

CAPÍTULO 3

EL MODELO DE COMPETENCIA

Daughter: But, Daddy, I can't keep ideas separate. Ought I to do that?

Father: No— No— Of course not. Combine them. But don't add them. That's all. I mean— if the ideas are numbers and you want to combine two different sorts, the thing to do is to multiply them by each other. Or divide them by each other. And then you'll get some new sort of idea, a new sort of quantity. If you have miles in your head, and you have hours in your head, and you divide the miles by the hours, you get "miles per hour"—that's a speed.

G. Bateson

3.1. LA HEURÍSTICA.

El mundo de la pura resolución de problemas en el que hemos situado este trabajo es el campo de estudio de la heurística. “Heurístico” viene del verbo griego *euriskô* —de donde proviene también el famoso *eureka* que la leyenda atribuye a Arquímedes—, que significa “encontrar”. Polya, en el *Breve diccionario de heurística* que constituye el núcleo central de su primer libro dedicado al estudio de la resolución de problemas (Polya, 1945), incluye una entrada para esa voz en la que dice que la “heurística o *ars inveniendi*¹ fue el nombre de una cierta rama del saber, delimitada con poca claridad, perteneciente a la lógica o a la filosofía o a la psicología, esbozada a menudo, rara vez presentada en detalle, y prácticamente olvidada hoy en día. La intención de la heurística es estudiar los métodos y las reglas del descubrimiento y la invención”, y añade que su libro es un intento de revivir la heurística “en una forma más moderna y más modesta”. Esa forma más moderna y más modesta está descrita a lo largo de todo el libro y, en particular, en la voz “heurística moderna” del diccionario citado. En ella, Polya circunscribe el objeto de la heurística a “comprender el proceso de resolución de problemas, especialmente las *operaciones mentales típicamente útiles* en ese proceso”, soslayando la pretensión desmesuradamente ambiciosa de tratar del descubrimiento y la invención, y de establecer cuáles son sus métodos y sus reglas. Se puede argumentar que, en realidad, cualquier descubrimiento,

¹ “El arte de inventar”. Conviene saber para no confundir las cosas que el *ars* latino se usaba para traducir el término griego *technê* y por tanto, designaba un cuerpo de doctrina en el que se reúnen los conocimientos teóricos sobre una materia, cuyo dominio permite llegar a ser experto. No tiene pues el significado que hoy en día tiene “arte” cuando se refiere a la pintura, la escultura o cualquiera de las otras artes, de la misma manera que tampoco lo tenía en los libros medievales o renacentistas de matemáticas que lo llevaban en su título.

cualquier invención, ha de producirse en el curso del proceso de resolución de un problema, y que, por tanto, Polya no es que fuera más modesto, sino simplemente más preciso al centrar la heurística en el estudio de la resolución de problemas. Ahora bien, como quiera que la resolución de problemas también se estudia desde puntos de vista que no son el de la heurística, hace falta no sólo precisar que ése es su objeto de estudio, sino también cuáles son los rasgos del objeto de estudio que se ponen de relieve cuando es precisamente la heurística la que lo estudia, es decir, hay que delimitar el significado de la palabra “heurística” cuando no es un sustantivo que es el nombre de una disciplina, sino cuando, como en lo que acabamos de llamar *estilo heurístico*, aparece usada como adjetivo. Si no, sería cuanto menos redundante hablar de *estilo heurístico de resolución de problemas*, si la heurística estudia precisamente la resolución de problemas.

Para nosotros, lo que es propio de la heurística es el estudio de los *modos* de comportamiento al resolver problemas y los *medios* que se utilizan en el proceso de resolverlos que son *independientes del contenido*² y que *no suponen garantía* de que se obtenga la solución, y calificaremos, por tanto, de “heurísticos” a tales modos y medios. Esta caracterización aparece pues inicialmente de forma negativa: lo que se está haciendo con ella es decir que se va a dejar de lado elementos que intervienen en el proceso de resolución de problemas —como esquemas, algoritmos o rutinas— y que se sabe además, no sólo que conducen a la solución, sino que son elementos que utilizan para resolver los problemas de un dominio determinado los resolutores que pueden considerarse como expertos en ese dominio. Pero sólo se dejan de lado para que su presencia dominante en el comportamiento de tales expertos no oculte otros elementos, que están presentes siempre en el proceso de resolución de problemas y cuyo papel es crucial siempre que el problema sea para el resolutor algo más que un problema de aplicación, o que el resolutor no pretenda simplemente quitarse de encima el problema resolviéndolo sino que persiga con su resolución aumentar su conocimiento de las matemáticas. Una descripción de los elementos que intervienen en el proceso de resolución de problemas tendrá que contener, si quiere dar cuenta cabal de él, unos y otros. Ahora bien, como no todos los procesos de resolución de problemas presentan la misma combinación de tales elementos y que el mayor peso de unos u otros para explicar su desarrollo depende del problema, los conocimientos del resolutor y sus intenciones, la descripción ha de incluir más de un modelo de competencia. Así, junto al modelo de competencia correspondiente al experto en un dominio que concibe que el fin del proceso es obtener el resultado del problema, cabe elaborar un modelo de competencia —propio del estilo heurístico—

² Los problemas que estamos considerando son problemas de *contenido matemático* —no los juegos, pasatiempos o rompecabezas que pueblan las actividades de algunas propuestas de desarrollo curricular que dicen poner el énfasis en la resolución de problemas—; esto no es contradictorio con que hablemos de modos y medios de resolución de los problemas que sean *independientes del contenido*. Cuando esos medios y esos modos actúan sobre un problema concreto, el contenido del problema está obviamente presente; ahora bien, lo que caracteriza a estos medios y modos que consideramos propios de la heurística es que podemos *describirlos* independientemente del contenido.

que caracterice al experto heurístico —cuya pericia no está referida a un dominio concreto y que aborda la resolución de los problemas con fines epistémicos.

3.2. POLYA Y LA HEURÍSTICA.

El estudio de la resolución de problemas desde el punto de vista de la heurística tiene dos hitos mayores en la obra desarrollada por Polya hasta los años sesenta y en los trabajos de Schoenfeld en los años ochenta. Cualquier descripción de la resolución de problemas que quiera hacerse desde la heurística ha de reconocer su deuda a sus trabajos. Sin embargo, conviene señalar que, aunque el uno se confiese continuador del otro, las descripciones que proporcionan provienen de metodologías de análisis distintas³ y conducen a tipos de modelos distintos. Así, Polya examina mediante la introspección el comportamiento de un resolutor de problemas que podríamos llamar “ideal” y elabora en consecuencia un modelo del proceso de resolución dividido en fases que ese resolutor ideal recorre linealmente, pasando de una a otra sólo cuando la anterior ha concluido: es su harto conocido modelo en cuatro fases, *comprensión*, *elaboración del plan*, *ejecución del plan* y *mirada retrospectiva*⁴. Schoenfeld, por su parte, analiza, observando los protocolos de resolutores reales, los comportamientos que éstos desarrollan mientras resuelven problemas e intenta categorizar sus conductas y describir el conjunto del proceso como un conjunto de episodios —que son segmentos de conductas de la misma categoría—, con lo que elabora un *modelo de actuación*, y no un modelo de competencia⁵.

³ Además están sustentadas por teorías psicológicas diferentes: Polya puede verse como un gestaltista y Schoenfeld ha trabajado a partir de las teorías psicológicas que ven a los sujetos como “procesadores de información”.

⁴ En el original inglés, *looking back*. Nosotros llamaremos a esta fase *revisión-extensión* para subrayar que no se trata de volver sobre lo hecho sólo para revisarlo, sino también para ir más allá de lo que pide el problema original. Este cambio de nombre de la cuarta fase lo hemos hecho porque en nuestro modelo de competencia la tarea de resolver problemas no se concibe que acabe con la obtención del resultado, sino que tiene fines epistémicos y, por tanto, sólo se acaba cuando se decide que ya no se puede (o no se quiere) aprender más. Ver en el capítulo 4 la relación entre la práctica de la fase de revisión-extensión y la concepción de la naturaleza de la tarea propia del modelo de competencia.

⁵ Modelos del proceso de resolución de problemas de matemáticas hay otros muchos. Entre ellos, destacaremos el modelo elaborado por Burton (s. f., 1984a), que también se utiliza en Mason, Burton & Stacey (1982), que define tres fases en función de lo que ella llama *sentimientos* del resolutor y es un modelo destinado a su uso en la instrucción como guía para los alumnos, y el modelo de Goldin, que no es un modelo de fases sino de los lenguajes implicados en la resolución de problemas y está formulado como un modelo de competencia (Goldin, 1983, 1987, 1988 y 1992).

El modelo de Polya, que hemos calificado de modelo de un resolutor ideal, viene acompañado por un conjunto de preguntas —que el resolutor puede hacerse a sí mismo o que le puede hacer un profesor que pretenda guiarle mientras resuelve el problema— que son de naturaleza heurística. El grueso de esas preguntas, las que atañen a la fase de elaboración del plan, son de hecho variantes de la pregunta *¿Conoces un problema relacionado?*, que parece ser por tanto para Polya el motor del proceso de resolución de problemas.

La indagación de Polya del proceso de resolución de problemas está recogida básicamente en tres libros. El primero y más popular (Polya, 1945) contiene, además del modelo ya mencionado, una primera exploración de los rasgos heurísticos de la resolución de problemas presentada sin ánimo de elaborar ningún sistema sino más bien de acumular reflexiones, lo que queda patente desde el momento en que Polya elige el formato de diccionario, como ya hemos citado antes, y presenta por tanto las voces por orden alfabético. En la versión original, el diccionario comienza con *Analogy* y termina precisamente en *Working backwards*. Con sólo fijarnos en esas dos entradas podemos señalar que las cuestiones tratadas en el diccionario no son todas de la misma naturaleza. “Trabajar hacia atrás” es otro nombre de un *método de resolución* de problemas⁶ y, por tanto, puede estudiarse y describirse en detalle su uso para resolver problemas. La “analogía”, sin embargo, no hace falta decir que no es un método de resolución: “buscar algo análogo”, de la misma manera que otras variantes de “buscar un problema relacionado”, sólo es una sugerencia heurística que poco indica de lo que efectivamente hay que hacer. El mismo Polya en su segundo libro dedicado a la resolución de problemas (Polya, 1954) —cuyo primer volumen se titula precisamente *Inducción y analogía en matemáticas*— lo primero que señala al respecto es que “Tan pronto como comenzamos a discutir de la analogía pisamos terreno menos firme” (pág. 13) y viene a proponer que la única manera de tratar el asunto de forma útil es precisar conceptualmente respecto a qué se está hablando de analogía. Es lo que llama *analogía aclarada*, que define así: “dos sistemas son análogos si concuerdan en relaciones de sus partes respectivas, definibles con claridad”. Así, un triángulo en un plano puede decirse que es análogo a un tetraedro en el espacio, y aclarar la analogía consiste en este caso en especificar cuáles son las relaciones en que concuerdan: en el plano dos rectas no pueden encerrar una parte de éste y tres sí que pueden hacerlo, en el espacio tres planos no pueden y cuatro sí: “la relación del triángulo con el plano es la misma que la del tetraedro con el espacio en la medida en que tanto el triángulo como el tetraedro están limitados por el mínimo número de elementos simples” (pág. 14). Esta

⁶ Nos referimos al método griego de análisis cuya restricción a los problemas aritméticos de enunciado verbal describimos en Puig y Cerdán (1989) y del que el mejor estudio que conocemos es Mahoney (1968). En el capítulo 5 examinaremos algunas cuestiones relacionadas con el uso de los dos tipos de análisis, teórico y problemático, con los problemas de probar y los problemas de encontrar, respectivamente, y la forma en que se presentan en las actuaciones de los alumnos.

analogía aclarada puede ser ya algo más que una sugerencia, en la medida en que no sólo indica que no estaría mal hacer algo, sino que precisa cuál es el tipo de transformación que hay que realizar⁷.

El grueso del segundo libro (Polya, 1954) está dedicado al estudio de la estructura formal de los razonamientos que se hacen en el curso de la resolución de problemas y que no pueden describirse con los patrones clásicos deductivos de la lógica: los que en el *Breve diccionario de heurística* Polya comenzó llamando “razonamientos heurísticos” y que aquí llama “plausibles”. No es éste el lugar para exponer las ideas de Polya, ni para su crítica. Nos limitaremos a indicar que lo que para nosotros tiene valor del trabajo de Polya es el asunto que plantea más que la descripción que hace de él y a señalar que, desde nuestro punto de vista, los razonamientos son plausibles —etimológicamente, “merecedores de aplauso”— cuando no se transmite *verdad* de las premisas a la conclusión, sino un aumento en la *creencia* de que la conclusión efectivamente es el caso, y que los *patrones plausibles* describen la forma lógica de esos razonamientos. En el proceso de resolución de problemas coexisten razonamientos que responden a patrones plausibles con razonamientos que responden a patrones deductivos y, en la medida en que los patrones plausibles son a menudo formas viciadas de patrones deductivos reparadas al substituir la verdad por la creencia, esa coexistencia no deja de producir interferencias en la actuación de los resolutores⁸, otra cosa distinta es que, en el modelo de competencia, pueda separarse con nitidez el *proceso de resolución* del problema —conducido a menudo por razonamientos que pueden describirse mediante patrones plausibles— de la *solución* del problema —es decir la presentación final del conjunto de pasos que conducen de los datos a la incógnita o de la hipótesis a la conclusión, donde sólo son admisibles razonamientos deductivos.

Finalmente, del tercer libro, Polya (1962-1965) sólo nos interesa traer aquí a colación que Polya, pretendiendo avanzar hacia lo que él llama un “método general” —que aunque anunciado en el primer volumen no acaba de aparecer en el segundo volumen—, estudia lo que podrían ser *modelos* generales que englobarían grandes clases de maneras de elaborar planes de resolución⁹.

⁷ La única manera de que la analogía pueda ser lo que en el apartado siguiente llamaremos una *herramienta heurística* es que se trate de lo que aquí llama Polya “analogía aclarada”.

⁸ Un pequeño apunte sobre las causas de esta difícil coexistencia lo dimos en el debate que siguió al panel sobre resolución de problemas en el *Primer Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*, que está recogida en las páginas 262 a 266 de las *Memorias* de ese congreso (García Blanco et al., 1991).

⁹ Uno de esos modelos corresponde al método cartesiano, que exploraremos en los capítulos 5 y 6 en los análisis de los problemas y de las actuaciones de los alumnos. Los otros modelos, aunque Polya pretenda generalizarlos, son modelos de procedimientos propios de una clase particular de problemas. Ese tipo de procedimientos no los incluimos en el curso que recibieron los alumnos cuyas actuaciones estudiamos en este trabajo. En versiones posteriores del curso, hemos incluido alguna de estas clases de problemas —en particular, la clase de problemas geométricos de construcción con regla y compás— y los modelos correspondientes que Polya desarrolla en este libro.

3.3. LA SERIE DE ESTUDIOS DE SCHOENFELD.

Si la indagación de Polya puede verse pues como un intento de ir explorando una tras otra las maneras de actuar de un resolutor ideal, acumulando así distintos rasgos de conducta competente, con la intención de presentarlos después como una guía para la acción, los trabajos de Schoenfeld, que están resumidos en su libro de 1985, pueden verse como la búsqueda inacabable de fuentes de explicación de la conducta de los resolutores reales que conduce a la categorización de lo que Schoenfeld llama los componentes del conocimiento y la conducta para explicar la actuación de los sujetos al resolver problemas de matemáticas.

En efecto, si ese libro se lee atendiendo al discurrir en el tiempo de las investigaciones que describe, cada elemento que introduce —cada componente, por usar la terminología de Schoenfeld— puede verse como el resultado de un intento de explicar por qué los elementos anteriores son incapaces de dar cuenta de por qué los resolutores no tienen éxito al resolver problemas. Así, cuando, pese a conocer las herramientas heurísticas¹⁰, no se ha sabido cuál había que usar, cuándo o cómo había que hacerlo, o no se ha evaluado los efectos de su uso para el desarrollo de la resolución, se habla de que es preciso un buen *control* de lo que se hace, un *gestor* del proceso. Cuando, pese a conocer las herramientas heurísticas y gestionar bien lo que se ha estado haciendo, ha faltado un conocimiento de algún hecho, algoritmo o esquema propio del dominio del problema en cuestión, o no se han usado las destrezas que hubieran allanado el camino, se desciende a considerar que ha habido una carencia de *recursos*. Y cuando, pese a disponer de todo lo anterior, la concepción de la naturaleza de las matemáticas o de la tarea de resolver problemas ha hecho que no les cupiera en la cabeza que eso que sabían podía usarse para resolver el problema, lo único que permite ya explicar el fracaso es el *sistema de creencias* de los resolutores. Schoenfeld, pues, a diferencia de Polya no intenta saber cada vez más de los *poderes* del sujeto ideal que nunca falla, sino que ante la persistencia en el fracaso de los resolutores reales se pregunta qué otro tipo de explicación no había tenido en cuenta. Los componentes que Schoenfeld va introduciendo —heurísticas, gestión, recursos y sistemas de creencias son los nombres que él les da— aparecen inicialmente pues por las *carencias* de los sujetos reales¹¹.

¹⁰ Schoenfeld no usa el término “herramienta heurística”, sino “estrategia heurística” o simplemente “una heurística”. Además, parte de lo que para él son estrategias heurísticas para nosotros son sugerencias heurísticas y no herramientas heurísticas. La distinción entre esos dos términos la introducimos en el apartado siguiente. El término “estrategia” y su compañero en el arte de la guerra “táctica” no los usaremos como términos de la teoría.

¹¹ En un trabajo más reciente (Schoenfeld, 1992) ya no habla de “componentes del conocimiento y la conducta”, sino de “aspectos de la cognición”, ha cambiado los nombres de las tales aspectos —ahora son *el conocimiento de base, estrategias de resolución de problemas, gestión y control, creencias y afectos*— y ha introducido un quinto que con el nombre de *prácticas* pretende servir como fuente de explicación de las

Es posible, sin embargo, convertirlos en los elementos de un modelo de competencia con sólo enunciarlos de modo que no sean fuentes de explicación de cualquier tipo de conducta sino expresión de la conducta competente.

3.4. ELEMENTOS DEL MODELO DE COMPETENCIA.

El modelo de competencia que asociamos al estilo heurístico de resolución de problemas lo hemos elaborado tras la delimitación y la reformulación en ese sentido de lo que hemos visto que aparece en la indagación de los poderes del sujeto ideal de Polya y los componentes del modelo de actuación de Schoenfeld. Ahora bien, el punto de vista desde el que lo elaboramos es el de una semiótica de las matemáticas¹² en la que el modelo de competencia no es describible en su totalidad, ya que lo concebimos con la misma estructura con que Eco (1984) concibe la semántica como enciclopedia *versus* diccionario, es decir, como el conjunto registrado de todos los usos del sistema de signos en cuestión en las situaciones propias del dominio que se está considerando, de todas las interpretaciones de sus términos, de todas las deducciones necesarias de sus proposiciones. Por ello, nuestra descripción del modelo de competencia adopta la forma de una mera lista de elementos, que está abierta, por un lado, a distintas combinaciones que sean otras tantas representaciones locales de la enciclopedia, y, por otro, a su reelaboración como consecuencia de su uso para la descripción de la actuación de los sujetos en nuevas situaciones que les conduzcan a nuevos usos, nuevos sentidos o nuevas interpretaciones no registrados aún en esa representación local de la enciclopedia.

La lista de los elementos que lo componen es numerosa y contiene básicamente

- destrezas con potencial heurístico (DH),
- sugerencias heurísticas (SH),
- herramientas heurísticas (HH),
- métodos de resolución con contenido heurístico (MH),
- patrones plausibles (PP),
- el gestor instruido (GI) y
- una concepción de la naturaleza de la tarea de resolver problemas según la cual ésta se realiza con fines epistémicos.

Junto a estos elementos de naturaleza heurística, que son los que caracterizan el estilo heurístico, también están presentes, aunque su papel sea secundario, otros elementos como conocimientos conceptuales y de los procesos matemáticos, esquemas, algoritmos, rutinas, modelos, etc. Ya hemos comenzado a delimitar el significado de alguno de los términos heurísticos al hilo del examen de los

creencias, que, aunque estamos de acuerdo en que es la fuente fundamental de explicación de las creencias, no entendemos en qué sentido se le puede llamar un “aspecto de la cognición”.

¹² Este punto de vista fue introducido por Eugenio Filloy en Kieran y Filloy (1989). Cf. también mi texto *Semiótica y Matemáticas* (Puig, 1994b).

trabajos de Polya y Schoenfeld, en lo que sigue precisaremos más los términos que no usamos exactamente en el mismo sentido con que se usan en la literatura.

En la mayor parte de los trabajos en los que se trata de la resolución de problemas desde un punto de vista heurístico, ya sean trabajos de investigación, reflexiones o materiales para la instrucción, es corriente que —en una lista de lo que es útil para abordar los problemas y bajo el nombre de “estrategias” o “procedimientos” o “heurísticas”— aparezcan juntos, por ejemplo, *buscar un problema relacionado*, *hacer una tabla* y *considerar un caso*. Desde nuestro punto de vista, si se quiere analizar¹³ en detalle los elementos que intervienen en el proceso de resolución de problemas, conviene separar esas tres cosas. Así, diremos que *buscar un problema relacionado* es una *sugerencia heurística* en la medida en que señala una dirección del trabajo pero no se refiere a ningún procedimiento concreto para buscar o producir tal problema relacionado.

Considerar un caso, sin embargo, sí que se refiere a un procedimiento determinado que permite, a partir del problema que se tiene que resolver, formular un problema relacionado: lo llamaremos, entonces, una *herramienta heurística*, queriendo indicar con la palabra “herramienta” ese carácter de instrumento de transformación. *Hacer una tabla*, por su parte, lo llamaremos una *destreza*¹⁴ ya que no tiene el carácter de transformación del problema.

Está claro que estos tres elementos en particular que acabamos de usar como ejemplo, aunque sean de naturaleza distinta, pueden aparecer combinados en el curso de la resolución de un problema. Así, la sugerencia heurística “busca un problema relacionado” puede conducir al resolutor a elegir la herramienta heurística “consideración de un caso” para no esperar hasta que el problema relacionado caiga del cielo sino producirlo y, si la versión de la herramienta heurística “consideración de un caso” que utiliza es la que consiste en considerar una serie de casos ordenados de alguna manera, es conveniente que recurra a la destreza de organizar los casos y lo obtenido en ellos haciendo una tabla. Pero el que puedan aparecer naturalmente asociados no quita para que *buscar un problema relacionado*, *considerar un caso* y *hacer una tabla* sean de naturaleza distinta.

Las *sugerencias heurísticas* no tienen como única función desencadenar el uso de herramientas heurísticas, como en el ejemplo anterior, también pueden servir para orientar búsquedas en la memoria a largo plazo, apoyadas sobre rasgos del problema. Ésta es de hecho la forma en que pueden interpretarse la mayor parte de las preguntas que acompañan al modelo de fases de Polya, a las que nos hemos referido anteriormente.

¹³ Y esos análisis tendrán consecuencias para la organización de la instrucción, ya que, si el análisis muestra que son elementos de naturaleza distinta, las situaciones de enseñanza también habrán de tener características diferentes.

¹⁴ Leone Burton, que también usa el término “destrezas” en su proyecto (Burton, s. f.), dice que “una destreza [...] difiere de un procedimiento en que puede ser enseñado en las clases de matemáticas como cualquier contenido corriente, y de hecho se enseña a menudo así.” (pág. 16).

Las *destrezas*, en el sentido en que conviene examinarlas en su uso en el proceso de resolución de problemas, no son meras formas adecuadas de trabajo o de presentación del trabajo, sino que tienen *potencial heurístico*, es decir, sirven para descubrir. Una *notación adecuada* puede ser el terreno en que se realicen las transformaciones que permiten descubrir lo necesario para resolver el problema¹⁵.

3.5. LA DEFINICIÓN DE HERRAMIENTA HEURÍSTICA.

Otras herramientas heurísticas, además de la ya citada *consideración de un caso* —o de una serie de casos—, son la *división del problema en partes*, la *reformulación*, la *variación parcial*, el *examen de posibilidades*, el paso al *contrarrecíproco*, la introducción de una *figura auxiliar* y la *analogía aclarada*.

A primera vista, una lista como ésta parece estar formada por elementos heterogéneos. Polya, en una nota marginal de su libro *Mathematical Discovery*, dice que un problema de probar, cuya forma general es $A \rightarrow B$, se puede transformar en $\neg B \rightarrow \neg A$, y que un problema de encontrar se puede transformar intercambiando la incógnita con uno de los datos. Observa entonces que lo que acaba de mostrar es *independiente del contenido* del problema y afirma que “el estudio de tal tipo de transformaciones es lo que propiamente pertenece a la heurística” (Polya, 1965, pág. 84). Recogiendo esta idea que Polya sólo dejó apuntada y que no desarrolló, podemos dar una definición más general de *herramienta heurística*: es un *procedimiento independiente del contenido del problema que lo transforma en otro*. Está claro pues que si lo que hace una herramienta heurística es transformar el problema en otro, no lo resuelve, ni tampoco garantiza su solución.

Esta caracterización general de las herramientas heurísticas permite distinguir a qué vamos a llamar herramienta heurística y a qué sugerencia o destreza con mayor precisión, ahora bien lo que realmente nos parece importante no es sólo la posibilidad de hacer esas distinciones. Al definir las herramientas heurísticas como procedimientos que transforman los problemas en otros problemas, se abre la vía para analizar las distintas maneras que tienen de realizar tal transformación cada una de las herramientas heurísticas y cuáles pueden ser los efectos que pueden esperarse de su uso para la solución del problema originalmente planteado. Dicho análisis puede conducirse guiado por preguntas del estilo de las siguientes: ¿Cuál es la intención de su uso? ¿Cómo está relacionado el problema original con el problema transformado? O, la solución del problema transformado, ¿qué implica para la solución del problema original? ¿Qué se puede traer de la solución del problema transformado al problema original? ¿Cómo queda transformado el problema original al incorporarle lo que se traiga de

¹⁵ El mismo Polya subraya en su *Breve diccionario de heurística*, entrada *notación*, que la notación es particularmente útil cuando “el orden y conexión de los signos sugiere el orden y conexión de los objetos” (Polya, 1945, pág. 137). Veremos, sin embargo, en los capítulos 5 y 6, cómo la *expresión simbólica* puede ser para los alumnos algo muy distinto de una destreza con potencial heurístico, y cómo la instrucción del curso incide en ello.

la solución del transformado?¹⁶ Estas preguntas no pueden contestarse en general, sino que han de plantearse para cada herramienta heurística y al menos distinguiendo entre los problemas de encontrar y los problemas de probar.

Schoenfeld (1985) ha señalado como una de las dificultades mayores de la enseñanza de lo que él llama “estrategias” heurísticas que cada una de esas estrategias “explota” en una infinidad de “subestrategias” muy diferentes entre sí y que eso hace que sea preciso describir cada una de las subestrategias con el suficiente grado de detalle como para que sean utilizables, pero entonces, en vez de tener unas pocas “estrategias” aplicables a gran número de problemas, lo que se tiene es un volumen poco manejable, por la carga para la memoria que supone, de “subestrategias” cuyo campo de aplicación es mucho más limitado¹⁷. Nuestra manera de controlar esa explosión es, por un lado, la definición de herramienta heurística que hemos hecho, que tiene como consecuencia que nos desprendamos de algunas de las “estrategias” heurísticas de Schoenfeld que no podemos considerar más que como sugerencias heurísticas, y, por tanto, no pretendamos enseñarlas de la misma manera ni que cumplan las mismas funciones¹⁸. Pero, sobre todo, la introducción de las preguntas que acabamos de avanzar, ya que éstas permiten organizar los distintos modos de uso de cada herramienta heurística, con lo que los resolutores pueden ir incorporando un catálogo de ellos a la memoria a medida que van obteniendo respuestas a las preguntas, junto con la herramienta heurística en cuestión.

3.6. LAS TAREAS DEL GESTOR.

Por otro lado, ese análisis de las relaciones entre los problemas original y transformado por las herramientas heurísticas y los efectos de su uso para la resolución del problema original permitirá también fijar tareas concretas para el *gestor*. En efecto, este elemento del proceso, introducido a raíz de los trabajos de Schoenfeld, como ya hemos señalado, para indicar una carencia usual de los resolutores que era preciso suplir, se ha descrito habitualmente por sus funciones que podríamos calificar como de carácter general; funciones como las que aparecen en la siguiente lista de

¹⁶ Otras preguntas, como “¿Es más fácil el problema transformado que el original?”, han de contestarse con respecto al resolutor. Éstas, sin embargo, pueden contestarse sin hacer referencia al resolutor.

¹⁷ Tan limitado que no se puede seguir diciendo que sean independientes del contenido.

¹⁸ Goldin ha desarrollado en varios artículos la idea de Schoenfeld de que hay que examinar en detalle cada “estrategia” heurística, y ha especificado que para ello hay que considerar a) razones de planificación anticipada que el resolutor puede tener para usar la estrategia, b) maneras de aplicar la estrategia, c) dominios a los que la estrategia puede ser aplicada y d) criterios prescriptivos que sugieren que la estrategia debería ser aplicada. Ahora bien, lo que ha examinado con ese detalle es “piensa en un problema más fácil”, que, desde nuestro punto de vista, no es que explote en mil “subestrategias”, es que cualquier herramienta heurística es una manera de “pensar en problemas que (puede que sean) más fáciles” (cf. Goldin & Germain, 1983; Goldin, 1985; Goldin & Landis, 1985).

comportamientos de gestión de ese estilo que hemos compilado a partir de nuestras observaciones de casos:

- Evaluación de la familiaridad con el problema.
- Evaluación del nivel de dificultad y de las oportunidades de éxito.
- Evaluación de la dificultad cuando hay alternativas.
- Uso de diversas aproximaciones para comprobación.
- Control de los errores que uno comete más frecuentemente.
- Control de dirección en la ejecución del plan.
- Revisión del plan ante la aparición de información nueva.
- Evaluación del plan cuando se está atascado mediante cualquier elemento significativo del que se disponga.
- Cambio de punto de vista para exploración o ante un atasco.
- Recuperación de lo que hay de valioso en un plan abandonado.
- Acarreo de información de un problema a otro.
- Evaluación de la dificultad de un problema auxiliar.
- Evaluación de la adecuación o de la utilidad de un problema auxiliar.

Además, cuando se ha organizado la instrucción de modo que pudiera generarse un buen gestor como un componente de la conducta de los resolutores, se ha enunciado también sus tareas en términos absolutamente generales, como las tres preguntas con las que lo trata Schoenfeld (1985): ¿Qué estás haciendo? ¿Para qué lo estás haciendo? ¿Cómo encaja lo que estás haciendo en el conjunto de la resolución del problema?¹⁹

Aunque tales preguntas son indudablemente tareas de gestión del proceso, su reiteración en la actuación de los sujetos conduce en ocasiones a su conversión en un mero ritual, si éstos carecen de los instrumentos que hacen posible realizar los análisis que permiten contestarlas²⁰. Cuando se está usando una herramienta heurística en la resolución de un problema, el conocimiento de los efectos de su uso permite que la tarea de gestión esté apoyado en tal conocimiento.

Un modelo de competencia del proceso de resolución de problemas de matemáticas no debe limitarse pues a decir que uno de sus elementos es las herramientas heurísticas, y otro el gestor del proceso, sino que ha de incluir la indicación de que éstos han de acompañarse de los análisis oportunos de la intención de uso de cada herramienta heurística, la relación entre el problema original y el transformado y la transformación del problema original al volver a él con la solución del transformado; así como de la concreción de las tareas del gestor asociadas a ello. Un gestor que no sólo sabe que ha de controlar el proceso sino que conoce cuáles son esas tareas concretas asociadas al

¹⁹ También son del mismo estilo las tareas encomendadas al “gestor interno”, tal y como se presentan en Mason, Burton & Stacey (1982), págs. 132-134.

²⁰ Ver este fenómeno, por ejemplo, en el caso de M y MJ, que presentamos en 5.4.1.

uso de las herramientas heurísticas es el que hemos incorporado al modelo de competencia con el calificativo de *gestor instruido*.

3.7. LAS HERRAMIENTAS HEURÍSTICAS EN ACCIÓN.

En el capítulo 5, presentamos un buen número de análisis detallados de los tipos de transformaciones que producen las herramientas heurísticas, sus intenciones de uso, las relaciones entre el problema original y el transformado o los transformados y las formas de volver al problema original. Esos análisis no sólo los hacemos reflejando el uso competente, sino también la forma en que se presentan en la actuación de los sujetos. Aquí sólo presentamos un esbozo de la forma de esas transformaciones y parte de la terminología que usaremos para describirlas.

Cualquier herramienta heurística transforma el problema original en otro u otros. Un primer análisis de la herramienta heurística consiste en describir qué relación hay entre el problema original y el transformado (o los transformados) desde el punto de vista de su resolución. Si P es el problema original y Q el problema transformado puede suceder que la solución de P implique la de Q y viceversa: es el caso de la transformación que efectúa el paso al contrarrecíproco²¹. Entonces, los dos problemas son *equivalentes*. Puede suceder también que la solución de P implique la de Q , pero que la solución de Q no implique la de P : eso sucede, por ejemplo, si Q es el resultado de aplicar a P la herramienta heurística “consideración de un caso”²² en su variante “consideración de un caso particular”. Entonces P es un problema *más ambicioso* que Q . De forma similar, si a P se le aplica la herramienta heurística “consideración de un caso” en su variante “consideración de un caso general”, la relación entre la solución de P y la de Q es la contraria. Entonces P es un problema *menos ambicioso* que Q ²³.

²¹ Ver, por ejemplo, el análisis que hacemos del uso de esta herramienta heurística en 5.4.1.1.

²² Preferimos utilizar este nombre, e incluir en él todas las variantes posibles —caso particular, caso general, caso límite, caso genérico, serie de casos—, en vez de hablar como hace Polya de “generalización” y “particularización” y reservar estos nombres para los *procesos matemáticos* correspondientes. La “generalización” y la “particularización” son procesos propios de la actividad matemática que se usan con más fines que el de resolver problemas, por ejemplo, con la intención de crear nuevos conceptos. Mason, Burton & Stacey (1982) también usan los nombres que nosotros reservamos a los procesos y no el que usamos para la herramienta heurística, pero su libro no trata estrictamente de resolución de problemas sino, como indica su título, de las maneras de pensar propias de las matemáticas.

²³ La terminología que estamos usando aquí está tomada del capítulo 9 de Polya (1965). Nuestras definiciones, sin embargo, no son equivalentes a las suyas ya que él define la mayor o menor ambición del problema *con respecto a los conocimientos del resolutor* y en nuestras definiciones se pretende no tener presente al resolutor sino examinar la relación objetiva entre los problemas. Esto tiene como consecuencia incluso que los problemas que él pone como ejemplo en su definición de más ambicioso y menos ambicioso (Polya, 1965,

Cuando el problema transformado es equivalente o más ambicioso, ya se sabe cuál es el efecto del uso de la herramienta heurística correspondiente sin necesidad de mayor análisis: una vez resuelto el problema transformado queda también resuelto el original y la vuelta a él sólo es necesaria con fines epistémicos y no para obtener su resultado. Si el problema transformado Q es menos ambicioso, el gestor ha de tener presente que, de la resolución de Q , puede esperar que le aproveche para la resolución de P tanto el resultado como la solución o la parte de ésta que no dependa de las propiedades concretas que hacen a Q menos ambicioso que P .

Así, por ejemplo, la herramienta heurística “consideración de un caso” se puede aplicar al problema siguiente:

La figura 3.1 representa dos cuadrados. El vértice E está en el centro del cuadrado $ABCD$. Hallar el área comprendida entre ambos cuadrados.

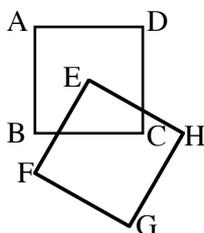


Figura 3.1

La consideración del caso particular de la figura 3.2 transforma el problema original P en uno menos ambicioso: el problema Q_1 cuyo enunciado es el mismo que el del problema P , pero referido a esta nueva figura.

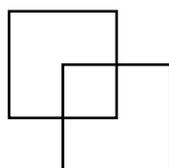


Figura 3.2

Lo que se puede aprovechar de la solución del problema Q_1 es el resultado — $1/4$ del área del cuadrado $ABCD$ —, que se puede llevar al problema original P como conjetura. El problema original P se transforma entonces en el problema de probar P' , “Probar que el área comprendida entre ambos cuadrados es $1/4$ del área del cuadrado $ABCD$ ”, cuando inicialmente era un problema de encontrar. Un esquema para representar la situación puede ser el que muestra la figura 3.3, que subraya que, tras resolver Q_1 , P no queda resuelto ni se vuelve a él para resolverlo, sino que hay que resolver un nuevo

pág. 40) tendrían la relación contraria según nuestra definición. Para articular nuestras definiciones con las de Polya hay que interpretarlas en el marco de la distinción entre los niveles I y II.

problema —que además requiere modos de resolución distintos ya que es un problema de probar y no de encontrar. Con el operador T_{Q_1} representamos “transformar con el resultado de Q_1 ”.

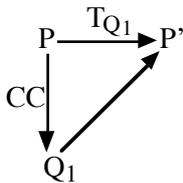


Figura 3.3

Si se considera otro caso particular, el de la figura 3.4, el resultado del problema transformado Q_2 es el mismo, con lo que la conjetura es más digna de crédito, pero no se puede hacer ninguna transformación nueva al problema original, el operador T_{Q_2} conduce también a P' .

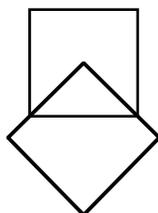


Figura 3.4

Estos dos casos particulares son especiales, en el sentido de que tienen propiedades propias muy notables de las que carece el caso general; por ello, la solución no puede transportarse al caso general, sólo el resultado y como conjetura. Pero son especiales también desde otro punto de vista: si el cuadrado que tiene el vértice en el centro del otro se hace girar, esos dos casos son los casos *límite* del campo de variación de las posiciones del cuadrado. Este carácter de caso *límite* permite enunciar un problema que, combinado con el problema Q_1 (o Q_2), lo resuelve: el problema *I* “probar que el área comprendida entre los dos cuadrados no varía al girar el cuadrado $EFGH$ en torno al vértice E ”.

Otros ejemplos de uso de la herramienta heurística “consideración de un caso” muestran aún otro tipo de relaciones entre el problema original y el problema transformado y otro tipo de consecuencias de la solución del transformado para la resolución del problema original. En efecto, en ocasiones, la solución del caso particular no utiliza para nada las propiedades propias de ese caso: el caso entonces es *genérico*. En estas ocasiones, se puede acarrear la solución al caso general —o constatar simplemente que el caso general está resuelto, porque el caso particular ha resultado ser equivalente al general. Polya²⁴ señala este hecho a propósito del problema de probar la igualdad

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = \binom{2n}{n}$$

²⁴ Polya (1962-65, págs 77-78) llama a esto un *caso particular representativo*. Ver también el ejemplo 10 del capítulo 1 de Polya (1954).

ya que, una vez transformado este problema mediante la herramienta heurística “reformulación” en el problema equivalente en términos de caminos en una red cuadrada, el razonamiento que se puede hacer en el caso particular $n=5$, esto es, la solución de ese caso particular, no usa para nada las propiedades del número 5.

La herramienta heurística “consideración de un caso” aún puede funcionar de otra forma cuando en el problema aparece un parámetro entero. Si se da esa circunstancia, los casos —ahora en plural— que se consideran es razonable que sean los correspondientes a los valores 1, 2, 3, etc. y que se examinen sucesivamente —quizá no empezando por el 1, quizá empezando por el 0, quizá considerando estos casos en un segundo momento, quizá ordenando los casos hacia atrás en vez de hacia delante. Para esta variante usaremos el nombre de *consideración de una serie de casos*. Cuando es esta variante la que actúa sobre el problema original P , éste se transforma en una serie de problemas P_i , todos ellos menos ambiciosos que P ²⁵. No cabe esperar ahora que la solución pueda llevarse al problema original, pero tampoco cabe esperar que pueda llevarse el resultado. Lo que en esta variante cabe esperar es encontrar una forma de expresar los resultados de cada uno de los P_i que sea invariante con respecto a i y que, por tanto, pueda conjeturarse que es el resultado de P ; entonces sí que puede llevarse a P , para, como en la situación que hemos analizado antes, transformarlo en un problema de probar P' .

Hay otras herramientas heurísticas que transforman el problema original P en una serie de problemas: son el *examen de posibilidades* y la *división de un problema en partes*. Llamamos “examen de posibilidades” a la herramienta heurística que consiste en descomponer el dominio de objetos a los que se refiere el problema P mediante una partición —como, por ejemplo, pares e impares, si se trata de números— y enunciar el problema P restringiéndolo a cada una de las partes, con lo que se obtiene un conjunto de problemas P_1, \dots, P_n . Cada uno de los problemas P_i es menos ambicioso que P , pero su conjunción es equivalente a P . Como consecuencia de ello, la resolución de todos los P_i conlleva que el problema P quede resuelto. Además, cabe esperar que pueda utilizarse el resultado o la solución de P_i en P_j .

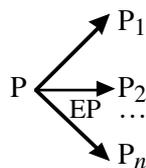


Figura 3.5

²⁵ La conjunción de todos ellos es equivalente al problema original si el índice i recorre todo su campo de variación, que suele ser N . Pero la única manera de resolver *todos* los P_i es con el método de inducción completa. Esta herramienta heurística está relacionada con ese método, pero no está abocada al uso del método, ya que se puede resolver P sin necesidad de resolver todos los P_i . En el capítulo 5 veremos ejemplos de ello.

Como acabamos de mostrar, la herramienta heurística “examen de posibilidades” descompone el problema original en partes, sin embargo, reservamos el nombre de “división del problema en partes” para una herramienta heurística cuya estructura formal es diferente: el problema original P se transforma en un conjunto de problemas $P_1, \dots, P_n, C(P_i)$, en el que todos los P_i son menos ambiciosos que P , su conjunción no es equivalente a P y $C(P_i)$ es el problema “cómo se combinan los resultados de los P_i para obtener el resultado de P ”, de modo que la conjunción de los P_i y $C(P_i)$ sí que es equivalente a P .

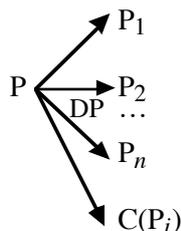


Figura 3.6

3.8. EL ESPACIO DE PROBLEMAS.

La consideración de las herramientas heurísticas como instrumentos de transformación del problema y los ejemplos que hemos esbozado de los tipos de transformaciones y las relaciones entre los problemas original y transformados conducen a examinar desde ese punto de vista también el conjunto del proceso de resolución de un problema cuando se usan herramientas heurísticas. Los primeros análisis que emprendimos con esta idea de los procesos de resolución de alumnos instruidos nos condujeron a introducir la noción de espacio de problemas asociado a la resolución del problema, como el conjunto de problemas generados por herramientas, métodos o, incluso, sugerencias heurísticas y las relaciones entre ellos. En el capítulo 5, describimos los resultados de los análisis realizados desde ese punto de vista, tanto de los problemas, como de las resoluciones de los alumnos, presentando algunos espacios de problemas en detalle.

En el apartado 2.2, hemos presentado la noción de espacio del problema de Newell & Simon. Newell & Simon (1972) culminan su voluminoso estudio con la conclusión de que “la resolución de problemas se desarrolla mediante la búsqueda en un espacio del problema” (pág. 809); pero añaden

Esta afirmación no quiere decir que todo el comportamiento *pertinente* para la resolución de un problema sea la búsqueda en un espacio del problema. Inicialmente, cuando el problema se acaba de presentar, ha de ser reconocido y comprendido. Luego, se ha de construir un espacio del problema o, si ya existe en la memoria a largo plazo, ha de ser evocado. Los espacios del problema pueden cambiar y modificarse durante el curso de la resolución. Estas actividades, cruciales para la resolución del problema, no tienen por qué ser búsquedas en un espacio del problema (Newell & Simon, 1972, pág. 809).

El trabajo de Newell & Simon, se restringe a tres clases de problemas, que ya hemos mencionado en 2.2, cuya característica común es que están altamente estructurados y que pueden describirse con un conjunto de reglas relativamente pequeño (aunque su combinación se dispare hasta tamaños difícilmente manejables), y la descripción que dan del proceso de resolución es microscópica ya que pretenden dar cuenta de cada movimiento entre estados elementales de forma tal que la descripción pueda ser un programa que ejecute un ordenador. Lo que nosotros estamos proponiendo con la noción de espacio de problemas que se deriva de nuestros análisis de la naturaleza de las herramientas heurísticas y de las actuaciones de los alumnos que las usan es un mapa más macroscópico del territorio en que se desarrolla la resolución de problemas, cuando los problemas son problemas de matemáticas como los que analizaremos en los capítulos 5 y 6.

En el capítulo 5, examinamos cómo los métodos de análisis-síntesis y cartesiano, que tienen contenido heurístico, también pueden considerarse como generadores de problemas del espacio, así como otros procedimientos de generación de problemas del espacio. De algunos de esos análisis se derivan esquemas de generación de problemas propios de la herramienta heurística o el método, que se pueden tomar también como representación de versiones de las herramientas heurísticas organizadas por las preguntas sobre la forma de la transformación y las relaciones entre el problema original y el transformado.

En resumen, el *espacio de problemas* es una representación de la estructura del proceso de resolución del problema y la resolución del problema se desarrolla desplazándose en un espacio de problemas²⁶.

²⁶ Una vez introducida esta noción de *espacio de problemas* del proceso de resolución de un problema podemos caracterizar en términos de ella qué permite calificar al gestor de “instruido”, lo que es nuestra condición para que sea un elemento del modelo de competencia y no un componente de un modelo de actuación como sucede en el uso que hace Schoenfeld del término. El *gestor instruido* es el que conoce que el proceso de resolución de problemas se desarrolla en un espacio de problemas y, por tanto, conoce que ha de controlar los desplazamientos por el espacio de problemas, teniendo presente las relaciones entre los problemas del espacio. Por ejemplo, conocer que el uso de la herramienta heurística “dividir un problema en partes” exige la formulación del problema $C(P_i)$ y su resolución es una de las cosas que se esperan del gestor instruido; veremos en el capítulo 5 algunos ejemplos de lo que sucede al respecto en la actuación de los sujetos.