6.

La instrucción en PAEV: Marcos, ideas y sugerencias

> En contraste con la epigénesis y la tautología, que constituyen los mundos de la replicación, está el reino de la creatividad, el arte, el aprendizaje y la evolución, en el que los procesos ininterrumpidos de cambio se alimentan de azar. La esencia de la epigénesis es la repetición predecible; la esencia del aprendizaje y la evolución es la exploración y el cambio.
>
> Gregory Bateson, *Mind and Nature*

INTRODUCCIÓN

En los capítulos anteriores hemos tratado varios aspectos de los PAE y desde varios puntos de vista. Sin embargo, aunque, como en todo estudio que tiene que ver con la educación, las implicaciones para la práctica pueden encontrarse subyacentes a lo dicho, y aunque en ocasiones hayamos hecho mención explícita de las consecuencias que conllevaban para el aula algunos de los análisis efectuados de los problemas y de su proceso de resolución, o los resultados de las investigaciones presentados, hemos querido dejar para este capítulo todo aquello que expresamente tiene que ver con la instrucción en PAE.

En algún momento de la redacción de este libro pensamos en que cada capítulo iría acompañado de las correspondientes sugerencias para la instrucción en la clase de problemas que en él se tratara; sin embargo, esto nos conducía a que cada párrafo de sugerencias quedaba reducido a un conjunto de reglas o pautas de conducta que el profesor podría seguir cuando tratase esos problemas en el aula y a que cada uno estuviera desconectado de los demás y demasiado ligado al tipo particular de problemas que se estaba tratando. Con ese estilo de presentación de las sugerencias, no nos parecía que pudiera comprenderse su sentido global al carecer de un discurso para la instrucción en PAE, ni entender cómo las sugerencias particulares para un tipo de PAE encajaban en el conjunto de estrategias de instrucción en cualquier tipo de PAE, ni, mucho menos, cómo los PAE pueden desempeñar un papel importante en la instrucción en resolución de problemas de matemáticas en general.

Al hablar de marcos o ideas que impliquen actuaciones prácticas y de las sugerencias que pueden hacerse, hay que tener en cuenta en primer lugar desde dónde se hacen y para quién. Los destinatarios pertenecen a dos grupos de profesionales diferentes: los que trabajan en la estructura de apoyo a la enseñanza y los que enseñan directamente, esto es, los que diseñan el currículo, los que lo desarrollan, los profesores de apoyo (desde centros de profesores u otro tipo de centros), los formadores de nuevos profesores, los profesores en formación, etc., y los profesores en contacto directo y cotidiano con los alumnos.

De ahí se deduce inmediatamente algunas dificultades que siempre van a aparecer a la hora de elaborar sugerencias –y a la hora de enunciarlas explícitamente–: primero, en lo que atañe al diseño del currículo, al menos su estilo y sus finalidades; y, segundo, en lo que atañe a los profesores, el profesor organizando o planificando su curso o alguna de sus horas de clase, o el profesor enfrentándose a una situación concreta con un problema particular o con un grupo de problemas; por decirlo en dos palabras, el profesor *pensando* o el profesor *en acción*. Es decir, las sugerencias deberían elaborarse y enunciarse –y, por tanto, leerse después– de forma distinta según su destinatario y el grado de globalidad que expresan.

MODOS DE ACTUACIÓN

Para poder tomar en consideración de forma sistemática el conjunto de puntos de vista que traen a la instrucción en resolución de problemas cada uno de los destinatarios potenciales de las sugerencias que pueden hacerse, los resultados de los investigadores y los marcos teóricos construidos por éstos, el análisis didáctico realizado, y, *last but not least,* los alumnos, es menester distinguir al menos entre tres modos de actuación, o estrategias, que hemos llamado *global, local* y *puntual.*

La actuación o la estrategia es *global* cuando se refiere al conjunto del currículo de matemáticas, *local* cuando considera una clase de problemas, un recurso particular o un método, y *puntual* cuando se refiere a un problema, un profesor y unos alumnos concretos.

La estrategia global se ocupa de adecuar los problemas a los objetivos generales del currículo, de distribuir los problemas en clases, de distribuir estas clases por cursos o ciclos, y de adecuar los problemas a la complejidad psicológica de los alumnos. También es de orden global la decisión de situar los problemas antes o después de los recursos matemáticos, esto es, de si los recursos matemáticos necesarios para la resolución de un problema han de estar tratados previamente a que éste se plantee en la secuencia que marca el currículo, o si, por el contrario, los problemas se van a plantear para la introducción a partir de ellos de los distintos conceptos matemáticos contemplados en el currículo, o si se van a incluir problemas con la finalidad de ampliar el campo semántico de los conceptos –p.e., árboles o circuitos como problemas de multiplicación.

El establecimiento de objetivos de resolución de problemas –en el currículo que los tiene– pertenece asimismo al modo global de actuación. En este caso, será preciso distribuir éstos por niveles y decidir qué clase de problemas es más adecuada para cada objetivo si ello es posible. Además de indicar qué problemas parecen más adecuados para tratar un método general de resolución, o introducir el estudio de una herramienta heurística o la práctica de destrezas asociadas al proceso de resolución de problemas, o qué clase de problemas ponen mejor en evidencia las grandes tareas generales –planificación, ejecución– y la necesidad de una buena gestión del proceso.

El modo global, tal como lo hemos descrito, deja indicado que es preciso tener estrategias locales para cada una de las cosas que distribuye, señalando para qué, cuándo y cómo se engarzan en el plan general; también apunta que algún modo puntual de actuación está más adecuado a los objetivos generales del currículo que otros.

ANÁLISIS DEL CONTENIDO: UN EJEMPLO DE ACTUACIÓN LOCAL Y DE ALTERNATIVAS PARA ACTUACIONES PUNTUALES.

Así por ejemplo, el modo de actuación global indicará que algo hay que hacer para lograr una lectura comprensiva o la comprensión del problema. El trabajo que hay que realizar en este sentido depende del tipo de problema (problemas de encontrar o de probar, un ejercicio algorítmico, un problema de aplicación, una situación problemática, etc.).

En los PAEV el camino hacia la comprensión incluye la aprehensión de la estructura de un texto como problema, su lectura comprensiva y el análisis de su contenido. Estrategias locales, como simulación de las acciones o uso de representaciones, se pueden utilizar para analizar el contenido de distintas clases de problemas. Para ejemplificar el modo local de actuación, vamos a considerar una clase de problemas de una etapa que en el capítulo 3 vimos que son los más difíciles. Nos referimos a los problemas de comparar.

Problema 1	Juan tiene una hermana y un hermano. Su hermana tiene 15 años y su hermano es 5 años más joven que ella. ¿Qué edad tiene su hermano?
Problema 2	Juan tiene una hermana y un hermano. Su hermana tiene 15 años y es 5 años más joven que su hermano. ¿Qué edad tiene su hermano?

Si la lectura del texto se limita a fijarse en las palabras clave –en este caso “más joven”–, los alumnos asociarán “más joven” con “menos edad” y acabarán consolidando esquemas de acción del tipo “cuando me encuentre con ‘más joven’, he de de restar”, que aplicado a los dos problemas anteriores da la solución correcta en un caso, pero no en el otro, sin que en ninguno de los dos casos se haya comprendido en realidad nada.

Para que haya comprensión se requiere un pequeño análisis que descomponga el texto y permita descubrir al menos de quién se habla, qué se dice y qué se desea saber. En el problema 1:

— Se habla de la hermana y el hermano de Juan.

— Se dice que la hermana tiene 15 años.

— Se dice la edad de la hermana.

— Se dice que el hermano es 5 años más joven que ella.

— Se desea saber la edad del hermano.

Por su parte, en el problema 2:

— Se habla de la hermana y el hermano de Juan.

— Se dice que la hermana tiene 15 años.

— Se dice la edad de la hermana.

— Se dice que la hermana es 5 años más joven que su hermano.

— Se desea saber la edad del hermano.

Con este análisis no se ha hecho más que separar la información de la cuestión y aislar las frases que señalan la diferencia entre ambos problemas[1]. La tarea del profesor es organizar el modo en que este análisis puede llevarse a efecto.

Para empezar, el profesor selecciona un contexto en el cual va a enunciar los problemas de comparar. El contexto elegido para los dos ejemplos anteriores es el de la edad y la expresión "más joven que". Otros contextos adecuados para los problemas de comparar son distancias o precios, con las expresiones análogas "más cerca", "más lejos", "más caro", "más barato" (y las correspondientes con "menos"), u otras con "ancho", "largo", "rápido", "lento", etc.

Luego, el profesor decide los materiales que acompañarán al enunciado del problema, y el modo de organización del trabajo en clase. Por poner dos ejemplos de estilo de trabajo, pensemos en una situación con los alumnos trabajando individualmente con fichas, y otra en que el profesor dirige un diálogo con el conjunto de la clase. En ambos casos, el profesor desea que los alumnos realicen un análisis del contenido del problema: tendrá que presentar pues el enunciado del problema acompañado de una lista de preguntas que guíen dicho análisis o conducir un diálogo en el que dichas preguntas vayan apareciendo.

Así, los problemas 1 y 2 pueden ir acompañados de la siguiente lista de preguntas:

[1] Desde el punto de vista de la estructura semántica, el problema 1 es *Comparar 3* y el problema 2 es *Comparar 5*.

¿De quién se habla en la historia?

¿Cuál es su relación?

¿Qué se nos dice de ellos?

¿De quién conocemos la edad?

¿Quién es más joven?

¿Qué nos preguntan?

Y también pueden ir acompañados de una línea numérica para que se señalen en ella las edades de los protagonistas de la historia. Si la actuación local se hubiese centrado en la operación resta en este contexto, en lugar de en la relación “más joven”, hubiese sido más adecuado utilizar la secuencia de problemas que propone Freudenthal (1963):

— Juan tiene 10 años. ¿Cuánto tardará en tener 16?

— Juan tiene 16 años. ¿Cuántos años han pasado desde que tuvo 10?

— Juan tiene 10 años y Pedro 16. ¿Cuántos años le lleva Pedro a Juan?

— Juan tiene 10 años y Pedro 16. ¿Cuántos años tardará Juan en tener la edad que tiene ahora Pedro?

— Juan tiene 10 años y Pedro 16. ¿Cuántos años es Juan más joven que Pedro?

— Juan tiene 10 años y Pedro 16. ¿Cuántos años han pasado desde que Pedro tuvo la edad de Juan?

— Juan tenía 10 años en 1916. ¿Cuándo nació?

— Juan nació en 1910. ¿Cuántos años tenía en 1916?

Cuando el análisis del contenido se realice con problemas de varias operaciones hay que ir más allá de separar información y cuestión y repetir por trozos el contenido del problema. Será necesario descomponer en partes, investigar cada parte, comparar unas partes con otras y determinar sus relaciones mutuas.

Si el profesor ha decidido ahora hacer el análisis del contenido en forma de diálogo, tendrá que tener en su mente, como guía del diálogo, un esquema que le indique los pasos del análisis, similar al siguiente:

1.— Familiarización del contenido del problema como un todo.

2.— Determinar de quién o qué se habla en el problema y qué se dice que hace o que ocurre, etc.

3.— Aislar la cuestión.

4.— Descomponer el problema en trozos separados.

5.— Descomponer el contenido de la cuestión. Interpretarla desde el punto de vista de su contenido matemático.

6.— Descomponer el contenido de las diferentes partes del problema. Interpretar palabras, expresiones y relaciones mutuas.

Un buen ejemplo del comportamiento de un profesor dirigiendo un diálogo con esta finalidad está narrado en Bogolyobov (1972). El problema es el siguiente:

Problema 3	4 yogures cuestan 12 rublos. Una señora compra 6 yogures y entrega 20 rublos. ¿Cuánto le devuelven?

El niño ya ha leído el problema y se ha aclarado de quién se habla en el problema –de una señora que compra yogures– y qué se pregunta –cuánto le devuelven. El siguiente fragmento del diálogo comienza cuando se pretende aclarar el contenido de la cuestión y continúa a partir de ahí:

P.: Al comprar, ¿cuándo le devuelven a uno dinero?

A.: Cuando se paga más de lo que vale.

P.: Si tengo que pagar 6 y doy 10, ¿cuánto me devuelven?

A.: 4.

P.: En nuestro problema, ¿cuánto paga la señora?

A.: 20.

P.: ¿Y qué se pregunta?

A.: Cuánto le devuelven.

P.: ¿Por qué piensas que a la señora le deben devolver?

A.: Porque paga más de lo que vale.

P.: ¿La mercancía cuesta menos de cuánto?

A.: Menos de 20.

P.: ¿Y qué compró?

A.: Yogures.

P.: ¿Cuántos yogures?

A.: Seis.

P.: ¿Pregunta el problema por el coste de los seis yogures?

A.: No, esto no se pregunta en el problema.

P.: ¿Qué más se dice en el problema del coste de los yogures?

A.: Que cuatro yogures cuestan doce.

Tras este diálogo, el profesor resume en la pizarra el contenido del problema comenzando por la incógnita:

1.— A una señora deben devolverle de 20.

2.— Compró 6 yogures.

3.— 4 yogures cuestan 12.

La resolución del problema prosigue a partir de este punto.

REPRESENTACIONES Y AYUDAS VISUALES

Hoy en día casi cualquier currículo incluye entre sus recomendaciones metodológicas “el paso del lenguaje oral y manipulativo, al gráfico y al simbólico”, e incluso cuando esta recomendación se restringe al mundo de los números suele precisarse más hablándose, por ejemplo, de “correspondencias entre lenguaje verbal, representación gráfica y notación numérica”.

No es difícil encontrar el origen de estas recomendaciones en los trabajos de Bruner.

> Los seres humanos han desarrollado tres sistemas paralelos para procesar la información y para representarla: uno, por medio de la manipulación y de la acción; otro, por medio de la organización perceptual y la imaginaría; y otro, por medio del aparato simbólico. (Bruner, 1966, pg. 28).

De ahí surge inmediatamente la necesidad de que en educación se deba poner todo el énfasis posible en las destrezas que tienen que ver con manipular, ver e imaginar, y realizar operaciones simbólicas.

En la resolución de problemas las representaciones gráficas o ayudas visuales han sido y son ampliamente utilizadas pensando, sin precisar más, que lo visual, al reunir las características de lo abstracto y lo concreto, podría servir de puente entre lo uno y lo otro.

En Polya (1957) podemos encontrar la sugerencia *Haz una figura* entre las sugerencias heurísticas que ayudan a concebir y elaborar un plan para la solución del problema. Schoenfeld (1979) con el fin de ser algo más prescriptivo es mucho más explícito y detalla las consecuencias que el uso de esta sugerencia puede acarrear:

> Ayúdate de una figura o diagrama siempre que sea posible:
>
> — Puede sugerir ideas o respuestas plausibles.
>
> — Incluso puede resolver el problema gráficamente.
>
> — Aunque finalmente resuelvas el problema de otro modo, una figura ayuda a comprenderlo. (Schoenfeld, 1979, pg. 178)

Polya y Schoenfeld están hablando en el nivel heurístico, las consideraciones con que hemos empezado este apartado están en el nivel de las teorías generales del aprendizaje y la instrucción. En cualquier caso está claro que dibujos, esquemas, diagramas, figuras o representaciones desempeñan un papel importante en cualquier estrategia de resolución de problemas, por lo que vale la pena realizar un pequeño análisis y estudio de ellas.

Para ello nos parece que conviene distinguir entre:

1) Los dibujos, esquemas o figuras que acompañan al texto de un problema.

2) Las representaciones internas del resolutor.

3) Las producciones gráficas de carácter simbólico que el resolutor hace en el curso de la resolución, o que el profesor hace o induce que se hagan.

DIBUJOS EN EL LIBRO DE TEXTO

Por lo que se refiere a los dibujos que aparecen en los libros de texto, Botsmanova (1972) los clasifica en:

a.— Objeto-ilustrativos.

Dibujos de objetos individuales mencionados en el problema e ilustraciones del tema del problema.

Puede haber representaciones del material de cálculo y puede estar reflejado el resultado numérico.

b.— Objeto-analíticos.

Dibujos de objetos individuales, pero que por una adecuada configuración espacial dan cuenta de las relaciones numéricas entre los datos; únicamente aparecen los datos pertinentes.

c.— Diagramas abstractos y esquemas que reflejan relaciones entre los datos.

Aunque no disponemos de datos precisos, algunos exámenes no sistemáticos de libros de texto muestran que lo más frecuente es el tipo a, que hay pocos ejemplos del b, y que prácticamente no hay ninguno del c.

Cuando hay dibujos del tipo objeto-ilustrativos, la resolución puede realizarse en el dibujo reemplazando la traducción del texto por el simple recuento de los objetos representados, por lo que Botsmanova opina que estos dibujos no ayudan a encontrar el curso de la solución.

Si los dibujos son objeto-analíticos, sirven de ayuda en los problemas fáciles, pero suele requerirse la intervención del profesor ya que se trata de representaciones abstractas.

Finalmente, los dibujos del tipo c –que son teóricamente los más provechosos– suelen ser inútiles si aparecen sin más en el libro de texto, ya que los alumnos no pueden comprenderlos sin una preparación especial. Esto es, hace falta para que sean útiles que se organice una instrucción específica en su realización y uso.

TRADUCCIÓN ENTRE REPRESENTACIONES

Por otro lado, el lenguaje oral, los modelos manipulativos y los dibujos, tres modos de representación que son susceptibles de ser incorporados a los libros de texto –*bookables*, según la palabra forjada por Lesh–, han sido estudiados por éste (Lesh, Behr & Post, 1987) para tratar de dilucidar, entre otras cosas, el papel que desempeñan en la resolución de problemas. Dado que en toda actividad hay traducción entre representaciones, Lesh y sus colegas estudiaron los siguientes tipos de traducciones:

— de símbolos a lenguaje escrito,

— de lenguaje escrito a símbolos,

— de dibujos a dibujos,

— de lenguaje escrito a dibujos,

— de dibujos a lenguaje escrito,

— de símbolos a dibujos,

— de dibujos a símbolos.

Lo que encontraron es que la traducción a dibujos es más fácil que la traducción de dibujos a otra cosa, y que la traducción en la que esté involucrado el lenguaje escrito es más fácil que la que involucra símbolos. Aparte de estos datos de facilidades de traducción, Lesh pone en guardia contra la idea comúnmente aceptada, pero errónea, de que un problema con materiales manipulativos es siempre más fácil. Lo que para él es crucial es la distinción entre las representaciones que llama *transparentes* y las que llama *opacas*. Las representaciones transparentes son las que no contienen ni más ni menos significados que la idea que representan, mientras que las opacas ponen de relieve unos significados en detrimento de otros y no tiene, por tanto, el mismo contenido semántico que la idea que representa. La lástima –concluye Lesh– es que todas las representaciones transparentes y útiles no son susceptibles de ser integradas en un libro de texto. De ahí la importancia de tomar en consideración las producciones gráficas que se realizan en el curso del proceso de resolución.

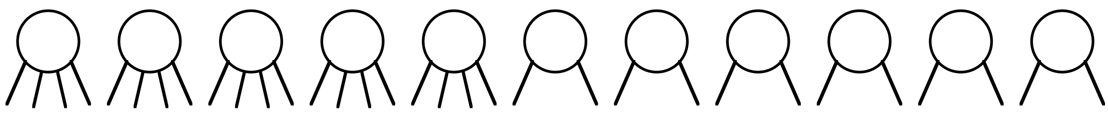
PRODUCCIONES GRÁFICAS EN EL CURSO DE LA SOLUCIÓN

Ya en el capítulo 2, al tratar de los problemas multiplicativos que se pueden modelar mediante árboles, indicamos que hay representaciones que resultan más adecuadas para comprender el problema y alcanzar la solución. Aquí, situados en el punto de vista de la instrucción, vamos a tratar de establecer criterios que, desde el modo de actuar global, ayuden a seleccionar qué representaciones son más adecuadas y útiles.

Tomemos, por ejemplo, el famoso problema de las gallinas y los conejos.

Problema 4	En un corral hay gallinas y conejos. Hay 11 animales. Entre todos tienen 32 patas. ¿Cuántas gallinas y cuántos conejos hay?

El dibujo siguiente proporciona la solución del problema de forma bella, intuitiva y sugestiva.



Los alumnos se sorprenden y, en ocasiones, no creen que sea la solución que deben presentarle al profesor (No tiene pinta de ser una solución "matemática"). A pesar de la innegable belleza de esta solución o de su carácter intuitivo, poco se puede hacer con ella que vaya más allá de su uso en la resolución de problemas similares con conejos y conejeras o lagartos, escarabajos y gusanos. En efecto, esta representación no da cuenta de la estructura del problema y es impracticable en cuanto se aumenta ligeramente el tamaño de los números. Más aún, si un resolutor con recursos heurísticos atacara uno de estos problemas en que los números de patas y animales fuera elevado –pongamos 1000 animales, p.e.– resolviendo primero el problema análogo con números pequeños mediante esta representación, no podría extraer de forma inmediata de la resolución gráfica del problema más simple ni una hipótesis sobre la respuesta al problema inicial[2], ni un procedimiento para resolverlo, ni una mejor comprensión de las relaciones entre los datos que le permitiera tener un plan para resolverlo.

Esta representación es pues útil desde el punto de vista puntual del trabajo con un problema concreto –y el profesor puede además celebrar que un alumno la produzca para resolver ese problema e incluso crear las condiciones necesarias para que el alumno la vea como una solución legítima y de la que partir para obtener una solución más elaborada–, pero no parece que reúna todas las características deseables para que se incluya dentro de una estrategia global de instrucción.

CRITERIOS PARA EL USO DE REPRESENTACIONES

Fischbein (1977) arguye que la mejor estrategia para maximizar los beneficios didácticos de lo que él llama "modelos intuitivos" es que éstos tengan tanta capacidad heurística como la que tienen los modelos científicos. Las características que Fischbein atribuye a los modelos con capacidad heurística son las siguientes:

— Ha de ser *generativo*. Es decir, ser capaz de representar correctamente un número potencialmente ilimitado de situaciones diferentes con un número limitado de elementos y reglas.

— Ha de tener *consistencia interna.* Esto es, usando las mismas convenciones ha de proporcionar soluciones correctas para todas las cuestiones posibles de la misma clase.

— Ha de tener *capacidad de proliferación.* Esto es, ha de ser lo suficientemente flexible para inspirar la invención de nuevos modelos relacionados con él que se adapten a nuevos tipos de problemas.

---

[2]Habría que matizar que alguna idea de las operaciones aritméticas que hay que realizar para resolver el problema podría extraerse si en la interacción alumno-profesor éste muestra explícitamente la estrategia que sigue en la distribución de las patas a la vez que realiza el dibujo.

— Ha de tener una *estructura intrínseca.* Lo que aquí quiere decir que el modelo no ha estar construido con reglas artificiales cuyo significado sólo se encuentra en el reflejo de la situación original.

En un trabajo posterior y más extenso, Fischbein (1987), aparecen otras condiciones, que vienen determinadas por el papel que estos modelos intuitivos representan para Fischbein. En efecto, los modelos "constituyen un artefacto que media entre lo intelectualmente inaccesible y lo intelectualmente aceptable y manipulable", con lo que el problema se resuelve en los términos del modelo y luego ha de ser reinterpretado en los términos originales. Así que hace falta que el modelo sea fiel al original sobre la base de un isomorfismo estructural entre ambos, para que la solución obtenida en los términos del modelo sea equivalente a una solución expresada en los términos del original. Pero, además, la capacidad heurística de un modelo depende de su autonomía respecto al original, y esta autonomía implica que el modelo debe poder funcionar coherentemente sobre la base de sus propias leyes, sin que haya que recurrir al original para dotar de sentido a lo que se produce en el modelo. Finalmente, añade Fischbein que el modelo debe corresponder a las características de procesamiento de la información propias de los humanos.

A nuestro entender éstos son los criterios globales que hay que tener presentes para poner a punto o elegir las representaciones que se utilicen de modo local con una clase de problemas. Unicamente quedaría por añadir algunos criterios de eficacia. Vergnaud (1982) señala dos:

— Las representaciones simbólicas deberían ayudar a los alumnos a resolver problemas que no consiguen resolver sin ellas.

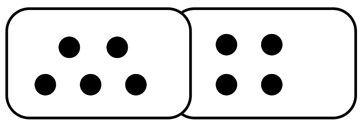
— Las representaciones simbólicas deberían ayudar a los alumnos a diferenciar varias estructuras y clases de problemas.

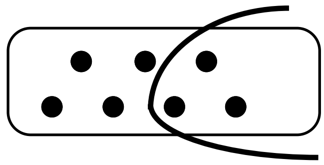
El primero es obvio; el segundo presenta la dificultad de su contrastación empírica, esto es, es relativamente fácil determinar representaciones teóricas que discriminen las clases de problemas; ahora bien, no se puede dar por sentado que el resolutor al utilizar la representación reconocerá como distintos los problemas representados.

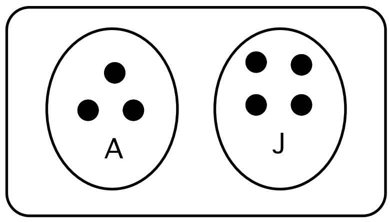
REPRESENTACIONES QUE INCLUYEN ASPECTOS PROCESUALES

Otra fuente de la que obtener representaciones útiles en la resolución de problemas la constituye el análisis cognitivo de los procesos y estructuras de la información implicados en la comprensión del problema y que vayan más allá de la comprensión del texto. En efecto, estos modelos cognitivos (Greeno, 1987) contienen hipótesis sobre los patrones de información que los estudiantes necesitan reconocer en los textos, sobre el proceso cognitivo implicado en su reconocimiento, y, además, descripciones explícitas del conocimiento de carácter tácito que ha de ser utilizado. Este último aspecto es el fundamental y describe procesos de los cuales ni profesores ni alumnos son conscientes.

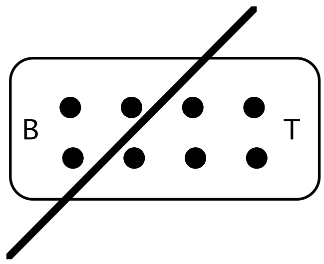
El principio de instrucción de explicitar lo implícito abogaría por la conveniencia de utilizar representaciones que incluyan los conocimientos tácitos. Representaciones de estas características son las que Greeno (1987) describe que diseñó Lindvall para problemas verbales. En ellas, los puntos corresponden a los objetos del problema y están contenidos en curvas cerradas que corresponden a conjuntos. Las relaciones entre conjuntos están representadas en formas que corresponden a diferentes tipos de problemas aditivos[3].


Cambio Aumentar

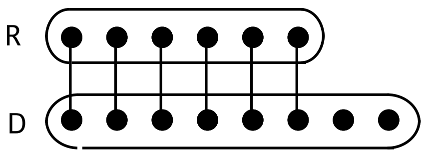

Cambio Disminuir



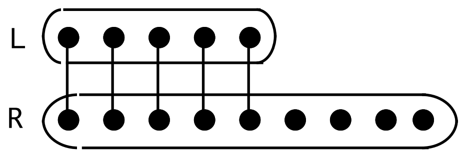
Combinar



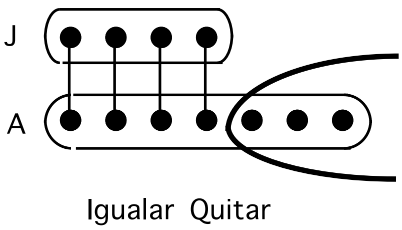
Separar



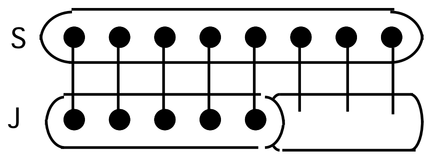
Comparar



Comparar



Igualar Quitar



Igualar Añadir

[3]Estas representaciones tratan de dar un soporte intuitivo a las estrategias que usan los niños, cuya efectividad medida en nivel de éxito, está reflejada de algún modo en la tabla que relaciona estrategias y estructura del problema, que aparece en el capítulo 3.

El apoyo experimental a la utilidad de tales representaciones lo proporciona la experiencia de Tamburino, que describe Greeno (1987): cuando niños de 1º, instruidos en el uso de esos diagramas, pasaron un test de 20 problemas, el nivel de éxito se incrementó en 3'4 problemas por término medio, y, lo que para Greeno es más importante, en un test de transferencia de 20 problemas, que incluía problemas de dos etapas, problemas con números grandes y problemas con cantidades continuas, el nivel de éxito se incrementó en 4'2 problemas por término medio.

El diagrama utilizado en el capítulo 5 para dar cuenta de la estructura de los problemas aritméticos de varias operaciones combinadas es también una representación que contiene aspectos procesuales, sobre todo aquellos que tienen que ver con el plan de la solución, esto es, la elección de incógnitas auxiliares, el orden en que deben realizarse las operaciones entre los datos, o la organización de la cadena deductiva.

Además de servir para reflejar la estructura del problema, el diagrama puede ser útil en la instrucción ya que:

— Permite "ir por partes" (ayudando en la descomposición del problema en trozos) y permite volver una y otra vez sobre el plan de solución.

— Sirve de gestor en cuanto refleja con claridad los avances y retrocesos que tienen lugar mientras se elabora el plan de solución.

— En la fase de revisión, facilita el examen del plan, la eficacia y la racionalidad de la solución obtenida, al presentar a la vista todo el problema de una vez.

Cuando se trata de diseñar una estrategia de instrucción en resolución de problemas y se piensa incluir en ella el uso de este tipo de diagrama, no cabe pensar en una actuación de tipo local. Esto es, el diagrama no funciona si se utiliza para la instrucción en los problemas aritméticos de varias operaciones combinadas, sin que se utilicen también diagramas similares –por ejemplo, diagramas de síntesis– en terrenos cercanos como problemas de una etapa, o como la representación de relaciones del estilo de precio unitario-cantidad-precio total[4]. Y que también se haya utilizado una representación de este tipo como modo de organizar el orden en que deben realizarse las operaciones indicadas por medio de expresiones aritméticas complejas. Esto es, se aplica aquí la idea general de que nada funciona si se presenta aislado: hace falta que se organice el uso de estos diagramas por parte de los alumnos y del profesor en un modo de actuación global que integre operaciones aritméticas elementales, expresiones aritméticas elementales, problemas de una etapa, relaciones entre cantidades, expresiones aritméticas complejas, propiedades algebraicas de las

[4]Ver los diagramas para estas relaciones que aparecen en el capítulo 5.

operaciones y problemas aritméticos de varias operaciones combinadas[5]. Además, hay que tener en cuenta que los diagramas pueden hacerse o leerse de abajo arriba o de arriba abajo, haciéndose análisis o síntesis, procesos que son diferentes en cuanto a su complejidad y su posibilidad de uso en función de la edad de los alumnos.

SOBRE LOS DATOS DE UN PROBLEMA

En el estudio de la resolución de problemas es conveniente distinguir, al menos metodológicamente, tres niveles de análisis: el problema aislado, la interacción resolutor-problema, y las situaciones de instrucción en las que el resolutor resuelve el problema que le ha sido propuesto por el profesor, profesor que sigue el curso de su resolución e interviene en éste cuando lo cree conveniente.

Desde el capítulo 1, aunque hemos hecho análisis que pueden considerarse del primer nivel, no hemos mirado el aspecto que tiene un problema en general. Lo que hemos estado haciendo en los otros capítulos ha sido tomar en consideración el contenido del problema y analizarlo o clasificar los problemas en función de ello. Vamos ahora a volver al punto de vista desde el cual, haciendo abstracción del contenido, lo que aparece en un problema es una información y una pregunta y, por tanto, unos datos y una incógnita.

Es corriente que los problemas matemáticos se redacten de forma precisa, concisa y elegante, lo que implica en particular que en su enunciado aparezcan únicamente los datos que son necesarios para determinar la incógnita. El que sigue es un ejemplo estupendo.

Problema 5	Hay 10 personas sentadas alrededor de una mesa. La renta de cada persona es la media de las rentas de las personas que están sentadas a su lado. La renta media de las 10 personas es 1 millón de pesetas. Averiguar la renta de cada persona.

Sin embargo, hemos visto en el capítulo 5 cómo se utilizaba como táctica de instrucción algunos enunciados de problemas en los que no estaban todos los datos requeridos, o simplemente no había pregunta. Por otro lado, si en vez de presentar enunciados de problemas se presentan situaciones problemáticas como el problema 6, una de las tareas que hay que realizar es precisamente determinar aquellos datos que se consideran útiles para contestar a las preguntas que se planteen.

[5]Una colección de libros de texto en la que se usan de forma modélica estos diagramas para casi todo lo que hemos indicado es la editada hace ya algunos años por Interduc-Shroedel con el nombre *El mundo del número.* Ahora bien, todos los diagramas que se presentan van en el mismo sentido, el de la síntesis, siempre que se lean de arriba abajo, como es usual.

Problema 6 ¿Cuál es el mejor sitio para construir un puente entre dos ciudades separadas por un río?

CLASIFICACIÓN DE LOS DATOS DE UN PROBLEMA.

Cuando se considera un problema compuesto por tres partes, datos, incógnita y condición, los datos que aparecen en el enunciado de un problema pueden clasificarse de varias maneras:

— Contradictorios y consistentes.

— Suficientes, insuficientes, abundantes y redundantes.

— Pertinentes y no pertinentes.

Para precisar estas clasificaciones, consideremos que D es el conjunto de datos que en las condiciones C del problema permiten determinar la incógnita, y que S, subconjunto de D, es el conjunto de datos que aparecen en el enunciado del problema.

S es *contradictorio* si en las condiciones C del problema se puede decidir acerca de la inverosimilitud de alguno de los elementos de S. (Por ejemplo “Encontrar 2 números impares cuya suma sea 7”). En caso contrario S es *consistente.*

S es *suficiente* si y sólo si ningún subconjunto de S permite determinar la incógnita en las condiciones C[6]. Cualquier subconjunto de S es entonces *insuficiente.* Cualquier superconjunto de S es *abundante.* En este caso, sin precisar demasiado se suele decir de algunos de los elementos de S que son datos superfluos.

Un conjunto de datos R es *redundante* si y sólo si contiene un subconjunto S *suficiente* y cualquier elemento de R\S puede ser determinado a partir de S en las condiciones C del problema. Lo que indica que en un conjunto de datos abundante algunos de los datos superfluos pueden ser útiles para resolver el problema.

Por otro lado, un elemento d de S es *pertinente* cuando la información contenida en C se refiere a él. En otro caso d no es *pertinente.*

Así, en el problema 7, el conjunto S de datos {2 días, 3 días, 6Ha} es abundante, pero no redundante. Ahora bien, el dato 6Ha es pertinente. La no redundancia se debe a la imposibilidad de determinar el tamaño del campo a partir de las condiciones del problema. La pertinencia del dato 6ha queda reflejada en la posibilidad de resolver el problema utilizándolo.

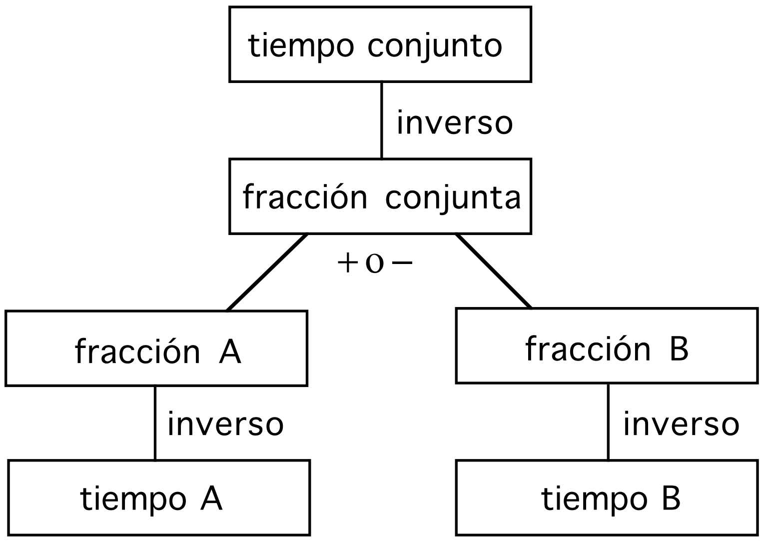
[6]Para un problema no hay únicamente un conjunto de datos suficiente en el sentido en que aquí se define: puede haber varios.

Problema 7	La superficie de un campo es de 6Ha. Antonio puede cavarlo en 2 días. Juan en 3 días. ¿Cuánto tiempo tardarán en cavarlo los dos juntos?

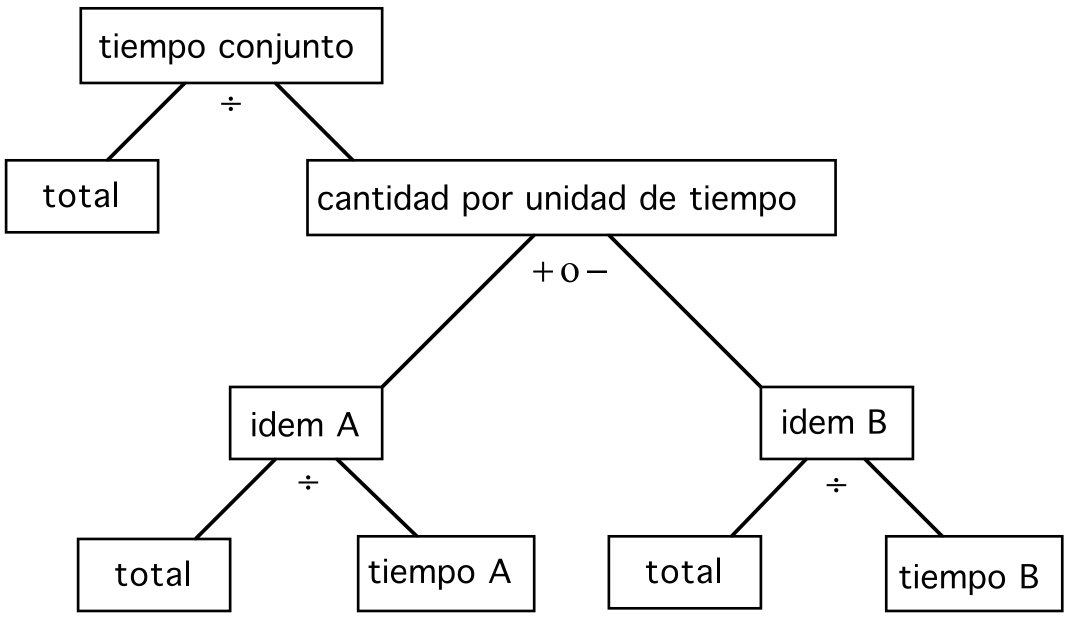
Si se elimina el dato 6Ha, los que quedan son suficientes para resolver el problema; pero la estructura del problema es distinta. El problema 8, por su parte, está enunciado sólo con un conjunto de datos suficiente. Los diagramas que siguen –comunes a ambos problemas– muestran pues cómo la presencia de más datos de los suficientes pueden, si son pertinentes, modificar la estructura del problema.

Problema 8	Un grifo llena un depósito en 10 horas y un desagüe lo vacía en 15 horas. Estando el depósito vacío y abriendo el grifo con el desagüe abierto, ¿cuánto tiempo tardaría en llenarse el depósito?

Estructura sin el dato superfluo,
pero pertinente



Estructura con el dato superfluo, pero pertinente



En la siguiente lista de problemas hay ejemplos de conjuntos de datos de los tipos descritos. El lector puede entretenerse en examinar qué sucede en cada caso con la estructura del problema.

Problema 9	Un día en que la velocidad del viento es 100 km/h un avión recorre 580 km. Al día siguiente recorre 380 km más que el día anterior, y al tercer día recorre 100 km menos que entre los dos anteriores. ¿Cuántos kilómetros recorrió?
Problema 10	En un triángulo rectángulo isósceles se sabe que un cateto mide 3m y la hipotenusa $3\sqrt{2}$ m. Hallar su área.
Problema 11	Dado un triángulo de lados 3, 6 y 2. Hallar su área y su perímetro.
Problema 12	¿Cuántos planos determinan 5 puntos de los cuales no hay 4 coplanares ni 3 colineales?
Problema 13	Hallar el área de un cuadrilátero cuyos lados miden 12, 12, 20 y 20, y cuya altura es 16.

Problema 14	La suma de tres números pares consecutivos es 57. ¿Cuáles son esos números?
Problema 15	Los lados adyacentes de un paralelogramo miden 20 y 12. Hallar su área.

TIPOS DE DATOS E INSTRUCCIÓN

Desde el punto de vista de la instrucción hay que discutir ahora la conveniencia o no de presentar problemas con unos u otros tipos de datos y qué hacen los alumnos.

Si se sigue la tradición o se tiene detrás una teoría del aprendizaje conductista en la que el niño aprende por imitación de la conducta del profesor a través de una secuencia de tareas jerárquicamente estructuradas, prevalecerá la idea de no exponer a los alumnos al riesgo de caer en el error y ni siquiera cabrá plantearse más enunciados de problemas que aquellos que tengan un conjunto de datos suficiente.

Ahora bien, si uno piensa que una de las tareas de la resolución de problemas consiste precisamente en distinguir entre lo razonable y lo absurdo, lo lógico y lo ilógico, entonces hay razones para plantearse el uso de problemas con todos los tipos de datos.

Kilpatrick & Radatz (1983) lo aconsejan con una finalidad bien clara:

> Los profesores de matemáticas pueden plantear tales problemas insolubles a sus alumnos como medio de investigar cuán profundamente arraigado tienen el punto de vista de que los problemas escolares representan una forma especial de la realidad que no tiene relación con los problemas del mundo real. Si no, los estudiantes pueden llegar a tener la sensación de que en matemáticas todas las tareas tienen solución, incluso problemas como el de *La edad del capitán.*

Krutetskii (1976) encontró que entre las habilidades de los mejores resolutores se encontraban las de formular una pregunta para una historia dada y distinguir problemas con distintos tipos de datos, mientras que los alumnos promedio únicamente percibían la historia como un conjunto de hechos desconectados. Lo que también puede considerarse como un argumento a favor de su inclusión.

Un buen ejemplo del efecto que su uso tiene en los alumnos lo cuentan Menchinskaya & Moro (1975). Unos alumnos tuvieron una reacción tan emotiva al saber que habían cometido un error al sumar 3 y 5 para contestar al problema “Borya tiene 3 manzanas y Vera tiene 5 manzanas. ¿Cuántas manzanas tiene su abuela?”, que a partir de ese momento le prestaron una atención especial a la pregunta del problema.

Por último un estilo de enseñanza basado en el análisis y la reflexión de los errores cometidos por los alumnos –esto es, un método de conflicto cognitivo no ortodoxo– requiere situaciones o problemas que, como éstos, sean útiles para ello.

De lo que hacen los alumnos al resolver problemas con distintos tipos de datos se tiene alguna información. Así, si los datos son abundantes, pero no pertinentes, como es el caso del problema 16, el informe del NCTM (1981) indica que los porcentajes de éxito son el 47% para los niños de 9 años y el 56% para los de 13.

Problema 16	Un conejo come 2 libras de alimento cada semana. Un año tiene 52 semanas. ¿Cuánto comen 5 conejos en una semana?

En un problema en el que se trata de determinar el precio de una comida de tres platos y en el que en la carta se proporciona la información del precio de cuatro platos, únicamente el 39% de los niños de nueve años contestan correctamente, mientras que los demás suman los cuatro precios.

Esto es, la información abundante suele crear problemas, e incluso cuando los problemas se resuelven correctamente no es fácil que los alumnos identifiquen la información extra.

En el mismo informe, se indica que únicamente el 29% de los niños de nueve años son capaces de identificar –en problemas con datos insuficientes– la información que falta para determinar, por ejemplo, el precio de una compra de varios artículos.

Kalmykova (1975) aporta la explicación de Menchiskaya de la fuente de dificultad para encontrar los datos requeridos según la estructura del problema. Para ella, no es difícil saber qué dato falta si la pregunta del problema contiene alguna indicación de éste, y es difícil si en la pregunta no hay indicación del dato que falta y, además, éste no está referido explícitamente en la condición del problema.

Estos hechos y las ideas expuestas acerca de la conveniencia o no de la presencia de este tipo de problemas en el currículo hacen que cada vez más las recomendaciones oficiales indiquen a los profesores la necesidad de aprovechar toda oportunidad en la que puedan situar a los niños desde los primeros años escolares ante problemas de esta clase. Este es, por ejemplo, el caso de Polonia donde desde el primer curso se utilizan problemas con distinto tipo de datos para fomentar el desarrollo del pensamiento crítico.

La información de la que se dispone obtenida mediante tests o situaciones experimentales controlados es poco abundante y no dice gran cosa de lo que ocurre cuando problemas de esta clase están presentes en el currículo de modo regular o se utilizan siguiendo una estrategia concreta de instrucción. Uno de los pocos ejemplos que conocemos de un estudio sobre este asunto es el realizado en Polonia por Puchalska con niños de 7-8 años, que está descrito en Puchalska & Semadeni (1987).

Las preguntas que se plantearon fueron las siguientes: ¿Qué clase de dificultades tienen los niños cuando se les proponen problemas con datos insuficientes, superfluos o contradictorios? ¿Causan estos problemas desconcierto, confusión de conceptos, frustración u otros efectos negativos? ¿Se fijan los niños en el significado de la historia? ¿Cómo reaccionan ante problemas absurdos? ¿Mejoran las respuestas de los niños después de recibir instrucción en estos problemas? ¿Cuál debería ser el papel del niño –guiado por el profesor– en su intento de mejorar el enunciado del problema? ¿Cambian su opinión acerca de la posibilidad de resolver el problema después de la discusión o después de intentar resolverlo?

Los problemas que utilizaron fueron los problemas 17 a 26, que presentamos por grupos.

Problema 17	Gapcio le puso a Dolly el siguiente problema: "Había gorriones en un árbol. Yo vi 5 gorriones y Dick vio 6 gorriones. ¿Cuántos gorriones había en el árbol?" ¿Qué debería decirle Dolly a Gapcio?
Problema 18	Mary invitó a 5 chicas y 3 chicos a su fiesta de cumpleaños. ¿Cuántos años cumplía?
Problema 19	Cada día Olga guarda dinero en su hucha de cerdito y apunta cuánto tiene en ella. El lunes tenía 3 zlotys en su hucha de cerdito. El martes tenía 4 zlotys en ella. El miércoles tenía 8 zlotys en su hucha de cerdito. ¿Cuánto dinero acumuló?
Problema 20	Un granjero tenía 12 cerdos. Fue al mercado y vendió 4 gallinas. ¿Cuántos cerdos le quedan?

Problema 21	Anna tiene 7 años y Bob 10. ¿Cuántos años más vieja es Anna?
Problema 22	En el mercado, un huevo costaba ayer 15 zlotys. Hoy un huevo cuesta 14 zlotys. ¿Cual será el precio de un huevo mañana?

Problema 23	Jonny y Mike están sentados en clase. Hay chicas de pie en la pizarra. Jonny ve 3 chicas y Mike ve 3 chicas. ¿Cuántas chicas hay de pie en la pizarra?

Problema 24	Mike tiene una bicicleta. Joan tiene una bicicleta. Tom tiene una bicicleta. ¿Cuántas bicicletas tienen?

Problema 25	Mike escribió una carta a su tío. Joan escribió una carta a su tío. Tom escribió una carta a su tío. ¿Cuántos tíos recibieron cartas?
Problema 26	Mike va a una escuela. Joan va a una escuela. Tom va a una escuela. ¿A cuántas escuelas van?

Las conclusiones de este estudio pueden ser útiles para marcar pautas de instrucción. Así, Puchalska indica que si los niños dan respuestas insatisfactorias o aterradoras a estos problemas es precisamente porque *no han sido instruidos*, y si reaccionan con sinsentidos y se desconciertan es por la misma razón.

Por tanto, en unas condiciones de instrucción en la que los niños tengan oportunidad de discutir los problemas y expresar sus dudas, este tipo de problemas pueden ser utilizados como medio de desarrollar el hábito de leer un texto significativa y críticamente, y pueden contribuir así a la comprensión de lo que un problema verbal es en todas sus partes.

Es importante subrayar que la influencia de los compañeros es significativa: cuando el trabajo es individual no hay discusión ni posibilidad de expresar las dudas, con lo que estos problemas sirven para muy poco. Por otro lado, las explicaciones lógicas del profesor suelen ser menos convincentes que un estallido de risa. Desde el punto de vista del marco de actuación, éste ha de ser local, porque estos problemas sólo resultan productivos cuando se ponen varios consecutivos y hay una explicación inicial apropiada, mientras que, si se utilizan aisladamente, se induce al desconcierto, al no haberse hecho habitual el uso de problemas con datos insuficientes, superfluos o contradictorios.

MÁS SOBRE PROBLEMAS CON ENUNCIADO INCOMPLETO

En el apartado anterior nos hemos centrado en el estudio del problema según el tipo de datos, aportando alguna información sobre el comportamiento y reacciones de los alumnos e indicando el marco de actuación en el que parecen más útiles. Hay además otras clases de actividades de resolución de problemas que pueden ser eficaces y que no hemos mencionado. Por ejemplo, actividades en las que:

— se pide cuál podría ser la pregunta del problema;

— dada la incógnita, se pregunta por los datos;

— ante una situación, se pide el enunciado de un problema;

— se pide excluir o restituir datos;

— ante un conjunto de datos, se pide elegir los datos que encajan con la pregunta del problema.

— ante un conjunto de datos y preguntas, se pide encajarlos para formular uno o varios problemas.

Los problemas 27 a 36 son ejemplos de estas actividades.

Problema 27	Una niña compró un lápiz y un cuaderno. ¿Cuánto se gastó?
Problema 28	Una niña compró un cuaderno por 50 ptas y un lápiz por 15 ptas. ¿Cuál podría ser la pregunta?
Problema 29	Una niña tenía 50 ptas. Compró un lápiz y un cuaderno. ¿Cuánto gastó?

Problema 30	La familia Soler paga 250 ptas. por cada día de estancia en el camping. Están en él durante 20 días.
Problema 31	— La cuenta, 3920 ptas. Precio de la habitación, 560 ptas. — Cuatro noches. Precio por noche, 680 ptas. — Han sido 4500 ptas. por 7 noches. A partir de estas tres frases dichas antes de abandonar un hotel, puedes plantear tres problemas. ¿Cuáles son?

Problema 32	¿Cuánto dinero le devuelven a Ricardo?
Problema 33	¿Cuántos caramelos recibirá Juan?
Problema 34	¿Cuál ha sido el aumento de precio?
Problema 35	¿Cuántas pesetas corresponden a cada uno?

Problema 36	Llegó a las 7h. ¿Cuántos kilómetros le faltan para llegar a sus destino? El Sr. Cámara salió a las 15h. En el depósito hay 30 litros. El Sr. Soler gasta 10 litros en 90 kilómetros. En 12 minutos en depósito está lleno. En el depósito entran 25 litros de agua por minuto. En el depósito hay todavía 30 litros. ¿Cuántos litros caben en el depósito? ¿Cuál fue la duración del viaje?

Estos problemas pueden utilizarse en el mismo sentido que los problemas anteriores. Pero, en todo caso, parecen imprescindibles al comienzo de cualquier estrategia de instrucción para la resolución de problemas aritméticos de varias operaciones combinadas.

EL MAESTRO PENSANDO Y EN ACCIÓN

PENSANDO

Antes de comenzar la instrucción en una clase de problemas es conveniente que el profesor analice teóricamente las dificultades que pueden presentarse cuando los alumnos tengan que resolverlos. Vamos a usar como ejemplo de ello cómo, en el caso concreto de los problemas de varias operaciones combinadas, con el marco teórico proporcionado por el método de análisis-síntesis, se puede señalar alguna de las tareas que debe contener cualquier estrategia de instrucción.

1.— Para empezar, podemos observar que los organigramas de análisis y de síntesis (ver capítulo 5) no describen un proceso del tipo

problema enunciado→análisis-síntesis→problema resuelto,

sino un proceso del tipo

incógnita o datos→análisis-síntesis→problema resuelto.

Problema 37	Juan compra sobres de cromos que están de oferta. Por cada cuatro que compra le regalan uno. ¿Cuántos le darán si compra 12?

Esto indica que, si consideramos el problema 37, al estar el problema enunciado, el resolutor deberá empezar por aislar “12”, “por cada cuatro regalan uno”, identificar la incógnita “¿Cuántos cromos le darán?”…, antes de seguir adelante con la resolución del problema.

De ahí que lo primero que haya que hacer sea:

> COMENZAR EL PROCESO DE RESOLUCIÓN CON UN ANÁLISIS DEL TEXTO DEL PROBLEMA QUE AÍSLE DATOS E INCÓGNITA DE LAS OTRAS PALABRAS Y RELACIONES QUE LOS CONECTAN.

2.— Para entrar en el análisis de las relaciones entre la incógnita y los datos del problema, éstas pueden determinarse mientras el niño lee el problema. Pero esto sólo suele ocurrir en problemas de estructura simple o familiares para el niño, problemas que en el capítulo 5 llamamos de primer tipo al comentar los estudios de Kalmykova.

Problema 38	Mamá gasta 2000 ptas. 800 ptas en un perfume y el resto en 3 pares de medias. ¿Cuánto vale un par de medias?

Ahora bien, si el problema es del segundo tipo como el problema 38, que ya citamos en ese capítulo, en el que ni los datos ni la incógnita indican claramente en función de qué cantidades de las presentes en el problema puede ser determinada la incógnita, se necesita realizar un análisis más detenido de las relaciones para elegir las incógnitas auxiliares.

De ahí que lo que haya que hacer sea:

> ESTUDIAR Y DESCUBRIR EL CONTENIDO DE DATOS E INCÓGNITA, ASÍ COMO SUS RELACIONES FUNCIONALES ES UNA TAREA IMPRESCINDIBLE PARA ELEGIR CON ACIERTO LAS INCÓGNITAS AUXILIARES O LOS DATOS INTERMEDIOS.

3.— En la situación del problema 39, el contenido de los datos y las relaciones entre ellos permiten comparar el coste de lápices y cuadernos, preguntar por el gasto efectuado, preguntar por la cantidad devuelta, etc.

Problema 39	Juan compra un cuaderno de 50 ptas. y 3 lápices de 20 ptas cada uno. El tendero le devuelve una moneda de 25 ptas. y 3 monedas de 5 ptas.

Sin embargo, lo corriente es estar de acuerdo en que lo que aquí corresponde determinar es la cantidad dada por Juan al tendero como importe de su compra. Esto es, se ha seleccionado la cantidad que parece más interesante determinar en las condiciones descritas. Cuando la situación se presenta como problema, el enunciado se completa con la pregunta o las preguntas “¿Cuánto dinero dio al tendero?”, “¿Qué monedas entregó Juan como pago de su compra?”, con lo que se procede en sentido inverso. De ahí que:

> LA SELECCIÓN DE AQUELLAS RELACIONES QUE PERMITEN DETERMINAR LA INCÓGNITA O ELEGIR LAS INCÓGNITAS AUXILIARES, DE ENTRE LAS POSIBLES QUE PUEDEN PRESENTARSE EN UN CONTEXTO, HACE NECESARIO UN EXAMEN DETENIDO DE LAS CONDICIONES PARTICULARES DEL PROBLEMA.

4.— Aislar datos e incógnita, elegir las incógnitas auxiliares y seleccionar las relaciones entre ésta y éstos son etapas y tareas imprescindibles en la resolución de problemas de varias operaciones combinadas. Sin embargo, no puede olvidarse que el método de análisis-síntesis, que estamos utilizando como herramienta teórica para elaborar la estrategia de instrucción, consiste en un proceso iterativo que deja únicamente de dar vueltas con la reducción final de la incógnita a los datos iniciales o la expresión de ésta en función de ellos.

En la práctica, este proceso supone la ideación y creación de una cadena de relaciones entre incógnita, incógnitas auxiliares y datos, que debe ser construida de modo exacto y preciso siguiendo un orden determinado.

Problema 40	Unos granjeros almacenaron heno para 57 días, pero, como el heno era de mejor calidad de lo que pensaban, ahorraron 113 kg por día, con lo que tuvieron heno para 73 días. ¿Cuántos kilos de heno almacenaron?

Cuando el resolutor se enfrenta con problemas como el problema 40, se enreda con suma facilidad en círculos viciosos. Esto indica que las máximas dificultades del análisis quizá no estén en la elección de las incógnitas auxiliares –"heno total consumido", "días de más", "heno ahorrado en total", "heno consumido por día"…–, sino en la construcción de la cadena deductiva que selecciona estas incógnitas auxiliares en el orden en que pueden ser determinadas de modo progresivo a partir de los datos.

Las dificultades que presenta la construcción de esta cadena son lo que conduce a lo llamamos en el capítulo 5 "síntesis superfluas" –aquí, por ejemplo, el producto 113×73–, que, no siendo útiles para la resolución del problema y aun careciendo de sentido en ocasiones, se determinan con el ánimo de encontrar el eslabón perdido. Problemas como éste no son demasiado frecuentes en la escuela, y se utilizan con la intención de indagar en la fuente de las dificultades de los problemas de varias operaciones combinadas.

Problema 41	El Sr. Garrido compra una lavadora automática por 27500 ptas. Al recibirla paga 9050 ptas. El resto lo quiere abonar en 6 plazos mensuales. Por comprar a plazos debe abonar además 1410 ptas. ¿Cuánto ha de pagar el Sr. Garrido?

En la escuela, los problemas que se utilizan suelen compartir la estructura del problema 41 en el que los signos de puntuación dividen el enunciado del problema en pequeñas oraciones construidas de modo que facilitan el análisis de las relaciones entre las distintas componentes del problema y la construcción de la cadena deductiva.

Esto último se logra gracias a la disposición de las oraciones de modo que el orden en que se sitúan en el texto del problema es un reflejo, lo más fiel posible, del orden en que se disponen en la cadena deductiva las incógnitas auxiliares. Además se procura hacer explícitas, en cada una de las oraciones, las relaciones entre estas incógnitas auxiliares. Un caso extremo de esta estrategia se vio en el capítulo 5 cuando presentamos un diagrama de un problema cuyo enunciado daba el análisis hecho. Otro caso menos extremo lo constituía el problema 2 de ese mismo capítulo, en cuyo enunciado se incluye una pregunta que no da directamente el dato que es preciso utilizar, pero indica la naturaleza de la incógnita auxiliar. Finalmente, los problemas-cadena, comentados también en ese capítulo, pueden usarse asimismo para ayudar a la construcción de la cadena deductiva; si bien, con estos últimos, hay que salvaguardarse de los efectos perniciosos que vimos que pueden producir si son los únicos que se usan.

De ahí que:

> PARA FACILITAR LA CONSTRUCCIÓN DE LA CADENA DEDUCTIVA QUE CONDUCE DE LOS DATOS A LA INCÓGNITA (O DE LA INCÓGNITA A LOS DATOS) SE IMPONE UN ANÁLISIS DEL TEXTO DEL PROBLEMA QUE LO DESCOMPONGA EN PARTES, UN ESTUDIO DETALLADO DE LAS RELACIONES DE DICHAS PARTES ENTRE SÍ Y DE ÉSTAS CON LA PREGUNTA DEL PROBLEMA.

EN ACCIÓN

En teoría, esto es si uno toma en cuenta todo lo que llevamos expuesto en este libro, cuando un profesor pone cualquier problema ha pensado de antemano qué problema o qué secuencia de problemas va a plantear (y aquí es pertinente tener en cuenta lo que se sabe sobre las variables sintácticas, semánticas, de contexto, formato de presentación, etc.); para qué pretende usarlo (véase lo dicho en el apartado *Modos de actuación*); en qué situación (cómo va a organizar la clase); qué rol va a asumir (el de quien hace el problema como modelo que hay que imitar, el de quien está dispuesto a usar las ideas de otros, el análogo a un entrenador deportivo, el de quien muestra que siempre hay más de una forma de hacer las cosas, el de quien no es infalible); cómo va a intervenir (por ejemplo, mediante sugerencias heurísticas y como gestor, teniendo en cuenta que tiene que saber por qué fase va el proceso y disponer de un diagnóstico del los atascos); y cómo va a acabar (proponiendo más problemas según la finalidad perseguida).

Un ejemplo práctico de una forma de actuar que contiene parte de todo esto y que se adecúa a los problemas aritméticos está descrito en Kalmykova (1975). Kalmykova observó el comportamiento de Petrova, una profesora cuyos alumnos tenían muy buen rendimiento, y expuso de forma sistemática los aspectos de la resolución de problemas aritméticos a los que ésta prestaba una atención especial, que son los que siguen:

1.— Lectura del problema.

El trabajo con el problema comienza con la lectura de su enunciado con una entonación intencionada. En este primer paso se da la primera descomposición del texto y el aislamiento de datos e incógnita. Petrova dedicaba mucha atención a enseñar a los niños a leer el texto del problema y les hacía observar:

a) La importancia de cada palabra y cómo ésta podía cambiar el sentido del problema.

b) Pausas en la lectura, y cómo éstas ayudaban a descomponer el problema en partes.

c) La entonación especial en la pregunta del problema.

Para ello, Petrova hacía leer a sus alumnos varias veces el problema de este modo y les pedía que se exigiesen unos a otros este tipo de lectura. Establecía también pequeñas competiciones y les hacía ver después que una mala lectura del problema conllevaba dificultad a la hora de explicar la solución.

2.— Descomposición del texto del problema.

Aunque la primera descomposición se hace en la lectura, el asunto no acaba ahí. Se enseña a identificar o enumerar los datos y la incógnita diciendo “se conoce tal y tal cosa”, o “también se conoce esta otra”, “lo que se desconoce es esto”.

Así, el problema se vuelve a enunciar de forma distinta a la verbalística que no separa el problema en sus partes constituyentes y que puede dar lugar a errores. Esto es, lo que se hace aquí es intentar que los alumnos pongan el problema en sus propias palabras obligándoles a mencionar, al hacerlo, los datos y la incógnita del problema.

Después de un primer período de instrucción en este tipo de descomposición y reformulación, no se insiste más en ello, salvo que se esté ante un problema más difícil en que se realiza un análisis más detallado del estilo descrito en el apartado *Análisis del contenido.*

3.— Diferenciación de conceptos.

Se dedica una atención especial a las palabras-clave, haciendo que éstas se enfaticen ya desde la lectura. Se aclaran sus significados y diferencias con gran detalle y se utilizan, cuando es preciso, ayudas visuales.

Las palabras que expresan relaciones cuantitativas –más que, menos que, tantos como, más joven, más grande, caro, barato…– reciben una atención todavía más minuciosa.

4.— Substanciación.

Petrova enseñaba a sus alumnos y les pedía que señalaran la parte del texto que determina la operación que hay que realizar. Esto ayuda a controlar la elección de la operación en función del texto, y lo hacía tanto con los datos del texto como con los datos intermedios del problema.

5.— Atención a la pregunta del problema.

La solución del problema no consiste en las operaciones que hay que realizar para llegar al resultado numérico ni en éste, sino en la respuesta a la pregunta del problema. Petrova enseñaba a hacerse preguntas como ¿Qué se puede determinar si conocemos tal y tal cosa? o ¿Qué debemos conocer si queremos determinar esto?

Además pedía en ocasiones que en una misma situación una pregunta referente a una operación se formulara de diferentes maneras. Por ejemplo, con la situación “Un niño tiene 20 cuadernos y da la mitad de ellos a su hermana” se pueden formular las preguntas “¿Cuántos cuadernos le quedaron?” o “¿Cuántos cuadernos dio a su hermana?” que corresponden a la misma operación.

6.— Análisis de errores.

Se pide a los alumnos que localicen la parte del texto cuya mala lectura es la fuente del error y que expliquen qué relación han utilizado en lugar de la que realmente está en el texto.

7.— Desarrollo del lenguaje.

Los problemas verbales pueden ser una ocasión para la extensión del vocabulario de los niños como cualquier otro texto propuesto para su lectura, y para requerir precisión en la expresión oral o escrita con ocasión de la presentación de la respuesta a la pregunta del problema o a cualquier otra pregunta que surja en el curso de la resolución.

8.— Soluciones alternativas.

Se considera y evalúa cualquier solución correcta de un problema. Petrova pedía a sus alumnos que realizasen varios planes de solución para el mismo problema y discutía con ellos cuál parecía más racional.

LOS PROBLEMAS ARITMÉTICOS Y LOS CURRÍCULOS DE MATEMÁTICAS

El papel que han desempeñado los problemas en el desarrollo del pensamiento matemático ya lo hemos comentado en el capítulo1, en el que mencionamos en particular la parte que les ha correspondido a los problemas aritméticos.

En la educación matemática, los problemas desempeñan papeles distintos en función de los estilos curriculares, que dependen de los intereses sociales, de las teorías del aprendizaje subyacentes, e incluso de las modas imperantes. En la década de los ochenta los vientos han soplado en favor de la resolución de problemas empujados por declaraciones de principios de asociaciones de profesores e instancias oficiales o paraoficiales. Sin embargo, una integración de los problemas en el currículo que responda a esa tendencia de la década no se ha realizado satisfactoriamente. En efecto, ha habido gran número de investigaciones sobre el proceso de resolución de problemas y la instrucción en resolución de problemas, se han experimentado currículos basados totalmente en la resolución de problemas, algunas de las declaraciones en su favor han tenido impacto social y se han convertido en referencias insoslayables a la hora del diseño curricular, e, incluso, se han puesto en práctica proyectos que tienden a desarrollar destrezas y procedimientos con la finalidad exclusiva de garantizar el éxito en la resolución de problemas. Pues bien, a pesar de todo ello, apenas se ha superado el nivel de las buenas intenciones en lo que atañe al currículo y los problemas, oscilando todos los intentos entre modelos y confusiones[7]. Dicho de otra manera, se saben bastantes cosas sobre cómo actuar en aspectos concretos y particulares, creemos que la resolución de problemas es un lugar privilegiado para la producción de aprendizajes significativos, parece estar claro que las características esenciales de la actividad matemática se manifiestan mientras se resuelven problemas, pero queda aún por debatir, investigar y dilucidar aspectos globales cruciales como qué se debe hacer con los problemas, cómo utilizarlos y cuándo utilizarlos en el currículo.

En nuestro país, con un currículo que tiene ya algunos años de vigencia, los problemas sólo están concebidos como refuerzo y consolidación de conceptos o como “aplicación de los conocimientos matemáticos adquiridos a situaciones de la vida real”. Así, en objetivos del ciclo inicial que parecen referirse a problemas aritméticos puede leerse:

— Realizar particiones a partir de situaciones problemáticas del mundo circundante. (1.4.1)

— Resolver situaciones problemáticas relacionadas con la adición, la substracción y la división[8]. (3.1.4, 3.2.4 y 3.4.4)

— Resolución de situaciones problemáticas utilizando sumas y restas combinadas. (3.2.5)

— Resolver situaciones problemáticas a través del conocimiento de las unidades de tiempo: horas, medias horas, cuartos de hora, semanas y meses. (4.1.5)

En lo que atañe al ciclo medio, en las enseñanzas mínimas se habla en un sitio de “Enunciar y resolver problemas ” y, en otro, de “Enunciar, plantear y resolver problemas en los que intervengan tres[9] operaciones distintas”. Y en el desarrollo de los objetivos por bloques temáticos aparece en cada uno de los bloques y niveles un objetivo cuyo enunciado está construido combinando de varias maneras las frases

— Plantear y resolver problemas de la vida real

— Aplicar los conocimientos del tema a…

— …prácticos, tomados de la vida real...

— …sobre hechos y situaciones de la vida real

[7]O, dicho en inglés, *twixt models and muddles*.
[8]Parece ser que no hay situaciones problemáticas relacionadas con la multiplicación.
[9]Precisamente tres, y distintas.

— …de enunciado propuesto por el profesor o inventado por el niño…

— …que implique la utilización de las propiedades estudiadas.

— …sobre hechos que impliquen la utilización de los distintos tipos de unidades de medida.

Este estilo de presentación de los objetivos, acorde con las finalidades del currículo, le indican al profesor qué problemas tiene que hacer –problemas de aplicación–, y cuándo –después de adquiridos los conocimientos del tema–, pero no le indican nada más.

Otras recomendaciones de carácter curricular más recientes, en las que los objetivos no se presentan agrupados por bloques temáticos, como son las hechas por la inspección británica para toda la escolaridad obligatoria[10], no indican exactamente qué problemas utilizar, ni cuándo utilizarlos, pero les atribuyen finalidades distintas, aunque sólo sea por el mero hecho de que las recomendaciones están organizadas en función de las componentes de la competencia matemática (hechos, destrezas, estructuras conceptuales, estrategias generales y apreciación) y no de temas.

Así, dentro de las estructuras conceptuales, aparecen los objetivos:

— Seleccionar los datos apropiados.

— Usar matemáticas en un contexto.

— Interpretar resultados.

Estos objetivos implican que haya de plantearse problemas de varios tipos y que éstos no pueden limitarse a problemas de aplicación más o menos rutinarios.

Dentro del apartado de estrategias generales, por su parte, aparecen objetivos como:

— Métodos de ensayo y error.

— Simplificar tareas difíciles.

— Buscar un modelo.

— Hacer y comprobar hipótesis.

— Probar y refutar.

La consecución de estos objetivos requiere indudablemente no sólo que se plantean problemas para que sean resueltos, sino que se la resolución se enfoque del modo adecuado.

---

[10]Cf. HSMO (1985)

Los problemas aritméticos, enfocados también de manera adecuada, pueden contribuir de algún modo al desarrollo de las tres primeras de estas estrategias generales.

Volviendo a nuestro país, un estudio sobre lo que da de sí el currículo aún vigente, hecho a partir de los libros de texto mayoritariamente usados para el Ciclo Medio, esto es, a partir del lugar en que los objetivos se interpretan en forma de material utilizable en el sistema escolar, es Cerdán y Puig (1983). En él se examina, entre otras cosas, el potencial heurístico de los problemas que aparecen en los libros de texto. Puede, por tanto, verse también en qué sentido pueden contribuir los problemas al desarrollo de las estrategias generales. En efecto, los datos obtenidos mostraron que las únicas herramientas heurísticas presentes implícitamente en esos problemas aritméticos son *submetas, consideración de un caso* y *ensayo y error,* que pueden ponerse en relación con las estrategias generales *métodos de ensayo y error* y *simplificar tareas difíciles*. *Submetas,* que fue la herramienta heurística más frecuente, puede considerarse equivalente a la elección de incógnitas auxiliares en la práctica del análisis de los problemas aritméticos de varias operaciones combinadas.

Esto es lo que hay hasta ahora; por lo que conocemos de los documentos para la actual reforma de las enseñanzas, el papel que se pretende atribuir a los problemas va más allá del atribuido hasta ahora, ya que en la presentación del diseño curricular base, aparte de los objetivos generales, los bloques temáticos se presentan divididos en hechos, conceptos y principios; procedimientos; actitudes, valores y normas. En el apartado procedimientos es donde aparece el tratamiento que debe darse a los problemas, lo que ya indica de por sí la finalidad que se les atribuye. En particular, para primaria se habla de:

— Utilización de diferentes estrategias para resolver problemas numéricos y operatorios (reducir una situación a otra con números más sencillos, aproximación mediante ensayo y error, considerar un mismo proceso en dos sentidos –hacia adelante y hacia atrás– alternativamente, etc.)

— Explicación oral del proceso seguido en la resolución de problemas numéricos u operatorios.

— Representación matemática de una situación utilizando sucesivamente diferentes lenguajes (verbal, gráfico y numérico) y estableciendo correspondencias entre los mismos.

— Identificación de problemas de la vida cotidiana en los que intervienen las cuatro operaciones, distinguiendo la posible pertinencia y aplicabilidad de cada una de ellas.

Para secundaria entre los objetivos generales aparecen:

— Utilizar procedimientos y mostrar actitudes propias de la actividad matemática (exploración sistemática de alternativas, formulación de conjeturas, comprobación de las conjeturas y resultados, realización de inferencias y deducciones, tenacidad y perseverancia en la búsqueda de soluciones, etc.) en situaciones de resolución de problemas.

— Elaborar estrategias personales para la resolución de problemas cotidianos (interpretación y comprobación de facturas y recibos, tablas salariales, elaboración de presupuestos, toma de decisiones a partir de datos probabilísticos o inciertos, organización de un espacio, etc.) utilizando distintos métodos y recursos y analizando la coherencia de los resultados para mejorarlos si fuera necesario.

Y en los bloques temáticos:

— Resolución de problemas numéricos aplicando las operaciones adecuadas en cada caso.

— Sustitución, en un problema numérico, de los datos originales por otros más sencillos para facilitar la comprensión del mismo.

— Utilización del razonamiento aritmético o hacia atrás para resolver problemas numéricos.

— Formulación oral de problemas numéricos, de los términos en que se plantean y del proceso seguido para resolverlos.

— Utilización de distintos procedimientos (factor de conversión, regla de tres, tantos por algo, manejo de tablas y gráficos) para resolver problemas de proporcionalidad.

Como puede verse, el énfasis se pone en indicar qué procedimientos deben utilizarse para resolver los problemas aritméticos. Se cita algo que puede parecerse al método de análisis y síntesis en primaria –hacia adelante y hacia detrás, alternativamente–, dejando el puro análisis para secundaria –sólo hacia atrás. También se indica que se debe usar métodos de tanteo[11], tablas y representaciones gráficas. Se señala la importancia de los métodos personales. Y se considera necesario que el alumno sea capaz de explicar a los demás el proceso seguido para resolver un problema. Finalmente, aparece, como ya es habitual, el aspecto utilitario de los conocimientos matemáticos.

SOBRE QUÉ TENER EN CUENTA PARA LA INSTRUCCIÓN.

La organización de la instrucción en resolución de problemas aritméticos elementales ha de contemplar como consecuencia de todo lo que hemos expuesto en las páginas precedentes un gran número de aspectos. Una relación de las tareas que convendría plantear en clase ha de contemplar todo aquello que tiene que ver con:

1.— Los problemas:

— Problemas de una etapa:

Aditivos

Multiplicativos

Problemas modelo de aspectos conceptuales de las operaciones aritméticas.

---

[11] Aunque de ellos se dice que sirven para aproximar y no para otras cosas.

— Problemas de más de una etapa:

Híbridos

Iterados

Problemas cadena

Problemas de varias operaciones combinadas.

Problemas que se pueden resolver mediante esquemas.

Problemas en el límite entre la aritmética y el álgebra.

2.— Recursos para las destrezas.

Listas organizadas

Tablas

Notaciones esquemáticas

3.— Representaciones:

Modelos con objetos físicos al comienzo.

Representación con objetos de los enunciados verbales.

Estrategias espontáneas de resolución.

Expresión aritmética correspondiente al enunciado verbal.

Producciones simbólicas de los alumnos-resolutores.

Línea numérica

Árboles

Diagramas cartesianos

Esquemas de puntos

Otras ayudas visuales

4.— Métodos de resolución:

Mediante estrategias de recuento.

Por tanteo.

Por procedimientos no standard.

Mediante procedimientos gráficos.

Mediante síntesis

Mediante análisis

Por análisis medios-fines

Análisis-síntesis

5— Datos:

Problemas con distintas clases de datos.

Problemas en los que hay que formular la pregunta.

Problemas en los que hay que determinar los datos.

Situaciones problemáticas.

6.— Variables sintácticas.

7.— Contextos.

8.— Formato de presentación:

Formulación oral.

Grabado.

Jeroglífico.

Con ayuda de material de cálculo.

Historieta o tebeo.

Datos presentados por tablas o similares (horarios de trenes, precios en la carta de un restaurante, ofertas en el supermercado…)

Además, se ha de tener en cuenta que el resolutor-alumno, mientras resuelve problemas aritméticos, tiene que tomar conciencia de que, cuando resuelve un problema, pasa por momentos diferentes en los que su conducta debe ser de naturaleza distinta: comprender, planificar, ejecutar y revisar.