3.

Problemas de una etapa: adición y substracción.

Se acabó la ficción para nosotros; nosotros calculamos;
pero para poder calcular algo, primero debemos convertirlo en ficción
Friedrich Nietzsche

INTRODUCCIÓN

Los problemas aritméticos de los que se va a tratar en este capítulo son los primeros que aparecen en el currículo escolar de matemáticas. Al constituir la primera actividad de resolución de problemas con la que se encuentran los niños en su vida escolar, debe ponerse toda la atención y el cuidado en ella que merece cualquier primer paso en un nuevo campo de actividad.

Se sabe, además, que estos problemas presentan usualmente dificultades que a un espectador que sólo haya realizado un examen superficial de ellos le resultan difícilmente comprensibles. Una buena ilustración de este hecho la presenta, por ejemplo, Vergnaud (1982). Para el observador superficial los tres problemas siguientes se resuelven de la misma manera.

Problema 1. Hay 4 chicos y 7 chicas alrededor de una mesa. ¿Cuántos niños hay en total?
Problema 2. Juan ha gastado 4 francos. Ahora tiene 7 francos en su bolsillo. ¿Cuántos francos tenía antes?
Problema 3. Roberto jugó dos partidas a las canicas. En la primera partida perdió 4 canicas. Después jugó la segunda partida. En total, ha ganado 7 canicas. ¿Qué pasó en el segundo juego?

Sin embargo –dice Vergnaud– "aunque se necesite una simple suma, 4 + 7, en los tres casos, el problema 2 se resuelve uno o dos años después que el problema 1, y el problema 3 es resuelto erróneamente por el 75% de los alumnos de 11 años. Debe haber pues dificultades lógicas o matemáticas en los dos últimos problemas, que no existen en el primero." (pág. 39) Este capítulo tratará de poner en evidencia, entre otras cosas, cuáles son esas dificultades.

Suydam (1980) utiliza una metáfora que nos puede ser útil. La "resolución de problemas", como campo de estudio, puede verse como una madeja de lana enredada.

Suydam propone tirar de tres cabos para poner algo de orden: los problemas, los alumnos y las estrategias. En este capítulo nos proponemos utilizar esta metáfora con el ánimo de organizar la exposición. Trataremos en primer lugar de la clasificación y estructura de estos problemas; y en segundo lugar, de las dificultades que encuentran los alumnos en su resolución y de las estrategias que utilizan, con el fin de tener una comprensión global del proceso de resolución.

CLASIFICACIÓN DE LOS PROBLEMAS ARITMÉTICOS ELEMENTALES VERBALES (PAEV).

Cualquier clasificación que se realice de los problemas lleva implícita la finalidad del estudio en el que está inmersa. Así, se han propuesto algunas clasificaciones que aquí no son pertinentes: Polya, en su libro clásico "Cómo plantear y resolver problemas", distingue entre problemas de encontrar y problemas de probar; Butts (1980), desde el punto de vista del nivel de creatividad necesario para atacarlos, los jerarquiza en ejercicios de reconocimiento, ejercicios algorítmicos, problemas de aplicación, problemas de búsqueda y situaciones problemáticas. Aquí, los problemas aritméticos van a clasificarse en primer lugar en problemas de una etapa y problemas de más de una etapa, dependiendo de que sea necesario, para alcanzar la solución, realizar una o más operaciones aritméticas.

Problema 4. En una clase del colegio hay 76 sillas y en otra clase hay 89 sillas. ¿Cuántas sillas hay en total entre las dos clases?
Problema 5. Cada conejo tiene 4 patas. ¿Cuántas patas tienen entre 26 conejos?
Problema 6. El Ayuntamiento ha arreglado una calle de 157 metros, otra de 39 metros y una tercera de 345 metros. ¿Cuántos metros de calle ha arreglado?
Problema 7. Al Sr. Botija le quedan 640 ptas. en el momento de ir a repostar gasolina. El importe de ésta, 813 ptas., se lo reparten entre él y sus dos compañeros de viaje. ¿Cuánto dinero le queda ahora?

Así, los problemas 4 y 5 son de una etapa y los problemas 6 y 7 son de varias etapas. Como muestran estos ejemplos, los problemas de varias etapas pueden requerir el uso de una combinación de varias operaciones aritméticas, o el uso de la misma operación varias veces.

Para estudiar los problemas de una etapa, consideraremos por separado los problemas aditivos –en este mismo capítulo– y los problemas multiplicativos –en el siguiente, pero en este capítulo trataremos algunas cosas que son comunes a ambos.

No es pertinente en un estudio de este tipo distinguir entre problemas de sumar y de restar. No obstante, es posible hablar en algún momento de problemas de sumar o problemas de restar en función de la operación que hay que realizar entre los datos para obtener la incógnita o de la sentencia abierta a que lleva una traducción secuencial del enunciado del problema. También se puede hablar de estrategia aditiva o substractiva, pero la estrategia que los resolutores utilicen para resolver el problema no los caracteriza estructuralmente: en efecto, es corriente que se resuelvan con estrategias aditivas problemas en los que la operación que hay que realizar entre los datos es una resta, o, más aún, hay estrategias aditivas con las que se resuelven problemas que se estaría tentado de llamar de división.

ESTRUCTURA DE UN PAEV DE UNA ETAPA.

Un PAEV es un problema de encontrar: se nos pide que, bajo ciertas condiciones, se determine una cantidad a partir de otras que se nos proporcionan y que, por tanto, son conocidas.

En un PAEV de una etapa se pueden distinguir claramente dos partes: la parte informativa y la pregunta del problema.

Problema 8. Después llegó a casa del detective un niño que estaba preocupado. Le contó que tenía 27 coches de juguete y había perdido 12. Le quedaban muy pocos, pero no sabía cuántos. ¿Cuántos le quedaban?
Problema 9. ¿Cuántos coches tendrá Pedro si tenía 27 coches y pierde 12?

En el problema 8 la parte informativa la constituye “Después […] perdido 12.”, y la pregunta del problema, “Le quedaban […] le quedaban?”.

Estas dos partes, *información* y *pregunta*, son distinguibles en cualquier PAEV, independientemente de que, debido a la estructura sintáctica del problema, sean separables con mayor o menor dificultad (ver problema 9).

Las cantidades presentes en el problema, o de las cuales se habla en él, son tres: dos de ellas se nos proporcionan como datos, y la otra es la incógnita del problema; esto es, dos están contenidas en la parte informativa y otra en la pregunta del problema.

Esto no quiere decir que en un problema de esta clase no pueda haber otras cantidades presentes (véase, por ejemplo, las “dos partidas” del problema 3), sino que éstas son las únicas que es imprescindible considerar para resolver el problema. Cualquier otra cantidad presente desempeña un papel secundario como puede ser el del “dos” del problema 3, que sólo interviene para enumerar las partidas que juega el protagonista del problema.

ANÁLISIS DEL ENUNCIADO VERBAL DE UN PAEV.

El primer análisis que puede realizarse de un PAEV puede ser un análisis ingenuo que centre su atención en las palabras.

Problema 10. Juan tenía 5 canicas. Ganó 3 canicas. ¿Cuántas tiene ahora?
Problema 11. Juan tenía 5 canicas. Perdió 3 canicas. ¿Cuántas tiene ahora?
Problema 12. Juan tenía 5 canicas. Pedro tiene 3 canicas. ¿Cuántas canicas tienen los dos juntos?

Si tal análisis se aplica a los problemas 10, 11 y 12, podemos distinguir inmediatamente dos tipos de palabras: las que desempeñan algún papel en la elección de la operación y las que no desempeñan papel alguno.

El papel de estas últimas suele limitarse a conectar el enunciado del problema con la realidad, o a delimitar el contexto del problema. Así, 'Juan', 'Pedro' y 'canicas' son las palabras que no desempeñan ningún papel respecto a la elección de la operación, pero que hacen referencia a un contexto particular en el que se desarrollan las acciones, el juego de las canicas o algún juego con canicas, y los protagonistas de la historia. Cuando alguien se enfrente al problema, la única dificultad que estas palabras pueden causarle tendrá su origen en que su significado le sea desconocido, o que el contexto que delimitan le sea ajeno. Si rehúsa entrar en el problema, quizá se deba a que no encuentra familiar el contexto o los objetos invocados por estas palabras y es incapaz, por tanto, de dotar de sentido a la situación descrita en el enunciado. Esto puede ocurrir con el problema 13 en el que aparece el término 'palmípedos', poco usual para alumnos del ciclo inicial y medio.

Problema 13. En un estanque hay 7 ocas y 3 patos. ¿Cuántos palmípedos hay?

A veces estos términos poco usuales suelen incorporarse con la finalidad expresa por parte de los autores de libros de texto de enriquecer el vocabulario de los alumnos, como hizo el autor del problema "La mixomatosis es una enfermedad que padecen los conejos. En el coto había 3478 conejos y 5987 conejas. La mixomatosis mató a 3578 animales. ¿Cuántos animales quedan?", incorporando la palabra evidentemente inusual 'mixomatosis' y teniendo el buen cuidado de definirla en la primera frase del texto del problema, que está dedicada exclusivamente a dar información sobre su significado y no información sobre el problema.

Las otras palabras que aparecen en el problema, tales como 'ganó', 'perdió', 'los dos juntos'…, son palabras –o grupos de palabras– que determinan, al menos parcialmente, la elección de la operación o influyen en ella. Estas palabras son cruciales a la hora de establecer la conexión existente entre la incógnita y los datos. Por ello, estas palabras se denominan *palabras clave*. Las palabras clave constituyen un conjunto heterogéneo de palabras que podemos dividir en tres grupos:

1) Palabras propias de la terminología matemática y, por tanto, con significado preciso en el contexto matemático (*añadir, doblar, substraer, dividir, repartir…*)

2) Palabras tales como conectivas, verbos, etc. que no son propias de la terminología matemática, pero cuyo significado en el contexto del problema suele ser suficiente para decidir la operación que hay que realizar para resolver el problema.

3) Palabras –o grupos de palabras– que expresan relaciones.

Problema 14. Juan divide[1] sus 8 canicas entre Pedro y Javier. ¿Cuántas les da a cada uno?
Problema 15. Juan tiene un hermano y una hermana. Su hermana tiene 15 años y su hermano es 5 años más joven que ella. ¿Qué edad tiene su hermano?

Las palabras ‘ganó’, ‘perdió’ y ‘los dos juntos’ de los problemas 10, 11 y 12 pertenecen al grupo 2; ‘divide’, del problema 14, al grupo 1; y ‘más joven que’, del problema 15, al grupo 3.

Una lista de verbos que son palabras clave para la adición y la substracción es la establecida por Grupo de EGB de la APMA (1987):

[1]Por cierto, ‘divide’ es una palabra con significado matemático preciso, pero que en el lenguaje cotidiano sólo lo tendría si al ecuánime anciano babilónico se le hubiera exigido dividir su herencia equitativamente.

Verbos de sumar

Juntar-se
Unir-se
Reunir-se
Amontonar
Apilar
Añadir
Agregar-se
Adjuntar-se
Suscribir-se
Sindicar-se
Recopilar
Ascender

Atar
Enlazar
Empalmar
Capturar
Cargar
Recolectar
Adherir-se
Alistar-se
Solidarizar-se
Compendiar
Elevar-se
Llenar

Agrupar
Yuxtaponer
Robar
Quitar
Coger
Tomar
Coleccionar
Apuntar-se
Federar-se
Hermanar-se
Integrar-se
Entrar

Incorporar-se
Vincular-se
Sumar-se
Contar
Adicionar-se
Aliarse
Inscribir-se
Afiliar-se
Confabular-se
Importar

Verbos de restar

Robar
Sisar
Rebajar
Apartar-se
Achicar
Recortar
Descargar
Amenguar
Despedir
Quitar
Disminuir
Deducir

Destarar
Alejar
Dar
Reducir
Mutilar
Acortar
Abandonar
Perder
Coger
Tomar
Detraer
Extraer
Excluir
Cortar
Menoscabar
Minorar
Aminorar
Ir-se

Sacar
Diezmar
Sustraer
Separar-se
Exceptuar
Descontar
Empobrecer
Menguar
Retirar-se

ANÁLISIS GLOBAL DEL ENUNCIADO DE UN PAEV.

Nesher (1982) distingue en su modelo de análisis tres componentes: el componente sintáctico, la estructura lógica y el componente semántico.

EL COMPONENTE SINTÁCTICO.

El componente sintáctico forma parte de la estructura superficial del problema y puede ser descrita en función de las variables mencionadas en el capítulo anterior.

Los principales estudios sobre los aspectos sintácticos de los problemas verbales han sido realizados por Jerman y sus colaboradores en el marco de un programa de instrucción aritmética asistida por ordenador (Jerman, 1974; Jerman & Rees, 1972; Jerman & Mirman, 1974).

LA ESTRUCTURA LÓGICA.

Un problema de una etapa bien formado, de adición o substracción, contiene, implícita o explícitamente, tres proposiciones: dos en la parte informativa y una tercera en la pregunta del problema. En el caso de los problemas de adición, la estructura lógica de estas proposiciones puede ser descrita así[2]:

Hay n x que son A	$(\exists_n x)Ax$
Hay m x que son B	$(\exists_m x)Bx$
¿Cuántos x hay que son P?	$(\exists_? x)Px$

Los predicados A y B determinan clases disjuntas y el predicado P corresponde a la clase que, en el contexto del problema, es la unión de las clases anteriores. Esto es, han de cumplir las siguientes condiciones:

No hay x que sean a la vez A y B.	$\neg(\exists x)(Ax \wedge Bx)$
Cualquier x que sea A es P.	$(\forall x)(Ax \rightarrow Px)$
Cualquier x que sea B es P.	$(\forall x)(Bx \rightarrow Px)$
Cualquier x que sea P es A o B.	$(\forall x)(Px \rightarrow (Ax \vee Bx))$

[2]En Nesher & Katriel(1977) se puede encontrar una discusión detallada de este asunto.

Problema 16. En un estanque hay 3 patos y 7 ocas. ¿Cuántos animales hay?
Problema 17. Juan tiene 7 canicas. Pedro tiene 3 canicas más que Juan. ¿Cuántas canicas tiene Pedro?

En el problema 16 la estructura lógica está presente de forma explícita, ya que su estructura sintáctica se corresponde casi totalmente con ella, y los predicados pueden enunciarse fácilmente (A es ‘patos’, B es ‘ocas’ y P es ‘animales’). En el problema 17, por el contrario, la estructura lógica no aparece de forma explícita ya que las relaciones lógicas no se establecen entre los objetos (canicas), sino entre las cantidades de objetos que pertenecen a Juan y a Pedro.

Otra puntualización necesaria sobre la distancia entre el texto del problema y la formalización de su estructura lógica se refiere a que el universo del discurso, que es el universo en el que cobran sentido los cuantificadores, viene determinado por el contexto particular definido por el enunciado del problema. Así, en el problema 16, ‘animales’, en el contexto del problema –el estanque–, se agota con ‘patos’ y ‘ocas’, de manera que la condición de que A y B sean una partición de P se verifica gracias a la limitación del universo que establece el contexto del problema.

Problema 18. En un barco hay 32 corderos y 4 perros. ¿Cuántas flores hay en el barco?

El problema 18 tiene la estructura lógica de los problemas aditivos, pero no verifica las condiciones arriba expresadas. Ello se debe a que estas condiciones han de ser examinadas desde el punto de vista del contenido semántico de los predicados A, B y P. Ahora bien, en el problema 18 –una variante del problema de la edad del capitán, discutido en el capítulo anterior– el significado de los predicados ‘ser cordero’ y ‘ser flor’ no permite que se verifique, por ejemplo la condición “cualquier x que sea A es P”.

Los problemas de substracción tienen la misma estructura lógica que los aditivos, salvo que, en las condiciones, A y P intercambian sus papeles.

No hay x que sean a la vez B y P. $\neg(\exists x)(Bx \wedge Px)$

Cualquier x que sea P es A. $(\forall x)(Px \rightarrow Ax)$

Cualquier x que sea B es A. $(\forall x)(Bx \rightarrow Ax)$

Cualquier x que sea A es P o B. $(\forall x)(Ax \rightarrow (Px \vee Bx))$

Es cierto que el estudio de la estructura lógica del problema depende de las posibles caracterizaciones de las clases A, B y P y de las relaciones entre ellas, pero estas caracterizaciones, en cualquier caso, tendrán que ser realizadas en un campo semántico. De ahí que las conexiones entre ellas deben atenerse al análisis que se aborda en el apartado siguiente.

EL COMPONENTE SEMÁNTICO.

El contenido semántico de un PAEV puede ser analizado a trozos atendiendo a los diversos modos de codificar lingüísticamente las relaciones lógicas entre las tres proposiciones básicas del problema, o bien globalmente atendiendo a la naturaleza y el sentido del texto como un todo.

El análisis fragmentado se ha realizado ya parcialmente en el párrafo sobre “análisis verbal del enunciado”, aunque en esa ocasión se prestó atención a las palabras aisladas y no a los diversos modos de poner de manifiesto la dependencia semántica entre las oraciones del texto, dado que no se había hecho el análisis de la estructura lógica.

Nesher (1982) resume dónde reside el corazón de la dependencia semántica entre las tres proposiciones del texto, señalando que ésta puede venir dada por siete tipos de palabras:

1.— *Argumentos*. Dependencia semántica entre los *argumentos* cuantificados numéricamente que aparecen en las proposiciones que subyacen al texto del problema. Por ejemplo:

   Tres *chicos* y dos *chicas* fueron a la playa. ¿Cuántos *niños* fueron a la playa?

2.— *Adjetivos*. Dependencia semántica debida a *adjetivos* que califican los argumentos cuantificados. Por ejemplo, *grande* y *pequeño* califican los *argumentos* en el problema:

   Hay tres *ventanas grandes* y tres *ventanas pequeñas* en el salón. ¿Cuántas *ventanas* hay en el salón?

3.— *Agentes*. Dependencia semántica debida a los *agentes* a los que se hace referencia en el texto. Por ejemplo, Ruth y Dina son los agentes en:

   Ruth tenía tres manzanas y *Dina* tenía dos manzanas. ¿Cuántas manzanas tenían *Ruth y Dina* juntas?

4.— *Localización*. Dependencia semántica debida a la *relación espacial* entre objetos. Por ejemplo, cama, estante y habitación localizan los objetos en:

   Hay dos libros encima de la *cama* y ocho libros en la *estantería.* ¿Cuántos libros hay en total en la *habitación*?

5.— *Tiempo*. Dependencia semántica debida a la *relación temporal* entre los acontecimientos a los que hace referencia el texto. Por ejemplo, ayer y hoy son referencias temporales en:

   Dan se comió tres caramelos *ayer* y dos caramelos *hoy.*¿Cuántos caramelos se ha comido Dan *entre los dos días*?

6.— *Verbos.*Dependencia semántica que se expresa mediante los *verbos* que aparecen en el texto. Por ejemplo, tenía, dio y tiene son los verbos en:

Víctor *tenía* cinco sellos y le *dio* dos de ellos a Joe. ¿Cuántos sellos *tiene* Víctor ahora?

7.— *Términos relacionales.* Dependencia semántica debida a términos relacionales que afectan a dos argumentos cuantificados dados. Por ejemplo, *más que* son términos relacionales en:

Bill tiene 8 canicas. Tom tiene 5 canicas *más que* Bill. ¿Cuántas canicas tiene Tom? (Nesher, 1982, pp. 31-32)

Categorías semánticas.

El análisis global del significado del texto del problema ha demostrado ser mucho más importante que el análisis efectuado a trozos al que se acaba de hacer referencia. Su importancia se ha puesto de manifiesto sobre todo a la hora de comprender los procesos utilizados por los niños para resolver los problemas. De aquí que algunos grupos de investigadores se hayan puesto de acuerdo en clasificar los PAEV desde el punto de vista semántico en cuatro grandes categorías –cambio, combinación, comparación e igualación– que describimos a continuación:

Cambio

Se incluyen en esta categoría los problemas verbales en los que las relaciones lógicas aditivas están embebidas en una secuencia temporal de sucesos; esto es, en estos problemas se pueden distinguir tres momentos diferentes en los que se describe cómo una cantidad inicial es sometida a una acción, directa o sobreentendida, que la modifica. Las tres cantidades presentes en el problema reciben los nombres de cantidad inicial, final y de cambio o diferencia entre la inicial y la final. Otros autores, como Vergnaud (1982), califican a estos problemas con la etiqueta de ETE: estado-transformación-estado.

En el problema 19 *a* es la cantidad inicial, *b* es la cantidad de cambio y la pregunta versa acerca de la cantidad final.

Si consideramos que la acción a que se somete la cantidad inicial puede aumentar o disminuir a ésta y que dos de las cantidades deben estar contenidas en la parte informativa del problema –esto es, que son datos–, mientras que la otra cantidad es el objeto de la pregunta del problema –la incógnita–, podemos construir el siguiente cuadro que nos muestra los seis tipos de problemas de cambio posibles. Para cada tipo se incluye en la tabla un modelo en estilo telegráfico.

	INICIAL	CAMBIO	FINAL	CRECER	DECRECER
CAMBIO1	d	d	i	*	
CAMBIO2	d	d	i		*
CAMBIO3	d	i	d	*	
CAMBIO4	d	i	d		*
CAMBIO5	i	d	d	*	
CAMBIO6	i	d	d		*

Problema 19. Cambio1. Juan tenía *a*. Le dan *b*. ¿Cuántos tiene ahora?
Problema 20. Cambio2. Juan tiene *a*. Da *b*. ¿Cuántos le quedan?
Problema 21. Cambio3. Juan tenía *a*. Pedro le dio algunos. Ahora tiene *c*. ¿Cuántos le dio Pedro?
Problema 22. Cambio4. Juan tenía *a*. Dio algunos a Pedro. Ahora tiene *c*. ¿Cuántos dio a Pedro?
Problema 23. Cambio5. Juan tenía algunos. Pedro le dio *b*. Ahora tiene *c*. ¿Cuántos tenía?
Problema 24. Cambio6. Juan tenía algunos. Dio *b* a Pedro. Ahora tiene *c*. ¿Cuántos tenía?

Puede verse que cambio1 y cambio6 se resuelven mediante una suma y los demás, mediante una resta.

En estos modelos la acción viene indicada por el verbo dar y los tres momentos de la secuencia temporal vienen dados por la secuencia de los tiempos verbales. En los modelos no se especifica la cantidad concreta (canicas, caramelos…) sobre la que se realiza la acción, pero es preciso señalar que si un dato son canicas, el otro tiene que ser necesariamente canicas y la pregunta del problema ha de versar también sobre canicas, esto es, en los problemas de cambio las tres cantidades son homogéneas (si se nos permite usar este término pasado de moda).

Combinar

Se incluyen en esta categoría los problemas en los que se describe una relación entre conjuntos que responde al esquema parte-parte-todo. La pregunta del problema puede versar acerca del todo o acerca de una de las partes, con lo que hay dos tipos posibles de problemas de combinar. Combinar1 se resuelve mediante una suma y combinar2, mediante una resta.

	PARTE	PARTE	TODO
COMBINAR1	d	d	i
COMBINAR2	d	i	d

No hay un tercer tipo (i, d, d) porque las partes son intercambiables.

Problema 25.	Combinar1. Hay *a* hombres. Hay *b* mujeres. ¿Cuántas personas hay?
Problema 26.	Combinar2. Hay *a* hombres. Hay *b* personas. ¿Cuántas mujeres hay?

En estos problemas la relación entre las proposiciones está dada por sustantivos, adjetivos, localizaciones, etc. En los problemas 25 y 26, que sirven de modelo, son los sustantivos ‘hombres’, ‘mujeres’ y ‘personas’, cuyos significados mantienen las relaciones de parte-parte-todo características de este tipo de problemas, los que ponen en relación las proposiciones.

Comparar

Se incluyen en esta categoría los problemas que presentan una relación estática de comparación entre dos cantidades.

Las cantidades presentes en el problema se denominan cantidad de referencia, cantidad comparada y diferencia; la cantidad comparada aparece a la izquierda de la expresión ‘más que’ o ‘menos que’, y la cantidad de referencia a su derecha. Dado que el sentido de la comparación puede establecerse en más o en menos, y dado que se puede preguntar por cualquiera de las tres cantidades, el número de tipos posibles de problemas de comparación es seis. Comparar3 y comparar6 se resuelven con una suma y los demás, con una resta. Para facilitar la lectura de la tabla de modelos la cantidad de referencia es siempre la de Juan y la comparada, la de Pedro; además las letras *a*, *b* y *c* las hemos usado para representar los números correspondientes a las cantidades de referencia, comparada y diferencia, respectivamente.

	REFERENCIA	COMPARADA	DIFERENCIA	MÁS	MENOS
COMPARAR1	d	d	i	*	
COMPARAR2	d	d	i		*
COMPARAR3	d	i	d	*	
COMPARAR4	d	i	d		*
COMPARAR5	i	d	d	*	
COMPARAR6	i	d	d		*

Problema 27. Comparar1. Juan tiene *a*. Pedro tiene *b*. ¿Cuántos tiene Pedro más que Juan?
Problema 28. Comparar2. Juan tiene *a*. Pedro tiene *b*. ¿Cuántos tiene Pedro menos que Juan?
Problema 29. Comparar3. Juan tiene *a*. Pedro tiene *c* más que Juan. ¿Cuántos tiene Pedro?
Problema 30. Comparar4. Juan tiene *a*. Pedro tiene *c* menos que Juan. ¿Cuántos tiene Pedro?
Problema 31. Comparar5. Pedro tiene *b*. Pedro tiene *c* más que Juan. ¿Cuántos tiene Juan?
Problema 32. Comparar6. Pedro tiene *b*. Pedro tiene *c* menos que Juan. ¿Cuántos tiene Juan?

Los problemas de este tipo comparten con los de combinar su carácter estático, pero mientras que en los de combinar la relación se establece entre conjuntos, en éstos se establece entre cantidades, de manera que lo que en aquéllos eran relaciones de inclusión entre conjuntos, pasan a ser aquí relaciones de comparación entre cantidades.

Las palabras del enunciado encargadas de mostrar la relación de comparación son del estilo de ‘más que’ o ‘menos que’: éstas en particular son las que aparecen en el contexto de ‘tener’ –que es el que hemos utilizado en los modelos porque es el contexto más simple. En otros contextos, por ejemplo los de edades, distancias, precios, etc., la situación se complica porque hay parejas de palabras que expresan las relaciones de comparación en sentidos opuestos, que pueden añadirse al esquema básico ‘más que’ o ‘menos que’. Por ejemplo, las combinaciones posibles en el contexto de las edades ‘más joven que’, ‘menos joven que’, ‘más viejo que’, ‘menos viejo que’ doblan el número de posibilidades en la construcción del enunciado de los modelos, pero estas cuatro posibilidades son iguales dos a dos ya que ‘más joven que’ equivale a ‘menos viejo que’ y ‘menos joven que’ equivale a ‘más viejo que’.

Igualación

Las tres categorías anteriores son las categorías básicas; algunos autores –p.e., Carpenter & Moser (1983)– distinguen una cuarta categoría: problemas de igualación. Estos problemas se caracterizan porque hay en ellos una comparación entre las cantidades que aparecen, establecida por medio del comparativo de igualdad ‘tantos como’.

El problema 33, que es uno de los modelos de problema de igualación, es un híbrido de problema de cambio y problema de comparación: una acción (cambio) se realiza con una de las cantidades con el fin de igualarla a otra con la que ha sido comparada. Como la estructura básica de este tipo de problemas es la de los problemas de comparación, están presentes aquí también los tres tipos de cantidades: de referencia, comparada y diferencia, y la incógnita puede ser cualquiera de ellas; el sentido del cambio, que puede ser en más o en menos dependiendo de la relación entre las cantidades de referencia y comparada, duplica el número de posibilidades, con lo que de nuevo hay seis tipos de problemas de esta clase. En la tabla de modelos hemos utilizado las mismas convenciones que en la correspondiente a los problemas de combinar para facilitar su lectura.

	REFERENCIA	COMPARADA	DIFERENCIA	MÁS	MENOS
IGUALAR1	d	d	i	*	
IGUALAR2	d	d	i		*
IGUALAR3	d	i	d	*	
IGUALAR4	d	i	d		*
IGUALAR5	i	d	d	*	
IGUALAR6	i	d	d		*

Problema 33. Igualar1. Juan tiene *a*. Pedro tiene *b*. ¿Cuántos tiene que ganar Pedro para tener tantos como Juan?

Problema 34. Igualar2. Juan tiene *a*. Pedro tiene *b*. ¿Cuántos tiene que perder Pedro para tener tantos como Juan?

Problema 35. Igualar3. Juan tiene *a*. Si Pedro gana *c*, tendrá tantos como Juan. ¿Cuántos tiene Pedro?

Problema 36. Igualar4. Juan tiene *a*. Si Pedro pierde *c*, tendrá tantos como Juan. ¿Cuántos tiene Pedro?

Problema 37. Igualar5. Pedro tiene *b*. Si Pedro gana *c*, tendrá tantos como Juan. ¿Cuántos tiene Juan?

Problema 38. Igualar6. Pedro tiene *b*. Si Pedro pierde *c*, tendrá tantos como Juan. ¿Cuántos tiene Juan?

Otros híbridos

La clasificación anterior de los PAEV de una etapa no permite a veces asignar un problema determinado a una de las clases, sino que hay veces que un problema tiene características propias de varias de las clases.

Problema 39. En un autobús van 20 personas. En una parada bajan 8 personas. ¿Cuántas personas quedan en el autobús?

Problema 40. En un autobús van 20 personas. Van 8 mujeres. ¿Cuántos hombres van en el autobús?

Problema 41. En un autobús van 20 personas. En una parada bajan las 8 mujeres. ¿Cuántos hombres quedan en el autobús?

Los problemas 39 y 40 se clasifican sin dificultad como de cambio y de combinación, respectivamente; sin embargo, el problema 41 es de clasificación dudosa porque en él aparece la acción del problema 39 y la relación entre conjuntos del 40: es un híbrido de cambio y combinación. Problemas como éste se pueden enunciar sin dificultad a partir de un problema de combinación sin más que imaginar que se realiza una acción sobre una de las partes.

Extensión de las categorías

Las categorías semánticas han sido establecidas para los problemas de una etapa; ahora bien, el mismo criterio semántico puede extenderse a algunos problemas de más de una etapa.

Problema 42. Juan tiene *a*. Da *b* a Pedro. Da *c* a Marta. ¿Cuántos le quedan?

Problema 43. Hay *a* violetas. Hay *b* rosas. Hay *c* claveles. ¿Cuántas flores hay?
Problema 44. Pedro tiene *a* más que Juan. Juan tiene *b* más que Felipe. Felipe tiene *c*. ¿Cuántas tiene Pedro?

Los problemas 42, 43 y 44 son las extensiones naturales a más de una etapa de problemas de cambio, combinación e igualación, respectivamente. Ahora bien, un estudio sistemático desde este punto de vista de los problemas de más de una etapa –que conduciría a calificar estas categorías como de cambio iterado, parte-parte-parte-todo…, y buscar otras– no merece la pena al menos por dos motivos: el número de tipos sería previsiblemente tan grande que de poco serviría tener tal clasificación, y, lo que es más importante, la estructura de los problemas de más de una etapa presenta elementos distintos de los semánticos y que son más pertinentes para comprender el proceso de resolución (Ver capítulo 5)

Por otro lado, Vergnaud, al centrar su atención en la transformación sufrida por la cantidad inicial en los problemas de cambio, introduce una categoría de problemas aditivos de más de una etapa, que denomina *composición de transformaciones*, en la que no se hace referencia a las cantidades inicial y final, sino sólo a los cambios[3].

Problema 45. Pedro ganó 7 canicas por la mañana, perdió 3 canicas por la tarde y ganó 5 canicas al día siguiente. ¿Cuántas canicas ganó?

En realidad, este problema aparece en el currículo escolar como un problema de introducción cuando se tratan los números enteros, más precisamente, cuando se tratan estos números como operadores.

De la misma manera, cuando en el transcurso del currículo escolar se introducen otros números (fracciones, decimales), aparecen de nuevo problemas de una etapa que pueden clasificarse en alguna de las categorías semánticas descritas.

Problema 46. Un depósito estaba lleno en sus $\frac{5}{8}$, y durante el día se ha vaciado $\frac{1}{8}$. ¿Qué parte quedará llena?

[3]Estos problemas es difícil incluirlos entre las categorías semánticas que han sido elaboradas para dar cuenta de los problemas aditivos que aparecen en los primeros años del currículo escolar. La idea matemática que subyace a ellos es la del número entero como operador. Si Vergnaud los incluye entre los problemas aditivos es porque mira los problemas en el interior de lo que él llama *campos conceptuales*, y éstos abarcan todos los problemas que lo constituyen, sin limitarse a examinar sólo los que aparecen en un segmento del currículo.

Problema 47. Manuel y José colaboran en un trabajo. Manuel ha hecho los $\frac{2}{9}$, y José los $\frac{4}{9}$. ¿Qué parte han hecho en total?
Problema 48. En un terreno se ha destinado $\frac{4}{9}$ partes para edificar una casa y $\frac{2}{9}$ partes menos para jardín. ¿Qué parte del terreno se ha destinado a jardín?
Problema 49. Manuel y José están pintando una valla. Manuel ha pintado los $\frac{2}{9}$, y José los $\frac{5}{9}$. ¿Qué parte tiene que pintar Manuel para que haya pintado tanto como José?

Las dificultades nuevas que presentan estos problemas tienen su raíz en los aspectos conceptuales nuevos que traen consigo estos nuevos tipos de números, y no en la estructura semántica del problema; esto es, desde el punto de vista de las cantidades, sin hacer referencia a qué tipo de cantidades se están manejando, la estructura de estos problemas es idéntica a la de los problemas que aparecen en los primeros niveles del currículo.

ESTUDIOS DE DIFICULTADES.

Una de las variables de las que se tienen datos contrastados sobre su influencia en la dificultad que los alumnos encuentran para resolver los problemas es el tipo de proposición abierta. Variando la posición de la cantidad desconocida y la colocación del resultado de la operación a uno u otro lado del signo igual, se obtienen seis proposiciones abiertas posibles para la adición, y otras tantas para la substracción:

Tipos de proposiciones abiertas	
a + b = ?	? = a + b
a + ? = c	c = a + ?
? + b = c	c = ? + b
a – b = ?	? = a – b
a – ? = c	c = a – ?
? – b = c	c = ? – b

Carpenter & Moser (1983, pg. 10) aportan los siguientes datos sobre los niveles de dificultad correspondientes a esta tipología de las proposiciones, resumiendo los resultados obtenidos en diversos estudios realizados con niños de 1º a 3º de EGB:

1.– Las proposiciones *canónicas* de adición y substracción (a + b = ?, a – b = ?) son menos difíciles que las *no canónicas* (a + ? = c, a – ? = c).

2.– Las proposiciones canónicas de substracción son generalmente más difíciles que las proposiciones canónicas de adición.

3.– No hay diferencias claras de dificultad entre las tres proposiciones siguientes: a + ? = c, ? + b = c, a – ? = c.

4.– La proposición de minuendo desconocido (? – b = c) es significativamente más difícil que las otras cinco proposiciones de substracción.

5.– Las proposiciones con la operación en el lado derecho del signo igual (p. e., c = a + ?) son significativamente más difíciles que las paralelas con la operación a la izquierda.

DIFICULTADES SINTÁCTICAS

Los estudios que se han realizado sobre dificultades de orden sintáctico pueden clasificarse en dos categorías en función de la finalidad perseguida y la metodología utilizada. Por un lado, ha habido estudios que han tratado de predecir la dificultad del problema en función de un conjunto amplio –y con pretensiones de ser exhaustivo– de variables que tienen que ver con el formato de presentación del problema, la longitud del enunciado, su estructura gramatical, la posición de la pregunta en el enunciado –al principio o al final–, la presencia o no de datos en la pregunta, y el tamaño de los números; además, se ha considerado también el orden de presentación de los datos. Por otro lado, se han realizado estudios que trataban de determinar si una variable en particular estaba relacionada de forma significativa con los porcentajes de éxito, una vez se había controlado el resto de las estructuras del problema.

Los resultados detallados de estos estudios pueden verse en Nesher et al. (1982)

De ellos, nos parece importante señalar aquí algunos resultados cualitativos y globales:

1.– Cuando los problemas verbales se presentan por medio de grabados, dibujos o material concreto, resultan más sencillos, al menos en los primeros niveles. El asunto no está tan claro, sin embargo, para niveles superiores.

2.– La longitud del enunciado, el número de oraciones que lo forman y la posición de la pregunta son variables que, en los estudios del primer tipo, son útiles para explicar la dificultad del problema. Esto quiere decir que tanto estas variables, como otras de la estructura superficial del problema son fuentes de dificultad añadidas al problema; sin embargo, estudios del segundo tipo muestran que no son significativas frente a la modificación de la estructura semántica. Si se nos permite expresarlo en términos vagos, esto quiere decir que por mucho que se complique –¡dentro de lo razonable en el contexto escolar!– la estructura sintáctica de un problema de cambio, parece poco probable que la dificultad añadida sea tan grande como la que supone pasar de un problema de cambio a uno de comparación.[4]

3.– El tamaño de los números y la presencia de símbolos en vez de números concretos incrementan la dificultad del problema. Alguna de las estrategias que los niños utilizan usualmente para resolver estos problemas como, p.e., la simulación de las acciones descritas en el problemas o el recurso a los hechos aritméticos básicos (resultados numéricos asociados con el aprendizaje de las tablas de las operaciones o con la práctica de las operaciones en otros contextos) no pueden utilizarse con números grandes. Más en general, los números grandes no pertenecen al campo de experiencia numérica de los niños y –en cierto sentido– no pertenecen al concepto de número que tienen formado; no hay tampoco resultados numéricos conocidos que puedan utilizarse –excepto para casos aislados como el mundo de las docenas o los múltiplos de cinco construidos a partir de los contextos concretos correspondientes.

4.– La relación entre el orden de aparición de los datos en el enunciado y el orden en que deben ser colocados a la hora de realizar con ellos la operación necesaria para resolver el problema es también una de las fuentes de dificultad que han sido identificadas. En particular, esto ocurre en problemas como el siguiente:

Problema 50.	Juan perdió 27 canicas. Tenía 50. ¿Cuántas canicas le quedan?

En ellos, la operación que hay que realizar para resolverlos es una resta; pero al estar presentados los datos en orden inverso, hay alumnos que suman para obtener la solución. Una explicación de este hecho es que los alumnos descontextualicen el problema, esto es, lo consideren como dos números dados en el orden en que aparecen en el enunciado entre los que hay que colocar una operación y, al considerarlos sólo como números dados en un orden determinado, decidan realizar con ellos la operación posible.

DIFICULTADES SEMÁNTICAS

Para presentar los estudios sobre las dificultades de orden semántico se pueden considerar divididos en dos categorías: los que tratan sobre las estrategias que realmente utilizan los niños para resolver los problemas, y los que se centran en los porcentajes de éxito; dejaremos para después los primeros y expondremos aquí dos tipos de datos sobre éste último punto de vista.

[4]Mención aparte es el caso de la transformación sintáctica de un problema que lleva a éste de un enunciado de hecho a uno hipotético, para el que debe consultarse Caldwell & Goldin (1979).

Porcentajes de éxito en la resolución de problemas aditivos

Los primeros, véase la tabla 1 (Nesher, 1982, pág. 33), corresponden al porcentaje de soluciones correctas a los problemas clasificados por el modo de establecer la conexión o dependencia semántica entre las tres proposiciones subyacentes.

Tabla 1

Dependencia semántica	Problemas de adición	Problemas de substracción
Argumentos	80’03	52’56
Adjetivos[a]	72’73	59’47
Agentes	80’39	50’48
Tiempo	77’90	38’00
Verbos	77’89	72’11
Términos relacionales	57’32	60’14

[a]La categoría *Localización* se combinó con *Adjetivos*, ya que ambas eran muestras pequeñas y muy similares respecto a sus medias.

Los segundos, tabla 2, corresponden al porcentaje de soluciones correctas a los problemas de las categorías semánticas. Unos globales, y otros desglosados por niveles.

Tabla 2
Porcentaje de éxito de 14 tipos de PAE aditivos en dos estudios empíricos

	Nesher (1982)	Riley et al. (1983)	
	2º-6º	1º	2º
Combinar 1	79	100	100
Combinar 2	52	39	70
Cambio 1	82	100	100
Cambio 2	75	100	100
Cambio 3	72	56	100
Cambio 4	77	78	100
Cambio 5	48	28	80
Cambio 6	49	39	70
Comparar 1	76	28	85
Comparar 2	66	22	75
Comparar 3	65	17	80
Comparar 4	66	28	90
Comparar 5	60	11	65
Comparar 6	54	6	35

El orden de dificultad en general es cambio, combinación, comparación, pero en los problemas de resta hay una ligera variación: combinar es más difícil.

El asunto no es tan simple cuando la clasificación se hace más fina: en la tabla 2 se puede ver que dentro de una misma categoría semántica los niveles de dificultad varían considerablemente. Cambio 5 y cambio 6, esto es aquellos en los que la incógnita es la cantidad inicial son más difíciles. En efecto, cualquier modelado del problema o cualquier simulación es imposible en la versión directa del problema, luego hay que reformular el problema para poder resolverlo. Cosa que ocurre también con comparar 5 y 6. La diferencia entre combinar 1 y 2 puede explicarse porque unos se resuelven con una suma y otros con una resta.

Estas tablas proporcionan pistas al profesor sobre lo que puede esperar que sus alumnos hagan, ayudándole a no pensar que sus alumnos están en un nivel bajo si no resuelven todos los problemas aditivos, ya que algunos de éstos se sabe que son realmente difíciles en determinadas edades.

Asimismo, estas tablas pueden servir de guía para la organización de la instrucción por niveles. Finalmente, basta tener en cuenta el tamaño de los números o el tipo de cantidades que empiezan a aparecer a partir de 2º para explicar por qué, frente al 100% de éxito de cambio 1, p. e., en 1º y 2º, el global 2º a 6º es el 82 %.

ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN

Carpenter ha estudiado con profundidad cómo los niños resuelven problemas de adición y substracción en los que los números son pequeños para que no haya necesidad de acudir a los algoritmos usuales. O, dicho de otra manera, el niño no se ve obligado a tomar la decisión ‘es de sumar’, ‘es de restar’, y después pasar a la fase de realizar los cálculos. No hay por tanto, o al menos no es imprescindible, una traducción formal del lenguaje vernáculo al lenguaje aritmético, esto es, no hace falta escribir la correspondiente sentencia aritmética para obtener la solución del problema.

Hay estudios realizados antes y estudios hechos después de que los niños hayan recibido instrucción en estas operaciones. Lo que más nos interesa aquí de estos resultados es 1) qué debe preceder a qué en la instrucción, si los problemas o las operaciones, y 2) cómo el trabajo sobre los problemas y sus procesos de solución contribuye a dotar de significado a las operaciones. El detalle de estos estudios puede verse en Carpenter, Hiebert & Moser (1981), Hiebert, Carpenter & Moser (1982) y Carpenter & Moser (1984) Lo que vamos a exponer aquí va a ser únicamente las estrategias básicas que en estos estudios se han encontrado y la forma como están asociadas con algunas clases de problemas.

Fundamentalmente, los niños resuelven los problemas de tres modos diferentes: mediante la elaboración de un modelo con dedos o con objetos físicos, mediante el uso de secuencias de recuento, o recurriendo al recuerdo de hechos numéricos básicos, y encuentran el resultado de estos problemas recurriendo a estrategias que se pueden denominar como sigue:

— Contar todos.

— Contar hacia arriba desde el primero.

— Contar hacia arriba desde el mayor.

— Quitar de.

— Contar hacia abajo desde.

— Quitar hasta.

— Contar hacia abajo hasta.

— Añadir hasta.

— Contar hacia arriba hasta.

— Emparejar.

Las tres primeras suelen utilizarse en los problemas aditivos y las restantes en los problemas de substracción.

Contar todos consiste en contar el conjunto resultante comenzando por el uno una vez han sido representadas las cantidades mediante objetos o dedos, o sin necesidad de utilizar ningún modelo físico. Cuando se utilizan modelos físicos, el recuento puede realizarse después de haber unido los conjuntos de objetos correspondientes, o, simplemente, comenzando por uno de los conjuntos y siguiendo por el otro.

Contar hacia arriba desde el primero y *contar hacia arriba desde el mayor* son dos estrategias que se utilizan sin la mediación de modelos físicos y que consisten en comenzar el recuento a partir de uno de los números dados. En el primer caso, se comienza por el número que aparece en el problema en primer lugar; en el segundo caso, se elige comenzar por el número más grande. Esta segunda es más eficiente porque se alcanza antes el resultado, y es más sofisticada ya que supone que antes de iniciar el recuento se han comparado los dos números para ver cuál es el mayor.

Quitar de y *quitar hasta* se realizan con modelos físicos y consisten en separar del total una parte. En *quitar de* se separa del total la otra cantidad y se obtiene la solución por recuento de lo que queda. En *quitar hasta* se separa del total lo que hace falta separar para que quede la otra cantidad, y se obtiene la solución por recuento de lo que se ha separado (o, también, de lo que se va separando).

Contar hacia abajo desde y *contar hacia abajo hasta* son estrategias correspondientes a las dos anteriores, pero realizadas sin el recurso a modelo físico alguno.

Las estrategias *añadir hasta* y *contar hacia arriba hasta* son dos estrategias para los problemas de substracción que, a diferencia de las anteriores, invocan acciones aditivas. La primera se realiza en un modelo físico y la segunda directamente sobre las cantidades. Ambas consisten en contar desde la cantidad menor hacia la mayor.

Finalmente, *emparejar* consiste en el apareamiento sobre un modelo físico de las cantidades, y el recuento posterior de la parte que queda sin pareja.

En la tabla 3 (Carpenter & Moser, 1983, pág. 24) se puede ver representada la relación entre algunas de las estrategias anteriores y algunas de las categorías semánticas, mostrando la evolución de lo que hacen los alumnos desde 1º a 3º.

****INSERTAR AQUÍ LA TABLA 3****

En los problemas de substracción las estrategias que utilizan los niños son más consistentes con las acciones o relaciones descritas en el problema y, sin embargo, la dependencia entre estrategia y estructura del problema está menos clara en los problemas de adición.

Respecto a la evolución de 1º a 3º, puede constatarse que las estrategias que se encuentran en primer lugar son aquellas que se realizan con modelos físicos y los procedimientos de recuento que comienzan por el uno; esto es, *contar todos, quitar de* y *quitar hasta*, y *añadir hasta* y *emparejar*.

El uso de estrategias de recuento es posterior dado que requiere el conocimiento de un conocimiento más profundo de los números y propiedades aritméticas, y, además, la posesión de habilidades para contar de diversos modos: a partir de un número, hacia arriba, hacia abajo (Una discusión detallada de la evolución de las habilidades de contar relacionadas con la construcción de la secuencia numérica se puede encontrar en Fuson & Hall, 1982.). Dentro de las estrategias de recuento, en general, contar hacia arriba precede a contar hacia abajo. Finalmente, aunque los datos que hemos presentado corresponden a los niveles 1º a 3º, es preciso señalar que las estrategias de recuento perduran en niveles superiores –con el recurso en éstos a estrategias de recuento más sofisticadas como contar por bloques o contar de tantos en tantos, que evocan estrategias usuales de cálculo mental.

EL PROCESO DE TRADUCCIÓN

Como ya se dijo al describir el proceso de resolución de un problema aritmético elemental, tras las fases de lectura y comprensión del enunciado, se entra en la fase crucial del proceso: la traducción. Esto es, en este punto del proceso es en el que se decide cuál es la operación aritmética que hay que realizar. En los estudios descritos en el párrafo anterior, no se trataba de cómo se toma esta decisión, sino de cuáles son las estrategias que realmente utilizan los niños para obtener la solución. Obviamente, estas estrategias son impracticables en cuanto aumente el tamaño de los números. Conviene por tanto explicar, desde un punto de vista general, cómo se toma esta decisión.

La comprensión de este proceso y la posibilidad de que se realice en un sujeto individual depende, de hecho, en primer lugar de la comprensión que el sujeto tenga de los lenguajes entre los que se lleva a cabo la traducción; esto es, el lenguaje vernáculo y el lenguaje aritmético. En segundo lugar, depende de la comprensión de las correspondencias –e isomorfismos– que existen entre ellos.

Independientemente de la riqueza lingüística que el sentido común indica que hay que tener, algunos investigadores parecen pensar que las correspondencias entre ambos lenguajes se establecen fundamentalmente por medio de las *palabras clave*. Imaginan, por tanto, un proceso de traducción *secuencial* en el que el sujeto decide la operación que tiene que realizar en función del significado que atribuye a la palabra clave con que se encuentra al recorrer el enunciado.

Sin embargo, esta concepción tropieza con dificultades. Por un lado, hay palabras clave que pueden indicar distintas operaciones. Por otro lado, los grupos de palabras que expresan relaciones sólo determinan unívocamente la operación en el contexto *global* del problema y no consideradas aisladamente como muestran los problemas 15 y 51, en los que la ‘palabra clave’ ‘más joven que’ sirve para indicar que hay que restar, en el primer caso, y, sin embargo, sumar, en el segundo.

Problema 51. Juan tiene un hermano y una hermana. Su hermana tiene 15 años y es 5 años más joven que el hermano. ¿Qué edad tiene su hermano?

Esto indica que las palabras clave pueden desempeñar un papel fundamental en la traducción, pero que ésta sólo puede realizarse correctamente si la comprensión del enunciado del problema se realiza de forma *global* y no local.

Este modo local de comprender el proceso de traducción explica la multitud de ejemplos de estrategias de instrucción basadas en la determinación de las palabras claves, tales como: la lectura del enunciado obligando a una entonación especial de las palabras clave, el subrayado de palabras como tarea previa a la escritura de la expresión aritmética, el uso de la pregunta “¿Dónde dice que hay que sumar?” con posterioridad a que el niño haya tomado la decisión de sumar… Lo que en estas estrategias parece faltar es un análisis global del contenido del problema, al que nos referiremos posteriormente.

La explicación anterior de la fase crucial del proceso de resolución peca de ingenuidad al hacer referencia a la comprensión de los lenguajes involucrados en el proceso de traducción, sin entrar en un análisis detallado de ellos. Además es incompleta al menos por no ser capaz de dar cuenta de que en distintas edades los mismos problemas presenten niveles de dificultad distintos. Esto es, no disponemos todavía de ninguna explicación para los datos de Vergnaud, que presentamos al principio de este capítulo.

Para lo que nos interesa aquí, el lenguaje vernáculo de los enunciados de los problemas sería la expresión de la estructura del mundo de acciones físicas del sujeto sobre los objetos de los que tiene experiencia: canicas, caramelos, flores, pájaros, camisas…; se tienen, se comen, se ganan, vuelan, se compran… Y, además, de las relaciones entre los objetos: se tienen más que, menos que…; o de las relaciones causales o temporales entre las acciones.

El lenguaje aritmético, por su parte, corresponde al mundo de los números, las operaciones con ellos y las relaciones entre números, operaciones y hechos numéricos (así, si $6 + 2 = 8$, entonces se sabe que $8 - 6 = 2$; o que sumar aumenta, mientras que restar disminuye…)

La traducción se realiza entre los significados que el sujeto ha construido por su experiencia en los mundos correspondientes a uno y otro lenguaje. Como en cualquier proceso de traducción, los campos semánticos correspondientes no son isomorfos, por lo que el sujeto ha de construir el sentido en el lenguaje al que traduce, a partir del otro campo semántico.

Además, en cualquier intento de explicación que tenga en cuenta el aspecto longitudinal, no se puede dejar de lado el desarrollo de las estructuras cognitivas, y, menos aún, cuando se está tratando con tareas como la resolución de problemas aritméticos, que se presentan a niños de edades en las que el desarrollo de las estructuras cognitivas lógico-matemáticas se encuentra en continuo progreso.

Las categorías de problemas se pueden examinar desde el punto de vista de las estructuras de los dos lenguajes, incorporar lo que se sabe sobre la manera como se desarrollan las estructuras cognitivas correspondientes a cada uno de ellos, y teniendo en cuenta el desarrollo temporal de estas estructuras, organizar secuencialmente las categorías semánticas de problemas. Nesher, Greeno y Riley (1982) presentan como resumen de sus estudios al respecto el siguiente cuadro:

ASPECTOS DEL DESARROLLO COGNITIVO

NIVEL	CONOCIMIENTO EMPÍRICO	OPERACIONES LÓGICAS	OPERACIONES MATEMÁTICAS
1 Contar conjuntos	Referirse a conjuntos Añadir y quitar miembros de un conjunto. Comprender 'poner', 'dar' 'quitar', etc. como indicadores de cambio de lugar o posesión	$x \in P$ $x \in R$ $n(P)$ $n(R)$ $T(a,b)$ ('Tener')	Ser capaz de determinar <u>contando</u> el cardinal de un conjunto. El orden entre números. $2<5<8$
2 Cambio	Capacidad para enalzar sucesos por causa y efecto. Referencia a la cantidad de cambio. Comprensión de una secuencia de sucesos ordenados en el tiempo de modo no reversible.	$D(J,o)$ se convierte en $C(T^{-}(J,o))$ $R(J,o)$ se convierte en $C(T^{+}(J,o))$ donde: 'D': 'dar', 'R': 'recibir', 'C': 'causa'	Comprensión de la suma y la resta como procedimientos. '+' y '-' son distintos $a+b \rightarrow c$ $a-b \rightarrow c$
3 Parte-Parte-Todo	Se dispone de un esquema parte-parte-todo reversible y se sabe usarlo para encontrar la parte desconocida en cualquier hueco en una cadena de sucesos. Comprensión de la inclusión de clases.	Comprensión de la relación aditiva entre tres conjuntos (P,Q,R) $P \cup R=Q$ $P \subset Q$ $R \subset Q$ $P \cap R=\varnothing$ $x \in (P \cap Q)$ $n(P)+n(R)=n(P \cup R)=n(Q)$ $n(Q)-n(P)=n(R)$	Comprensión de la relación entre tres números en una ecuación (=). Conexión entre adición y substracción: Si $a+b=c$, entonces $c-b=a$ y $c-a=b$.
4 Relaciones direccionales	Reversibilidad de las relaciones no simétricas Capacidad para manejar las descripciones direccionales (más/menos), y cuantificar un conjunto	$R(a,b)=R^{-1}(b,a)$ Si $m<n$, entonces $n>m$. Coordinación entre $n(a)$, $n(b)$, $R(a,b)$ y $n(a-b)$.	Capacidad para manejar desigualdades y su relación con la igualdad, igualándolas mediante adición o substracción: Si $a>b$, entonces $a-c=b$ y $b+c=a$.

Ahora bien, en el proceso de resolución de problemas intervienen más elementos de los que hasta ahora hemos tomado en consideración. Aunque este no es el lugar para entrar en los detalles, conviene tener presente al menos las cuatro grandes categorías que ha puesto de relieve Schoenfeld (1985): recursos que hay que traer a colación, procedimientos que se utilizan en el proceso, mecanismos de control para dirigirlo y sistemas de creencias sobre la naturaleza de las matemáticas y la tarea de resolver problemas en general y en el contexto escolar en particular. Hasta aquí el análisis se ha centrado en los recursos y las estructuras cognitivas subyacentes, sin que se haya hecho mención, excepto en el apartado de estrategias de resolución, a los procedimientos. Riley, Greeno y Séller (1983) han elaborado un modelo que se basa en:

a) esquemas de problemas para comprender las relaciones semánticas,

b) esquemas de acciones para representar los modelos de acciones para resolver los problemas, y

c) conocimientos estratégicos para planear las soluciones de los problemas.

Este modelo, como puede verse, incorpora de la categoría de recursos no sólo conocimientos conceptuales, sino también recursos tácticos y, además, estrategias que pertenecen a la categoría de procedimientos. Con él, Riley et al. han recorrido las catorce clases de problemas, correspondientes a cambio, combinación y comparación, elaborando una explicación del proceso de resolución de tales problemas, cuya complejidad está de acuerdo con los niveles de dificultad establecidos en los estudios empíricos. Esto les ha permitido hablar de cuatro niveles de dificultad en los que encuadran estas clases de problemas, como puede verse en la tabla 4.

Tabla 4

Tipo de problema	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4
Combinar 1	×			
Combinar 2			×	
Cambio 1	×			
Cambio 2	×			
Cambio 3		×		
Cambio 4		×*		
Cambio 5			×	
Cambio 6			×	
Comparar 1			×*	
Comparar 2			×*	
Comparar 3			×	
Comparar 4			×	
Comparar 5				×*
Comparar 6				×*

*En algunas muestras estos problemas estaban en el nivel anterior.

Estos niveles han sido establecidos teniendo en cuenta gran cantidad de datos experimentales. Se han descrito mediante los conocimientos empíricos, lógicos y de las operaciones aritméticas que marcan y son acordes con el grado de desarrollo de las estructuras cognitivas de los niños. Por ello, pueden utilizarse con provecho para elaborar secuencias de instrucción en la resolución de problemas aditivos.

Tabla 3
Relación de las estrategias con la estructura del problema: Resultados de un estudio longitudinal

			Estrategia						
			Substractivo		Aditivo			Numérico	
Problema	Curso	Porcentaje correcto	Quitar de	Contar hacia abajo desde	Añadir hasta	Contar hacia arriba desde	Emparejar	Hecho recordado	Hecho derivado
Separar — Resultado desconocido	1	61	68	1	1	3	0	1	2
	2	83	34	8	1	10	0	20	9
	3	95	9	3	1	12	0	54	13
Juntar — Cambio desconocido	1	57	2	0	42	12	1	2	4
	2	93	1	2	18	31	0	25	16
	3	95	0	1	6	27	1	48	14
Comparar — Diferencia desconocida	1	41	8	0	3	9	30	1	1
	2	70	11	6	2	17	14	19	7
	3	89	3	3	2	14	2	52	17
Combinar — Parte desconocida	1	45	45	0	4	3	0	2	2
	2	78	36	5	0	11	0	20	14
	3	91	6	1	0	13	0	53	18