4.

Problemas de una etapa: multiplicación y división

INTRODUCCIÓN

El capítulo anterior, aunque se dedica a desarrollar en detalle el estudio de los problemas de una etapa de adición y substracción, contiene la exposición de los aspectos que son comunes a todos los problemas de una etapa y que, por tanto, también son pertinentes para los problemas que vamos a examinar en este capítulo. Además, la estructura general del capítulo podría servir como esquema para la organización de éste, ya que los apartados que se contemplan en ella son los que, en principio, habría que considerar aquí. Ahora bien, el estado actual de los conocimientos sobre los problemas multiplicativos es diferente del que hay sobre los problemas aditivos: no se dispone como resultado de las investigaciones realizadas de un cuadro tan completo y, hasta cierto punto, cerrado; más bien se está todavía en la fase de establecer hipótesis, realizar investigaciones puntuales y comenzar a acumular resultados. Esto nos obliga a que el estilo de exposición de este capítulo sea distinto, y que lo que en él aparezca tenga un carácter más fragmentario y provisional.

Comenzaremos extrayendo del capítulo anterior todo lo que es pertinente aquí y señalando lo que, siguiendo su estructura, habría que exponer en éste.

Para empezar, no hay nada nuevo que añadir a lo expuesto en los apartados *Clasificación de los problemas aritméticos elementales verbales,* y *Estructura de un PAEV de una etapa;* y el apartado *Análisis del enunciado verbal de un PAEV* sólo necesita completarse aportando una lista de verbos para la multiplicación y división, correspondiente a la que en él aparece para la adición y la substracción.

Del apartado *Análisis global del enunciado de un PAEV,* es pertinente para los problemas multiplicativos la distinción, que se hace para realizar el análisis, entre la componente sintáctica, la estructura lógica y la componente semántica, pero hay que añadir además otro nivel de análisis: lo que llamaremos la estructura de cantidades.

No hay nada que añadir a lo expuesto en el subapartado *La componente sintáctica*, ya que el nivel de la sintaxis no se ve afectado por el contenido propio de los problemas multiplicativos. Sin embargo, habrá que examinar cuál es *la estructura lógica* correspondiente a éstos, que, naturalmente, es distinta a la de los problemas aditivos. Del apartado *La componente semántica*, por su parte, sólo continúa siendo válida la idea de que hace falta clasificar, como hizo Nesher (1982) para los problemas aditivos, los tipos de palabras en los cuales reside la dependencia semántica entre las proposiciones del texto del problema; no sirven las categorías semánticas de los problemas aditivos, que aquí habrán de ser establecidas de nuevo, examinando las características propias de los problemas multiplicativos.

El apartado *El proceso de traducción* es totalmente pertinente en lo que se refiere a la descripción global del proceso, esto es, los lenguajes entre los que se realiza, los mundos de referencia y la forma como se acarrean los significados de uno a otro. Lógicamente no sirve la descripción que se hace de los niveles de desarrollo de los lenguajes, ya que ésta está hecha allí para los conocimientos correspondientes a las operaciones de adición y substracción.

Esto es todo lo que es válido del capítulo anterior para éste. Para tener una organización de los conocimientos acerca de los problemas multiplicativos análoga a la de los aditivos, tendríamos que tratar aquí de rellenar los huecos y exponer las variantes que acabamos de señalar; y exponer, además, los estudios de dificultades y de estrategias de resolución correspondientes a los problemas multiplicativos.

Ahora bien, los estudios realizados hasta la fecha sobre problemas multiplicativos –o, al menos, los que nosotros conocemos– no permiten realizar esta tarea más que parcialmente. El que el estado de los conocimientos sobre los problemas multiplicativos no sea tan avanzado como para los problemas aditivos no se debe simplemente a que aún no se hayan realizado las investigaciones oportunas, sino también a que el asunto es más difícil: en los problemas multiplicativos, las magnitudes desempeñan un papel esencial; además, por el momento en que aparecen en el currículo escolar, los problemas multiplicativos no están tan solos como los aditivos, lo que hace más complicado aislarlos para su análisis; de inmediato, se presentan en problemas de varias etapas; hay esquemas, como la regla de tres y el esquema de proporcionalidad, relacionados con ellos; y, finalmente, los problemas multiplicativos se plantean pronto con números distintos de los enteros positivos.

Estas dificultades han hecho que hasta la fecha se realicen, por un lado, experimentos puntuales sobre aspectos muy concretos –como los realizados por Bell y sus colaboradores en el Shell Centre–, y, por otro lado, que se hable de estructuras multiplicativas, integrando en ellas todo lo que hemos señalado que acompaña a los problemas multiplicativos y más cosas. Esto último es lo que ha hecho Vergnaud (1983), quien, siguiendo su idea de que, para entender y explicar la adquisición y el desarrollo de conocimientos y destrezas matemáticos específicos, hay que hablar de *campos conceptuales*, indica que el campo conceptual de las estructuras multiplicativas contiene los conceptos interconectados de multiplicación, división, fracción, razón, número racional, funciones lineales y multilineales, análisis dimensional y espacios vectoriales. Algunos de estos conceptos están, como puede verse, fuera del ámbito escolar, pero no están, para Vergnaud, fuera de lo que hay que tomar en consideración para el análisis de lo que ocurre con los problemas multiplicativos.

Para leer lo que sigue hay que tener en cuenta pues lo que hemos expuesto que es pertinente del capítulo anterior, el carácter fragmentario o hipótetico de lo que se sabe sobre los problemas multiplicativos, y, además, el análisis que realizamos en el capítulo 2 de la multiplicación y la división.

VERBOS PARA LA MULTIPLICACIÓN Y LA DIVISIÓN

Grupo de EGB de la APMA (1987) establecen una lista de verbos que son palabras claves para la multiplicación y la división, que es la siguiente:

Verbos de multiplicar		Verbos de dividir	
Bisar	Rebinar	Bifurcar	Exfoliar
Centuplicar	Redoblar	Bisecar	Fraccionar
Cuadruplicar	Reduplicar	Compartir	Fragmentar
Decuplicar	Reiterar	Capolar	Partir
Doblegar	Repetir	Demediar	Repartir
Duplicar	Reproducir-se	Desmenuzar	Romper
Iterar	Septuplicar	Despedazar	Seguetear
Multiplicar-se	Triplicar	Diezmar	Seleccionar
Quintar	Tresdoblar	Distribuir	Tripartir
Quintuplicar		Dividir	Trocear
		Dosificar	Trozar
		Escindir	

LA ESTRUCTURA LÓGICA

No conocemos ningún estudio realizado sobre la estructura lógica de los problemas multiplicativos. Nescher & Katriel (1977), en una nota a pie de página de su estudio sobre los problemas aditivos, indican que la estructura lógica de las proposiciones que componen el texto de estos problemas podría ser descrita como sigue:

$$(\exists_n x)((\exists y)\mathrm{P}(x,y))$$

$$(\forall x)((\exists y)\mathrm{P}(x,y)\rightarrow(\exists_m y)\mathrm{P}(x,y))$$

$$(\exists_? y)((\exists x)\mathrm{P}(x,y))$$

Lo que puede parafrasearse de la siguiente manera:

> Hay n x tales que existe y relacionado con x por P.
>
> Para todo x, si existe y relacionado con x, existen m y relacionados con x por P.
>
> ¿Cuántos y hay, tales que existe x relacionado con y por P?

La primera proposición es una descripción existencial, y la segunda es una regla de correspondencia que contiene el factor que en el enunciado se expresa mediante 'veces' u otro término similar. Para que la estructura lógica subyacente al enunciado corresponda a la multiplicación, hace falta además que se cumpla una condición entre los objetos relacionados por P, que Nesher escribe así:

$$(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall y_1)(\forall y_2)[((x_1 \neq x_2) \wedge \mathrm{P}(x_1,y_1) \wedge \mathrm{P}(x_2,y_2)) \rightarrow (y_1 \neq y_2)]$$

Esta condición establece simplemente que x distintos están relacionados con y distintos.

Este apunte de Nesher, que no puede tomarse como un análisis definitivo, muestra algo que distingue desde la estructura lógica los problemas multiplicativos de los aditivos y que tiene importancia para el establecimiento de los tipos de palabras y partes de las proposiciones en las cuales reside en este caso el núcleo de la dependencia semántica entre ellas: lo que aparece en las expresiones lógicas no son predicados monádicos –como en el caso de los aditivos– sino relaciones (o predicados diádicos).

Por otro lado, de nuevo a diferencia de lo que ocurre para los problemas aditivos, las dos primeras proposiciones no son idénticas, lo que pone de manifiesto el carácter no conmutativo[1] de la multiplicación ya desde este sustrato lógico, y tiene una consecuencia inmediata para la estructura lógica de los problemas de división: el intercambio de papeles que se hace con tanta facilidad para pasar de la estructura lógica de los problemas de adición a los de substracción es ahora más complejo. Aunque no vamos a exponer aquí las expresiones correspondientes, está claro que habría que construir dos tipos distintos de estructuras lógicas correspondientes a los dos tipos de división –partitiva y cuotitiva– que analizamos en el capítulo 2.

---

[1]Por supuesto que la multiplicación como ley de composición binaria definida en uno cualquiera de los conjuntos numéricos N, Z, Q, R es conmutativa. Lo que aquí señalamos es que la estructura lógica subyacente a los problemas multiplicativos enunciados verbalmente muestra una asimetría entre las proposiciones en que aparecen el multiplicando y el multiplicador, que se corresponde con su no conmutatividad semántica ya citada en el capítulo 2.

LA ESTRUCTURA DE CANTIDADES

Algunos investigadores han postulado que para describir la estructura de los problemas multiplicativos es preciso tomar en consideración la naturaleza de las cantidades que aparecen, dado el papel crucial que desempeñan las magnitudes en la mayoría de ellos. Schwarzt (1986) y Kaput (1986) han elaborado un análisis preliminar y mantienen que una clasificación de los problemas multiplicativos en función de los tipos de cantidades puede servir para analizar el nivel de dificultad, el tipo de dificultad y el tipo de errores que cometen los alumnos al resolverlos. La estructura de cantidades se situaría, según ellos, entre la estructura semántica (más fina) y la estructura matemática[2] (más gruesa) del problema.

TIPOS DE CANTIDADES

El aspecto crucial que aporta la consideración de las cantidades es la distinción que puede hacerse entre dos tipos de cantidades: extensivas e intensivas.

Una cantidad es un par ordenado (x, u) en el que x es un número y u una unidad de una magnitud: por ejemplo, 4 canicas, 3’5 kg, 120 km/h.

Una cantidad extensiva, como 4 canicas o 3’5 kg, expresa la extensión de una entidad o substancia y se refiere a un conjunto, montón o trozo de esa entidad o substancia.

Las cantidades extensivas son aditivas, en el sentido de que los números pueden sumarse, manteniendo inalterada la unidad que los acompaña. Esto es, las cantidades extensivas son tales que:

$$(x, u) + (x', u) = (x+x', \mathrm{u}).$$

Además, se puede distinguir entre cantidades extensivas discretas y continuas. En el caso de las discretas, a menudo, la unidad es el objeto mismo, como en el ejemplo anterior, ‘4 canicas’.

Las cantidades intensivas, por su parte, son razones como ‘velocidad’, ‘densidad’, ‘estudiantes por profesor’, ‘precio unitario’, etc. Describen un aspecto interior, intensivo de una entidad o substancia: no una propiedad del montón de objetos, sino de uno de ellos, ese montón u otro montón de cualquier tamaño. Ese aspecto se asume que es una propiedad uniforme u homogénea, o, al menos, que lo es localmente.

[2]Cuando Kaput habla de estructura matemática del problema se refiere a la expresión algebraica –o aritmética– que resulta del proceso de traducción.

Las cantidades intensivas tienen unidades compuestas, formadas por el cociente de dos cantidades extensivas. Además, a diferencia de las extensivas, no son aditivas. Como las cantidades extensivas pueden ser discretas o continuas, y las intensivas son cocientes de éstas, las intensivas pueden ser de los tipos discreta/discreta –caramelos por bolsa, p. e.–, discreta/continua –personas por año–, continua/discreta –litros por botella–, o continua/continua –km/h. En su expresión verbal, como muestran los ejemplos anteriores, suele aparecer la partícula ‘por’, aunque hay ejemplos sin ella como la velocidad de los barcos en ‘nudos’.

El caso de los escalares y los cambios de unidades.

Hay cantidades, que aparecen a menudo en los problemas multiplicativos, que tradicionalmente han sido consideradas como carentes de unidades: es el caso de los escalares. El ejemplo más simple –y frecuente desde los primeros problemas multiplicativos que se plantean a los alumnos– es el de los enunciados en que aparecen ‘doble’, triple’ o las expresiones con ‘veces’. Kaput (1986) y Schwartz (1986) mantienen que es conveniente considerar que se trata también de cantidades intensivas, y que esto permite simplificar el cuadro para el análisis y, además, explicar algunos de los comportamientos de los alumnos.

Problema 1 María tiene 3 veces la edad de su hija Julia. Julia tiene 7 años. ¿Cuántos años tiene María?

Así, por ejemplo, en el problema 1, la expresión ‘3 veces’ puede considerarse como una cantidad intensiva cuya unidad es “años de la edad de María/años de la edad de Julia”. La peculiaridad de estas cantidades intensivas es, entonces, que las dos cantidades extensivas que se dividen son del mismo tipo de magnitud, y que multiplicar por ellas no cambia la naturaleza del referente de la cantidad, sino sólo su medida. Esta idea puede extenderse igualmente a los factores de cambio de unidades o los factores de escala, que también se pueden considerar por tanto como cantidades intensivas.

TIPOS DE ESTRUCTURAS DE CANTIDADES

La estructura de cantidades de un problema multiplicativo es el conjunto de expresiones y de relaciones entre las expresiones de las cantidades que aparecen en él, y las operaciones permitidas entre esas cantidades. Kaput(1986) señala que es posible encontrar problemas isomorfos desde el punto de vista de su estructura matemática, pero distintos desde el punto de vista de su estructura de cantidades; y problemas isomorfos desde el punto de vista de la estructura de cantidades, pero distintos desde el punto de vista de su estructura semántica. Esto es lo que le permite decir que esta estructura es intermedia entre las otras.

Combinando los dos tipos de cantidades –extensivas (E) e intensivas (I)– y las dos operaciones –multiplicación y división–, y teniendo en cuenta el carácter no conmutativo de la multiplicación cuando se expresa en los enunciados verbales de los problemas, aparecen las siguientes posibilidades de estructuras de cantidades:

E×E, E×I, I×E, I×I, E/E, E/I, I/E, I/I.

Lo que sigue es un breve examen de ellas.

1.— El tipo E×E corresponde al modelo de la multiplicación como producto cartesiano y está íntimamente relacionado con la categoría semántica[3] que Vergnaud (1983) ha llamado *producto de medidas.* Cualquier problema de áreas –o los problemas combinatorios del estilo del problema 2 del capítulo 2– tiene esta estructura de cantidades. Su rasgo más distintivo es que el resultado es una cantidad extensiva nueva, cuya unidad se crea a partir de las cantidades extensivas de los datos: por ejemplo, 'vestidos', a partir de 'faldas' y 'blusas', en el problema 2 antes citado.

2.— En los tipos E×I e I×E, es preciso que el denominador de las unidades de la cantidad intensiva coincida con las unidades de la cantidad extensiva, y el resultado es una cantidad extensiva cuyas unidades son las del numerador. El problema 1 es un ejemplo de I×E, y son de uno de estos dos tipos los problemas en que los datos son tiempo y velocidad, o cantidad y precio unitario, o similares.

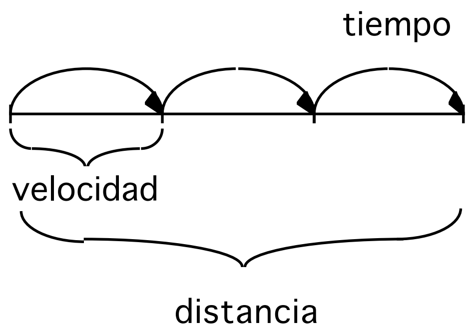
3.— Es difícil encontrar ejemplos de problemas del tipo I×I[4] entre los que usualmente se plantean en la escuela. En el problema 2 puede verse que las cantidades intensivas han de tener unas unidades relacionadas de manera que el denominador de una se cancele con el numerador de la otra y que, entonces, el resultado es una nueva cantidad intensiva.

Problema 2	Un coche consume 6'5 litros de gasolina por kilómetro, cuando circula a 120 km/h. Viajando a esa velocidad, ¿cuál será su consumo de gasolina en litros por hora?

4.— Los tipos E/E y E/I corresponden a los dos tipos de división que analizamos en el capítulo 2: partición y cuotición. Los ejemplos que se dieron allí tienen cantidades extensivas discretas –'manzanas' y 'personas'– y la cantidad intensiva –'manzanas por persona' es, por tanto, del tipo discreta/discreta. En ese caso, está claro que la división E/E –'35 manzanas / 5 personas'– es una partición, porque se pregunta por el tamaño de cada parte; y que la división E/I –'35 manzanas / 5 manzanas por persona'– es una cuotición, porque se pregunta por el número de partes.

[3]Ver el apartado siguiente.
[4]Kaput (1986) no considera esta posibilidad.

Ahora bien, en otros casos es preciso extender el significado de ‘partición’ y ‘cuotición’. Por ejemplo, en un problema en que datos o incógnita sean la distancia recorrida, el tiempo empleado y la velocidad, se puede considerar que la distancia recorrida es el todo, el tiempo empleado es el número de partes y la velocidad es el tamaño de cada parte.



tiempo = nº de veces = nº de partes

velocidad = distancia en cada parte = tamaño de la parte

Entonces, preguntar por la velocidad conduce a una división partitiva y preguntar por el tiempo a una división cuotitiva. En general, si las tres cantidades que aparecen en el problema son E, E' e I, siendo las unidades de la cantidad I las derivadas de dividir las de E por las de E', preguntar por I conduce a una partición, y preguntar por E', a una cuotición.

5.— Pueden obtenerse dos ejemplos del tipo I/I cambiando la incógnita en la situación del problema 2 por uno u otro de los datos. El siguiente análisis pretende mostrar que en I×I la multiplicación tampoco es conmutativa, y que, como consecuencia de ello, en la estructura de cantidades del tipo I/I, la división puede ser partitiva o cuotitiva.

Basta para ello con considerar, de forma análoga a como acaba de hacerse, que en el problema 2 el consumo en litros por hora representa el todo, la velocidad representa el número de partes, y el consumo en litros por kilómetro, el tamaño de cada parte.

Con lo cual, si los datos son el consumo en litros por hora y la velocidad en kilómetros por hora, y la incógnita es el consumo en litros por kilómetro, entonces los dos “por hora” se cancelan, tanto algebraica como semánticamente, y el resultado se obtiene mediante una división partitiva.

$$\frac{l/h}{km/h} \to \frac{l/\cancel{h}}{km/\cancel{h}} \to \frac{l}{km} \to l/km$$

Ahora bien, si los datos son el consumo en litros por hora y el consumo en litros por kilómetro, y la incógnita es la velocidad en kilómetros por hora, entonces la relación entre las unidades es más compleja ya que lo que se cancelan son los numeradores de las unidades de los datos y hay que proceder a “darle la vuelta” a la fracción resultante para que tenga sentido. La división que hay que realizar para obtener el resultado es una cuotición.

$$\frac{l/h}{l/km} \to \frac{\cancel{l}/h}{\cancel{l}/km} \to \frac{1/h}{1/km} \to km/h$$

6.— Finalmente, el tipo I/E corresponde a situaciones más complejas que no vamos a entrar a discutir aquí[5].

CATEGORÍAS SEMÁNTICAS

A diferencia de lo que ocurre con los problemas aditivos, no hay una clasificación de los problemas multiplicativos universalmente aceptada; la que ofrecemos a continuación está hecha reuniendo las clasificaciones de Vergnaud (1983) y Nesher (1987). Hemos adoptado los nombres que les da Vergnaud, excepto para la categoría que éste no considera y sí considera Nesher, indicando además los nombres que les da Nesher. Hemos añadido también el nombre del modelo de operación correspondiente según la denominación de Brown (1981), porque permite hacer referencia con más facilidad al mapa conceptual de comprensión de las operaciones expuesto en el capítulo 2, y al trabajo Bell et al. (1984) que usa esa denominación.

Ya hemos expuesto en la introducción que el punto de vista de Vergnaud le hace tomar en consideración mucho más que el campo estricto de los problemas multiplicativos de una etapa; por ello, haremos referencia también a sus análisis de problemas que no corresponden estrictamente a este capítulo por ser de más de una etapa.

ISOFORMISMO DE MEDIDAS

Nesher llama a esta categoría *regla de correspondencia*, y en Brown o en Bell aparecen como problemas de *razón.* Se trata de problemas en los que hay una proporción simple directa entre dos espacios de medida. En su enunciado más típico aparecen una proposición que es una descripción existencial y otra que expresa la regla de correspondencia entre los espacios de medida.

---

[5]De hecho, la consideración de ejemplos de este tipo como velocidad/tiempo conduciría a volver atrás para analizar más en profundidad el tipo E×I.

Como la multiplicación no es semánticamente conmutativa, hay tres posibilidades dentro de esta categoría, según cuál de las tres cantidades sea la incógnita. El problema 3, y los esquemas de problemas 4 y 5, construidos sobre la misma situación, las ejemplifican.

Problema 3 **IM1** Hay 5 estantes de libros en la habitación de Juan. Juan puso 8 libros en cada estante. ¿Cuántos libros puso Juan en su habitación?
Problema 4 **IM2** Hay 40 libros en la habitación de Juan. Hay 5 estantes. ¿Cuántos libros por estante?
Problema 5 **IM3** Hay 40 libros en la habitación de Juan. Hay 8 libros en cada estante. ¿Cuántos estantes?

La estructura de cantidades de **IM1** es I×E (=E, por tanto).

En **IM2** se pregunta por lo que en IM1 es la regla de correspondencia (o por la cantidad intensiva), y la estructura de cantidades es E/E, luego se trata de una división partitiva.

En **IM3** se pregunta por lo que en IM1 es la descripción existencial (o por la cantidad extensiva), y la estructura de cantidades es E/I, luego se trata de una división cuotitiva.

La figura siguiente ofrece una visión conjunta de los tres tipos.

Isomorfismo de medidas

	descripción existencial	regla de correspondencia		
	M_1: estantes	$\longrightarrow$	M_2: libros	
IM1	5	x8	?	multiplicación
IM2	5	?	40	partición
IM3	?	x8	40	cuotición

estantes × libros/estante = libros

E × I = E

Vergnaud (1983) incluye también dentro de esta categoría semántica los problemas de regla de tres, que, aunque son problemas de más de una etapa, tienen desde su punto de vista la misma estructura. Las figuras siguientes, hechas al estilo de Vergnaud, ofrecen otra imagen de los problemas de esta categoría y muestran cómo los problemas de regla de tres son, de hecho, el caso más general. Vale la pena observar que en el tipo IM2 –partición– la incógnita es la imagen del 1 por la regla de correspondencia, y que en el tipo IM3 –cuotición– es en el único en que la incógnita está en el espacio de medida origen.

IM1: Multiplicación

$$M_1 \xrightarrow{f} M_2$$

estantes	libros
1	8
5	x

IM2: Partición

$$M_1 \xrightarrow{f} M_2$$

estantes	libros
1	x=f(1)
5	40=f(5)

IM3: Cuotición

$$M_1 \xrightarrow{f} M_2$$

estantes	libros
1	8=f(1)
x	40=f(x)

Regla de tres

$$M_1 \xrightarrow{f} M_2$$

estantes	libros
a	b
c	x

COMPARACIÓN MULTIPLICATIVA

Esta categoría semántica no fue considerada por Vergnaud (1983). Brown (1981) llama *problemas de factor multiplicativo* a estos problemas. En ellos, hay una función escalar que se usa para comparar dos cantidades extensivas del mismo tipo de magnitud. En su enunciado más típico aparecen una proposición que es una descripción existencial –como en los isomorfismos de medidas–, y otra que expresa la regla de asociación para comparar las cantidades (y que desempeña un papel análogo a la regla de correspondencia de los isomorfismos de medidas).

De nuevo hay tres posibilidades dentro de esta categoría según cuál de las cantidades sea la incógnita. El problema 6 y los esquemas de problemas 7 y 8, construidos sobre la misma situación, lo ilustran.

Problema 6 **CM1**	Daniel tiene 12 canicas. María tiene 6 veces tantas canicas como tiene Daniel[6]. ¿Cuántas canicas tiene María?
Problema 7 **CM2**	Daniel tiene 12 canicas. María tiene 72 canicas. ¿Cuántas veces tiene María las canicas que tiene Daniel?
Problema 8 **CM3**	María tiene 72 canicas. María tiene 6 veces tantas canicas como tiene Daniel. ¿Cuántas canicas tiene Daniel?

Como consideramos que los escalares son cantidades intensivas, la estructura de cantidades de estos problemas es la misma que la de los problemas de isomorfismo de medidas. Así, la de **CM1** es I×E.

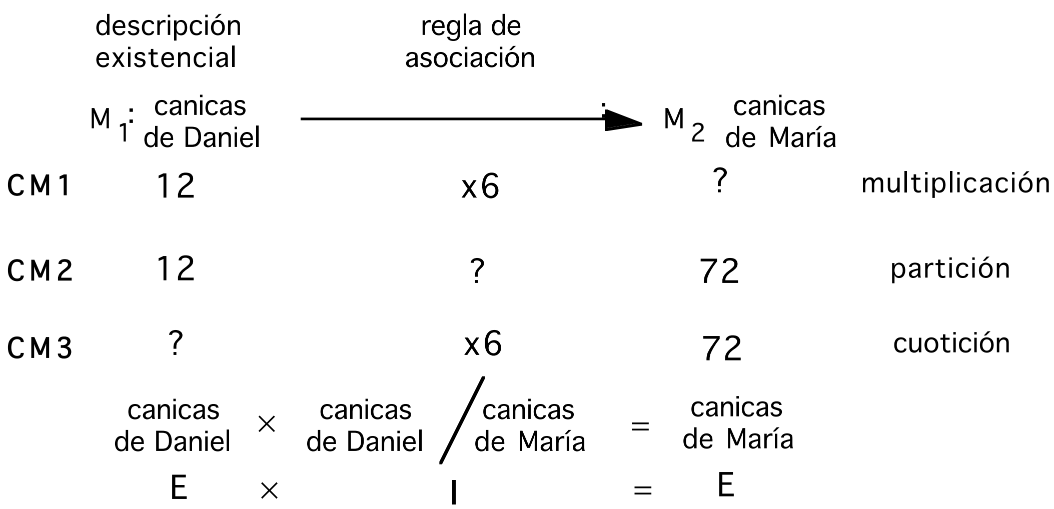
En **CM2** se pregunta por lo que en CM1 es la regla de asociación (o por la cantidad intensiva), y la estructura de cantidades es E/E, luego se trata de una división partitiva.

[6]Hemos construido un enunciado que muestre claramente que la regla de asociación es una comparación, a costa de forzar un poco el castellano. En inglés, que es el idioma en que Nesher ha analizado los problemas aritméticos verbales, esta frase se escribe “Mary has 6 times as many marbles as Dan has.”. La expresión *times as many… as* es de uso frecuente en el lenguaje cotidiano inglés, pero no así la que hemos escrito en castellano, como muestra que no hayamos podido formularla como pregunta en CM2. Tampoco es corriente la expresión equivalente en francés, lo que puede explicar que Vergnaud no haya considerado esta categoría semántica. Valga este comentario –junto con el que hicimos en el capítulo 2 a propósito de la necesidad de considerar los partitivos castellanos para hacer una fenomenología de las fracciones– para indicar que los conceptos matemáticos, si se analizan desde un punto de vista fenomenológico, pueden tener un campo semántico no idéntico en idiomas distintos.

En **CM3** se pregunta por lo que en CM1 es la descripción existencial (o por la cantidad extensiva), y la estructura de cantidades es E/I, luego se trata de una división cuotitiva.

La figura siguiente ofrece una visión conjunta de los tres tipos.

Comparación multiplicativa



La identificación de CM2 con la partición y CM3 con la cuotición está hecha siguiendo el análisis realizado en el caso de los isomorfismos de medidas. Harel, Post y Behr (1988) han indicado, sin embargo, que para los problemas de comparación multiplicativa el asunto es más complicado ya que la regla de asociación puede interpretarse de dos maneras distintas. La complicación se deriva de que según una de las interpretaciones el tipo de división es el que hemos indicado; pero, según la otra, es al contrario.

Así, en los problemas 6, 7 y 8, la frase "María tiene 6 veces tantas canicas como tiene Daniel" puede interpretarse como:

— "para cada canica de Daniel, hay 6 canicas de María".

Con esta interpretación, CM2 es una partición y CM3 es una cuotición, como en los problemas análogos de isomorfismo de medidas.

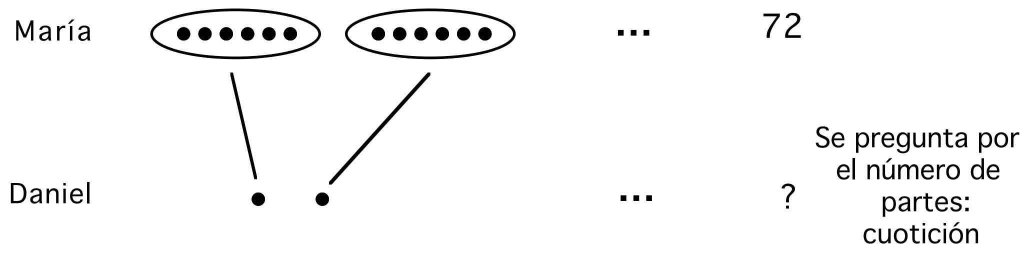
Ahora bien, esa frase puede interpretarse también como:

— "para el conjunto de canicas de Daniel, hay 6 conjuntos iguales de María".

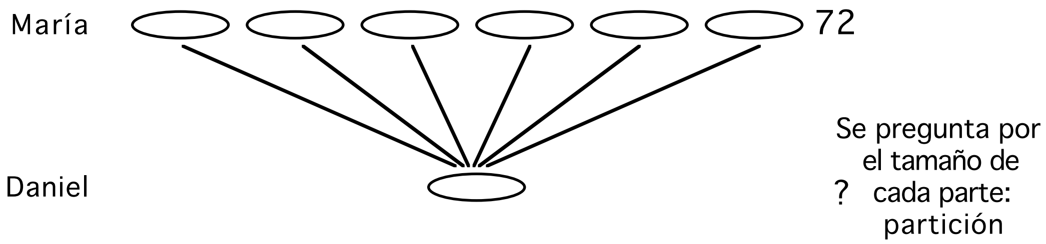
Con esta interpretación, CM2 es una cuotición y CM3 es una partición, al contrario de lo que sucede en el caso anterior.

La figura siguiente, una representación de las dos interpretaciones para el caso del problema 8 (tipo CM3), ilustra el asunto.

Interpretación "para cada canica ... hay 6 ..."



Interpretación "para el conjunto de canicas ... hay 6 conjuntos..."



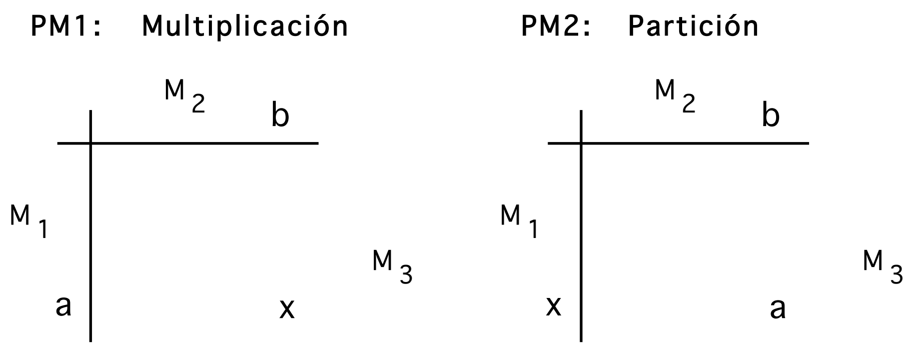
Harel, Post y Behr (1988) indican que, cuando las cantidades son continuas, es más razonable que se produzca la segunda interpretación, y que, cuando las cantidades son discretas, no hay razones para suponer que una interpretación sea más frecuente que la otra.

PRODUCTO DE MEDIDAS.

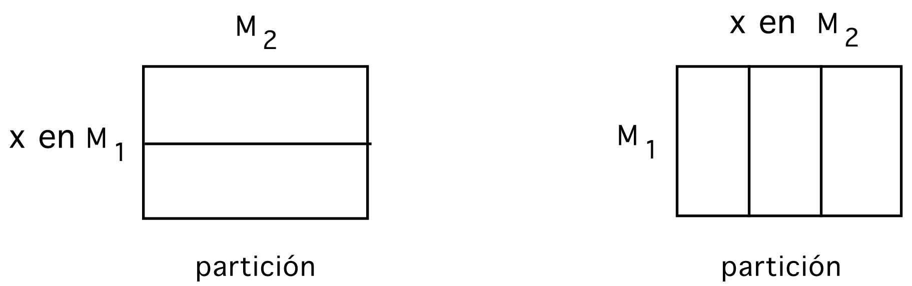
Nesher llama a esta categoría *multiplicación cartesiana,* y en Brown aparecen como problemas que corresponden al modelo de la multiplicación como *producto cartesiano.* En estos problemas hay una composición cartesiana de dos espacios de medida, M_1, M_2, en un tercer espacio de medida, M_3. Los problemas en que aparecen área, volumen, o trabajo y otros conceptos físicos son de esta categoría. También los problemas combinatorios como el problema 2 del capítulo 2, que ya hemos citado en el apartado *Tipos de estructura de cantidades.*

En este caso, la multiplicación es semánticamente conmutativa, por lo que sólo hay dos posibilidades, según la incógnita sea de M_3 o de cualquiera de los otros dos,

M_1, o M_2. La figura siguiente esquematiza los dos tipos y muestra la relación entre ellos.



La estructura de cantidades de PM1 es E×E. La de PM2 es E/E, luego se trata de una división partitiva. El modelo rectangular del área sirve también para tener una representación de cómo, sea la incógnita de M_1 o de M_2, se trata de una división partitiva, por lo que no se puede distinguir un tercer tipo.



CATEGORÍAS SEMÁNTICAS Y PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS DE MÁS DE UNA ETAPA

Ya hemos indicado en el capítulo 3 que no se puede pretender hacer una clasificación de los problemas de más de una etapa desde el punto de vista de su estructura semántica porque el número de categorías estaría expuesto a una explosión combinatoria, y, lo que es más importante, porque hay características de estos problemas que permiten comprender mejor su proceso de resolución.

Sin embargo, hay algunos problemas multiplicativos de más de una etapa que han sido caracterizados semánticamente por Vergnaud (1983) al analizar los problemas que forman parte de la estructura multiplicativa[7].

[7]Vergnaud (1983) no se preocupa por la distinción que nosotros hacemos entre problemas de una etapa y de varias etapas, porque no tiene la vista puesta en las características del proceso de resolución, sino que mira los problemas desde la constitución o la adquisición de un campo conceptual.

Por un lado, como ya hemos visto, incluye los problemas de regla de tres dentro de la categoría semántica *isomorfismo de medidas.* Pero, además, Vergnaud considera una categoría semántica, en la que sólo caben problemas de más de una etapa, que denomina *proporción múltiple.* Se trata de problemas en los que un espacio de medida, M_3, es proporcional a dos espacios de medida, M_1 y M_2, independientes.

No vamos a entrar en el examen de este tipo de problemas. Sólo indicaremos que reúnen características de las categorías *isomorfismo de medidas* y *producto de medidas,* y que, como la multiplicación no es en ellos semánticamente conmutativa, hay tres posibilidades –multiplicación, partición y cuotición. El problema 9 es un modelo.

Problema 9	Una familia de 4 personas quiere estar 13 días en una residencia. El coste por persona y día es 5000 ptas. ¿Cuánto se han de gastar?

Vale la pena observar, finalmente, que los problemas de más de una etapa que Vergnaud ha caracterizado desde el punto de vista de su estructura semántica son problemas que pueden ser resueltos mediante esquemas, como los esquemas de la regla de tres simple o compuesta, y otros esquemas de proporcionalidad.

ALGUNOS ESTUDIOS DE DIFICULTADES

Algo sabemos sobre la dificultad que presentan los problemas multiplicativos en función de su estructura semántica y de su estructura de cantidades, aunque no podamos elaborar de momento un cuadro completo.

En primer lugar hay que recordar que expusimos en el capítulo 2 cómo en el estudio dirigido por Hart sobre la comprensión de las operaciones aritméticas, les resultaba más fácil a los niños identificar la operación correspondiente a un problema verbal cuando se trataba de una división que cuando se trataba de una multiplicación; y que, dentro de los modelos de multiplicación, el producto cartesiano era mucho más difícil que los otros hasta el punto de situarse en un nivel superior.

Vergnaud, por su parte, indica que los problemas de isomorfismo de medidas son más fáciles que los de producto de medidas, lo que concuerda con los datos de Hart sobre el nivel de dificultad del modelo producto cartesiano.

Por otro lado, Bell, Fischbein & Greer (1984) encontraron que, para un grupo de niños de 12-13 años, los problemas de partición son más fáciles que los de cuotición. Como todos los problemas que utilizaron son de isomorfismo de medidas, se deduce que, dentro de los problemas de isomorfismo de medidas, el tipo IM2 es más fácil que el IM3.

Se han señalado otras diferencias en facilidad que no se explican por la categoría semántica, sino por las cantidades, el tipo de números o el contexto.

Por ejemplo, a partir de Vergnaud podemos apuntar que son más fáciles los problemas de isomorfismo de medidas en los que el denominador de la cantidad intensiva es el tiempo. También son más fáciles los problemas de esta categoría semántica en los que la cantidad intensiva es un cociente de magnitudes del mismo tipo.

Bell, Fischbein & Greer (1984), por su parte, estudiaron también –y a la vez– la influencia del contexto y del tipo de números. Arguyen que el contexto influye en el nivel de dificultad en gran medida porque la importancia relativa y la frecuencia con que se encuentran la multiplicación, la partición y la cuotición difiere mucho de unos contextos a otros. Así, por ejemplo, en el contexto de cambio de unidades, el factor de conversión se conoce habitualmente, por lo que sólo se presentan naturalmente situaciones de multiplicación o cuotición; mientras que en el contexto 'velocidad' las tres son igualmente frecuentes e importantes.

El tipo y el tamaño de los números puede hacer difícil que se conciba que la división que se realiza con ellos sea una partición (o una cuotición). Así, no hay ningún problema en ver 24÷6 como la operación correspondiente a una partición, pero hace falta extender la idea intuitiva de partición para que 6÷24 no entre en conflicto con ella. Es difícil concebir 6÷0'5 como una partición, pero no como una cuotición; ahora bien también hay que extender la idea de cuotición para que 5÷7'5 pueda concebirse como tal. Fischbein et al (1985) mantienen que los niños desarrollan modelos implícitos de las operaciones en los que el tipo y el tamaño de los números desempeñan una papel crucial, y que cualquier violación de las características de esos modelos hace que se presenten dificultades. Citamos a continuación las características más importantes de los modelos implícitos de la multiplicación, la partición y la cuotición.

1.— Multiplicación:

— no es conmutativa,

— el operador es un número entero positivo,

— multiplicar hace más grande.

2.— Partición:

— el dividendo es mayor que el divisor,

— el divisor es entero,

— el cociente es menor que el dividendo.

3.— Cuotición:

— el dividendo es mayor que el divisor.

Finalmente, se sabe también de los problemas de isomorfismo de medidas que el tipo de errores que cometen los alumnos es distinto para IM2 que para IM3: en el caso de IM2, el error más frecuente es hacer una división pero con los números en orden inverso; y, en el caso de IM3, efectuar una multiplicación en vez de una división (Bell & Onslow,1988).

Estos resultados y observaciones no son suficientes para organizar con claridad la instrucción por niveles, pero proporcionan pistas al profesor sobre alguna de las cosas que puede esperar que sus alumnos hagan y le pueden servir de ayuda para entender por qué hacen lo que hacen.

A PROPÓSITO DE ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN

Para mantener una organización de este capítulo análoga a la del que hemos dedicado a los problemas aditivos deberíamos tratar acerca de estrategias de resolución. Ahora bien, carecemos de datos sobre cuáles son las estrategias que realmente utilizan los alumnos cuando resuelven problemas multiplicativos, cómo están relacionadas con las categorías semánticas o las estructuras de cantidades, y cómo evolucionan a lo largo de la escolaridad.

El lector puede consultar las estrategias utilizadas por alumnos franceses de 11-15 años resolviendo problemas de regla de tres en Vergnaud (1983), pero como esos problemas son de más de una operación no las trataremos aquí[8]. También en Vergnaud(1983) se puede encontrar algunas referencias a estrategias que los alumnos suelen utilizar en los problemas de isomorfismo de medidas, pero sin datos numéricos.

Para los problemas del tipo IM3 –isomorfismo de medidas, cuotición– sabemos algo gracias a Teule-Sensacq & Vinrich (1982), que observaron a alumnos de 7-9 años resolviendo varios problemas de esa categoría semántica[9]. Las estrategias que utilizaron esos alumnos fueron, además de “Hacer cualquier cosa”, de tres tipos: aditivas, substractivas y multiplicativas. Las aditivas son las siguientes:

— Contar uno a uno.

— Sumar reiteradamente el divisor.

---

[8]Sin embargo, no podemos resistirnos a citar el hecho de que sólo el 1% utilizaron el esquema de regla de tres. En Hart (1981) se da un porcentaje similar para los alumnos ingleses. Cualquier profesor español sabe que los alumnos españoles darían resultados muy distintos.

[9]Además, las cantidades eran discretas, la división que había que realizar era euclídea, y en ningún caso era exacta.

— Sumar reiteradamente el divisor a partir de un múltiplo de éste.

Las substractivas se corresponden con las aditivas:

— Restar reiteradamente el divisor.

— Restar reiteradamente el divisor, a partir del resultado de restar un múltiplo de éste.

Finalmente, las multiplicativas son versiones más o menos sofisticadas de la estrategia de “búsqueda del factor que falta” adaptadas al caso de la división con resto en que hay que buscar el factor que más aproxime por defecto al resultado. Así, los alumnos hacen tanteos sin tener en cuenta el resultado o teniéndolo en cuenta, verificando que el resultado está entre dos multiplicaciones sucesivas o teniendo en cuenta el valor de la diferencia.