5.

Problemas aritméticos de varias operaciones combinadas (de más de una etapa)

—Ya le tengo explicado que todo aquello que se sale de lo vulgar no resulta un obstáculo, sino que es más bien una guía. El gran factor cuando se trata de resolver un problema de esta clase, es la capacidad de razonar hacia atrás. Esta es una cualidad muy útil y muy fácil, pero la gente no se ejercita mucho en ella. En las tareas corrientes de la vida cotidiana resulta de mayor utilidad el razonar hacia adelante, y por eso se la desatiende. Por cada persona que sabe analizar, hay cincuenta que saben razonar por síntesis.

—Confieso que no le comprendo —le dije.

—No esperaba que me comprendiese. Veamos si puedo plantearlo de manera más clara. Son muchas las personas que, si usted les describe una serie de hechos, le anunciarán cuál va a ser el resultado. Son capaces de coordinar en su cerebro los hechos y deducir que han de tener una consecuencia determinada. Sin embargo, son pocas las personas que, diciéndoles usted el resultado, son capaces de extraer de lo más hondo de su propia conciencia los pasos que condujeron a ese resultado. A esta facultad me refiero cuando hablo de razonar hacia atrás; es decir, analíticamente.

A. Conan Doyle, *Estudio en escarlata*

INTRODUCCIÓN

En el capítulo 3 indicamos que, con el objeto de estudiar los problemas aritméticos, conviene distinguir entre los problemas de una etapa y los de más de una etapa. En los dos capítulos anteriores que se han dedicado al estudio de los problemas de una etapa, se ha podido ver que el proceso de resolución de esos problemas dependía fundamentalmente de la traducción del enunciado verbal a la expresión aritmética, y que esta traducción se realiza en función de las interpretaciones de las operaciones aritméticas y los significados evocados por el texto del problema. Sin embargo en los problemas que van a ser objeto de estudio en este capítulo, el proceso de resolución no puede reducirse, ni en lo fundamental ni en lo accesorio, a traducir –entendiendo esto como mirar en diccionario, adecuar significado a contexto y proseguir– al menos por dos motivos obvios: el primero, porque la traducción que hay que realizar aquí no es tan simple –la correspondiente a una única operación aritmética–; el segundo, porque hay que realizar algún trabajo previo sobre el texto del enunciado, antes de proceder a la traducción propiamente dicha.

La lectura y la resolución de alguno de estos problemas puede ayudarnos a entender mejor algo de lo dicho.

Problema 1	Un tren lleva 5 coches de pasajeros. En el primero van 32 personas, en el segundo van 13 viajeros más que en el primero, en el tercero van tantos viajeros como en el primero y en el segundo, el cuarto y quinto coche llevan cada uno 43 viajeros. ¿Cuántos viajeros lleva el tren?
Problema 2	En un vagón caben 80 pasajeros. ¿Cuántos pasajeros podrá llevar un tren de 6 vagones? Si el tren lleva 4 vagones completos y en los otros dos viajan 56 pasajeros en uno y 73 en el otro, ¿cuántos viajeros lleva el tren?
Problema 3	Un niño ha comprado 4 chicles de 3 ptas. cada uno, 4 piruletas de 5 ptas. cada una y 4 bolsas de pipas de 10 ptas. cada una. ¿Cuánto dinero ha gastado en total?
Problema 4	Un comerciante ha comprado 385 botellas de aceite a 154 ptas. cada una. Después las vende a 179 ptas. cada una. ¿Cuánto ganará en la venta de todas las botellas?
Problema 5	En una tienda hay 147 cajas de pinturas. En cada caja hay 10 estuches de pinturas. Si en cada estuche hay 8 pinturas, ¿cuántas pinturas hay en la tienda?

Puede verse que la estructura de estos problemas es diferente de la de los de una etapa. En primer lugar, el número de *datos* es distinto: en un problema de una etapa hay siempre dos datos[1], y en éstos hay más de dos. En segundo lugar, las relaciones entre los datos y la incógnita son más complejas, aunque sólo sea por el hecho de que hay más datos. Estos dos hechos hacen que la expresión aritmética que indica los cálculos que hay que realizar para obtener la respuesta a la pregunta del problema no sea una expresión aritmética simple.

Por otro lado, desde el punto de vista de las decisiones que ha de tomar el resolutor en el curso del proceso de resolución también podemos encontrar diferencias entre estos problemas y los de una etapa. En los de una etapa, hay una sola decisión que tomar, que consiste en elegir la operación que hay que realizar; no cabe dudar entre qué cantidades hay que realizarla: entre los datos del problema. En los problemas 1 a 5, por el contrario, hay más decisiones que tomar, decisiones que son de tres tipos: qué operaciones, entre qué cantidades y en qué orden.

[1]Al decir que hay *siempre dos* datos, se dejan de lado los posibles datos no pertinentes, redundantes, etc., que puedan aparecer en el texto del problema.

El enunciado del problema 2 toma buena nota de alguna de las dificultades asociadas con la necesidad de tomar todas estas decisiones, al presentar el texto del problema descompuesto en dos partes. De hecho, este problema escolar es una secuencia de problemas que consta de dos problemas, el primero de los cuales es un subproblema del otro. En el primero, el proceso de traducción simple basta para obtener la solución. Y en el otro, la traducción viene facilitada por la que ya se ha tenido que realizar antes, que sirve para aclarar el contenido de las relaciones entre los datos y la incógnita, dando pistas sobre el orden en que deben realizarse las operaciones.

Una vía para empezar a comprender lo que tiene de específico el proceso de resolución de estos problemas es considerar un argumento resolutorio que podría –y suele– utilizarse para atacar el problema 1:

> — Para determinar los viajeros que lleva el tren (esto es, la incógnita del problema), hemos de determinar los viajeros que lleva cada uno de los vagones.
>
> — Sabemos cuántos viajeros llevan los vagones 1º, 4º y 5º, porque son datos del problema. No sabemos los pasajeros que llevan los vagones 2º y 3º, luego hemos de determinar los viajeros que llevan estos vagones.
>
> — Para determinar los viajeros del segundo vagón, hemos de saber los que lleva el primer vagón (lo sabemos) y añadir 13 (una condición del problema).
>
> — Para determinar los viajeros del tercer vagón, hemos de saber los que llevan el primer vagón y el segundo (lo sabemos)

Así, en el transcurso del argumento, los viajeros de cada vagón se han convertido en nuevas incógnitas que no figuraban como tales en el texto del problema, y que es preciso determinar (incógnitas auxiliares). Algunas incógnitas auxiliares (vagones 1º, 4º y 5º) se ha visto que eran datos del problema. De las que no eran datos (vagones 2º y 3º) se ha buscado de nuevo a partir de dónde pueden determinarse, hasta llegar a los datos. En cada paso, se han examinado las relaciones que permiten, en las condiciones del problema, conectar incógnita con incógnitas auxiliares y éstas con los datos, y determinar, por tanto, éstas y aquélla.

Una vez hecho esto, ya se sabe cómo hallar la solución del problema, esto es, el problema ya está resuelto a falta únicamente de efectuar los cálculos indicados por el análisis. Para efectuar estos cálculos, basta con recorrer el camino del análisis en sentido inverso: partiendo de los datos, caminar a través de las incógnitas auxiliares, hasta llegar a la incógnita del problema.

Como puede verse, en alguno de los pasos del análisis se resuelven de hecho problemas de una etapa. Así, "para determinar los viajeros del segundo vagón hemos de saber los que lleva el primer vagón y añadir 13 (una condición del problema)", frase que aparece en el argumento resolutorio, corresponde a un fragmento del texto del problema ("En el primero van 32 personas, en el segundo van 13 viajeros más"). La tarea del análisis consiste, entre otras cosas, en construir enunciados de problemas de una etapa mediante la introducción de nuevas incógnitas que no están presentes explícitamente en el texto del problema: las incógnitas auxiliares; aquí en particular, al considerar el número de viajeros del segundo vagón como una cantidad que hay que determinar, se construye el problema de una etapa "En el primero (vagón) van 32 personas, en el segundo van 13 viajeros más, ¿cuántos viajeros van en el segundo vagón?". Está claro que para la resolución de este problema de una etapa es pertinente todo lo que se ha expuesto en el capítulo 3, pero aquí no vamos a volver sobre ello: lo que va a ser objeto de estudio en este capítulo es el conjunto de elementos nuevos que aparecen en el proceso de resolución de un problema de más de una etapa y que no están presentes en los de una etapa. El examen de la resolución del problema que se ha hecho a partir del argumento resolutorio anterior muestra algunos de ellos: qué datos se combinan (los que permiten determinar incógnitas auxiliares útiles), y cómo se produce el orden en que han de realizarse las operaciones. En los párrafos siguientes entraremos en los detalles.

EL MÉTODO DE ANÁLISIS-SÍNTESIS

ANTECEDENTES HISTÓRICOS

El argumento resolutorio que hemos esbozado en el párrafo anterior tiene una larga tradición en las matemáticas, ya que fue estudiado y sistematizado por primera vez en la Grecia clásica.

El camino que lleva desde la incógnita a los datos, estableciendo progresivamente sus relaciones mutuas, fue llamado por los griegos *Análisis*, y proporciona, como hemos visto, el plan de solución del problema.

El camino contrario, que va desde los datos hasta la incógnita, fue llamado *Síntesis*. Por tanto, cuando el análisis ha proporcionado el plan de solución de un problema, la síntesis ejecuta el plan, obteniendo la solución del problema.

En el libro XIII de los Elemento de Euclides se encuentran definidos el *Análisis* y la *Síntesis* en los términos siguientes:

> Análisis es la suposición de lo que se busca como dado (y el paso) a través de sus consecuencias a algo admitido como verdadero.
>
> Síntesis es la suposición de lo ya admitido (y el paso) a través de sus consecuencias para obtener lo que se busca.

Pappus (siglo IV) explica más en detalle en qué consiste el método de análisis y síntesis, distinguiendo además entre dos tipos de análisis, que él llama teorético y problemático, en el siguiente texto:

> El llamado ἀναλυόμενος ("Tesoro del Análisis") es, para decirlo brevemente, un cuerpo especial de doctrina habilitado para uso de aquéllos que, tras haber terminado los Elementos ordinarios, están deseosos de adquirir la facultad de resolver problemas que se les puedan plantear y que implican (la construcción de) líneas; dicho cuerpo de doctrina es útil sólo por esto. Constituye la obra de tres hombres, Euclides, el autor de los Elementos, Apolonio de Perga y Aristeo el viejo, y procede por vía de análisis y síntesis.
>
> El análisis, pues, considera aquello que se busca como si fuera algo aceptado y pasa desde ello, a través de sus consecuencias sucesivas, a algo que es aceptado como resultado de la síntesis: pues en el análisis damos por supuesto aquello que se busca como si (ya) estuviera dado (γεγόνος), e inquirimos qué es aquello de lo cual resulta esto y a su vez cuál es la causa antecedente de lo posterior, y así sucesivamente, hasta que, volviendo así sobre nuestros pasos, llegamos a algo ya conocido o que pertenezca a la clase de los primeros principios, y a un tal método lo llamamos análisis por ser una solución hacia atrás (ἀνάπολιν λύσις)
>
> Pero en la síntesis, invirtiendo el proceso, tomamos como ya dado aquello a lo que llegamos en último término en el análisis y, alineando en su orden natural como consecuencias lo que antes eran antecedentes, y conectándolas unas con otras sucesivamente, llegamos finalmente a la construcción de lo que se buscaba; y a esto llamamos síntesis.
>
> Ahora bien, el análisis es de dos tipos, uno va dirigido a la búsqueda de la verdad y se llama *teórico*, el otro se dirige a encontrar aquello que se nos ha dicho que encontremos y se llama *problemático*. 1) En el tipo *teórico* de análisis, asumimos lo que se busca como si fuera algo existente y verdadero, tras lo cual pasamos a través de sus consecuencias sucesivas, como si también ellas fueran verdaderas y estuvieran establecidas en virtud de nuestra hipótesis, a algo aceptado; entonces *a)*, si ese algo aceptado es verdadero, aquello que se busca será también verdadero y la prueba corresponderá en el orden inverso al análisis, pero *b)* si llegamos a algo reconocidamente falso, aquello que se busca será también falso. 2) En el tipo *problemático* asumimos aquello que es propuesto como si fuera algo conocido, tras lo cual pasamos a través de sus consecuencias sucesivas, considerándolas verdaderas, hasta algo aceptado: luego, si *a)* lo que es aceptado es posible y obtenible, es decir, lo que los matemáticos llaman *dado*, lo que se propuso originalmente será también posible, y la prueba corresponderá de nuevo en orden inverso al análisis, pero si *b)* llegamos a algo reconocidamente imposible, el problema será también imposible. (Lakatos, 1981, pgs. 107-108)

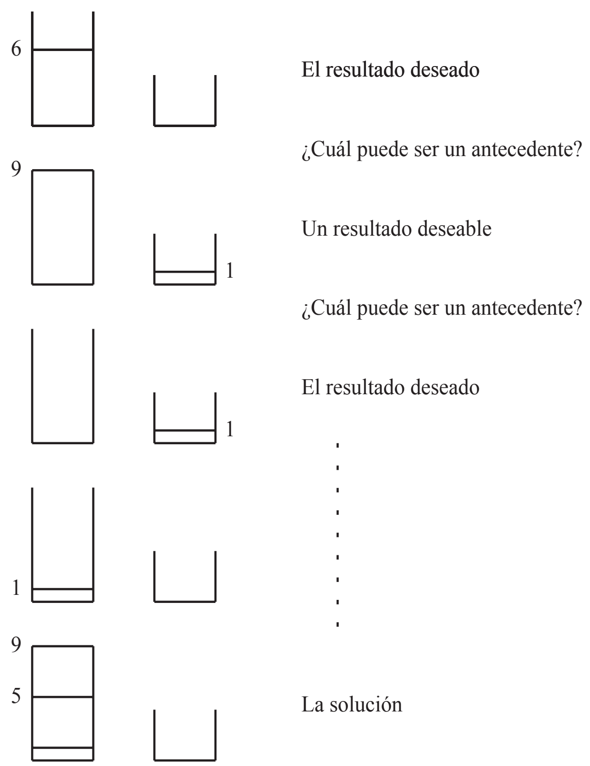
Este texto de Pappus, y lo que en él se dice, puede entenderse mejor si enunciamos una regla práctica, en el espíritu del método, con la cual podamos abordar problemas. Tal regla rezaría así:

> REGLA DEL ANALISIS-SINTESIS
>
> Si x es la incógnita del problema, supóngala conocida.
>
> Indague e investigue cuáles son aquellos antecedentes de los cuales x resulta y que permiten determinar x.

> Considere cada uno de estos antecedentes como una nueva incógnita (auxiliar).
>
> Indague e investigue de nuevo, iterando el proceso, hasta que
>
> 1) o bien todos los antecedentes sean datos del problema,
>
> 2) o bien alguno de los antecedentes entre en contradicción con los datos del problema.
>
> En el caso 1), volviendo sobre sus pasos y trabajando hacia atrás, esto es, desde los datos hasta la incógnita, podrá determinar esta última.
>
> En el caso 2), abandone el problema: su solución es imposible.

Polya (1957) presentó un ejemplo magnífico para ilustrar el trabajo hacia atrás o la búsqueda de antecedentes que supone el análisis, mediante un problema que no es aritmético, sino un divertimento matemático clásico. El problema es el siguiente:

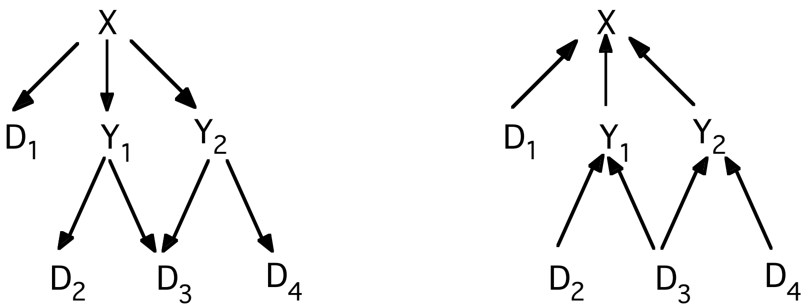
Problema 6	¿Cómo haría Vd. para traer de un río 6 litros de agua si no tiene a su disposición para medir el agua más que dos recipientes: uno de 4 litros y otro de 9?



La regla del análisis-síntesis, que hemos enunciado, está hecha parafraseando la enunciada por Lakatos (1981) para el análisis que Pappus llamó *teórico*, y adaptándola al análisis *problemático*, teniendo presente el campo de problemas objeto de este capítulo, esto es, los problemas aritméticos de varias operaciones combinadas. La regla enunciada por Lakatos dice así:

> Saca conclusiones de tu conjetura, una tras otra, suponiendo que la conjetura es verdadera. Si llegas a una conclusión falsa, entonces tu conjetura era falsa. Si llegas a una conclusión indudablemente verdadera, tu conjetura quizá haya sido verdadera. En este caso, invierte el proceso, trabaja hacia atrás, e intenta deducir tu conjetura original por el camino inverso, desde la verdad indudable hasta la conjetura dudosa. Si tienes éxito, habrás probado tu conjetura. (Lakatos, 1981, pgs. 106-107)

El funcionamiento de la regla que hemos enunciado puede ilustrarse mediante las figuras 1 y 2, donde la incógnita es x y los datos, d_1, d_2, d_3 y d_4. La figura 1 representa el análisis y la figura 2, la síntesis. Con y_1 e y_2, se representan dos incógnitas auxiliares, que se supone que han aparecido en el curso del análisis.



figuras 1 y 2

LA REGLA DE ANÁLISIS-SÍNTESIS EN ACCIÓN

La regla enunciada por Lakatos corresponde al análisis *teórico* de Pappus, que es el pertinente para los problemas que Polya llama *de probar*. La regla que hemos enunciado nosotros corresponde al análisis *problemático* de Pappus y es, por tanto, la pertinente para los problemas que Polya llama *de encontrar*. La regla no es una herramienta heurística, ni una técnica específica, sino un método general para resolver esa clase de problemas. Los reflejos en la heurística del método de análisis-síntesis quedan recogidos por las sugerencias heurísticas "trabaja hacia atrás", "da el problema por resuelto", "mira qué puedes obtener a partir de los datos"[2]... Sin embargo, tales sugerencias son sólo ideas para comenzar a atacar el problema y no suponen, cuando

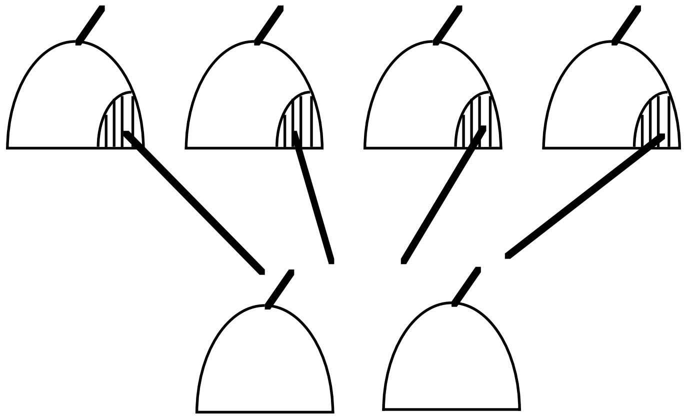
[2]Cuando se quiere hacer simultáneamente el trabajo hacia adelante y hacia atrás se utiliza la técnica de "análisis medios-fines". Ésta es una de las técnicas que se consideran heurísticas en el mundo de la inteligencia artificial (cf., p.e., Newell & Simon, 1972). En el mundo de la economía, la técnica equivalente es la conocida con el nombre de "presupuesto cero".

se dejan caer, el que se tenga un método para resolver el problema, o un plan para su solución. Se utilizan normalmente en fases de exploración o comprensión, o en momentos en que se está atascado y no se sabe por dónde seguir. La regla enunciada, por el contrario, es un método en el sentido de que dado un problema aritmético, siguiéndola paso a paso, se obtiene la solución del problema, con el único recurso adicional a los conocimientos aritméticos pertinentes.

Resumiendo, la regla de análisis-síntesis proporciona un método de validez universal para cualquier problema aritmético de varias operaciones combinadas. No obstante, veremos que hay algunos problemas en los que la regla es de difícil aplicación y que se tratan más adecuadamente mediante procedimientos algebraicos – aunque podrían resolverse de hecho por la combinación de operaciones aritméticas sin necesidad de trasladar su enunciado a una o más ecuaciones. Más adelante veremos también cómo, aunque se tenga el plan que proporciona la regla, pueden surgir dificultades en su ejecución derivadas de la elección de las incógnitas auxiliares, y que, en ese caso, es pertinente el recurso a la heurística.

En particular, puede verse que la elección de las incógnitas auxiliares y el análisis de las relaciones entre incógnita, incógnitas auxiliares y datos es mucho más fácil en los problemas 8 y 9, versiones del problema 7 con datos más sencillos o en un caso límite, y quizá todavía más fácil en el caso del problema 10 si se dispone de la ayuda visual proporcionada por el dibujo adjunto.

Problema 7 Unos granjeros almacenaron heno para 57 días, pero, como el heno era de mejor calidad de lo que pensaban, ahorraron 113 kg por día, con lo que tuvieron heno para 73 días. ¿Cuántos kilos de heno almacenaron?
Problema 8 Unos granjeros almacenaron heno para 55 días, pero, como el heno era de mejor calidad de lo que pensaban, ahorraron 240 kg por día, con lo que tuvieron heno para 67 días. ¿Cuántos kilos de heno almacenaron?
Problema 9 Unos granjeros almacenaron heno para 1 día, pero, como el heno era de mejor calidad de lo que pensaban, ahorraron 240 kg, con lo que tuvieron heno para 2 días. ¿Cuántos kilos de heno almacenaron?
Problema 10 Unos granjeros almacenaron heno para 4 días, pero, como el heno era de mejor calidad de lo que pensaban, ahorraron 100 kg por día, con lo que tuvieron heno para 6 días. ¿Cuántos kilos de heno almacenaron?



Veamos ahora la regla en acción con un problema aritmético, tomado de Kalmykova(1975):

Problema 11 Un aeroplano recorrió 1940 km el primer día, el segundo recorrió 340 km más que el primero y el tercero 890 km menos que entre los dos anteriores. ¿Cuántos km recorrió el aeroplano en total?

ANÁLISIS.

1.— La pregunta es: ¿Cuántos km recorrió en total?
2.— Para determinar los kilómetros recorridos en total necesitamos conocer los kilómetros recorridos cada uno de los días.
3.— Conocemos los kilómetros recorridos el primer día (datos del problema), pero desconocemos los recorridos en el segundo y tercer días (incógnitas auxiliares).
4.— Para conocer los kilómetros recorridos el segundo día disponemos de los kilómetros recorridos el primer día y los kilómetros recorridos de más (datos).
5.— Para conocer los kilómetros recorridos el tercer día necesitamos conocer los kilómetros recorridos los días primero (datos) y segundo (analizado en 4) y los kilómetros recorridos de menos (datos).
6.— Como todo lo que es necesario conocer según 2 ha quedado reducido a datos del problema, el análisis ha concluido.

SÍNTESIS.

1.— Conozco lo recorrido el primer día y cuántos más el segundo, luego conozco lo recorrido el segundo: basta sumar 1940+340=2280.
2.— Conozco lo recorrido el primer día, lo recorrido el segundo día y cuánto menos el tercero, luego conozco lo recorrido el el tercero: basta sumar y restar 2280+1940−890=3330.

3.— Conozco lo recorrido los días primero, segundo y tercero, luego conozco lo recorrido en total: basta sumar 1940+2280+3330=7550.
4.— La incógnita está determinada, luego la síntesis ha concluido.

Aunque no sea el objeto de este libro, conviene observar cómo funciona la regla enunciada para los problemas *de probar*. Zubieta (1975) proporciona un buen ejemplo en el que puede verse que el razonamiento regresivo que supone el análisis es más dificultoso en el análisis teórico, pues, en éste, nos es desconocida a priori la verdad indudable o el teorema establecido al que nos veremos conducidos en nuestra búsqueda de antecedentes, mientras que en el análisis problemático los datos nos sirven de guía.

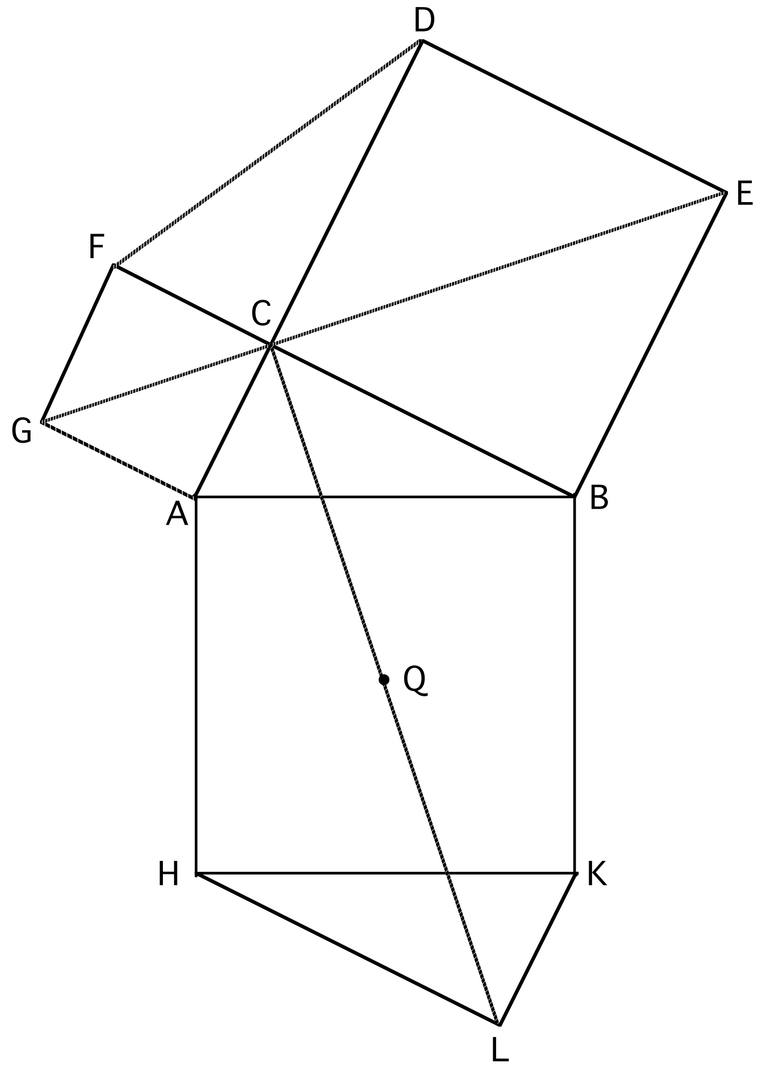


figura 3

Estudiemos la demostración del teorema de Pitágoras atribuida a Leonardo de Vinci, figura 3, donde el triángulo rectángulo dado es ABC.

Análisis. Suponer demostrado el teorema: por hipótesis, el cuadrado de la hipotenusa (AHKB) es igual a la suma (CBED+ACFG) de los cuadrados de los catetos. Por tanto, el hexágono ABEDFG (parte superior de la figura) tiene igual área que el hexágono AHLKBC; porque el primero se compone de la suma de los cuadrados de los catetos, más dos triángulos iguales al dado; y el segundo se compone del cuadrado de la hipotenusa, más dos triángulos iguales al dado.

Síntesis. Partiendo ahora de principios elementales, podemos probar que ambos hexágonos son iguales o tienen la misma área. Porque la recta GCE es un eje de simetría del hexágono superior, que lo divide en dos trapezoides simétricos (por tanto, iguales) respecto de dicha recta; en tanto que el punto Q (centro del cuadrado AHKB) es el centro de simetría del hexágono inferior; por lo que la recta CQL divide a este hexágono en dos trapezoides simétricos (por tanto, iguales) respecto del centro Q. Ahora bien, un giro de 90° en torno del punto A, hará que el trapezoide AHLQC (mitad del hexágono inferior) venga a coincidir con el trapezoide ABECG (mitad del hexágono superior), lo que prueba que ambos trapezoides son iguales y que los hexágonos considerados tienen igual área.

Si del hexágono superior ABEDFG suprimimos los dos triángulos iguales ABC y CDF, nos quedan los cuadrados de los catetos.

Si del hexágono inferior AHLKBC suprimimos los dos triángulos iguales ABC y HLK, nos queda el cuadrado de la hipotenusa.

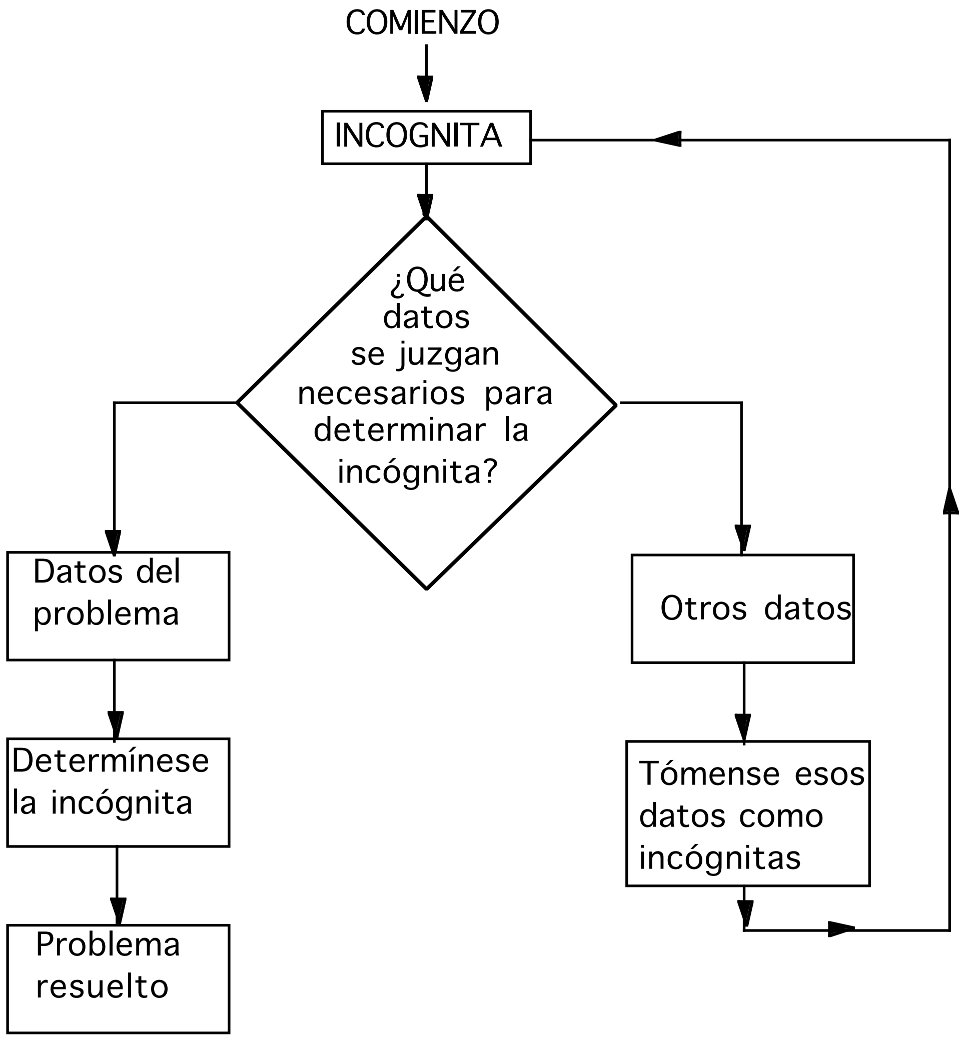
De donde inferimos (puesto que ambos hexágonos son iguales y de ambos suprimimos triángulos iguales) que el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

(Zubieta, 1975, pgs. 65-66)

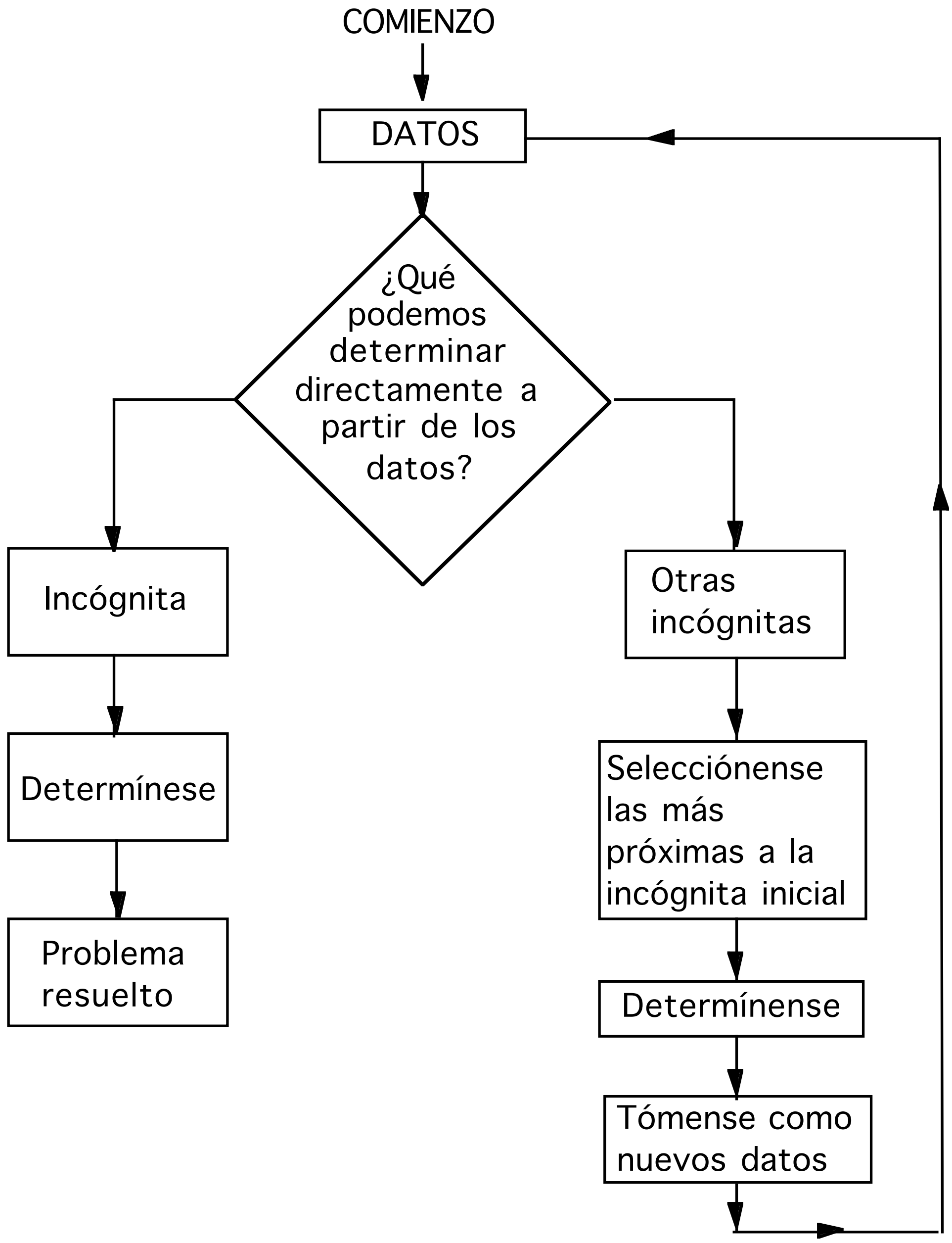
EL MÉTODO COMO ALGORITMO

La descripción del método de análisis-síntesis y los ejemplos en los que se ha presentado en funcionamiento muestran claramente cómo el método tiene caracter algorítmico: es una regla que se ejecuta paso a paso, que contiene decisiones que hay que tomar y acciones que hay que ejecutar, y el conjunto de decisiones y acciones se reitera hasta la obtención del resultado. Esto permite representar el análisis y la síntesis mediante sendos diagramas de flujo, que organizan la secuencia de acciones y decisiones.

ANALISIS


COMIENZO
INCOGNITA
¿Qué datos se juzgan necesarios para determinar la incógnita?
Datos del problema
Determínese la incógnita
Problema resuelto
Otros datos
Tómense esos datos como incógnitas

SINTESIS


COMIENZO
DATOS
¿Qué podemos determinar directamente a partir de los datos?
Incógnita
Determínese
Problema resuelto
Otras incógnitas
Selecciónense las más próximas a la incógnita inicial
Determínense
Tómense como nuevos datos

Es necesario hacer algunas observaciones sobre los diagramas que representan el análisis y la síntesis: una, que el diagrama tiene carácter de esquema, y, otra que muestra con claridad el lugar del proceso de resolución en que el resolutor recurre a los conocimientos que posee y que son pertinentes para la comprensión de las relaciones que aparecen en el problema.

En primer lugar, en el diagrama del análisis aparece un primer punto de decisión en el que hay que preguntarse “qué datos se juzgan necesarios para determinar la incógnita”: en el diagrama se presentan dos caminos alternativos por los que hay que circular; ahora bien, en la práctica el asunto no es tan simple. Por ejemplo en el análisis que hemos presentado del problema 7 puede verse que hay momentos en que es preciso circular por los dos caminos; así, en el punto 2 de dicho análisis, al contestar a la pregunta “qué datos se juzgan necesarios para determinar la incógnita” se encuentran tres datos como antecedentes; dos de ellos son datos que no están presentes en el enunciado del problema y el otro es un dato del problema, con lo que por un lado hay que circular por el lado izquierdo del diagrama –el lado de lo conocido– y, por el otro, por el derecho –el lado de lo desconocido. Como se muestra en el diagrama, el proceso se reitera hasta que se acabe circulando sólo por el lado de lo conocido.

Por otro lado, el resolutor utiliza sus conocimientos sobre la naturaleza de las relaciones que aparecen en el problema para decidir “qué datos juzga necesarios para determinar la incógnita”. Así por ejemplo, en el problema 7, como se pregunta por los kilómetros totales recorridos, y en el problema se habla de los días durante los que vuela el aeroplano, el resolutor evoca sus conocimientos pertinentes y decide que los totales se pueden obtener sumando los tres de cada día. Posteriormente, examina si esas tres cosas necesarias son datos del problema o no, para determinar por dónde tiene que circular en el diagrama. Por tanto, en este momento inicial, y al pasar de nuevo por este punto de decisión en las iteraciones sucesivas, el resolutor realiza la traducción que se ha descrito en los capítulos anteriores, y ahí por tanto intervienen todas los procesos cognitivos descritos en esos capítulos.

LA ESTRUCTURA DE LOS PROBLEMAS ARITMÉTICOS DE VARIAS OPERACIONES COMBINADAS

CONSTRUCCIÓN DE UN DIAGRAMA DE LA ESTRUCTURA DEL PROBLEMA

El diagrama de flujo del análisis representa el conjunto de las acciones que hay que realizar y de las decisiones que hay que tomar en el proceso de resolución de un problema de varias operaciones combinadas. Ahora bien, por su carácter general, no presenta de forma explícita qué operaciones hay que realizar, entre qué datos y en qué orden. Sin embargo, es posible elaborar un diagrama que recoja estos tres aspectos esenciales del proceso de resolución de estos problemas, a partir del método de análisis-síntesis, y verlo como una representación de la estructura del problema. A este tipo de diagrama se dedica este párrafo.

Consideremos el problema 12.

Problema 12 Juan compra 3 lápices a 15 ptas. cada uno. Da al tendero 50 ptas. ¿Cuánto le devuelven?

El análisis de este problema establece que

1) la cantidad que hay que devolver se puede determinar en función de la cantidad entregada y el coste de los lápices; y

2) el coste se puede determinar en función del precio de cada lápiz y la cantidad de lápices comprados.

Estas dos relaciones

1) ‘cantidad devuelta’ = ‘cantidad entregada’ - ‘coste’

2) ‘coste’ = ‘precio unitario’ - ‘número de unidades’

pueden representarse por

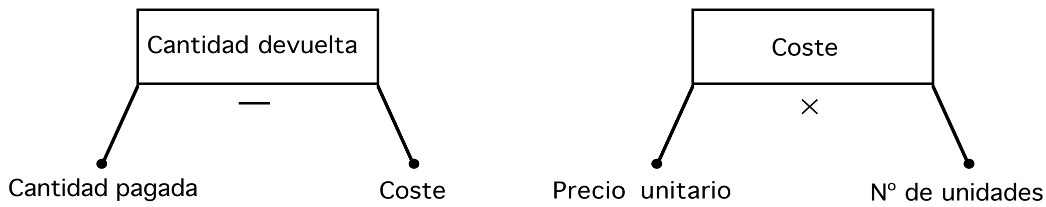


figura 3

El coste es la incógnita auxiliar que el análisis dice que debe determinarse para obtener la cantidad que hay que devolver. Luego la cadena de relaciones construida al iterar el análisis puede representarse por

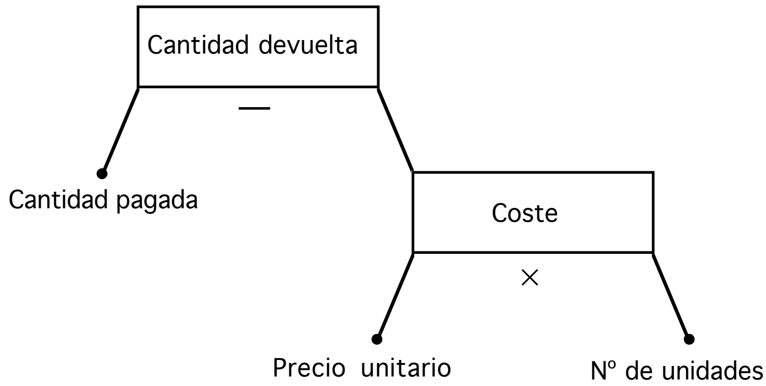


figura 4

Esta representación puede esquematizarse aún más con el fin de resaltar, como lo hace el análisis, incógnitas y datos, empleando un signo de interrogación para las incógnitas y un punto para los datos. El esquema anterior queda entonces así, introduciendo los datos concretos del problema:

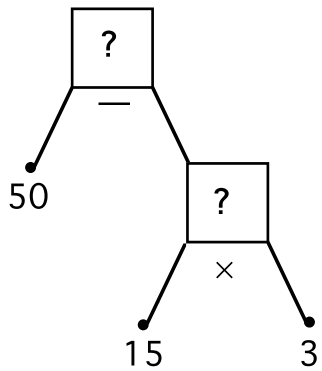


figura 5

La síntesis –que da la respuesta a la pregunta del problema ejecutando el plan que elabora el análisis– se reduce a efectuar los cálculos que aparecen en el diagrama, en el orden que el propio diagrama muestra.

EL DIAGRAMA COMO TRADUCTOR

Consideremos el problema 13 y el diagrama de la figura 6:

Problema 13	En un taller de confección disponen de 4 piezas de tela de 50 m cada una. Con ellas van a confeccionar 20 trajes que necesitan 3 m de tela cada uno. Con el resto de la tela piensan hacer abrigos que necesitan 4 m cada uno. ¿Cuántos abrigos pueden hacerse?

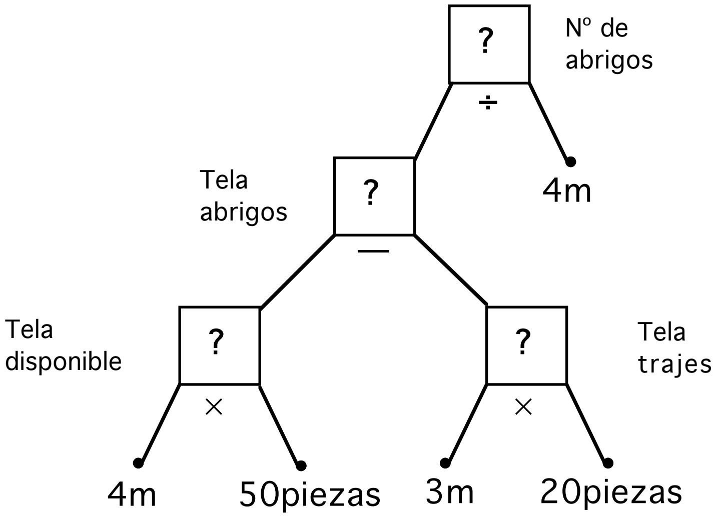


figura 6

El diagrama correspondiente al análisis del problema muestra con precisión la estructura de la cadena deductiva que conecta datos con incógnita, ya que aparecen en él:

1.— Las etapas necesarias para ir desde la incógnita a los datos. (En este caso tres).

2.— El número de incógnitas auxiliares. (Que se corresponde con el número de veces que se recorre el diagrama de flujo del análisis.)

3.— Las conexiones entre datos, incógnitas auxiliares e incógnita del problema.

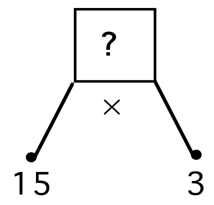
4.— Las operaciones concretas que es preciso realizar para obtener, a partir de los datos, las incógnitas auxiliares y la incógnita del problema.

Esto es, el diagrama es un instrumento que permite traducir el enunciado verbal de un problema aritmético de varias operaciones combinadas a la expresión aritmética que lo resuelve, al indicar con toda precisión los tres elementos esenciales del proceso de resolución: qué operaciones hay que realizar, entre qué datos y en qué orden.

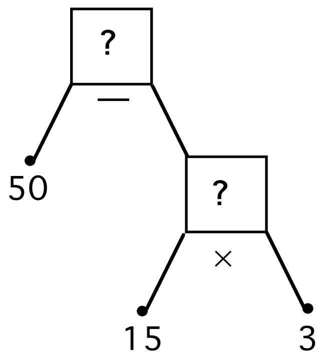
DIAGRAMA Y ESTRUCTURA DEL PROBLEMA.

Una buena ilustración de la representación de la estructura del problema por medio del diagrama y de la complejidad del proceso de traducción es la siguiente secuencia de problemas y diagramas.

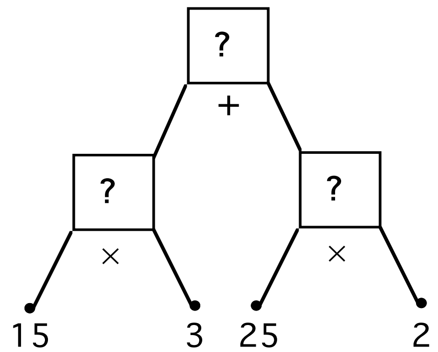
Problema 14 Juan compra 3 lápices a 15 pts. cada uno. ¿Cuánto paga?



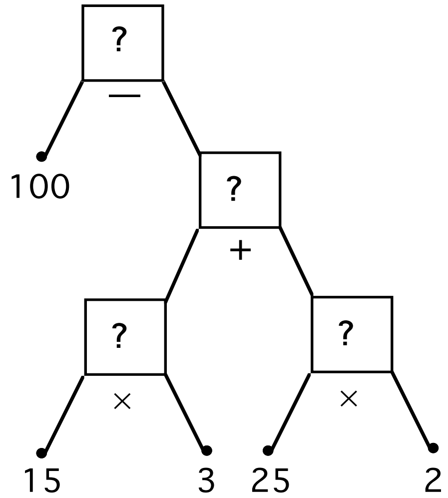
Problema 15 Un lápiz cuesta 15 pts. Juan compra 3 lápices y paga 50 pts. ¿Cuánto le devuelven?



Problema 16 Juan compra 3 lápices de 15 pts. y María 2 cuadernos de 25 pts. ¿Cuánto gastaron?



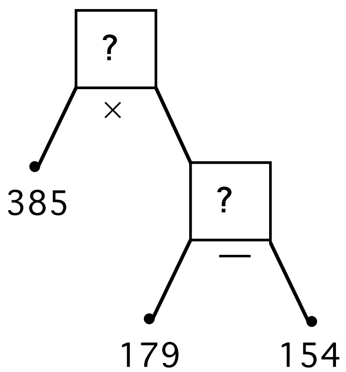
Problema 17 Juan y María son hermanos. Juan compra 3 lápices de 15 pts. y María 2 cuadernos de 25 pts. Pagan 100 pts. ¿Cuánto les devuelven?

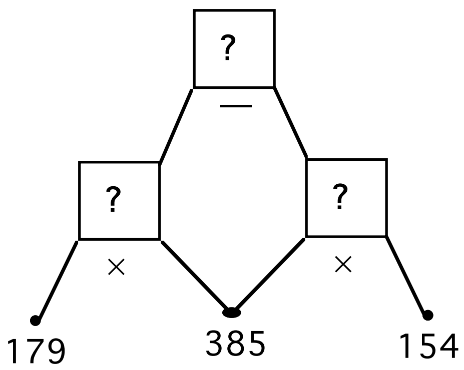


Hay que tener en cuenta que no hay una correspondencia unívoca entre el diagrama y la estructura del problema. En efecto, en ocasiones un problema puede ser resuelto mediante varias expresiones aritméticas distintas, pero equivalentes. Éste es el caso, por ejemplo, del problema 4, que, gracias a la propiedad distributiva, se puede traducir a las expresiones aritméticas

$$385\cdot(179-154) \quad \text{o} \quad 385\cdot179-385\cdot154.$$

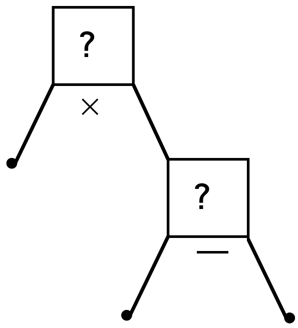
El camino del análisis puede ser también doble: decir en primer lugar que lo ganado en total puede obtenerse en función de la ganancia por botella y el número de botellas vendidas, o decir que puede ser obtenido en función de lo invertido en la compra y lo ingresado en su venta. Los diagramas correspondientes reflejan esa doble estructura producida por la propiedad distributiva.





DEL DIAGRAMA DE ESTRUCTURA AL PROBLEMA: UTILIDAD PARA EL PROFESOR.

Inversamente, no es difícil construir el enunciado de un problema que tenga la estructura representada por un diagrama dado: basta para ello elegir un contexto determinado que permita dotar de interpretaciones a las operaciones aritméticas allí indicadas.



Problema 18	Un ciclista tarda 55 segundos y 7 décimas en dar una vuelta al circuito del velódromo. Otro ciclista tarda 54 segundos y 5 décimas. En una carrera a 30 vueltas, ¿cuánto tiempo le sacará de ventaja el primero al segundo?

Así, como el diagrama da cuenta de la estructura del problema, el profesor puede controlar variables que sin duda afectan al proceso de resolución de estos problemas. En efecto, el diagrama muestra variables que giran alrededor de los tres elementos ya indicados, como, por ejemplo:

— la complejidad de la cadena deductiva,

— el número de incógnitas auxiliares,

— la naturaleza de las relaciones,

— el número de datos del problema,

— el número de etapas.

Los tres diagramas de la figura 7 comparten el número de datos presentes en el enunciado del problema (cuatro) y el número de incógnitas auxiliares necesarias (dos).

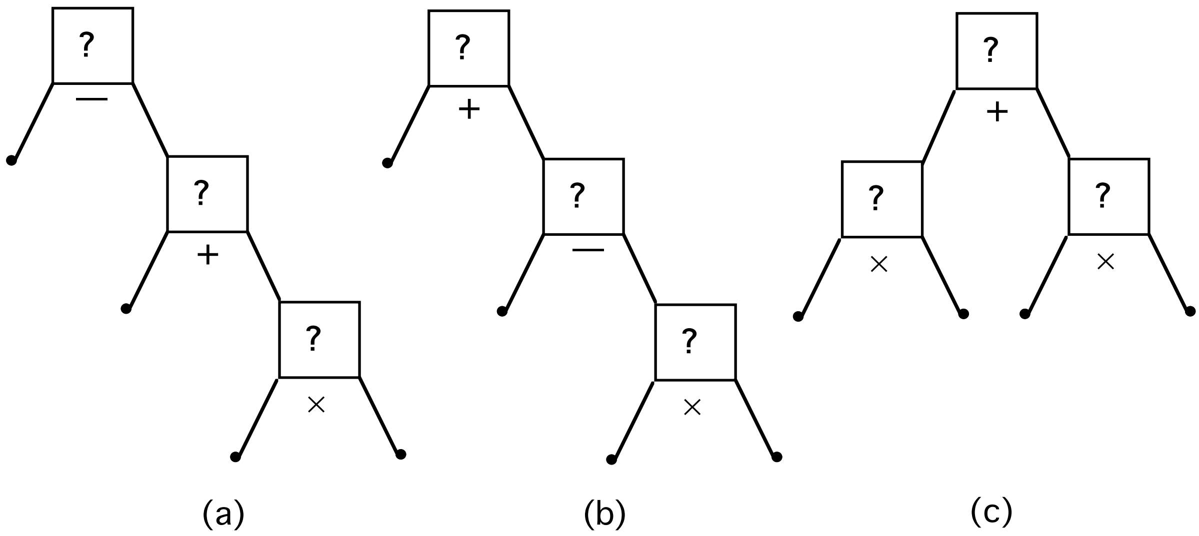


figura 7

Los diagramas *a* y *b* representan problemas de análoga dificultad en cuanto a la construcción de la cadena deductiva, pues se utilizan un dato y una incógnita auxiliar en las dos primeras etapas y dos datos en la tercera.

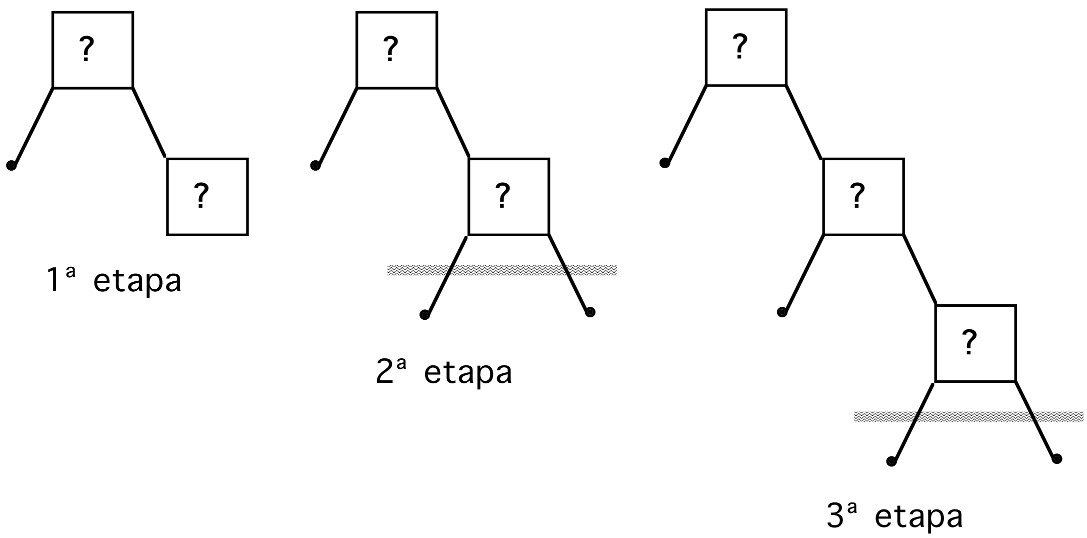


figura 8

Sin embargo, los diagramas *a* y *b* difieren en la naturaleza de las relaciones que en las primeras etapas permiten determinar la incógnita del problema mediante las incógnitas auxiliares y los datos.

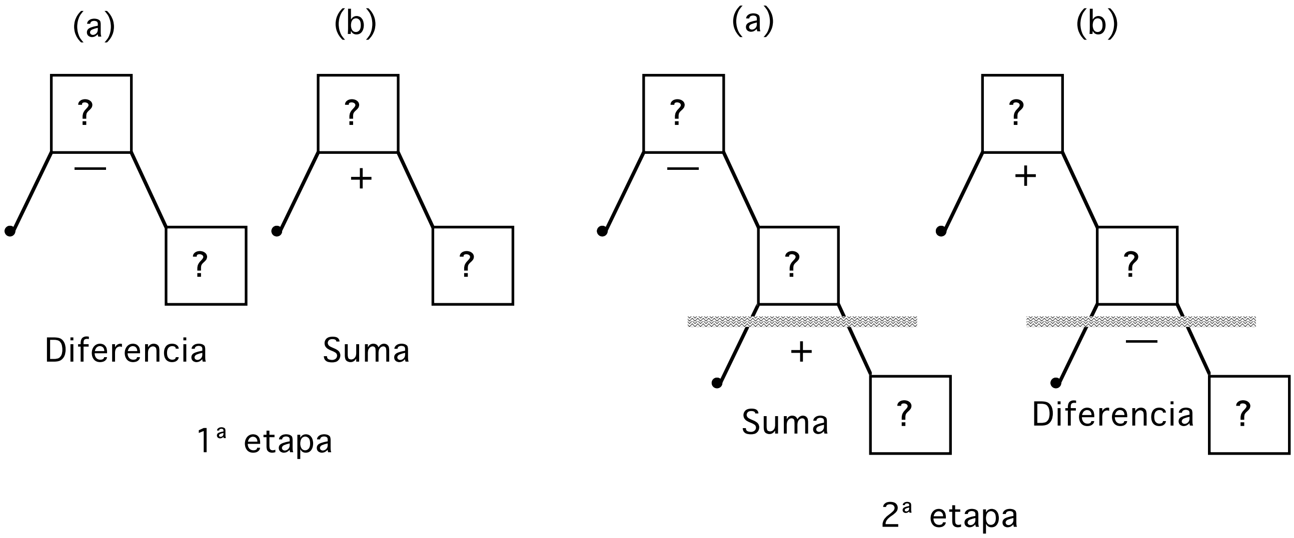


figura 9

El diagrama *c*, por su parte, es muy distinto de los anteriores ya que la determinación de la incógnita del problema se realiza ya desde la primera etapa en función de dos incógnitas auxiliares y no de un dato del problema y de una incógnita auxiliar como era el caso de los diagramas *a* y *b*.

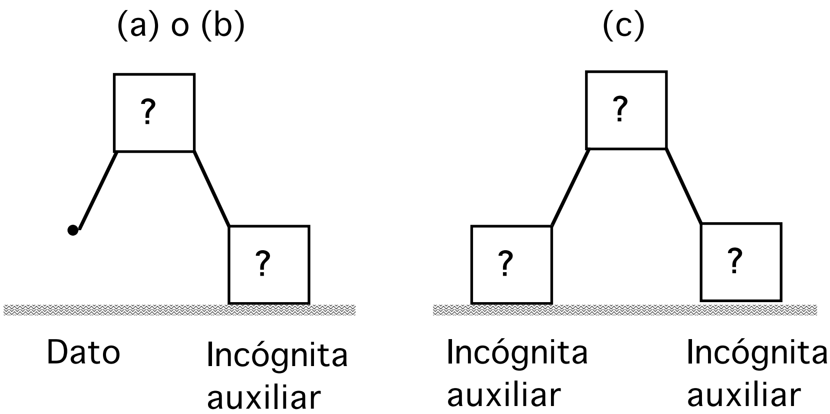


figura 10

Es posible pues construir formalmente diagramas de estructura de diversos grados de complejidad y de estilo distinto. Por ejemplo, imponiéndose la condición de que aparezcan cuatro datos en el enunciado del problema, pueden aparecer, al menos teóricamente, problemas de estructura tan diversa como los que se presentan en la figura 11, en la que hay desde diagramas que muestran el uso directo de todos los datos para determinar la incógnita, a otros en los que un dato es utilizado para determinar varias incógnitas auxiliares.

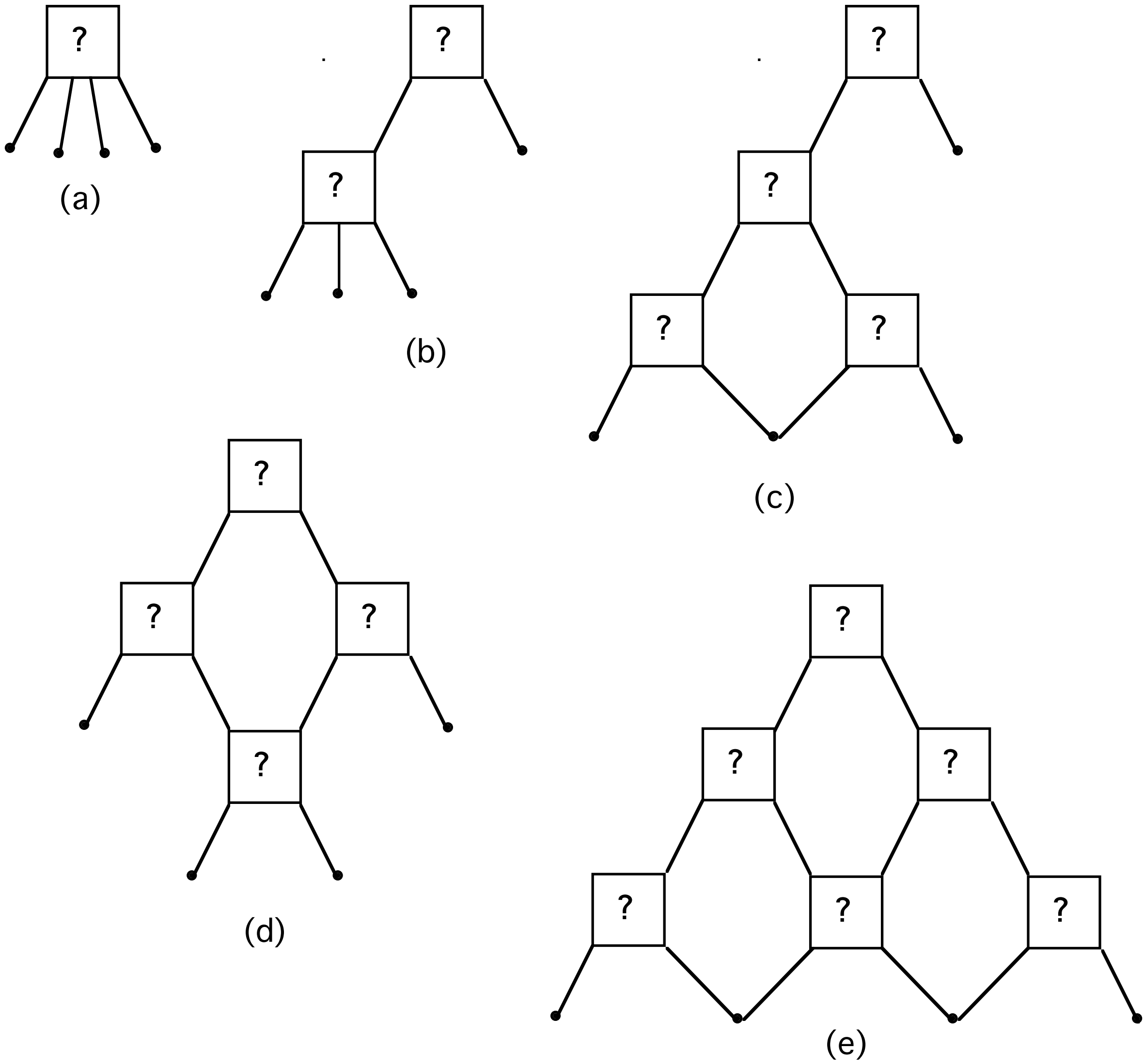


figura 11

Cuando el profesor se enfrenta con la tarea de construir enunciados verbales de problemas aritméticos de varias operaciones combinadas, se encuentra normalmente con dificultades derivadas del contexto que haya elegido para la elaboración del enunciado verbal y con dificultades derivadas de las restricciones que impone la sintaxis. Así, aunque tenga en mente la operación o las operaciones aritméticas que quiere poner en juego, no le es fácil controlar el campo de variabilidad de la estructura del problema. El uso del diagrama a priori y la elaboración a posteriori del enunciado verbal facilita esta tarea al ofrecer una imagen gráfica de la estructura del problema.

Aunque algunos diagramas de la figura 11 puedan parecer pura especulación teórica, y cabe pensar que difícilmente aparezcan en la escuela problemas que tengan una estructura tan compleja, el análisis mediante el diagrama de los problemas que se encuentran efectivamente en los libros de texto usuales y en la práctica cotidiana de las escuelas permite encontrar ejemplos de problemas de un cierto grado de complejidad desde el punto de vista de su estructura.

Para terminar, conviene hacer notar que las relaciones entre datos, incógnita e incógnitas auxiliares, que muestra el diagrama, no tienen por qué ser de naturaleza estrictamente aritmética. En efecto, el diagrama puede utilizarse para dar cuenta de la estructura de cualquier problema que sea susceptible de tratarse mediante el método de análisis-síntesis. Si esto se hace con un problema geométrico de corte escolar clásico, como el problema 19 aparecen naturalmente relaciones entre los elementos del problema como las que están escritas en la figura 12.

Problema 19 En un triángulo, determinar el lado opuesto a un ángulo, conocidos éste y los lados adyacentes.

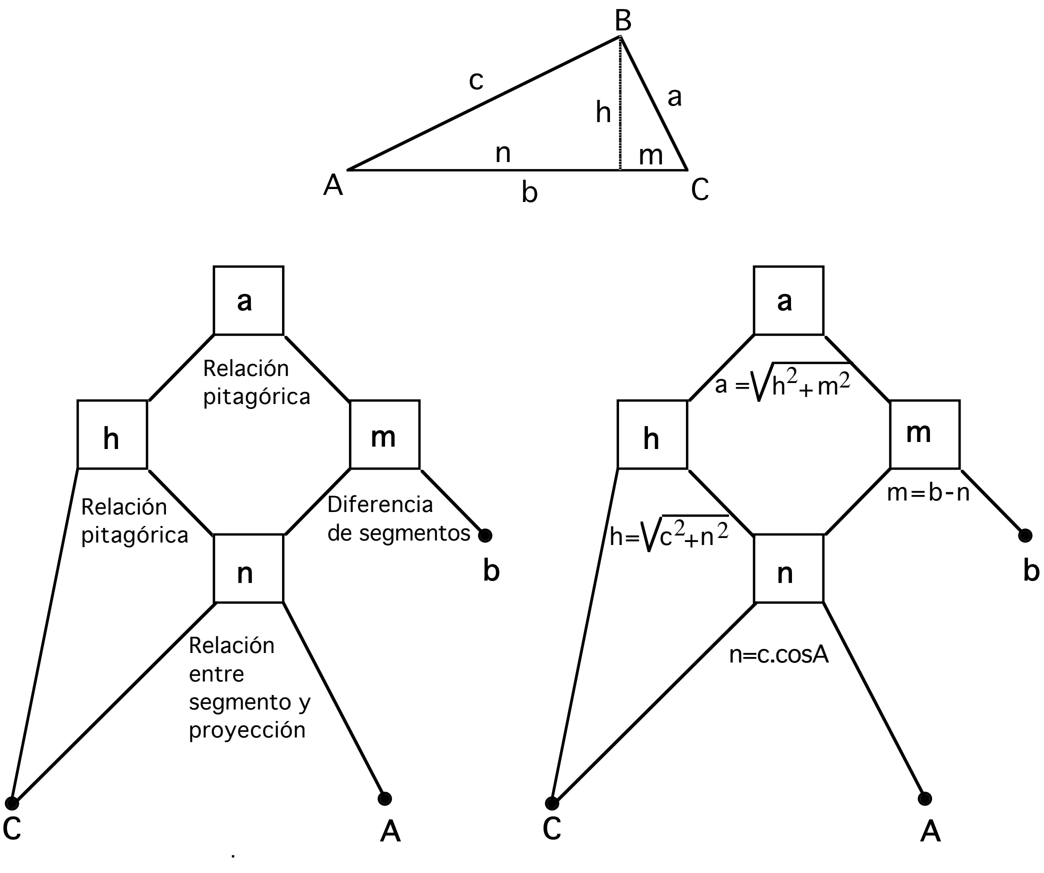


figura 12

EL DIAGRAMA EN LOS LÍMITES DEL MÉTODO DE A-S

El diagrama construido aquí puede ser una ayuda visual para resolver el problema, pero hay que considerarlo fundamentalmente como un instrumento o *artefacto didáctico* que de momento permite, como se ha visto, dar cuenta de la estructura del problema, reflejar el proceso de traducción y servir de ayuda a los profesores en el arte de plantear problemas. De la misma manera que con cualquier otro artefacto didáctico hay que tener cuidado de no caer en la tentación de convertirlo en una panacea universal para resolver todos los problemas que plantea la enseñanza de la resolución de problemas aritméticos de varias operaciones combinadas.

Veamos por ejemplo qué sucede con un problema como el 20, cuyo diagrama es el de la figura 13.

Problema 20	Juan ha hecho 3 problemas más que Pedro. Pedro ha hecho el doble que Enrique. Enrique ha hecho 9 problemas. ¿Cuántos problemas ha hecho Juan?

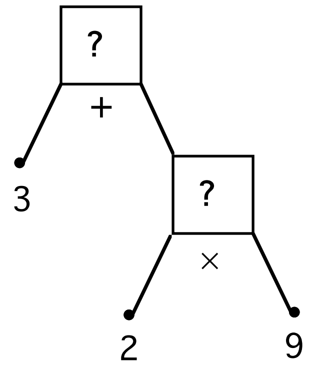
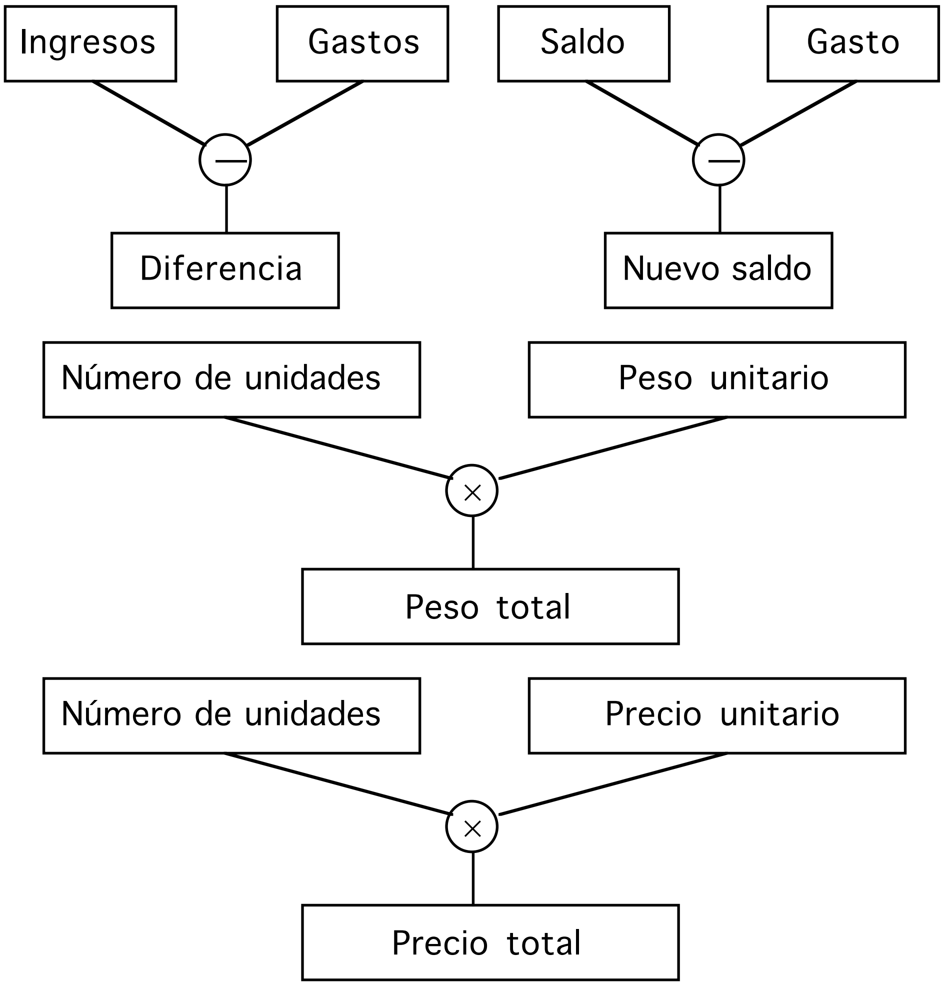


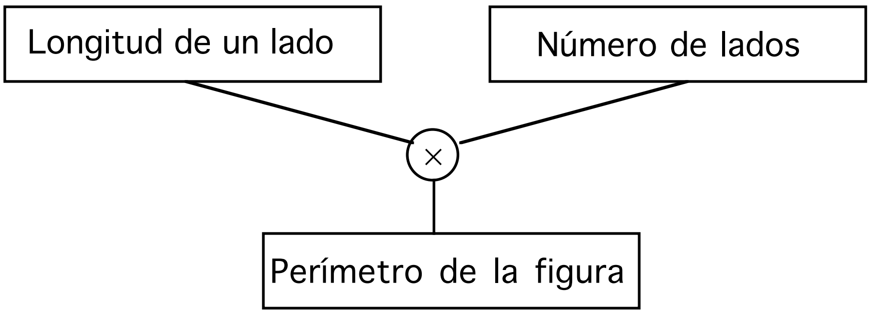
figura 13

El enunciado de este problema está construido de forma que da el análisis hecho. El diagrama, por tanto, puede utilizarse para resolver el problema; pero, además, puede haber sido utilizado previamente por el profesor para construir el enunciado del problema de manera que cada una de las oraciones del texto del problema se corresponda con cada una de las etapas que aparecen representadas en el diagrama, y que estén dispuestas en el mismo orden –con la salvedad de la oración en la que se hace la pregunta del problema que, como es usual, aparece al final del enunciado. Por otro lado, las incógnitas auxiliares que es preciso introducir se mencionan explícitamente en el enunciado del problema. En casos tan simples como éste, no hace falta insistir en la utilidad del diagrama.

Hay otro conjunto de problemas, que aparecen usualmente en los libros de texto y forman parte de la práctica usual en las escuelas, en los que también aparece en ocasiones de forma explícita el uso de los diagramas. Nos referimos a los problemas en los que las relaciones que existen entre las incógnitas, principal y auxiliares, y los datos son relaciones que se establecen entre dos cantidades y que pertenecen a estructuras conceptuales que forman parte del currículo escolar. Por ejemplo, las relaciones entre precio total, precio unitario y número de unidades; saldo, ingresos y gastos; perímetro, longitud del lado y número de lados se presentan en la colección de textos "El mundo del número", editada hace años por Interduc/Schroedel, mediante los diagramas siguientes[3]:



[3]Obsérvese que estos diagramas muestran la síntesis en lugar del análisis.



Sin embargo, en otros problemas de varias operaciones combinadas que pueden parecer igualmente simples, la utilidad del diagrama resulta dudosa tanto para expresar la estructura del problema, como para las otras funciones que se han señalado.

Veamos, por ejemplo, el problema 21 y su diagrama (figura 14).

Problema 21	Tengo 48 libros colocados en 8 estanterías. En una estantería hay 8 libros más que en la otra. ¿Cuántos libros hay en cada estantería?

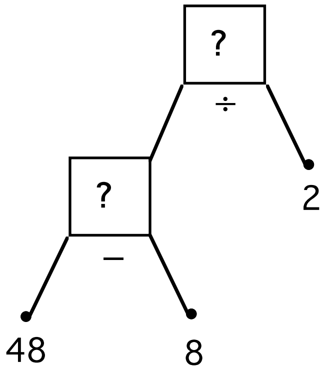


figura 14

En un problema como éste el diagrama señala el orden de las operaciones para determinar una de las incógnitas, pero es difícil dotar de sentido a la incógnita auxiliar que es preciso introducir para poder construir de hecho ese diagrama, ya que dicha incógnita auxiliar ha de ser “el número de libros que tendría cada una de las estanterías si ambas tuvieran el mismo número de libros”. En este caso, el recurso al esquema de la división con resto permite resolver el problema sin necesidad de considerar el sentido que pueda tener la incógnita auxiliar que se utiliza implícitamente dentro del esquema. Un procedimiento alternativo para este problema podría ser el tanteo por ensayo y error.

El caso del problema anterior no es único. La utilidad del diagrama resulta dudosa en general para todos aquellos problemas de varias operaciones combinadas en los que las relaciones que se establecen entre las incógnitas y los datos son relaciones que pertenecen a estructuras conceptuales tratadas en el currículo y para las que se dispone tradicionalmente de esquemas que representan las relaciones y permiten resolver los problemas en los que éstas intervienen. Como hemos mostrado en las reflexiones anteriores, cuando estas relaciones se establecen entre dos cantidades, los esquemas se incorporan de forma natural al propio diagrama y éste se construye fácilmente ya que las incógnitas auxiliares y las relaciones en cuestión adquieren su sentido de forma inmediata gracias al propio esquema –es decir, el resolutor no ha de realizar un trabajo específico para dotarlas de sentido. Ahora bien, cuando los esquemas corresponden a relaciones entre más de dos cantidades, como es el caso de las relaciones que aparecen en la estructura conceptual de proporcionalidad, el uso posible del diagrama para representar la estructura del problema obliga a construir unas relaciones entre las cantidades implicadas que parecen entrar en conflicto con las relaciones que están representadas en el esquema de proporcionalidad.

Así, el diagrama (figura 15) del problema 22, o el diagrama más complejo (figura 16) del problema 23, hace aparecer como incógnitas auxiliares imprescindibles 'el número de días que tarda 1 obrero', o 'los metros que construye 1 obrero en 4 días', o 'los metros que construye 1 obrero en 1 día'.

Problema 22	Si 20 obreros hacen una obra en 6 días, ¿cuántos días tardarán en hacer esa obra 8 obreros?

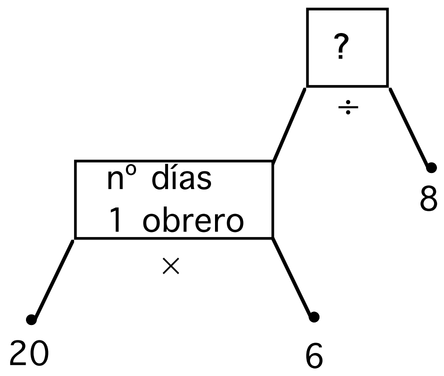


figura 15

Problema 23	100 obreros construyen una tapia de 50 m en 10 días. ¿Cuántos obreros se necesitarían para construir 40 m de tapia en 4 días?

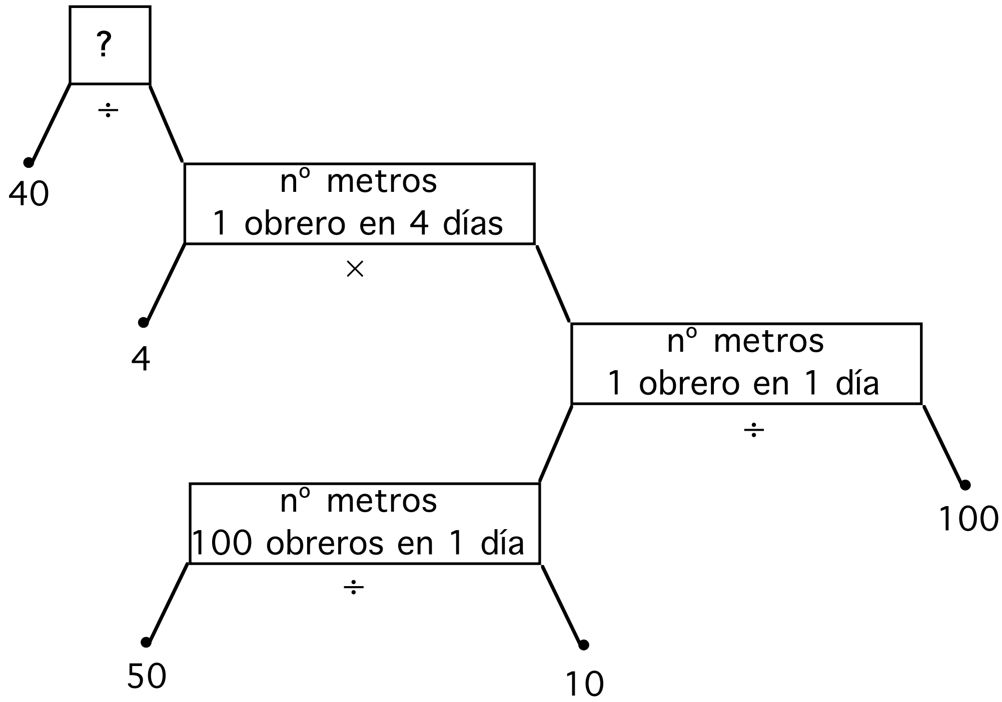


figura 16

Estas incógnitas auxiliares han desaparecido en el esquema de reparto proporcional clásico. Aunque la reducción a la unidad, que es la operación que da cuenta de las incógnitas auxiliares desaparecidas, ha tenido que formar parte de la secuencia de instrucción en torno a la estructura conceptual de proporcionalidad que permite construir, y dotar de sentido, al esquema de reparto proporcional, esta reducción a la unidad desaparece en el proceso didáctico de esquematización progresiva que lleva de la presentación de la idea de proporcionalidad a la construcción de un esquema operativo para la resolución de problemas en el interior de tal estructura conceptual. Podríamos, por tanto, concluir con caracter general que el diagrama da cuenta de la estructura del problema en aquellos casos en los que el resolutor no dispone de un esquema ad hoc, producido en el interior de una estructura conceptual determinada, para las relaciones que aparecen en el problema, o cuando el esquema no ha hecho desaparecer las incógnitas auxiliares. En los casos en que el esquema las ha hecho desaparecer, el diagrama representa una estructura más profunda, que el resolutor no necesita hacer consciente para resolver el problema, siempre que sea capaz de invocar el esquema correspondiente.

DEL ANÁLISIS AL MÉTODO CARTESIANO

Hemos visto cómo el método de análisis-síntesis permite comprender y resolver problemas aritméticos de varias operaciones combinadas. En este libro hemos restringido el estudio de la resolución de problemas a los problemas que se resuelven por procedimientos aritméticos. Sin embargo, el método de análisis, aunque tenga su origen en el terreno de la aritmética, puede aplicarse igualmente a problemas que suelen resolverse actualmente por medio de procedimientos algebraicos.

En efecto, todos los problemas de varias operaciones combinadas que hemos examinado hasta aquí pueden ser tratados mediante el análisis-síntesis, porque el análisis de la incógnita culmina efectivamente en los datos del problema y, por tanto, la síntesis es posible. Esto no sucede siempre como lo muestra el análisis (figura 17) del problema 24.

Problema 24	Un automóvil parte de un punto A con velocidad uniforme de 40 km/h hacia otro punto D. Dos horas después sale de A hacia B otro automóvil con velocidad uniforme de 60 km/h. Dígase a qué distancia de A se encuentran.

El diagrama de este problema –y cualquier intento de análisis que se haga– indica que no es posible reducir la incógnita a los datos, por muchas vueltas que se dé al organigrama del análisis, ya que se vuelve inexorablemente a la incógnita original del problema. En problemas como éste el análisis parece no acabar al no encontrarnos en ninguno de los casos enunciados en la regla de análisis-síntesis, entrando, si se quiere seguir adelante, en un bucle sin fin, con lo que la síntesis es imposible.

Sin embargo, el intento de análisis lo que sí que ha puesto de manifiesto es la naturaleza de las relaciones que existen entre la incógnita, las incógnitas auxiliares y los datos del problema, y el orden que permite encadenarlos. Con los instrumentos de la aritmética esto sólo no permite encontrar la solución del problema. Ahora bien, si se dispone de la herramienta algebraica, basta llamar **d** a la incógnita del problema para encontrarnos con que el análisis que refleja el diagrama da un procedimiento de traducción automática del enunciado del problema a una ecuación, cuya solución es la del problema.

Esto es, en el campo de los problemas aritméticos de varias operaciones combinadas aparecen naturalmente problemas que sólo son susceptibles de resolverse por procedimientos algebraicos. El análisis que acabamos de realizar del problema 24 indica que esta clase de problemas es un lugar natural para realizar el tránsito de la aritmética al álgebra[4]. Por otra parte, mirando el discurrir de los problemas por el

[4]Filloy y Rojano (1985) han determinado en el terreno de la resolución de ecuaciones un corte entre el aritmética y el álgebra que según ellos está en el momento que es necesario operar con la incógnita para resolver la ecuación. Aquí señalamos como posible punto de transición entre los

currículo escolar, en el momento en que en éste aparecen los procedimiento algebraicos, éstos se usan no sólo para resolver los problemas que precisan el álgebra, sino también para resolver los problemas de varias operaciones combinadas que pueden ser resueltos –y que han sido resueltos antes– por procedimientos aritméticos. Mostraremos en el párrafo siguiente cómo en presencia del instrumento algebraico el método de análisis y el diagrama pueden seguir siendo instrumentos útiles y en qué medida se puede modificar su uso.

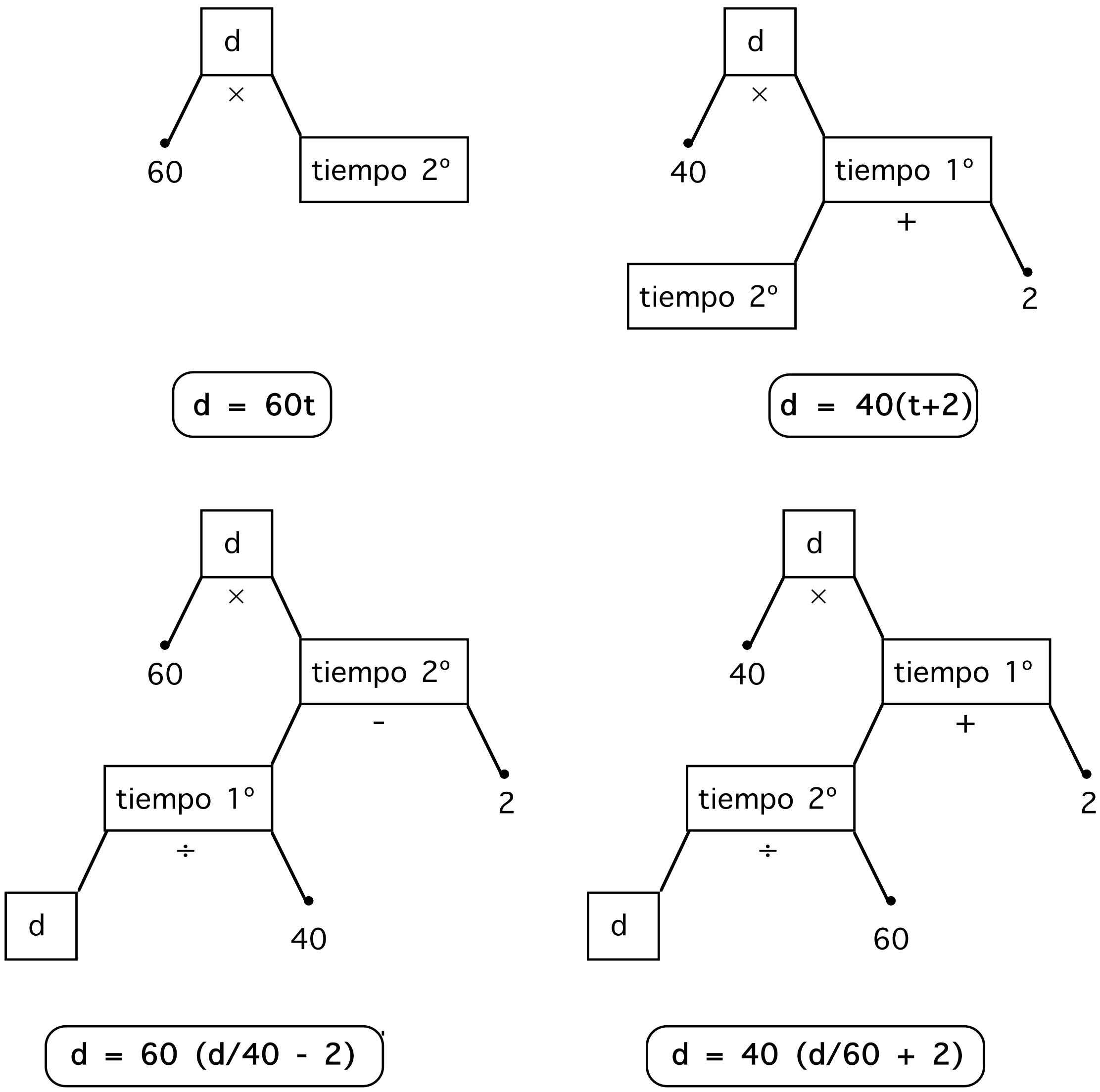


figura 17

problemas aritméticos y algebraicos el momento en que el análisis de la incógnita no es posible realizarlo únicamente a partir de los datos; en esos casos, la traducción, ahora algebraica, que corresponde al análisis realizado conduce a una ecuación de las que Filloy y Rojano colocan del lado del álgebra.

EL MODELO CARTESIANO

Polya (1966) reescribe las reglas cartesianas desde el punto de vista de la resolución de problemas de matemáticas y tratando de precisar las tareas que es preciso realizar para reducir un problema de matemáticas a la resolución de un sistema de ecuaciones.

> 1. En primer lugar, comprender bien el problema, luego convertirlo en la determinación de cierto número de cantidades desconocidas. (Reglas XIII a XVI)
>
> 2. Examinar el problema de la manera más natural considerándolo como resuelto y presentando en un orden conveniente todas las relaciones que deben verificarse entre las incógnitas y los datos según la condición planteada. (Regla XVII)
>
> 3. Separar una parte de la condición que permita expresar una misma cantidad de dos maneras diferentes y obtener así una ecuación entre las incógnitas. Descomponer eventualmente la condición en varias partes. Obtendréis así un sistema con tantas ecuaciones como incógnitas. (Regla XIX)
>
> 4. Transformar el sistema de ecuaciones en una única ecuación. (Regla XXI)

Como puede verse, las reglas del método cartesiano difieren de la del análisis-síntesis. Para empezar, estas reglas no tienen carácter algorítmico, sino que más bien constituyen un plan general de actuación para poner un problema en ecuaciones. Pero además la consideración de los datos y las incógnitas y la forma de expresar las relaciones entre ellos es distinta. Tanto datos como incógnitas se tratan como si fueran datos, esto es, se puede operar formalmente –gracias al instrumento algebraico– con ellos. Como consecuencia de esto, el examen de las relaciones que están contenidas en la condición del problema no ha de comenzar desde la incógnita, ni ha de terminar en su reducción a los datos. Lo que se hace (regla 3) es buscar una cantidad –que no tiene por qué coincidir con la incógnita del problema– que pueda expresarse de dos maneras distintas, cada una de ellas en función de una parte de la condición.

Ahora bien, aunque las diferencias sean tantas y tan radicales, hay algo presente en el método de análisis-síntesis –y que es una parte esencial de éste– que reaparece en el interior del método cartesiano. En efecto, una vez establecida la cantidad que puede expresarse de dos maneras distintas, lo que hay que hacer en el método cartesiano es *analizar* esa cantidad. El organigrama del análisis y el tipo de razonamiento que éste implica para la búsqueda de las relaciones a través de la búsqueda de antecedentes es pertinente también aquí, con una única salvedad: el análisis no ha de terminar con los datos del problema, sino con una combinación de datos e incógnitas, lo que es coherente ya que éstas últimas, expresadas algebraicamente, se están considerando *también* como datos. La regla 3 establece además que el análisis de cada cantidad se haga dos veces, y que se igualen las expresiones algebraicas que traducen los dos análisis de cada cantidad para formar las ecuaciones cuya solución es la del problema.

El diagrama que expresa el análisis puede pues servir también en el interior del método cartesiano para representar los análisis que hay que hacer de cada cantidad. El camino de la síntesis no produce ahora la solución del problema, sino la escritura de la expresión algebraica correspondiente.

Los ejemplos siguientes lo ilustran y muestran varias situaciones distintas:

En los dos análisis del problema 24 que aparecen en la parte inferior de la figura 17, se analiza la incógnita y se obtiene una expresión del tipo $x=f(x)$. En la parte superior, dos análisis distintos de la incógnita conducen a un sistema de ecuaciones con la incógnita y una incógnita auxiliar, y, –expresión del tipo $x=f(y)$, $x=g(y)$–, o a una única ecuación en la que sólo aparece la incógnita auxiliar –expresión del tipo $f(y)=g(y)$.

Por otro lado, si el problema 25 se traduce a la ecuación

$$\frac{x+12}{13}=\frac{x-13}{12},$$

el análisis realizado no es el de la incógnita, sino de otra cantidad, y ésta cantidad se ha analizado de dos maneras distintas, como pide el método cartesiano –expresión del tipo $f(x)=g(x)$.

Problema 25.	Un profesor dice a un niño que tiene que añadir 12 a un número dado y dividir el resultado por 13. Pero el niño, que no presta atención, resta 13 del número dado y divide el resultado por 12. Se extraña, pues la respuesta es correcta. ¿Cuál es el número dado?

LOS ESCOLARES Y EL ANÁLISIS-SÍNTESIS

En capítulos anteriores hemos visto que de los problemas de una etapa –sobre todo de los problemas aditivos– se han realizado gran cantidad de investigaciones de las que se han obtenido un gran fondo de datos que, compartidos por investigadores de varios países, han dado lugar a la elaboración de un marco teórico general de referencia para esa clase de problemas. Esto permite disponer en la actualidad de una descripción de la estructura de esos problemas, un catálogo de las estrategias que utilizan los niños para su resolución, una visión general de su nivel de dificultad y algunas sugerencias sobre cómo organizar la instrucción teniendo en cuenta todo lo que se sabe de ellos y la finalidad con que se traten en el currículo.

Sin embargo, no ocurre lo mismo con los problemas aritméticos de varias operaciones combinadas. Un examen de la literatura de resolución de problemas muestra que hay pocos trabajos sobre esta clase de problemas, y, además, cuando estos problemas aparecen en alguna investigación, el centro del estudio no es lo que tienen de específico estos problemas tal como hemos analizado nosotros en los párrafos anteriores, sino que se centran en aspectos conceptuales particulares –por ejemplo, los derivados de ideas conceptuales como razón y proporción– o cualquier otro tipo de variables de la tarea de las que hicimos mención en el capítulo 1.

Las razones para esta carencia de trabajos no hay que buscarlas únicamente en los caprichos de los investigadores ni en las modas imperantes, sino también en la dificultad intrínseca del estudio del proceso de resolución de estos problemas. En efecto, la descripción del proceso de resolución que hemos esbozado requiere que se tengan en cuenta, a la hora de establecer una clasificación por dificultad, al menos dos aspectos: la estructura que muestra el diagrama y la naturaleza de las operaciones implicadas.

LOS ESTUDIOS SOVIÉTICOS

La excepción a esta escasez de estudios de este estilo sobre los problemas que estamos considerando la constituye los trabajos realizados en la URSS hace varias décadas. Hay al menos dos razones para ello: una de orden curricular, el estilo del currículo de matemáticas que imperaba en la URSS conllevaba que se planteasen gran cantidad de problemas aritméticos; y otra de orden ideológico que aparece explícitamente en Kalmykova (1975) al comienzo del capítulo que describe el marco teórico: “Podemos empezar con el principio familiar en materialismo dialéctico de que el pensamiento es analítico y sintético y que los procesos analíticos y sintéticos están vinculados el uno al otro inseparablemente” (pg. 5) El corolario a esta proposición general aparece necesariamente a continuación: “Resolver problemas aritméticos, como cualquier otro proceso de pensamiento, es un proceso analítico-sintético” (pg. 6), y de ahí se pasa naturalmente a concebir la resolución de problemas como el lugar adecuado para desarrollar el tipo de razonamiento que constituye la esencia del pensamiento materialista y dialéctico: “El propósito de la actividad analítica-sintética al resolver un problema debería ser exponer su contenido matemático tal como está descrito por la situación concreta en la hipótesis, así como averiguar las relaciones de los datos unos con otros y con la cantidad desconocida, y, una vez aislados los principios apropiados, determinar el valor de la incógnita a partir de los datos conocidos” (pg. 7)

En este contexto, lo que nos parece más importante traer a colación aquí de los estudios soviéticos es lo siguiente:

1) Cómo se ve y cómo se describe la actividad analítico-sintética de los niños en la resolución problemas aritméticos y las preguntas que pueden formularse desde esa óptica.

2) Hasta qué punto la instrucción en análisis permite comprender el problema y su proceso de resolución.

3) Si la práctica y la instrucción en análisis es un procedimiento útil y eficaz para la búsqueda de la solución de estos problemas.

4) Si es posible diseñar en base al análisis-síntesis un procedimiento de instrucción *productivo* para la resolución de estos problemas. De esto último hablamos en el capítulo 6, subapartado *En acción*.

La descripción global de la actividad analítico-sintética.

Como es razonable pensar, para Kalmykova el análisis comienza en cuanto el niño descompone el texto del problema en partes separadas.

Esto ocurre cuando el niño se fija en las cantidades que aparecen en el texto y en algunas palabras –que corresponden con las que en otro lugar hemos denominado 'palabras-clave'– y las aísla. Kalmykova, siguiendo a Menchinskaya, califica a este análisis de *elemental* e indica que si la síntesis sigue a un análisis de este tipo, se producen naturalmente errores y lo que ella llama *síntesis superfluas,* esto es, se calculan cantidades que se derivan de los datos, pero que no conducen a la determinación de la incógnita del problema. Lo que Kalmykova llama *análisis elemental* es la actividad del resolutor que se corresponde con el análisis del enunciado verbal del problema que nosotros calificamos de *superficial*, que, como vimos para los problemas de una etapa, no es capaz de dar cuenta de la estructura semántica del problema.

El análisis global del contenido del problema, que permite dar cuenta de su estructura semántica y que tratamos en el capítulo 3, aparece, según Kalmykova, como actividad de los niños "tan pronto como la incógnita y los datos del problema y sus interrelaciones se definen no por palabras aisladas, sino por combinaciones de ellas (que forman complejos definidos)". "Una solución productiva del problema –sigue Kalmykova– exige una síntesis en el nivel de [este] *análisis complejo".* (pg, 7)

Kalmykova, cumpliendo quizá con su obligación ideológicamente impuesta de calificar de *análisis* a cualquier actividad mental del resolutor que conduzca a la solución del problema, llama *análisis anticipatorio* a la actividad que éste realiza cuando ve clara e inmediatamente las operaciones que son necesarias para determinar la incógnita porque el problema tiene una estructura similar a otros que ha resuelto frecuentemente. A nuestro entender "la familiaridad que –según Kalmykova– le sirve de base para descomponer las relaciones entre datos e incógnita" lo que hace es invocar un esquema que le sirve de guía para la resolución del problema, sin necesidad de descender a la descomposición de las relaciones, *inobservable* en todo caso cuando hay un esquema presente.

Al análisis elemental, el anticipatorio y el complejo, añade Kalmykova el análisis *especial*. Este análisis se produce cuando el problema es complicado o nuevo para el niño, esto es, si datos e incógnita están suficientemente separados y se requiere para entender las relaciones entre ellos de una serie de elementos intermedios. Este análisis especial se centra en la incógnita, los datos y las relaciones funcionales entre ellos. En él se precisa el contenido de la incógnita y de los datos, se desvela la composición de los datos complicados y se aíslan las propiedades y características de datos e incógnita. En cuanto a las relaciones funcionales, se aíslan los principios sobre cuya base pueden establecerse, y se aíslan en particular aquellas que permiten determinar la incógnita del problema.

Ésta es la actividad analítica que permite síntesis productivas, ya que en el proceso de resolución de problemas hay una interdependencia entre análisis y síntesis, como en todo proceso mental visto en la perspectiva marxiana que sigue Kalmykova[5].

Con esta descripción de la actividad analítico-sintética y tras constatar las diferencias básicas entre quienes se dedican a la metodología didáctica al evaluar el método de análisis en la enseñanza de la resolución de problemas, Kalmykova hace una serie de preguntas de gran interés, muchas de las cuales necesitan aún hoy en día ser investigadas:

— Los metodólogos aseguran que el método de análisis es útil porque desarrolla el pensamiento lógico. ¿Qué fundamento tiene esa afirmación?

— ¿Basta el argumento meramente lógico de que el método de análisis requiere que se construya una cadena rigurosa de deducciones?

— ¿Hasta qué punto el método de análisis y la construcción de la cadena de deducciones ayuda a elaborar el significado de un problema concreto o a encontrar una vía de solución?

— ¿Es posible descomponer por el método del análisis un problema no familiar?

— ¿Es útil la descomposición analítica de los problemas una vez han sido resueltos? Si es así, ¿para qué?

— ¿Qué influencia tiene la instrucción en el análisis en la habilidad para resolver problemas?

La exposición oral del análisis de problemas ya resueltos

Para indagar hasta qué punto los alumnos eran capaces de comprender y practicar el análisis después de haber resuelto el problema, y cómo depende esto de la instrucción recibida, Kalmykova realizó observaciones sistemáticas en varias aulas y

[5]Kalmykova cita la autoridad de Engels: "[…] el pensamiento consiste tanto en la separación de objetos de consciencia en sus elementos cuanto en la unificación de elementos correspondientes en una unidad. No hay síntesis sin análisis." (*Anti Dühring*, trad. Manuel Sacristán, pg. 29, Grijalbo, México, 1964)

niveles en lo que ella denomina la “escuela de masas”, con distintos profesores y métodos de instrucción, que aquí indicaremos por a, b y c.

a) Los niños se familiarizan con el método de análisis en 2º: de vez en cuando descomponen problemas después de haberlos resuelto, pero sin ningún sistema.

El profesor corrige los errores en las descomposiciones, pero no trabaja sistemáticamente en su eliminación y no es preciso en la formulación de las descomposiciones.

Cuando en 3º se mira el estilo de la actividad analítica del niño se encuentran distintos comportamientos ante un problema como el problema 13. Los mejores alumnos aíslan la incógnita e indican los datos[6] que pueden ayudar a determinarla: los metros utilizados para hacer trajes y los utilizados para hacer abrigos, para determinar el número de abrigos. Sin embargo, a partir de aquí vuelven a la síntesis.

Los alumnos promedio pueden producir análisis como el siguiente:

> Tenemos que encontrar cuántos abrigos se hicieron, y por tanto tenemos que saber cuántos metros había en total en la tienda y cuántos metros se usaron para los trajes, y tenemos que saber cuántos metros de tela se quedaron para los abrigos.

Los alumnos más flojos hacen cosas como ésta:

> Tenemos que encontrar cuántos abrigos se hicieron. Para esto tenemos que saber cuántas piezas de tela había, cuántos trajes se hicieron, y cuánta tela entraba en un traje y cuánta en un abrigo.

En resumen, en ausencia de entrenamiento sistemático especial sólo se retienen unos pocos elementos externos del método, que los alumnos usan como señal de que están hablando en la jerga en que el maestro espera que hablen (“Debemos encontrar…” “Esto no puede encontrarse inmediatamente…”), pero ningún alumno es capaz de dar una descomposición completa de ese problema.

b) Se trata de la clase de un profesor que considera el método de análisis extremadamente valioso y de una gran influencia en el desarrollo del pensamiento matemático de sus alumnos.

Los alumnos toman contacto con el método el 1º, y en 2º la enseñanza con el método es regular y más o menos sistemática. En 3º y 4º, cuando Kalmykova realiza sus observaciones encuentra que la descomposición típica que realizan los alumnos es la siguiente:

---

[6]En todo este apartado vamos a llamar ‘datos’ no a lo dado, sino a cantidades que si se miran desde el punto de vista del método de análisis-síntesis, pueden ser *incógnitas auxiliares*, cuando se sigue el camino del análisis, o *datos intermedios*, cuando se sigue el camino de la síntesis.

> No podemos contestar a la pregunta del problema inmediatamente porque no sabemos cuántos metros de tela quedaron después de hacer los trajes.
>
> Esto no lo podemos hallar porque no sabemos cuántos metros entraron en todos los trajes.
>
> No podemos hallar cuántos metros entraron en todos los trajes porque no sabemos cuánta tela había en total. Pero esto lo podemos hallar.

Como puede verse se indica un dato como necesario para determinar la incógnita, y este dato se refiere a la determinación de otro hasta que se da por "acabado" el análisis. Esto es, los alumnos simplemente recuerdan el curso de la solución, disponen los problemas simples resueltos en orden inverso, los combinan mecánicamente, y, en el lenguaje típico del análisis, aseguran que determinar la incógnita de uno de esos problemas simples es imposible sin determinar la incógnita del precedente.

Kalmykova encuentra fácil explicar por qué se da este tipo de análisis: en 2º y 3º se resuelven muchos *problemas-cadena*[7], esto es, problemas en los que lo obtenido en la primera pregunta del problema se usa inmediatamente para contestar a la siguiente pregunta, y así sucesivamente.

Que los alumnos lleguen a ver tal tipo de análisis como prototipo del análisis lo atribuye Kalmykova, además de a la práctica de problemas-cadena, a la ausencia de esquemas gráficos cuando se realiza el análisis de éstos y otros problemas, pues, aunque el profesor haga en la pizarra algún análisis gráfico, no lo presenta como tarea que los alumnos hayan de realizar, y cuando se realiza el análisis oral la atención de los alumnos se relaja o no se presta.

c) Un profesor con 25 años de experiencia y en posesión de la Orden de Lenin.

Los alumnos de su clase se distinguen por su "maravillosa disciplina y capacidad de trabajo". Al comienzo de 2º pueden distinguir los once[8] tipos de problemas simples, son capaces de enunciar un problema para cualquiera de los once tipos, de seleccionar un problema como ejemplo de uno de ellos, y de escribir la expresión aritmética que lo resuelve, e incluso son capaces de pensar en las preguntas que pueden plantearse ante unos datos determinados.

El profesor comienza la instrucción en el método de análisis hacia la mitad de 2º. Tiene que mostrar las características específicas del método: descomposición desde la incógnita y búsqueda de eslabones. Y contrastarlo y diferenciarlo del método de síntesis, que ya es familiar para los alumnos.

---

[7]Kalmykova llama 'problema-cadena' a un problema que tiene la estructura que muestra los diagramas a y b de la figura 7.

[8]En la instrucción recibida, los tipos de problemas son once, ni uno más ni uno menos.

Tropieza aquí con un escollo que es común en el inicio del aprendizaje en cualquier método de resolución de problemas. El profesor ha de instruir a los alumnos en un método que es más apropiado para resolver problemas más complejos que los que éstos ya han resuelto hasta la fecha. El método no se puede enseñar a través de esos problemas para los que es útil, ya que los alumnos no pueden resolverlos. Pero si el profesor utiliza problemas más simples, éstos son resueltos por los alumnos fácilmente y, al tener la solución en su cabeza, los alumnos no comprenderán la necesidad del razonamiento tan complicado que supone el nuevo método para resolver un problema que ya tienen resuelto.

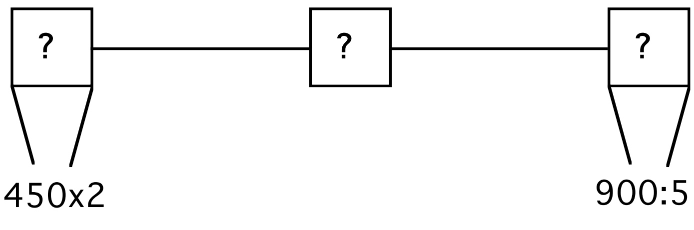
La receta que este profesor utiliza para salvar este escollo general en el caso del paso de los problemas aritméticos de una etapa a los de varias etapas consiste en utilizar situaciones problemáticas, problemas-adivinanza y diagramas.

Problema 26	Hay 2 cajas con 450 huevos en cada una. En un comedor colectivo se gastan en 5 días. ¿Cuántos huevos se usan en ese comedor diariamente, si todos los días usan el mismo número de huevos?

Lyusya, una de las mejoras alumnas de este profesor es capaz de analizar como sigue el problema 26.

> El problema pregunta cuántos huevos se usaban cada día. Para encontrarlo, tenemos que encontrar cuántos huevos había en las dos cajas y en cuántos días se usaron.
>
> Conocemos que había 450 huevos en cada caja, que había 2 cajas, y que los huevos se usaron en 5 días. tenemos que encontrar cuántos huevos había entre las dos cajas.

Lyusya prosiguió hasta resolver el problema. Cuando después se le pidió que repitiera la descomposición que había hecho acompañándola de un diagrama, hizo el siguiente dibujo:



Como puede verse, el diagrama, aunque no es formalmente correcto, sí corresponde al análisis realizado.

Finalmente, Kalmykova organiza todas sus observaciones estableciendo tres niveles de dominio del método de análisis por parte de los alumnos, que son los siguientes:

1.— Aislamiento de algunos elementos superficiales del método de análisis. Sólo hay una conexión mecánica con lo que se ha hecho mientras se resuelve.

2.— Dominio del análisis del primer eslabón (la incógnita). Sólo hay una conexión mecánica de este análisis con lo que se ha hecho para resolver el resto del problema.

3.— Singularización del principio de combinar los eslabones del análisis.

Como se ha visto, el dominio del método depende de la instrucción recibida. Únicamente alumnos de la clase que ha sido instruida según la estrategia descrita en c) son capaces de alcanzar el tercer nivel en porcentaje significativo (el 75%).

El uso del método de análisis para resolver problemas

Para investigar la validez del método de análisis para la búsqueda de la solución Kalmykova distingue entre dos tipos de problemas.

Un tipo comprende los problemas en cuya pregunta hay alguna indicación de los datos necesarios para determinar la incógnita y en los que además éstos se pueden determinar a partir de relaciones familiares para los alumnos. Un ejemplo de este tipo es el problema 3. En él, el gasto total en la compra se determina en función de los gastos parciales y cada uno de éstos en función de la relación “precio unitario × número de unidades”.

El otro tipo está formado por los problemas en los que no hay indicación directa de los datos necesarios para determinar la incógnita –con lo que éstos han de averiguarse en el curso de la resolución mediante un análisis detenido del texto del problema–, y las conexiones funcionales son menos familiares. El problema 27 es un ejemplo de éstos.

Problema 27	Mamá gasta 2000 ptas. 800 ptas en un perfume y el resto en 3 pares de medias. ¿Cuánto vale un par de medias?

Como puede verse para saber lo que vale un par de medias hay que servirse de una incógnita auxiliar y la relación que aparece es inversa de la anterior –que obviamente es menos familiar.

Los estudios de Kalmykova muestran que el método de análisis es un procedimiento valioso para los problemas del primer tipo. Pero, cuando los alumnos lo utilizan con los problemas del segundo tipo –o con problemas que son nuevos, o parcialmente nuevos, para ellos– se ven abocados más o menos pronto a buscar los datos que son necesarios por ensayo y error.

Incluso los alumnos que son capaces de analizar los problemas ya resueltos con un dominio de este análisis del nivel 3 tienen dificultades en utilizar el método para resolver problemas nuevos. Las dificultades son de los dos tipos que cabe esperar: síntesis superfluas y errores en el análisis. Esto es, se indica que es preciso determinar cantidades que no son necesarias para resolver el problema (aunque éstas sean cantidades correctamente determinadas), y se combinan datos de modo aleatorio para determinar cantidades que carecen de sentido o se utilizan datos no adecuados para determinar una cantidad elegida.

La explicación que da Kalmykova de estos hechos es la siguiente:

> El proceso de pensamiento al resolver problemas es analítico-sintético. En él, el análisis está estrechamente entrelazado con la síntesis y es inseparable de ésta. La síntesis se lleva a cabo tan pronto como las bases para ella se aíslan en el proceso de análisis. Así, el problema se simplifica (en la medida en que el número de problemas simples que componen el problema complejo se reduce), y esto simplifica el análisis subsiguiente del problema; el análisis y la síntesis se apoyan mutuamente
>
> El método clásico de análisis asume que el proceso de análisis está aislado del proceso de síntesis. Se supone que el resolutor lleva a cabo el análisis guiado desde el principio por la incógnita, encuentra todos los datos necesarios para determinarla, y únicamente entonces regresa a la síntesis. Tal aislamiento artificial del proceso de análisis del de síntesis no puede ser provechoso. (Kalmykova, 1975 , pg. 117)

La crítica básica al método clásico del análisis es pues que el análisis de la incógnita, cuando se aísla totalmente de los datos, lleva a un análisis abstracto que no tiene en cuenta ni los datos concretos del problema, ni las relaciones particulares presentes en el texto.

A pesar de sus supuestos ideológicos o metodológicos, Kalmykova describe el proceso de resolución de un problema como algo más que el análisis y la síntesis.

> El resolutor, guiado por el análisis de la incógnita y de los datos, planea el método de resolver el problema en su cabeza y comienza a llevarlo a cabo. Si falla, analiza los errores, clarifica por qué el método elegido no le permite alcanzar la solución, intenta corregirlo, o toma una vía diferente. Algunas veces, por un momento, reconstruye el problema, descarta algunos datos, simplificando la determinación de las relaciones entre los datos y la incógnita. El trabajo creativo del pensamiento se da en estas construcciones y en la elección de las posibles vías de solución. (Kalmykova, 1975, pgs. 118-119)

Por tanto, cuando se practica el método de análisis clásico, como no hay elección de caminos, no hay pensamiento creativo, ni pensamiento crítico, ni potenciación de la habilidad para resolver problemas en solitario, ni modo de encontrar cómo salir de los atolladeros cuando se está resolviendo un problema, pues, como ya expusimos, los alumnos se limitan, cuando están atorados, a manipulaciones mecánicas de los datos. Además, la dedicación que requiere el método clásico hace que disminuya dramáticamente el número de problemas que se pueden abordar.

A pesar de ello, Kalmykova considera probado por los experimentos y las observaciones que el método de análisis es productivo en los problemas simples cuando el conocimiento de las relaciones funcionales entre los datos necesita refuerzo.

En los problemas más complejos es útil volver al análisis parcial y recordar las combinaciones de datos que pueden usarse para determinar la incógnita, y así, desde ahí, se podrá proceder a la búsqueda de la solución por otros métodos. Para alumnos de edades más avanzadas, mostrar el análisis de algunos problemas sirve para hacer explícito el *orden lógico* de las operaciones que son necesarias para encontrar la solución del problema.

De todo ello Kalmykova concluye que en vez de empeñarse en que los alumnos sean capaces de usar el método de análisis clásico, lo que hay que hacer es centrarse en el análisis del texto del problema y proporcionar a los alumnos un arsenal de técnicas que les permitan simplificar los problemas complejos.