye una radical novedad del libro de al-Khwârizmî no son los procedimientos que explica para resolver cada una de las formas canónicas, ya que esos procedimientos se pueden encontrar en textos anteriores que ya son en algunos casos milenarios, sino el que comience estableciendo un conjunto completo de posibilidades y exponga algoritmos de solución de todas las posibilidades. Dicho de otra manera, antes de al-Khwârizmî se sabía resolver problemas cuadráticos con procedimientos tipificados, quizá incluso se sabía resolver cualquier problema cuadrático, pero no se sabía que se sabía resolver todos los problemas cuadráticos.

Los "tipos de números que aparecen en los cálculos" de al-Khwârizmî se corresponden con los *eidei* de Diofanto. Ahora bien, Diofanto no establece un conjunto completo de formas normales ni plantea las combinaciones posibles de *eidei*, ni, por tanto, establece un cálculo para reducir las expresiones a una forma normal. Las operaciones que Diofanto define al comienzo de la *Aritmética* y que son similares a *al-jabr* y *al-muqâbala*, no persiguen reducir a una forma normal, sino simplemente a una igualdad de *eidei* (Klein, 1968, pp. 134-135). Por otro lado, los *eidei* de Diofanto no pueden identificarse con las potencias de la incógnita, sino que responden a la idea euclídea de algo que está "dado en forma", una de las formas en que una figura geométrica puede haber sido dada. De hecho Diofanto define las expresiones *dynamis*, *cubos*, *dynamodynamis*, *dynamocubos*, etc. para números determinados.

La continuación del proyecto se realiza aumentando el grado al tercero, que también constituye un conjunto de formas canónicas naturalmente completo. Basta para ello que los "tipos de números que se usan en los cálculos" se conciban como las magnitudes aristotélicas, como lo hace ᶜUmar al-Khayyam en su *Tratado de álgebra y al-muqâbala* (Rashed et Vahebzadeh, 1999).

El tropiezo en los grados superiores al cuarto conducirá ulteriormente a la modificación del proyecto: dado que no se consigue encontrar un algoritmo de solución mediante radicales de las formas canónicas a partir de ese grado, la pregunta se transforma en otra acerca de la posibilidad de que el algoritmo exista y se precisará en términos de las condiciones de existencia de un algoritmo. Ésta es la obra de Abel y Galois, pero con ella comienza otra historia de otra álgebra, el álgebra moderna abstracta.

CARACTERÍSTICAS DE LO ALGEBRAICO.

Los aspectos de la historia de las ideas algebraicas que hemos examinado en este apartado nos permiten reformular las características de lo algebraico que están discutidas en Mahoney (1971) y Høyrup (1994) de la siguiente manera:

1. El uso de un sistema de signos al resolver problemas que permite expresar el contenido del enunciado que es preciso para resolverlo (su 'estructura') desprendido de lo que no es preciso. Con ese sistema de signos, además, se puede operar en el terreno de la expresión sin recurrir al del contenido.
2. La búsqueda sistemática (usualmente combinatoria) de tipos de estructura expresados por expresiones en ese sistema de signos (formas canónicas).
3. El desarrollo de un conjunto de reglas para calcular en el nivel de la expresión con el fin de reducir cualquier expresión a uno de los tipos de estructura (formas canónicas).
4. La búsqueda de reglas (principalmente algorítmicas) para resolver todos los tipos de estructuras (formas canónicas).
5. La ausencia de 'compromiso ontológico' del sistema de signos, que así permite expresar y operar con cualquier tipo de objetos matemáticos.
6. El carácter analítico del uso del sistema de signos para reducir el enunciado del problema a una forma canónica (un tipo de estructura).

Componentes de la historia de las ideas algebraicas

Estos rasgos de lo algebraico, conllevan que en la historia de las ideas algebraicas puedan examinarse varios componentes que se entrelazan:

1. La historia de la elaboración de SMS del álgebra, en particular, la del cálculo en el nivel de la expresión.
2. La historia de los problemas y los métodos de resolución de problemas.
3. La historia de la resolución de ecuaciones.
4. La historia de los conceptos de número.

Una historia de la simbolización

Una perspectiva para analizar la historia del álgebra es la que utiliza como referencia tres estadios de la evolución de su lenguaje: el retórico, el sincopado y el simbólico. Esta distinción fue establecida por Nesselmann a mediados del siglo XIX en su libro *Die Algebra der Griechen* (Nesselmann, 1842), en el que dice que esa distinción proviene de considerar cómo se realiza la "representación formal de las ecuaciones y operaciones algebraicas" (Nesselmann, 1842, p. 301). El calificativo de retórica lo aplica al álgebra en la que el cálculo está expresado completamente y en detalle mediante palabras del lenguaje vernáculo y ubica en este estadio, por ejemplo, el álgebra de al-Khwârizmî, en la que los problemas y su resolución se expresan enteramente en palabras. El álgebra sincopada es aquella en la que la exposición es también de naturaleza retórica, "pero utiliza, para conceptos y operaciones que aparecen a menudo, siempre las mismas abreviaturas en lugar de las palabras completas" (Nesselmann, 1842, p. 302). A este estadio pertenecen, según Nesselmann, "Diofanto y sus seguidores europeos hasta mediados del siglo XVII, aunque Vieta en sus escritos ya haya sembrado el germen del álgebra moderna, que sólo germinará un cierto tiempo después de él" (Nesselmann, 1842, p. 302). El tercer estadio es el que Nesselmann denomina "álgebra simbólica" en el que todas las formas y operaciones posibles se representan en un sistema de signos "independiente de la expresión oral, lo que torna inútil cualquier discurso retórico". Lo fundamental desde esta primera caracterización del álgebra simbólica por parte de Nesselmann no es pues el mero hecho de la existencia de letras para representar las cantidades o de signos ajenos a la lengua vernácula para representar las operaciones, sino el que se pueda operar con ese sistema de signos sin tener que recurrir a su traducción a la lengua vernácula. En las propias palabras de Nesselmann:

> Podemos realizar un cálculo algebraico de principio a fin de manera completamente comprensible, sin usar una sola palabra escrita, y, al menos en los cálculos sencillos, sólo colocamos de vez en cuando una conjunción entre las fórmulas con lo que indicamos la conexión entre la fórmula, lo que le precede y lo que le sigue, con el fin de ahorrar al lector el buscar y releer. (Nesselmann, 1842, p. 302)

Si aceptamos la caracterización de Nesselmann de lo simbólico, el estudio de la historia de este componente de la historia del álgebra estará guiado por la consideración de en qué medida el SMS en un momento determinado o en un texto determinado permite no sólo representar la estructura del problema sino calcular en el nivel de las expresiones sin recurrir al nivel del contenido.

Ahora bien, si examinamos el *Libro conciso del cálculo de al-jabr y al-muqâbala* que al-Khwârizmî escribe para atender los deseos del califa al-Ma'mûn de hacer conocida la técnica de *al-jabr*, de la que éste tenía noticias pero que se había perdido, podemos ver que la representación de lo que es necesario para resolver los problemas se hace mediante dos instrumentos distintos. En primer lugar, están los "tipos de números que aparecen en los cálculos". Esos tipos de números son tesoros (*mâl*, posesión de dinero o tesoro), raíces (*jidr*) y simples números (*ᶜadad mufrad*) que a menudo son un cierto número de *dirhams* (la moneda árabe). La conceptualización es, por tanto, monetaria y las ecuaciones que al-Khwârizmî escribe, de forma retórica en la lengua árabe, tratan por tanto con un tesoro, su raíz y un número de *dirhams*. Sin embargo, esas expresiones monetarias sirven para representar cualquier problema de segundo grado, ya trate sobre números, transacciones comerciales, relaciones geométricas o cualquier otra cosa.

Pero además de esos tres términos para los tipos de números, al-Khwârizmî también usa otro término, *shay'* (cosa), cuando tiene que traducir el enunciado de un problema a una ecuación, y lo usa para designar con él una cantidad desconocida, de forma que al tener un nombre para esa cantidad desconocida puede expresar de forma retórica operaciones aritméticas con lo desconocido.

A menudo se ha identificado la cosa y la raíz con nuestra x, y el tesoro con nuestra x^2. Sin embargo, esto no está presente en el texto de al-Khwârizmî y sólo sucede en algebristas árabes medievales posteriores como al-Karâji o ᶜUmar al-Khayyâm. Más aún, todavía puede encontrarse diferenciado un instrumento de representación del otro en el *Liber Abbaci* de Leonardo de Pisa. En efecto, Leonardo introduce la cosa con el término latino *res* en el capítulo 12 (Boncompagni, ed., 1857, p. 191) cuando define la *Regula Recta* que necesita precisamente un nombre para lo desconocido con el fin de calcular a partir de él, a diferencia de lo que sucede en la *Regula Versa*, mientras que el álgebra de al-Khwârizmî no aparece hasta 200 páginas después en el capítulo 15 (Boncompagni, ed., 1857, p. 406), en la que los nombres de los tipos de números están traducidos al latín por *quadratus* (del que luego dice que se llama *census*, conservando el significado monetario de *mâl*), *radix* y *numerus simples*.

En al-Khwârizmî, *shay'*, la cosa, puede representar una de las partes en que se ha dividido un número, por ejemplo para resolver el problema

> He dividido diez en dos partes; luego he multiplicado cada parte por sí misma y sumadas resulta cincuenta y ocho dirhams.

cuya solución comienza así:

> Procedimiento. Haces una de las partes cosa y la otra diez menos cosa. (Rosen, 1831, págs. 28 del texto árabe)

[Citamos de la edición de Rosen (1831), pero la traducción no es la suya, sino que la hemos compuesto tomando en consideración las observaciones de Høyrup (1991) y consultando la traducción latina de Gerardo de Cremona, editada por Hughes (1986), con el fin de ser más conformes con el texto de al-Khwârizmî.]

En ese caso, cuando se continúa con la construcción de la ecuación, la cosa se multiplica por sí misma y da origen a un tesoro y, por tanto, la cosa se identifica con una raíz. Pero la cosa puede representar también un tesoro del que se habla en el enunciado del problema. Éste es el caso del problema

> Sea un tesoro, cuyo tercio y tres dirhams se le quita y luego se multiplica lo que queda por sí mismo y resulta el tesoro. (Rosen, 1831, pág. 40 del texto árabe)

La incógnita de este problema es el tesoro (que es el resultado de multiplicar algo por sí mismo) y al-Khwârizmî en el curso de la solución identifica ese tesoro con la cosa:

> Multiplica por tanto dos tercios de cosa, *esto es del tesoro*, menos tres dirhams por sí mismo. (Rosen, 1831, pág. 40 del texto árabe, cursiva nuestra)

pero al hacer los cálculos, como la cosa se multiplica por sí misma pasa a ser una raíz y el resultado de esa multiplicación, un tesoro:

Dos tercios [de cosa] multiplicado por dos tercios [de cosa] resulta cuatro novenos de tesoro y tres dirhams substractivos por dos tercios de cosa, resulta dos raíces. De nuevo tres dirhams substractivos por dos tercios de cosa, resulta dos raíces y menos tres por menos tres, resulta nueve dirhams. Son por tanto cuatro novenos de tesoro y nueve dirhams menos cuatro raíces, igual a una raíz. (Rosen, 1831, págs. 40-41 del texto árabe)

Como vemos, la cosa, por un lado, y tesoro, raíz y simples números (*dirhams*), por otro, no están representando cosas de la misma naturaleza: la cosa sirve para representar una cantidad desconocida para poder calcular con ella; tesoro, raíz y simples números representan *tipos* o *especies* de números.

En el texto de al-Khwârizmî, se denomina "cosa" a alguna cantidad desconocida para comenzar la construcción de la ecuación, y, en el curso de los cálculos con la cosa que conducen a la ecuación, las cantidades van siendo denominadas por su tipo o especie, que no es una propiedad absoluta de la cantidad, sino una propiedad relativa a los cálculos que se están haciendo. Es decir, hay dos categorías distintas de cosas que representar y de representaciones que se entrelazan: las cantidades desconocidas y los tipos de números.

En el álgebra babilónica no hay estas dos categorías. Las cantidades desconocidas se representan con los sumerogramas que significan "largo" y "ancho" en lo que Høyrup (2002) llama "una representación funcionalmente abstracta mediante segmentos medibles".

En el álgebra hindú esta distinción está presente y los nombres que se utilizan para lo uno y lo otro no se identifican entre sí.

Así en el capítulo I del *Vija-Ganita* o *Avyacta-Ganita*, sección IV, que trata de las operaciones aritméticas con cantidades desconocidas, Bhâskara comienza escribiendo lo siguiente:

"So much as" and the colours "black, blue, yellow and red" and others besides these, have been selected by venerable teachers for names of values of unknown quantities, for the purpose of reckoning therewith. (Colebrooke, ed. 1817, p. 139)

Y en el capítulo VI que trata del "Analysis by a Multiliteral Equation" vuelve a introducir los colores para representar las cantidades desconocidas de forma más prolija, añadiendo que también pueden usarse letras:

This is analysis by equation comprising several colours.
In this, the unknown quantities are numerous, two, three or more. For which *yâvat-tâvat* and the several colours are to be put to represent the values. They have been settled by the ancient teachers of the science: viz. "so much as" (*yâvat-tâvat*), black (*calaca*), blue (*nîlaca*), yellow (*pîtaca*), red (*lôhitaca*), green (*haritaca*), white (*swêtaca*), variegated (*chitraca*), tawny (*capilaca*), tan-coloured (*pingala*), grey (*d'hûmraca*), pink (*pâtalaca*), white (*savalaca*), black (*syâmalaca*), another black (*mêchaca*), and so forth. Or letters are to be employed; that is the literal characters *c*, &c. as names of the unknown, to prevent the confounding of them. (Colebrooke, ed., 1817, pp. 228-229)

Por su parte, los nombres de las especies de números son *rûpa*, que quiere decir "forma" o "especie" (Colebrooke, ed., 1817, p. 139, n. 1), para los números absolutos, y *varga* y *ghana* para cuadrado y cubo, respectivamente.

El producto de potencias de distinto color se representa con una expresión que viene a decir que el producto no ha sido realizado, es un "producto indicado". Pero además los nombres para las cantidades desconocidas no se usan sólo para la primera potencia de la cantidad desconocida. En efecto, para representar el cuadrado de una cantidad desconocida no se escribe el término *varga* solo, como sucede con *mâl* o *dynamis* o *census*, sino que se escribe acompañado del nombre de la cantidad desconocida, es decir, *yâvat varga* o *câlaca varga*, etc.

Como ejemplo, veamos cómo escribe Bhâskara la expresión algebraica $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$.

ya gh 1 *ya v. ca bh* 3 *ca v. ya bh* 3 *ca gh* 1 (Colebrooke, ed., 1817, p. 248)

En esta expresión *ya* es la abreviatura de *yâvat* y representa una cantidad desconocida, *ca* es la abreviatura de *calaca* y representa otra cantidad desconocida, *v* es la primera letra de *varga*, cuadrado, *gh* es la primera letra de *ghana*, cubo, y *bh* es la primera letra de *bhâvita*. En la formación de los monomios intervienen por tanto números (siempre presentes, incluso si es 1), los nombres de las cantidades desconocidas, los nombres de las especies de números y el nombre del producto indicado.

En el sistema de signos de Bhâskara se representa pues sin ninguna dificultad cantidades desconocidas distintas con signos distintos, precisamente por mantener diferenciadas las representaciones de cantidades y tipos de números.

Por el contrario, la distinción de las dos categorías se difumina a partir del momento en que se identifica la cosa con la raíz y las especies de números no se limitan a las tres de al-Khwârizmî. Así, ᶜUmar al-Khayyâm puede escribir, hablando ya de una tradición:

Es la costumbre, entre los algebristas, nombrar en su arte la incógnita que se quiere determinar “cosa”, su producto por sí misma, *mâl* [tesoro], su producto por su *mâl*, *ka’b* [cubo], el producto de su *mâl* por su semejante, *mâl mâl*, el producto de su *ka’b* por su *mâl*, *mâl ka’b*, el producto de su *ka’b* por su semejante, *ka’b ka’b*, y así sucesivamente hasta tan lejos como se quiera. Se sabe a partir del libro de los *Elementos* de Euclides que esos grados son todos proporcionales, quiero decir que la razón de la unidad a la *jidr* [raíz] es igual a la razón de la *jidr* al *mâl* y es igual a la razón del *mâl* al *ka’b*. La razón del *ᶜadad* [número] a las *jidr* es por tanto igual a la razón de las *jidr* a los *mâl*, igual a la razón de los *mâl* a los *ka’b*, e igual a la razón de los *ka’b* a los *mâl mâl*, y esto hasta tan lejos como se quiera (Rashed and Vahebzadeh, 1999, pp. 120-122).

La historia de la elaboración del lenguaje simbólico para el álgebra va a estar marcada tanto por esta identificación como por la necesidad de tener ambas categorías representadas. En efecto, según Cajori (1928), en la simbolización de las potencias de la incógnita en el álgebra pueden distinguirse dos planes generales: el que desarrolla abreviaturas a partir de los nombres cosa, raíz, censo, etc., el “Plan de abreviaturas”, y el “Plan de índices”, en que uno se limita “to simply indicating by a numeral the power of the unknown quantity” (Cajori, 1928, p. 339). Veamos las consecuencias que tiene cada uno de los dos planes para la representación de cada una de las dos categorías: las cantidades desconocidas y las especies de números.

Comencemos por el Plan de abreviaturas. En él, lo que de hecho se representa es las especies de números y la cosa sólo se representa en la medida en que se ha identificado con una de las especies, la raíz. Esto tiene dos consecuencias: como lo que está representado por el símbolo no es una cantidad (que es de determinada especie) sino sólo la *especie* que es esa cantidad en cuestión, en esa simbolización no pueden distinguirse cantidades distintas con signos distintos. Pero además, como los signos con los que se representan las especies son abreviaturas de los nombres de las especies, las reglas de cálculo, en concreto las reglas para multiplicar expresiones, no pueden derivarse de los propios signos sino que han de establecerse en tablas de multiplicar.

Vale la pena que señalemos además que la falta de eficacia de ese simbolismo para el cálculo en el nivel de la expresión tiene rasgos distintos en cada una de las dos series de nombres para las especies que se desarrollan en la historia. En efecto, cuando se generalizan las especies más allá de los números cúbicos, los nombres de las especies se construyen a partir de los de la segunda y tercera potencias, pero esto se hace de dos maneras distintas, una “aditiva” y otra “multiplicativa”. La aditiva es la que usa Diofanto, así como Abû Kâmil, al-Karâji, as-Samaw’al, ᶜUmar al-Khayyâm, Sharaf al-Dîn al-Tûsî y la mayor parte de los matemáticos árabes, incluidos los del occidente árabe (al-Andalus o el Maghreb) como ibn al-Bannâ o al-Qalasâdi, así como Leonardo de Pisa y Vieta en el occidente cristiano. En ella, *dynamocubos*, o *mâl ka'b*, o *census cubus*, o *quadrato-cubus* representan la quinta potencia y el nombre nuevo se forma yuxtaponiendo las dos palabras. La multiplicativa es la que usa Sinân ibn al-Fath entre los árabes orientales, Bhâskara en la India, y Luca Pacioli, Cardano, Tartaglia, Pedro Nunes, Pérez de Moya y, en general, la mayoría de los algebristas del occidente cristiano. En ella, *mâl ka'b*, *census cubi* o censo de cubo representa la sexta potencia y el nombre nuevo se forma a menudo con el genitivo.

En el caso de la combinación aditiva, la tabla de multiplicar especies es sencilla ya que el nombre del producto de dos especies es la yuxtaposición de los nombres de los factores y, por tanto, la multiplicación de especies puede convertirse en una regla de sintaxis. La combinación aditiva genera además nombres para todas las especies, ya que cualquier número puede obtenerse como suma de doses y treses, pero el nombre de cada especie no es único.

En el caso de la combinación multiplicativa, la tabla de multiplicar especies no puede dar origen a una operación sintáctica entre los nombres porque, por ejemplo, el producto de censo de cubo por censo es censo de censo de censo y este nombre no puede derivarse de los dos nombres anteriores, sino que sólo puede obtenerse recurriendo al significado de cada nombre en la serie de las especies. Además, la combinación multiplicativa no genera nombres para todas las especies, ya que no todos los números pueden expresarse como productos de doses y treses. Así, Sinân ibn al-Fath tiene que introducir un nombre especial, *madâd*, para la quinta potencia, la primera "que no es un cubo ni un cuadrado" y, de forma similar, en el occidente cristiano se usan los nombres "primero relato" o "sursolidum" y "segundo relato" o "bisursolidum" para la quinta y la séptima potencias, y los nombres subsiguientes para las potencias superiores que no son cubos ni cuadrados. Ahora bien, aunque en este caso se dé esta imposibilidad de generar operatividad sintáctica en la producción de los signos para las especies y en la multiplicación, que es una de las operaciones más frecuentes, el hecho de que los nombres compuestos se formen con el genitivo sí que abre la posibilidad del anidado de expresiones (Høyrup, 2000), posibilidad que no está presente en la combinación aditiva. Dicho de otro modo, la combinación aditiva permite la operatividad sintáctica de la multiplicación ya que el nombre censo cubo está formado de manera similar a la multiplicación $x^2 \cdot x^3$, mientras que la combinación multiplicativa se abre a la operatividad sintáctica del anidado de expresiones ya que el nombre censo de cubo está formado de manera similar a la potencia de una potencia $(x^3)^2$.

En la medida en que en el Plan de abreviaturas el texto "abreviado" no se diferencia del texto inicialmente escrito en vernáculo más que en que algunas palabras están abreviadas, el hecho de que algunas palabras se substituyan por su primera sílaba, su primera letra o algún otro signo apenas puede añadir operatividad sintáctica a la que ya estuviera presente en el texto escrito en vernáculo, y los rasgos que acabamos de describir están presentes de forma similar tanto cuando los nombres de las especies se escriben completos, *mâl mâl* o censo de censo, como cuando se escriben abreviados, como lo hacen Diofanto, al-Qalasâdi, Cardano o Pérez de Moya.

El caso de los algebristas árabes occidentales como al-Qalasâdi no es exactamente igual, ya que parece bastante probable la hipótesis de que las abreviaturas provengan del uso de una tabla con arena en el que se efectúan los cálculos y no de abreviar un texto escrito. En efecto, Abdeljaouad (2002) subraya que al-Qalasâdi asocia explícitamente el simbolismo algebraico al uso de una tabla con arena para calcular, *lawha*, en la que hay que efectuar las operaciones, en *at-Tabsira al-wâdhiha fi masâ'il al-'adad allâ'iha* (hacia 1443):

Escribe la operación en un lado de la *lawha* y coloca encima de la cosa (*shay'*) el signo *shin* [ش, la primera letra de la palabra *shay'*] o tres puntos [la letra *shin* lleva tres puntos encima], encima del *mâl* el signo *mim* [la primera letra de la palabra *mâl*], encima del *ka'b* el signo *kaf* [ك, la primera letra de la palabra *ka'b*] y no coloques nada encima del número porque la ausencia de un signo también es un signo. [Abdeljaouad, 2002, p. 14, los comentarios entre corchetes son míos]

Como consecuencia de este origen, las expresiones algebraicas en los textos árabes occidentales no suelen aparecer como parte de un texto escrito en vernáculo substituyendo palabras por sus abreviaturas, sino que suelen aparecer, introducidas por la frase "ésta es su imagen (figura o representación)", acompañando al texto vernáculo. Siguiendo a Djebbar (1985), Abdeljaouad llama a estos símbolos, "simbolos de ilustración", distinguiéndolos, dentro de los propios del álgebra sincopada, de las abreviaturas tal y como las usa, por ejemplo, Diofanto, a las que denomina "símbolos de substitución". La operatividad de las expresiones simbólicas de los árabes de Occidente reside por tanto en la disposición de los signos en tablas en la tabla de arena y en las acciones de trazado y borrado en ella, más que en operaciones sintácticas con los propios signos.

El paso del álgebra sincopada al álgebra simbólica se inicia con Vieta, para quien la *Logística especiosa*, el arte analítica al que él quiere dar este nombre en vez del de álgebra, es el cálculo con especies o *formae rerum*, formas de las cosas. Pero para representar ese cálculo con especies Vieta desarrolla unas expresiones simbólicas en las que lo que se representa mediante letras no son las especies, sino las cantidades conocidas o desconocidas. Por ejemplo, Vieta escribe la ecuación $x^2 - 2bx = c$, de la siguiente manera:

A quad – *B* in *A* 2, æquetur *Z* plano

Un monomio en el sistema de signos de Vieta contiene pues una letra para representar una cantidad y un nombre de la especie, que está escrito en lenguaje vernáculo o, en ocasiones, abreviado. Vieta diferencia pues en su sistema de signos entre los signos que usa para representar las cantidades y los que usa para representar las especies, lo que le permite (como hemos visto que sucedía en el sistema de signos de Bhâskara, pero no en los demás casos) representar varias cantidades desconocidas distintas con signos distintos de forma biunívoca, característica del sistema de signos crucial para que pueda ser útil en el método cartesiano. Sin embargo, el sistema de signos no es adecuado para el cálculo en el nivel sintáctico, ya que aún hay que recurrir a las tablas de multiplicar de las especies, al estar éstas representadas por sus nombres (en este caso, formados según la combinación aditiva) o abreviaturas de sus nombres.

La simbolización permitirá el cálculo en el nivel sintáctico cuando las letras viéticas dejen de estar acompañadas por los nombres de las especies. Pero para esto hará falta que se adopte la simbolización desarrollada en el Plan de índices.

En efecto, lo que caracteriza al Plan de índices es que las especies, en vez de estar representadas por su nombre o una abreviatura de éste, están representadas por un número que expresa su posición en la sucesión, de forma que la multiplicación de especies se puede convertir en una regla sintáctica al identificarse con la suma de los números que las representan.

[Vale la pena señalar que para que la producción de la regla sintáctica resulte sencilla es preciso que la numeración de las especies asigne el 1 a la cosa y no a los "simples números", ya que si se asigna la primera posición a los simples números, como hacen Sinân ibn al-Fath y Luca Pacioli, el producto de dos especies ya no es la especie que está en la suma de las posiciones. Pero asignar el 1 a la cosa implica asignar a los simples números la posición 0, lo que exige que el 0 no sea simplemente una marca de ausencia en la escritura posicional de los números traída de la India, sino que haya sido integrado en la sucesión de los números y, en consecuencia, sirva como instrumento para numerar posiciones.]

El Plan de índices ya está presente en el *Triparty* de Chuquet, escrito en francés en 1484, no publicado en su época y escasamente conocido hasta finales del siglo XIX en que lo edita Aristide Marre (Paradís, 1993).

[Entre los algebristas árabes de Oriente hay un precedente en la representación de los polinomios mediante tablas por as-Samaw'al. En esas tablas están numeradas las posiciones de las especies y se escriben los números (coeficientes) de cada especie en la posición correspondiente. Las posiciones incluyen una posición cero para los "simples números" y dos series de números, ascendentes para las potencias positivas y descendentes para las potencias negativas (que se llaman "partes de *mâl*", "partes de cubo", etc.). Estas tablas proceden claramente del paso al papel de los cálculos hechos en la tabla con arena y, por ello, funcionan como "símbolos de ilustración" y su operatividad está en las acciones que se realizan en la tabla con arena.]

Ahora bien, en el sistema de signos de Chuquet (y lo mismo sucederá en el de Bombelli, que será el conocido e influyente), como los números son otra forma de representar lo que en el Plan de abreviaturas se representaba con abreviaturas, es decir, las especies, lo único que está representado son las especies. Así, Bombelli escribe [señalar sus símbolos en el facsímil] 4^2 para nuestro $4x^2$ o 4^1 para nuestro $4x$, de modo que su sistema es eficiente para el cálculo en el nivel sintáctico, pero no puede representar más de una cantidad desconocida.

Será necesaria la combinación de las letras viéticas para representar las cantidades desconocidas (y conocidas) y los números de Chuquet y Bombelli para representar las especies, para que ambas categorías estén representadas de manera claramente diferenciada y eficiente para el cálculo sintáctico y se fije el sistema de signos del álgebra simbólica, lo que sucede con Descartes y Euler.

[El texto que aparece en las actas termina con unas preguntas de investigación. Lo que he presentado son esbozos de respuestas a algunas de ellas.]

[Preguntas para la investigación]

NOTAS

[1] El símbolo de Descartes para la igualdad no es éste, sino su simétrico. Escribo éste porque el otro no lo he encontrado en los tipos que tengo disponibles.